Apuntes sobre Álgebra Superior II

Elmer Ortega

27 de agosto de 2021

El campo de los complejos

Un conjunto A con las operaciones definidas suma $(+)$ y producto $(\cdot)$

$$\langle A, +, \cdot \rangle$$

se llama **Anillo** si cumple las siguientes 8 propiedades:

1. **La suma cierra** (cerradura) :

$$\forall a, b \in A, a + b \in A$$

2. **El producto cierra** (cerradura) :

$$\forall a, b \in A, a \cdot b \in A$$

3. **Neutro aditivo** :

$$\exists 0 \in A \text{ tal que } \forall a \in A, a + (0) = (0) + a = a$$

4. **Inverso aditivo** :

$$\exists - a \in A \text{ tal que } \forall a \in A, a + (-a) = (-a) + a = 0$$

5. **Comutatividad de la suma** :

$$\forall a, b \in A, a + b = b + a$$

6. **Asociatividad de la suma** :

$$\forall a, b, c \in A, (a + b) + c = a + (b + c)$$

7. **Asociatividad del producto** :

$$\forall a, b, c \in A, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

8. **Distributividad**...
   $\forall a, b, c \in A$,

   - **por la izquierda:** $a \cdot (b + c) = ab + ac$
   - **por la derecha:** $(b + c) \cdot a = ba + ca$

   Si se cumple la siguiente condición, entonces el anillo $\langle A, +, \cdot \rangle$ se llamará "Anillo con 1".

9. **Neutro multiplicativo**

   $$\exists 1, \forall a \in A, 1a = a1 = a$$

   Si se cumple la condición de **producto conmutativo** el anillo $\langle A, +, \cdot \rangle$ se llamará "anillo conmutativo ".

   $$\forall a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a$$

   Ejemplo: $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ es un "anillo conmutativo con 1 ".

   Def. Un campo $\langle K, +, \cdot \rangle$ es un anillo conmutativo con 1 que además cumple:

10. **Existencia del inverso multiplicativo**:

    $$\forall a \in A, a \neq 0, \exists a^{-1} \in A \text{ tal que } a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

    Ejemplo: $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ es un anillo conmutativo con 1 en el que, además, si

    $$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \hat{} \ a \neq 0, \exists \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \hat{} \ \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = 1$$

    entonces $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$ es un campo.

¿Cómo surge los números $\mathbb{C}$omplejos?

Cuando construirmos conjuntos de números lo hacemos para solucionar problemas que nos complican la vida. El primer problema de la humanidad fue contar colecciones de objetos por lo que surgio la noción de los números $\mathbb{N}$aturales $\{1, 2, 3 \dots\}$.

Cuando quisimos resolver $x+4 = 0$ no encontramos un $x \in \mathbb{N}$ que la cumpla, así que surgió la noción de los enteros $\mathbb{Z} = \{\cdots - 2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$.

Ahora, quisimos resolver $2x+3 = 0$ no encontramos un $x \in \mathbb{Z}$ que la cumpla, así que surgió la noción de los racionales $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$.

Después, quisimos resolver $x^2 - = 0$ no encontramos un $x \in \mathbb{Q}$ que la cumpla, así que surgió la noción de los irraciones, aquellos $\mathbb{I} := \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} | x \notin \mathbb{Q}\}$, y números reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Y, por último, surgió la ecuación $x^2 + 1 = 0$, el famoso conjunto de los números $\mathbb{C}$ omplejos.

Definición: Se define el número imaginario como $i = \sqrt{-1}$

Definición: Se define un número $w \in \mathbb{C}$ si cumple que $w = a + bi$ donde $a, b \in \mathbb{R}$

Definición: Sea $w = a + bi \in \mathbb{C}$, se define la función de parte real de w como $Re(w) = a$

Definición: Sea $w = a + bi \in \mathbb{C}$, se define la función de parte imaginaria de w como $Im(w) = b$

Exponentes de i :

$$i^{4k} = 1 \to i^{4k+1} = i \to i^{4k+2} = -1 \to i^{4k+3} = -i$$

Definimos en $\mathbb{C}$:
• **la suma**$+$ como $w = a + bi,\ z = c + di, \Rightarrow w + z = (a + c) + (b + d)i$
• **el producto** como $w = a + bi,\ z = c + di, \Rightarrow$
$w * z = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
• **el neutro aditivo** como $0 = 0 + 0i$
• **el neutro multiplicativo** como $1 = 1 + 0i$
• **el inverso multiplicativo** como:
Sea $w = a + bi \Rightarrow w^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}i$ con a y $b \neq 0$
Corroborando las 10 preposiciones mencionadas antes podemos comprobar que $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ es un **campo**.
***Nota importante:** $\mathbb{C}$ no es un campo ordenada, es decir, no tiene sentido la comparación de $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $z_1 < z_2$

Conjugado de z

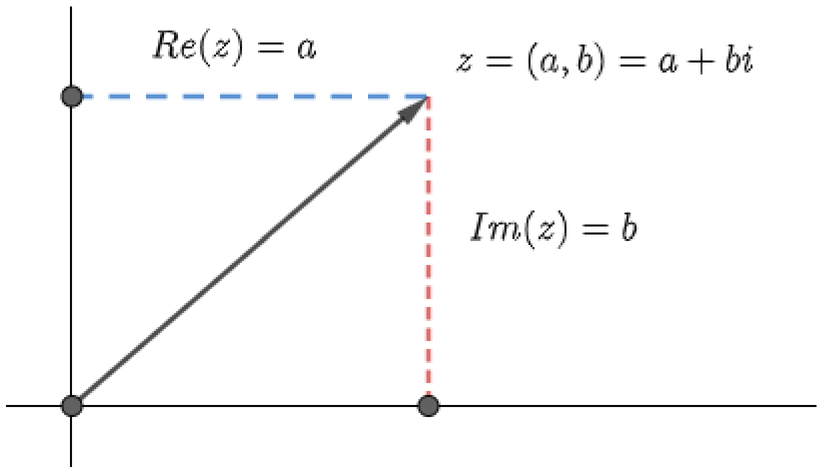
Definición: Para cada $z \in \mathbb{C}, z = a + bi$, entonces se denomina **conjugado de** z a $a - bi$ y se denota $\bar{z}$

Propiedades del conjugado de un complejo:
Sea $z = a + bi, w \in \mathbb{C}$

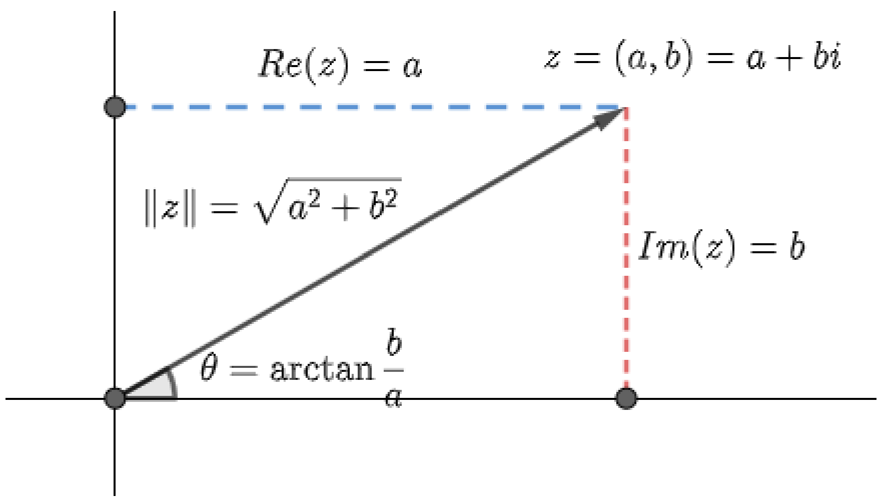
1. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
2. $z \bar{+} w = \bar{z} + \bar{w}$
3. $z \bar{\cdot} w = \bar{z} \cdot \bar{w}$
4. $\bar{\bar{z}} = z$
5. $\dfrac{\bar{z}}{w} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$
6. $Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$
7. $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$

Representación geométrica y polar de los $\mathbb{C}$ omplejos

Representación geométrica en $\mathbb{R}^2$



Representación polar en $\mathbb{R}^2$



Donde $|z|$ se conoce como el módulo de z y θ como el argumento de z.

Conversión de las representaciones

Pasar a forma geométrica a polar

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Pasar a forma polar a geométrica

$$a = |z|\cos\theta,\ b = |z|\sin\theta$$

$$z = a + bi$$

Formula de Euler y De Moivre

Sea $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $z = |z|e^{i\theta} \Rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. En especial, si $\theta = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = -1 + 0 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$, que se conoce como **la formula de euler**.

Para potencias n-ésimas...
Si $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, que se conoce como la **formula de De Moivre**.

Para sacar raíces n-ésimas...
Si $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right), \forall k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$, que se conoce como la **formula de De Moivre**. Notesé que cada complejo z tiene n raíces énesimas.