

# Apuntes sobre Cálculo Diferencial e Integral

## III

Elmer Ortega

7 de septiembre de 2021

### Un pequeño recordatorio sobre vectores

Se conoce a un **vector** como la conexión de  $n$  números reales. Se denota como  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \dots, v_n)$ . Además, el conjunto  $\mathbb{R}^n$  se define como  $\mathbb{R}^n = \{a_1, a_2, a_3 \dots, a_n | a_i \in \mathbb{R}\}$

#### Definición de la suma

Sea  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \dots, v_n)$ ,  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3 \dots, u_n)$ , se define la suma de  $\vec{v} + \vec{u}$  como:

$$\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_i + u_i, \dots, v_n + u_n)$$

#### Definición del producto por un escalar

Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \dots, v_n)$ , se define el producto de  $\lambda * \vec{v}$  como

$$\lambda * \vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_i, \dots, \lambda v_n)$$

Todos los  $\mathbb{R}^n$  con estas definiciones son un **espacio vectorial**.

#### La base canónica en $\mathbb{R}^n$

Se define a la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  como el conjunto de:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0 \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0 \dots, 0), \dots, \vec{e}_n = (0, 0, 0 \dots, 1)$$

En especial, la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  se define como  $\{i = (1, 0), j = (0, 1)\}$  y  $\mathbb{R}^3 = \{i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)\}$  Y, ¿por qué es útil? porque puedes pensar los vectores como:  $(a_1, a_2, a_3 \dots, a_n) = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$  que es un vector como la combinación lineal de la base canónica y es útil a la hora de diferenciar e integrar.

### Definición de norma

Sea el vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ , se define la norma de  $\vec{v}$  como:  
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2}$ , que es igual a la *distancia del punto al origen*.

### Propiedades de la norma

1.  $\|\vec{v}\| \geq 0$
2.  $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
3.  $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$
4. Desigualdad del triángulo:  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ , la igualdad se da  $\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v}$ , con  $\lambda \geq 0$

### Definición de producto punto o producto interno

Para  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , se define el producto punto de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  como:

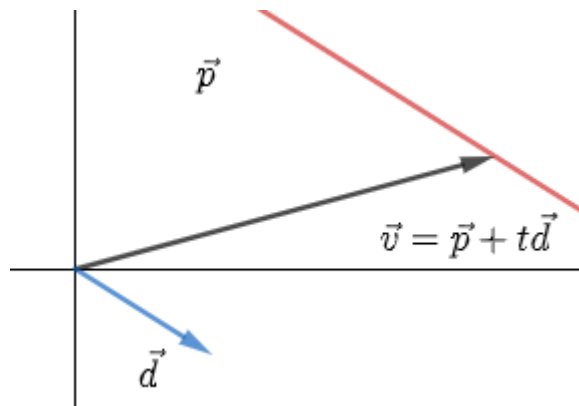
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

### Propiedades del producto punto

1.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
2.  $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3.  $\vec{u} \cot \vec{v} = \vec{v} \cot \vec{u}$
4.  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
6.  $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \|\vec{u}\|$
7.  $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

**Nota:**  $\vec{u} \perp \vec{v}$  (son ortogonales)  $\Leftrightarrow \theta = 90 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

### Representación paramétrica de la recta



En general, dado  $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{d} \neq \vec{0}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

$\vec{v} = \vec{p} + t\vec{d}$  representa una línea recta en  $\mathbb{R}^n$

### Representación de un hiper-plano

En general, en  $\mathbb{R}^n$ , la ecuación del hiper-plano está dada por,

$$(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0, \text{ que es un objeto de dimensión } \mathbb{R}^{n-1}$$

Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^3$ , con  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $\vec{v} = (x, y, z)$ , se tiene que  $n_1x + n_2y + n_3z - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0$ , por lo que, dado una ecuación  $Ax + By + Cz + F = 0$ , el vector  $\vec{d} = (A, B, C)$  es perpendicular a los vectores  $\vec{v}, \vec{p}$

## 1. Funciones y diferenciación

• Se conoce como funciones con valores escalares o campos escalares a las funciones del tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Por ejemplo,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 3x^2 + 5xy + e^y$

• Se conoce como funciones con valores escalares o campos escalares a las funciones del tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Por ejemplo,  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = 3x^2 + 5xy + e^y$

**Definición:** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la **gráfica** de  $f$  es

$$\{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)) : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

**Definición:** Se define a las **curvas de nivel** de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$L_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

**Definición:** Se define a las **superficies de nivel** de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$L_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

\*Notas: La gráfica  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es un objeto que vive en  $\mathbb{R}^4$ . En general, la gráfica  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es un objeto que vive en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Definición:** Se define al **conjunto de nivel** de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$L_c := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = c\}$$

## Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

**Definición:** Dado  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$ , la **bola (abierta)** es el conjunto

$$B_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$$

Se le denota como la bola de radio  $\epsilon$  centrada en  $\vec{x}_0$

**Definición:** Dado un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es **abierto** si

$$\forall \vec{x}_0 \in A, \text{ existe un } \epsilon > 0 \text{ tal que } B_\epsilon(\vec{x}_0) \subseteq A$$

**Proposición:** La bola  $B_\epsilon(\vec{x}_0)$  es abierta.

**Pd.**  $\forall B_\epsilon(\vec{y}_0) \subseteq B_\epsilon(\vec{x}_0)$ . Sea  $\vec{z}_0 \in B_\epsilon(\vec{y}_0)$

$$\begin{aligned} \|\vec{z}_0 - \vec{x}_0\| &= \|\vec{z}_0 + \vec{y}_0 - \vec{y}_0 - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{z}_0 - \vec{y}_0\| + \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| \\ &\Rightarrow \|\vec{z}_0 - \vec{y}_0\| + \|\vec{z}_0 - \vec{x}_0\| < \epsilon - \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| = \epsilon \\ &\Rightarrow \vec{z}_0 \in B_\epsilon(\vec{x}_0) \therefore \text{ la bola } B_\epsilon(\vec{x}_0) \text{ es abierta.} \end{aligned}$$

### Propiedades de los conjuntos abiertos

1. Si  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_n$  es abierto (Aplica para una union finita e infinita).
2. Si  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_n$  es abierto (Solo para una intersección finita).
3.  $\mathbb{R}^n$  es abierto.
4.  $\emptyset$  es abierto.  $\rightarrow$  argumento de vacuidad o vacío.

### Puntos frontera

**Definición:** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Un punto  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  es un **punto frontera** de  $A$  si todas las bolas abiertas centradas en  $\vec{x}_0$  tienen en  $A$  y puntos no en  $A$ .

El conjunto de puntos frontera de  $A$  se llama la **frontera de  $A$** .

**Ejemplos de puntos fronteras:**

Conjunto $A$	frontera de $A$
$A = (-2, 3) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3\}$
$A = [-2, 3) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3\}$
$A = (-2, 3) \cup \{6\} \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3, 6\}$
$A = (-2, 3) \cup [3, 6) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 6\}$
$A = (-2, 3) \cup (3, 6] \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3, 6\}$
$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$	$[0, 1]$
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
$A$ es un finito	El mismo conjunto $A$
$A = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2, 1 + \frac{1}{2}, \dots\right\}$	$A \cup \{1\}$
$A = \mathbb{R}^n$	$\emptyset$
$A = \emptyset$	$\emptyset$

**Definición:** Sea  $B \subseteq \mathbb{R}^n$ . Decimos que  $B$  es un conjunto **cerrado** si  $B^c$  es *abierto*.

**Propiedades de conjuntos cerrados:**

1. Si  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  son conjuntos cerrados en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_n$  es abierto (Solo para una intersección finita).
2. Si  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_n$  es abierto (Aplica para una union finita e infinita).
3.  $\emptyset$  es cerrado.
4.  $\mathbb{R}^n$  es cerrado.

**\*Nota:** y  $\mathbb{R}^n$  son los únicos conjuntos abiertos y cerrados.

**\*Nota:** La frontera de  $A$  y  $A^c$  es el mismo conjunto.

**\*Nota:** Si  $A$  es un conjunto finito de  $\mathbb{R}^n$ , entoces  $A$  es cerrado y no abierto.

**\*Nota:** "Entre 2 números racionales, hay un irracional y hay un racional entre 2 números irracionales".

Conjunto $A$	Características de $A$
$A = \{(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$	Pensando en $y = x^2 \rightarrow A^c$ es abierto $\therefore A$ es cerrado
$A = (1, 1, 1) \subseteq \mathbb{R}^3$	$A$ es cerrado
$A = [2, 5] \subseteq \mathbb{R}$	Como $A^c = (-\infty, 2) \cup (5, \infty)$ es abierto $\therefore A$ es cerrado
$A = [2, 5) \subseteq \mathbb{R}$	$A$ es no abierto y no cerrado
$A = [2, \infty) \subseteq \mathbb{R}$	Como $A^c = (-\infty, 2)$ es abierto, $A$ es cerrado
$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$	$A$ es no abierto, no cerrado
$A = \left\{1 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	$A$ es no abierto, no cerrado

## Límites

**Definición de límite:** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $A$  abierto y sea  $\vec{a} \in A$ . Decimos que

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}, \quad (\vec{b} \in \mathbb{R}^m)$$

Si  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tq si  $\vec{x} \in A$  y  $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \epsilon$ .

Para mostrar que un límite no existe es necesario mostrar dos trayectorias (ecuaciones) tales que el límite sea diferente en ellas.

### Propiedades de los límites:

Sea  $f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $\vec{a} \in A$  o en la frontera de  $A$ .

1. Si  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$  y  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = \vec{M}$   
 $\Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \vec{L} + \vec{M}$
2. Si  $c \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$   
 $\Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} cf(\vec{x}) = c\vec{L}$
3. Si  $m = 1$  (Imagen),  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$  y  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} g(\vec{x}) = \vec{M}$   
 $\Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x})g(\vec{x}) = L * M$
4. Si  $m = 1$  (Imagen),  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L} \neq 0$   
 $\Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{1}{f(\vec{x})} = \frac{1}{L}$
5. Si  $m > 1$  y  $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$  con  $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   
 $\Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_i(\vec{x}) = \vec{L}_i, \forall i = 1, 2, 3, \dots, m$  donde  
 $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3, \dots, L_m)$

## Continuidad

**Definición:** Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $\vec{a} \in A$ . Decimos que  $f$  es *continua* en  $\vec{a}$  si

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$$

### Propiedades de continuidad puntual:

Sea  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y sea  $\vec{a} \in A$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $f$  y  $g$  son *continuas* en  $\vec{a}$

$$\Rightarrow f + g \text{ es continua en } \vec{a}$$

2. Si  $f$  es *continua* en  $\vec{a}$

$$\Rightarrow cf \text{ es continua en } \vec{a}$$

3. Si  $m = 1$  (Imagen),  $f$  y  $g$  son *continuas* en  $\vec{a}$

$$\Rightarrow f \cdot g \text{ es continua en } \vec{a}$$

4. Si  $m = 1$  (Imagen),  $f$  es *continua* en  $\vec{a}$  y  $f(\vec{a}) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} \text{ es continua en } \vec{a}$$

5. Si  $m > 1$  y  $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

$$\Rightarrow f \text{ es continua en } \vec{a} \Leftrightarrow f_i \text{ es continua en } \vec{a}, \forall i = 1, 2, \dots, m$$

**Definición (semi-formal):** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , se dice que  $f$  es un *polinomio* si es una combinación lineal de productos de potencias no negativas de  $x_i \in \mathbb{R}^n$  con  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

**Teorema (semi-formal):** Si  $f(\vec{x})$  es un polinomio entonces  $f$  es *continua* para todo  $\vec{a}$ .

**Teorema (semi-formal):** Si  $f(\vec{x})$  es una *función racional*, es decir, cociente de polinomios entonces  $f$  es *continua en*  $\vec{a}$  si el denominador de  $f(\vec{x}) \neq 0$  en  $\vec{a}$ .



**Composición de funciones**

**Teorema:** Si  $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $f : B \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  y  $f(A) \subseteq B$  y  $f$  es continua en  $\vec{a}$  y  $g$  es continua en  $f(\vec{a}) \implies$

$$g \circ f \text{ es continua en } \vec{a}$$

**Observación** Una función  $f$  es *continua* en un conjunto  $A$  si es continua en cada vector  $\vec{a}$ .

## Derivadas

**Definición:** Se define como *derivada parcial de  $f$  con respecto a  $x$  en  $(a, b)$*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

**Definición:** Se define como *derivada parcial de  $f$  con respecto a  $y$  en  $(a, b)$*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

En general, sea  $f : u \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con  $u$  abierto, se define a la *derivada parcial en dirección de  $x_i$* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, x_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} \end{aligned}$$

**Notación:**

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\vec{x}=\vec{a}}, f_{(x_i)}(\vec{a}), D_{x_i}f(\vec{a})$$

La **ecuación del plano tangente** a la superficie  $z = f(x, y)$  está dada por la ecuación:

$$z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

**Definición:** Sea  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $f$  es **diferenciable** en  $(x_0, y_0) \in U$  si  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$  existen y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

Solamente diremos que **existe** el plano tangente en  $(x_0, y_0)$  si  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$

**Definición:** El **gradiente de  $f$**  es el vector

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

También se denota como  $Df(x_0, y_0)$  o  $(grad f)(x_0, y_0)$

Entonces la definición de **diferenciabilidad** se puede leer como el gradiente existe:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - (f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0))}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$