Apuntes sobre Cálculo Diferencial e Integral III

Elmer Ortega

19 de septiembre de 2021

Un pequeño recordatorio sobre vectores

Se conoce a un **vector** como la conexión de n números reales. Se denota como $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n)$. Además, el conjunto $\mathbb{R}^n$ se define como $\mathbb{R}^n = \{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n | a_i \in \mathbb{R}\}$

Definición de la suma
Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n), \vec{u} = (u_1, u_2, u_3 \ldots, u_n)$, se define la suma de $\vec{v} + \vec{u}$ como:

$$\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_i + u_i, \ldots, v_n + u_n)$$

Definición del producto por un escalar
Sea $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n)$, se define el producto de $\lambda * \vec{v}$ como

$$\lambda * \vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2 +, \ldots, \lambda v_i, \ldots, \lambda v_n)$$

Todos los $\mathbb{R}^n$ con estas definiciones son un **espacio vectorial**.
La base canónica en $\mathbb{R}^n$
Se define a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0 \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, 0 \ldots, 1)$$

En especial, la base canónica de $\mathbb{R}^2$ se define como $\{i = (1,0), j = (0,1)\}$ y $\mathbb{R}^3 = \{i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)\}$ Y, ¿por qué es útil? porque puedes pensar los vectores como: $(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ que es un vector como la combinación lineal de la base canónica y es útil a la hora de diferenciar e integrar.

Definición de norma
Sea el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, se define la norma de $\vec{v}$ como: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2}$, que es igual a la *distancia del punto al origen.*

Propiedades de la norma

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$
2. $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
3. $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$
4. Desigualdad del triángulo: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, la igualdad se da $\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v},$ con $\lambda \geq 0$

Definición de producto punto o producto interno
Para $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, se define el producto punto de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ como:

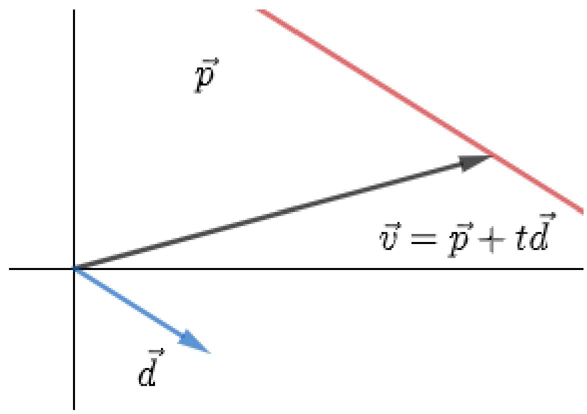
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Propiedades del producto punto

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
2. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $\vec{u} \cot \vec{v} = \vec{v} \cot \vec{u}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
6. $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \|\vec{u}\|$
7. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|}\|\vec{v}\|$, donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

   Nota: $\vec{u} \perp \vec{v}$ (son ortogonales) $\Leftrightarrow \theta = 90 = \dfrac{\pi}{2}^r \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Representación paramétrica de la recta



En general, dado $\vec{p} \in \mathbb{R}^n, \vec{d} \in \mathbb{R}^n, \vec{d} \neq \vec{0}, t \in \mathbb{R}$,

$$\vec{v} = \vec{p} + t\vec{d} \text{ representa una línea recta en } \mathbb{R}^n$$

Representación de un hiper-plano
En general, en $\mathbb{R}^n$, la ecuacion del hiper-plano está dada por,

$$(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0, \text{ que es un objeto de dimensión } \mathbb{R}^{n-1}$$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, con $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3), \vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \vec{v} = (x, y, z)$, se tiene que $n_1x+n_2y+n_3z-(n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3) = 0$, por lo que, dado una ecuacion $Ax+By+Cz+F = 0$, el vector $\vec{d} = (A, B, C)$ es perpendicular a los vectores $\vec{v}, \vec{p}$

1. Funciones y diferenciación

• Se conoce como funciones con valores escalares o campos escalares a las funciones del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 3x^2 + 5xy + e^y$

• Se conoce como funciones con valores escalares o campos escalares a las funciones del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 3x^2 + 5xy + e^y$

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la **gráfica** de f es

$$\{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)) : x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Definición: Se define a las **curvas de nivel** de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$L_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

Definición: Se define a las **superficies de nivel** de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como

$$L_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

*Notas: La gráfica $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un objeto que vive en $\mathbb{R}^4$. En general, la gráfica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un objeto que vive en $\mathbb{R}^{n+1}$.
Definición: Se define al **conjunto de nivel** de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$L_c := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = c\}$$

Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Definición: Dado $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, la **bola (abierta)** es el conjunto

$$B_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$$

Se le denota como la bola de radio ϵ centrada en $\vec{x}_0$

Definición: Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **abierto** si

$$\forall \vec{x}_0 \in A, \text{existe un } \epsilon > 0 \text{ tal que } B_\epsilon(\vec{x}_0) \subseteq A$$

Proposición: La bola $B_\epsilon(\vec{x}_0)$ es abierta.
Pd. $\forall B_\epsilon(\vec{y}_0) \subseteq B_\epsilon(\vec{x}_0)$. Sea $\vec{z}_0 \in B_\epsilon(\vec{y}_0)$

$$\|\vec{z}_0 - \vec{x}_0\| = \|\vec{z}_0 + \vec{y}_0 - \vec{y}_0 - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{z}_0 - \vec{y}_0\| + \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\|$$
$$\Rightarrow \|\vec{z}_0 - \vec{y}_0\| + \|\vec{z}_0 - \vec{x}_0\| < \epsilon - \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| = \epsilon$$
$$\Rightarrow \vec{z}_0 \in B_\epsilon(\vec{x}_0) \therefore \text{ la bola } B_\epsilon(\vec{x}_0) \text{ es abierta.}$$

Propiedades de los conjuntos abiertos

1. Si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots V_n$ es abierto (Aplica para una union finita e infinita).
2. Si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \ldots V_n$ es abierto (Solo para una intersección finita).
3. $\mathbb{R}^n$ es abierto.
4. $\emptyset$ es abierto. $\rightarrow$ argumento de vacuidad o vacío.

Puntos frontera

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}_n$. Un punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de A si todas las bolas abiertas centradas en $\vec{x}_0$ tienen en A y puntos no en A.

El conjunto de puntos frontera de A se llama la **frontera de** A.
Ejemplos de puntos fronteras:

Conjunto A	frontera de A
$A = (-2, 3) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3\}$
$A = [-2, 3) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3\}$
$A = (-2, 3) \cup \{6\} \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3, 6\}$
$A = (-2, 3) \cup [3, 6) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 6\}$
$A = (-2, 3) \cup (3, 6] \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3, 6\}$
$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$	$[0, 1]$
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
A es un finito	El mismo conjunto A
$A = \left\{1 + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2, 1 + \dfrac{1}{2}, \ldots\right\}$	$A \cup \{1\}$
$A = \mathbb{R}^n$	$\emptyset$
$A = \emptyset$	$\emptyset$

Definición: Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que B es un conjunto **cerrado** si B^c es *abierto.*

Propiedades de conjuntos cerrados:

1. Si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots V_n$ es abierto (Solo para una intersección finita).
2. Si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \ldots V_n$ es abierto (Aplica para una union finita e infinita).
3. $\emptyset$ es cerrado.
4. $\mathbb{R}^n$ es cerrado.

***Nota:** y $\mathbb{R}^n$ son los únicos conjuntos abiertos y cerrados.
***Nota:** La frontera de A y A^c es el mismo conjunto.
***Nota:** Si A es un conjunto finito de $\mathbb{R}^n$, entoces A es cerrado y no abierto.
***Nota:**¨Entre 2 números racionales, hay un irracional y hay un racional entre 2 números irracionales¨.

Conjunto A	Características de A
$A = \{(x,y) \subseteq \mathbb{R}^2 : y \leq x^2\}$	Pensando en $y = x^2 \to A^c$ es abierto $\therefore A$ es cerrrado
$A = (1,1,1) \subseteq \mathbb{R}^3$	A es cerrado
$A = [2,5] \subseteq \mathbb{R}$	Como $A^c = (-\infty, 2) \cup (5\,\infty)$ es abierto $\therefore A$ es cerrado
$A = [2,5) \subseteq \mathbb{R}$	A es no abierto y no cerrado
$A = [2,\infty) \subseteq \mathbb{R}$	Como $A^c = (-\infty, 2)$ es abierto, A es cerrado
$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$	A es no abierto, no cerrado
$A = \left\{1 + \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	A es no abierto, no cerrado

Límites

Definición de límite: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto y sea $\vec{a} \in A$
Decimos que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}\ ,\ (\vec{b} \in \mathbb{R}^m)$$

Si $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ tq si $\vec{x} \in A$ y $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \epsilon$.
Para mostrar que un límite no existe es necesario mostrar dos trayectorias (ecuaciones) tales que el limite sea diferente en ellas.

Propiedades de los límites:
Sea $f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\vec{a} \in A$ o en la frontera de A.

1. Si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) = \vec{M}$
   $\Rightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) + g(\vec{x}) = \vec{L} + \vec{M}$

2. Si $c \in \mathbb{R}$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$
   $\Rightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} cf(\vec{x}) = c\vec{L}$

3. Si $m = 1$ (Imagen), $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ y $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) = \vec{M}$
   $\Rightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})g(\vec{x}) = L * M$

4. Si $m = 1$ (Imagen), $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L} \neq 0$
   $\Rightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \dfrac{1}{f(\vec{x})} = \dfrac{1}{L}$

5. Si $m > 1$ y $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$ con $f_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
   $\Rightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f_i(\vec{x}) = \vec{L}_i, \forall i = 1, 2, 3, \ldots, m$ donde $\vec{L} = (L_1, L_2, L_3, \ldots, L_m)$

Continuidad

Definición: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m y sea \vec{a} \in A$. Decimos que f es *continua* en $\vec{a}$ si

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$$

Propiedades de continuidad puntual:
Sea $f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\vec{a} \in A$ y $c \in \mathbb{R}$.

1. Si f y g son *continuas en* $\vec{a}$

$$\Rightarrow f + g \text{ es } \textit{continua en } \vec{a}$$

2. Si f es *continua en* $\vec{a}$

$$\Rightarrow cf \text{ es } \textit{continua en } \vec{a}$$

3. Si $m = 1$ (Imagen), f y g son *continuas en* $\vec{a}$

$$\Rightarrow f \cdot g \text{ es } \textit{continua en } \vec{a}$$

4. Si $m = 1$ (Imagen), f es *continua en* $\vec{a}$ y $f(\vec{a}) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} \text{ es } \textit{continua en } \vec{a}$$

5. Si $m > 1$ y $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$

$$\Rightarrow f \text{ es } \textit{continua en } \vec{a} \Leftrightarrow f_i \text{ es } \textit{continua en } \vec{a} \text{ ,} \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

Definición (semi-formal): Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se dice que f es un *polinomio* si es una combinación lineal de productos de potencias no negativas de $x_i \in \mathbb{R}^n$ con $i = 1, 2, 3 \ldots, n$.

Teorema (semi-formal): Si $f(\vec{x})$ es un polinomio entonces f es *continua* para todo $\vec{a}$.

Teorema (semi-formal): Si $f(\vec{x})$ es una *función racional*, es decir, cociente de polinomios entonces f es *continua en* $\vec{a}$ si el denominador de $f(\vec{x}) \neq 0$ en $\vec{a}$.

Composición de funciones
Teorema: Si $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f : b \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ y $f(A) \subseteq B$ y f es continua en $\vec{a}$ yg es continua en $f(\vec{a}) \Longrightarrow$

$$g \circ f \text{ es } \textit{continua} \text{ en } \vec{a}$$

Observación Una funcion f es *continua* en un conjunto A si es continua en cada vector $\vec{a}$.

Derivadas

Definición: Se define como *derivada parcial de f con respecto a x en* (a,b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \text{lím}_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

Definición: Se define como *derivada parcial de f con respecto a y en* (a,b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) := \text{lím}_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

En general, sea $f : u \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con u abierto, se define a la *derivada parcial en dirección de x_i*:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,a_2,\ldots,a_n) := \text{lím}_{h\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\ldots,x_i+h,\ldots,a_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{h}$$
$$= \text{lím}_{h\to 0}\frac{f(\vec{a}+h\vec{e_i})-f(\vec{a})}{h}$$

Notación:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},\ \frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\vec{x}=\vec{a}},\ f_{(x_i)}(\vec{a}),\ D_{x_i}f(\vec{a})$$

La **ecuación del plano tangente** a la superficie $z=f(x,y)$ está dada por la ecuación:

$$z = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

Definición: Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$. Decimos que f es **diferenciable** en $(x_0,y_0)\in U$ si $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ existen y

$$\text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Solamente diremos que **existe** el plano tangente en (x_0,y_0) si f es diferenciable en (x_0,y_0)

Definición: El **gradiente de** f es el vector

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)$$

También se denota como $Df(x_0, y_0)$ o $(grad\ f)(x_0, y_0)$

Entonces la definición de **diferenciabilidad** se puede leer como el gradiente existe:

$$\text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - (\nabla f(x_0,y_0)) \cdot (x - x_0, y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|} = 0$$

Definición: El gradiente de una función $f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A abierto, es:

$$\nabla f(\vec{x_0}) := \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_n} \right)$$

Definición: Sea $f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Decimos que f es *diferenciable* en un punto $\vec{x_0} \in A$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$ existen $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ y

$$\text{lím}_{(\vec{x})\to(\vec{x_0})} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - (\nabla f(\vec{x_0})) \cdot (\vec{x} - \vec{x_0})}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0$$

Mientras mas cerca este $\vec{x}$ de $\vec{x_0}$ mejor será la aproximación, ya que, el límite indica que la diferencia entre el plano y la gráfica es mejor que la diferencia entre $\vec{x}$ y $\vec{x_0}$. Entonces, solo y solo en este caso decimos que $T(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + (\nabla f(\vec{x_0}))\cdot(\vec{x} - \vec{x_0})$ es el plano tangente de $\vec{x_0}$. Así, aunque las $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x_0})$ existan es solo una razón necesaria más no suficiente.

Definición: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x_0} \in A$ con A abierto. Supongamos que $f(f_1, f_2, \dots, f_m)$. Si $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x_0})$ existe, denotamos

$$Df(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x_0}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x_0}) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x_0}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

A esta matriz se conoce como la **matriz jacobiana de f (en $\vec{x_0}$)** y es de tamaño $m \times n$

Definición: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x_0} \in A$ con A abierto. Decimos que f es *diferenciable en* $\vec{x_0}$ si $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_m}(\vec{x_0})$ existen $\forall i, j$ y

$$\text{lím}_{(\vec{x}) \to (\vec{x_0})} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x_0}) - (Df(\vec{x_0})) \cdot (\vec{x} - \vec{x_0})}{\|\vec{x} - \vec{x_0}\|} = 0$$

Si el $lim \neq 0$ $T(\vec{x_0}) = f(\vec{x_0}) + Df(\vec{x_0}) \cdot (\vec{x} - \vec{x_0})$ no se interpreta como un plano tangente.

Teorema: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x_0} \in A$ con A abierto. Si f es diferenciable en $\vec{x_0}$, entonces

$$f \text{ es continua en } \vec{x_0}$$

Nota: Es posible que las derivadas parciales existan pero la función no sea continua.

Teorema: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\vec{x_0} \in A$ con A abierto. Si f es diferenciable en $\vec{x_0}$, supongamos que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe y es continua en $B_r(\vec{x_0})$, para algun $r > 0$ y $\forall i, j$, entonces f es *diferenciable en* $\vec{x_0}$

Notación: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto, decimos que f es de clase C^1 en A si $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen y son continuas en A.

Trayectorias

Defnción: Una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (usualmente f es continua) es un **trayectoria**. Usualmente, a los compenentes de f las llamamos $X_i(t)$; i,e,

$$f(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$$

donde t se le conoce como parametro y la imagen de f le llamamos la curva. Pensando en la curva de f, tendremos un vector $c'(t_0)$ que es el vector de velocidad instantánea. Y $\|c'(t_0)\|$ es la rapidez de la curva en t_0
Definición: Si $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria y $c'(t_0)$ existe, entonces

$$U(t) = c(t_0) + tc'(t_0)$$

es la ecuacion de la recta con posición inicial $c(t_0)$ y vector de dirección $c'(t_0)$

Proposiciones de derivadas

Proposición: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto y $\vec{x_0} \in A$. Si f es diferenciable en $\vec{x_0}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces cf es diferenciable en $\vec{x_0}$ y

$$D(cf)(\vec{x_0}) = cD(f)(\vec{x_0})$$

Proposición: Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto y $\vec{x_0} \in A$. Si f y g son diferenciable en $\vec{x_0}$ entonces $f + g$ es diferenciable en $\vec{x_0}$ y

$$D(f + g)(\vec{x_0}) = Df(\vec{x_0}) + Dg(\vec{x_0})$$

Proposición: Además, si $m = 1$, $f \circ g$ es diferenciable en $\vec{x_0}$, y

$$D(f \cdot g)(\vec{x_0}) = f(\vec{x_0})Dg(\vec{x_0}) + g(\vec{x_0})Df(\vec{x_0})$$

Proposición: Sean $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con A abierto y $\vec{x_0} \in A$. Si f y $g \neq 0$ son diferenciable en $\vec{x_0}$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es diferenciable en $\vec{x_0}$ y

$$D(\frac{f}{g})(\vec{x_0}) = \frac{g(\vec{x_0})Df(\vec{x_0}) - f(\vec{x_0})Dg(\vec{x_0})}{(g\vec{x_0})^2}$$

Teorema (Regla de la cadena): Sean $g :\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f :\subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Si g es diferenciable en $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ y f es diferenciable en $g(\vec{x_0})$ y entonces $f \circ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $\vec{x_0}$ y

$$D(f \circ g)(\vec{x_0}) = Df(g(\vec{x_0}))Dg(\vec{x_0})$$