Apuntes sobre Cálculo Diferencial e Integral III

Elmer Ortega

19 de agosto de 2021

Un pequeño recordatorio sobre vectores

Se conoce a un **vector** como la conexión de n números reales. Se denota como $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n)$. Además, el conjunto $\mathbb{R}^n$ se define como $\mathbb{R}^n = \{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n | a_i \in \mathbb{R}\}$

Definición de la suma
Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n), \vec{u} = (u_1, u_2, u_3 \ldots, u_n)$, se define la suma de $\vec{v} + \vec{u}$ como:

$$\vec{v} + \vec{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_i + u_i, \ldots, v_n + u_n)$$

Definición del producto por un escalar
Sea $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} = (v_1, v_2, v_3 \ldots, v_n)$, se define el producto de $\lambda * \vec{v}$ como

$$\lambda * \vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2 +, \ldots, \lambda v_i, \ldots, \lambda v_n)$$

Todos los $\mathbb{R}^n$ con estas definiciones son un **espacio vectorial**.
La base canónica en $\mathbb{R}^n$
Se define a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0 \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, 0 \ldots, 1)$$

En especial, la base canónica de $\mathbb{R}^2$ se define como $\{i = (1, 0), j = (0, 1)\}$ y $\mathbb{R}^3 = \{i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)\}$ Y, ¿por qué es útil? porque puedes pensar los vectores como: $(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ que es un vector como la combinación lineal de la base canónica y es útil a la hora de diferenciar e integrar.

Definición de norma
Sea el vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, se define la norma de $\vec{v}$ como: $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2}$, que es igual a la *distancia del punto al origen.*

Propiedades de la norma

1. $\|\vec{v}\| \geq 0$
2. $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
3. $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$
4. Desigualdad del triángulo: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, la igualdad se da $\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda\vec{v},$ con $\lambda \geq 0$

Definición de producto punto o producto interno
Para $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, se define el producto punto de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ como:

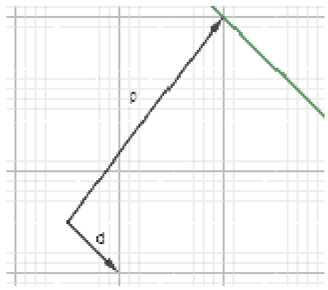
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$$

Propiedades del producto punto

1. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
2. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $\vec{u} \cot \vec{v} = \vec{v} \cot \vec{u}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
6. $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \|\vec{u}\|$
7. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|}\|\vec{v}\|$, donde θ es el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$

   Nota: $\vec{u} \perp \vec{v}$ (son ortogonales) $\Leftrightarrow \theta = 90 = \dfrac{\pi}{2}^r \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Representación paramétrica de la recta



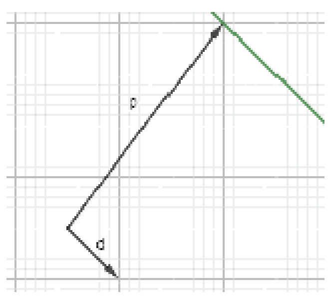
En general, dado $\vec{p} \in \mathbb{R}^n, \vec{d} \in \mathbb{R}^n, \vec{d} \neq \vec{0}, t \in \mathbb{R}$,

$$\vec{v} = \vec{p} + t\vec{d} \text{ representa una línea recta en } \mathbb{R}^n$$

Representación de un hiper-plano
En general, en $\mathbb{R}^n$, la ecuacion del hiper-plano está dada por,

$$(\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0, \text{ que es un objeto de dimensión } \mathbb{R}^{n-1}$$

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, con $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3), \vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \vec{v} = (x, y, z)$, se tiene que $n_1x + n_2y + n_3z - (n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3) = 0$, por lo que, dado una ecuacion $Ax + By + Cz + F = 0$, el vector $\vec{d} = (A, B, C)$ es perpendicular a los vectores $\vec{v}, \vec{p}$



Dado, $\vec{n}$ perpendicular a la recta $\vec{p} + t\vec{d}$, con $\vec{d} = \vec{v} - \vec{p} \Rightarrow (\vec{v} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

1. Funciones y diferenciación

• Se conoce como funciones con valores escalares o campos escalares a las funciones del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 3x^2 + 5xy + e^y$

• Se conoce como funciones con valores escalares o campos escalares a las funciones del tipo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = 3x^2 + 5xy + e^y$

Definición: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la **gráfica** de f es

$$\{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)) : x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Definición: Se define a las **curvas de nivel** de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$L_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

Definición: Se define a las **superficies de nivel** de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como

$$L_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$$

*Notas: La gráfica $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un objeto que vive en $\mathbb{R}^4$. En general, la gráfica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un objeto que vive en $\mathbb{R}^{n+1}$.
Definición: Se define al **conjunto de nivel** de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$L_c := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = c\}$$

Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

Definición: Dado $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, la **bola (abierta)** es el conjunto

$$B_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$$

Se le denota como la bola de radio ϵ centrada en $\vec{x}_0$

Definición: Dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es **abierto** si

$$\forall \vec{x}_0 \in A, \text{existe un } \epsilon > 0 \text{ tal que } B_\epsilon(\vec{x}_0) \subseteq A$$

Proposición: La bola $B_\epsilon(\vec{x}_0)$ es abierta.
Pd. $\forall B_\epsilon(\vec{y}_0) \subseteq B_\epsilon(\vec{x}_0)$. Sea $\vec{z}_0 \in B_\epsilon(\vec{y}_0)$

$$\|\vec{z}_0 - \vec{x}_0\| = \|\vec{z}_0 + \vec{y}_0 - \vec{y}_0 - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{z}_0 - \vec{y}_0\| + \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\|$$
$$\Rightarrow \|\vec{z}_0 - \vec{y}_0\| + \|\vec{z}_0 - \vec{x}_0\| < \epsilon - \|\vec{y}_0 - \vec{x}_0\| = \epsilon$$
$$\Rightarrow \vec{z}_0 \in B_\epsilon(\vec{x}_0) \therefore \text{ la bola } B_\epsilon(\vec{x}_0) \text{ es abierta.}$$

Propiedades de los conjuntos abiertos

1. Si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots V_n$ es abierto (Aplica para una union finita e infinita).
2. Si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \ldots V_n$ es abierto (Solo para una intersección finita).
3. $\mathbb{R}^n$ es abierto.
4. $\emptyset$ es abierto. $\rightarrow$ argumento de vacuidad o vacío.

Puntos frontera

Definición: Sea $A \in \mathbb{R}_n$. Un punto $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de A si todas las bolas abiertas centradas en $\vec{x}_0$ tienen en A y puntos no en A.

El conjunto de puntos frontera de A se llama la **frontera de** A.
Ejemplos de puntos fronteras:

Conjunto A	frontera de A
$A = (-2, 3) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3\}$
$A = [-2, 3) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3\}$
$A = (-2, 3) \cup \{6\} \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3, 6\}$
$A = (-2, 3) \cup [3, 6) \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 6\}$
$A = (-2, 3) \cup (3, 6] \subseteq \mathbb{R}$	$\{-2, 3, 6\}$
$A = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \geq x \geq 1\}$	$[0, 1]$
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
A es un finito	El mismo conjunto A
$A = \left\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{2, 1 + \frac{1}{2}, \ldots\right\}$	$A \cup \{1\}$
$A = \mathbb{R}^n$	$\emptyset$
$A = \emptyset$	$\emptyset$

Definición: Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que B es cerrado si B^c es abierto.
Propiedades de conjuntos cerrados:

1. Si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \ldots V_n$ es abierto (Solo para una intersección finita).

2. Si $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \ldots V_n$ es abierto (Aplica para una union finita e infinita).

3. $\emptyset$ es cerrado.

4. $\mathbb{R}^n$ es cerrado.

***Nota:** y $\mathbb{R}^n$ son los únicos conjuntos abiertos y cerrados.
***Nota:** La frontera de A y A^c es el mismo conjunto.
***Nota:** Si A es un conjunto finito de $\mathbb{R}^n$, entoces A es cerrado y no abierto.
***Nota:**¨Entre 2 números racionales, hay un irracional y hay un racional entre 2 números irracionales¨.

Límites

Definición formal de límite: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto y sea $\vec{a} \in A$
Decimos que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b} \ , \ (\vec{b} \in \mathbb{R}^m)$$

Si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq si $\vec{x} \in A$ y $\|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \epsilon$