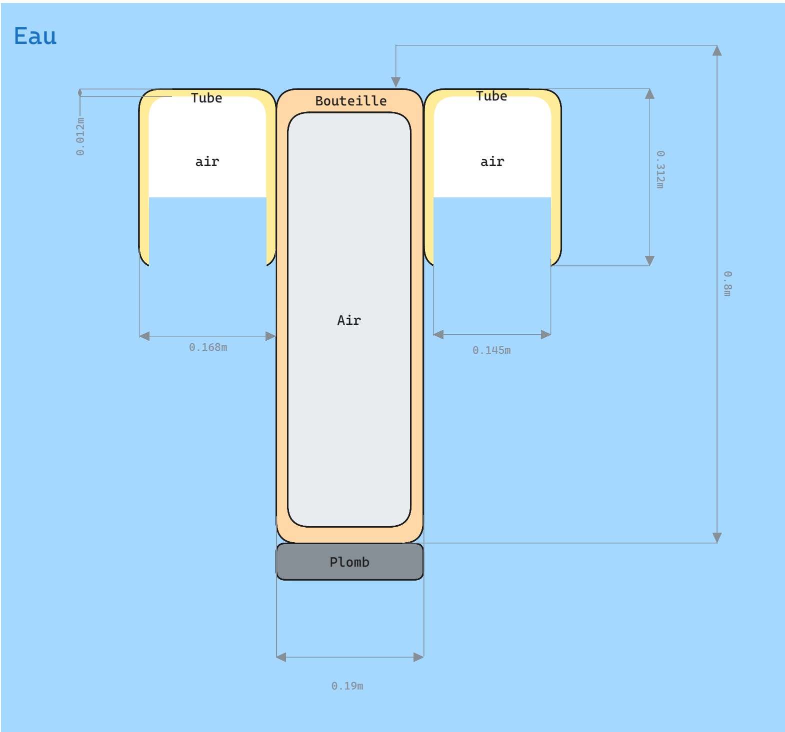
MODÉLISATION - PARTIE 1 DU PROJET



PARTIE MODÉLISATION

On ne peut pas recharger la bonbonne centrale. 2 types de valves : de la bonbonne centrale vers les tubes et des tubes vers l'extérieur.

VOLUME D'AIR - QUESTION 1

1. Bonbonne

- Volume

$$V = 10 \text{ litres} = 10^{-3} m^3$$

- Pression

$$P_b = 232 \text{ bars} = 232 \text{ x } 10^5 Pa$$

- Température

$$T = 20°C = 293,15\text{K}$$

On suppose que l'air est un gaz parfait

$$n_b = \frac{PV}{RT} = 95,22 \text{ mol}$$

2. Tube

- Pression

$$P_{tubes} = 101300 Pa$$

- Volume

$$V_\int = \left(\frac{d_{int}}{2}\right)^2 \pi * (h - bouchon) = 0,00495 \text{ m}^3$$

$$n_{tubes} = \frac{PV}{RT} = 0,21 \text{ mol}$$

VOLUME DES ÉQUIPEMENTS

BONBONNE

D'après l'énoncé,

$$\begin{cases} h = \ 0.8 \text{ mètres} \\ diamètre = \ 0.19 \text{ mètres} \end{cases}$$

- Volume

$$V = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi h = \ 0.0227 \text{ m}^3$$

- Tube en PVC

D'après l'énoncé,

$$\begin{cases} h = \ 0.312 \text{ mètres} \\ diamètre = \ 0.168 \text{ mètres} \end{cases}$$

$$V_{ext} = \left(\frac{d_{ext}}{2}\right)^2 \pi h = \ 0.00692 \text{ m}^3$$

MASSE DES ÉQUIPEMENTS

3. Bonbonne + Équipements

- Bonbonne à vide: $m_b = \ 10$ kg
- équipements: $m_e = \ 2.5$ kg
- air: $n_{bonbonne} * 29 = \ 2.76$ kg

4. Tube En PVC

VOLUME DU TUBE

- Volume du tube en PVC

$$V_{PVC} = V_{ext} - V_{int} = 0.00196 \text{ m}^3$$

- Poids du Tube

$$m_{PVC} = \rho_{PVC} V_{PVC} = 2.47 \text{ kg}$$

- Masse d'air

$$air : n_{tube} * 29 = 6 \text{ x } 10^{-3} kg$$

- Volume du bouchon

$$V_{bouchon} = \left(\frac{0.145}{2}\right)^2 * 0.012\pi = 1.98 \text{ x } 10^{-4} \text{ m}^3$$

- Masse du bouchon

$$m_{bouchon} = \rho_{PVC} V_{bouchon} = 0.27 \text{ kg}$$

MASSE TOTALE

4.1. Masses Statiques

- Bonbonne + équipements : $m_e = 12.5 \text{ kg}$
- Tubes en PVC: $m_{tubes} = 7.41 \text{ kg}$
- Bouchon: $m_{bouchons} = 0.81 \text{ kg}$

4.2. Masse Variables

- Masse air bonbonne : $m_{air,bonbonne} = 2.76 \text{ kg}$
- Masse air PVC : $m_{air,PVC} = 6 \text{ x } 10^{-3} kg$

$M_t = 23.48 \text{ kg}$

5. Poids

$$||P|| = 230,4N$$

6. Poussée D'Archimède

$$||\Pi|| = \rho_{eau} * V_{bonbonne} * g + 3 * V_{ext} * \rho_{eau} * g = 431.64N$$

7. Calcul De A Masse En Plomb

- Volume de plomb

$$V_{\text{disque}} = \left(\frac{0.19}{2}\right)^2 \pi h_{\text{disque}} = 0.02833\ h_{\text{disque}}$$

- masse du plomb

$$m_{plomb} = \rho_{plomb} V_{\text{disque}} = 321.80\ h_{\text{disque}}$$

J'obtiens donc l'équation suivante

$$||P|| + m_{plomb} g = ||\Pi|| + \rho_{eau} * V_{plomb} g$$
$$\Leftrightarrow h_{\text{disque}} = \frac{||\Pi|| - ||P||}{321.80g - 0.02833\rho_{eau} g}$$

J'obtiens finalement $h_{\text{disque}} = 7cm.$

8. 1**Ère Équation

- Deuxième principe de Newton

$$M_t z = -M_t g + \rho_{eau} V_{immergée} g \Leftrightarrow z = g\left(\frac{\rho_{eau} V_{immergée}}{M_t} - 1\right)$$

- Masse totale

$$M_t = m_{statique} + m_{variable}(t) \Leftrightarrow m_{statique} + (n_{bonbonne} + n_{tubes}) M_{air}$$

- Volume immergée

$$V_{immergé} = V_{statique} + V_{variable}(z)$$

avec
$V_{statique} = 3V_{tubes} + V_{bonbonne} + V_{plomb}$

$$V_{variables} = V_{tubes} = \frac{n_{tubes}RT}{P_{tubes}} \approx \frac{n_{tubes}RT}{P_{hydro}} = \frac{n_{tubes}RT}{P_0 + \rho_{eau}g_0 z}$$

Par la statique des fluides, on obtient, l'équation suivante

$$P_{tube} = P_{hydro}(z + h)$$

Or d'après la loi des gaz parfaits.

$$P_{tube} = \frac{n_{tube} * R * T}{A(h - e_{bouchon})} \Leftrightarrow h = \frac{n_{tube} * R * T}{AP_{tube}} + e_{bouchon}$$

$$P_{tubes} = P_0 + \rho_{eau}g_0(z + h) = P_0 + \rho_{eau}g_0(z + \frac{n_{tube} * R * T}{AP_{tubes}} + e_{bouchon})$$

Ce qui donne

$$P_{tube}^2 - P_{tube}(P_0 + \rho_{eau}g_0 z + \rho_{eau}g_0 e_{bouchon^2}) - \frac{\rho_{eau}g_0 n_{tube}RT}{A} = 0$$

DISCRIMINANT

$$\Delta = (P_0 + \rho_{eau}g_0 z + \rho_{eau}g e_b)^2 + 4\frac{\rho_{eau}g_0 n_{tube}RT}{A}$$

La seule solution possible pour que la pression soit toujours positive est la suivante:

$$P_{tubes} = \frac{P_0 + \rho_{eau} g z + \rho_{eau} g e_b + \sqrt{(P_0 + \rho_{eau} g z + \rho_{eau} g_0 e_b)^2 + 4 \frac{\rho_{eau} g_0 n_{tube}}{A}}}{2}$$

8.3. Entrées Commandables

Si je considère les entrées commandables suivantes,

$$u_1 = \begin{cases} 1 \text{ la valve qui évacue de la bonbonne vers les tubes en PVC est ou} \\ 0 \text{ la valve est fermé} \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 1 \text{ la valve qui évacue des tubes en PVC vers l'extérieur est ouvert} \\ 0 \text{ la valve est fermé} \end{cases}$$

8.3.1. Modélisation De La Variation

$n_1(t)$: nombre de moles évacués par seconde de la bonbonne vers les tubes en PVC
$n_2(t)$: nombre de moles évacué par seconde des tubes en PVC vers l'extérieur
On fait alors les bilans de matière entre t et $t + dt$ en moles dans la bonbonne:

$$n_b(t + dt) = n_b(t) - n_1(t) u_1 dt$$

Par développement limité au premier ordre,

$$\frac{dn_b}{dt} = -u_1 n_1(t)$$

Or d'après les équations que l'on retrouve dans l'énoncé on obtient l'équation suivante:

$$\frac{dn_b}{dt} = -0.0002\sqrt{P_b - P_{tubes}} u_1$$

On fait alors les bilans de matière entre t et $t + dt$ en moles dans les tubes en PVC:

$$n_{tube}(t + dt) = n_{tube}(t) + n_1(t)u_1 dt - n_2(t)u_2 dt$$

Par développement limité au premier ordre,

$$\frac{dn_{tube}}{dt} = 0.0002\sqrt{P_b - P_{tubes}}u_1(t) - 0.0002\sqrt{P_{tubes} - P_{hydro}}u_2(t)$$

8.4. Modèle D'états

On définit les états suivants

$$x = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ n_B \\ n_{tubes} \end{bmatrix}$$

et les équations différentielles suivantes

$$\ddot{z} = g\left(\frac{\rho_{eau}V_{immergée}}{M_t} - 1\right) = g\left(\frac{\rho_{eau}(V_{statique} + \frac{n_{tubes}RT}{P_0 + \rho_{eau}g_0 z})}{m_{statique} + (n_{bonbonne} + n_{tubes})M_{air}} - 1\right.$$

$$P_{tubes} = \frac{P_0 + \rho_{eau}gz + \rho_{eau}ge_b + \sqrt{(P_0 + \rho_{eau}gz + \rho_{eau}g_0 e_b)^2 + 4\frac{\rho_{eau}g_0 n_{tube}}{A}}}{2}$$

$$\dot{n}_b = -0.0002\sqrt{\frac{n_B RT}{V_B} - P_{tubes}u_1}$$

Et

$$\dot{n}_{tube} = 0.0002\sqrt{\frac{n_B RT}{V_B} - P_{tubes}u_1(t)} - 0.0002\sqrt{P_{tubes} - \frac{n_{tubes}RT}{P_0 + \rho_{eau}g_0 z}}u_2$$