

Éloi Blouin

✓ Travail 1

Remise

- Votre notebook (.ipynb) ou un document au format PDF contenant vos démarches, réponses clairement identifiées et vos scripts (Python, Matlab ou autre).
- Sur la boîte de dépôt dans MonPortail
- Au plus tard le mercredi 17 septembre 2025 à 12h30

Équipe

- Ce travail est *individuel*

Pondération :

- GEL-4203 : Ce travail vaut pour 5% de la note finale
- GEL-7041 : Ce travail vaut pour 5% de la note finale

✓ Consignes pour répondre aux questions

- Utilisez des cellules de Markdown pour fournir des explications écrites et des équations mathématiques.
 - Vous pouvez faire une équation \LaTeX sur une ligne: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
 - Vous pouvez faire une équation \LaTeX centrée:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$
 - Vous pouvez imbriquer des listes:
 - Niveau 2
 - Niveau 3
- Utilisez des cellules de code pour effectuer vos calculs numériques. Prenez soin de bien commenter votre code, de choisir des noms de variables explicites et de "print()" vos réponses.

- N'hésitez pas à encapsuler vos calculs répétés dans des fonctions. À plusieurs endroits, il vous sera suggéré de créer des fonctions spécifiques. Ce n'est pas obligatoire mais fortement conseillé.
- Seules les librairies suivantes sont permises. Parmi celles-ci figure les fonctions de résolution de guide d'onde 1D.
- **Indiquez les unités des réponses.**
- **Identifiez correctement vos figures (axes, titre, etc.)**
- **Donnez les démarches complètes aux solutions.**

Show code

```
"""
Librairies permises
N'utilisez que les librairies Python suivantes
"""

%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.constants as cte
#from GEL4203_utils import guide_1d_analytique
```

✓ Question 1 - Ondes planes (35%)

✓ (A) (5 points) Quelle est la largeur de la bande O (1260 nm à 1360 nm) en fréquence?

Pour passer de longueur d'onde à fréquence, on utilise la relation suivante.

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

```
λ_1 = 1260*10**(-9)
λ_2 = 1360E-9
print(cte.c)
v_1 = cte.c/λ_1
v_2 = cte.c/λ_2

Δv = v_1 - v_2

print(f"$v_1$= {v_1:.0f} Hz = {v_1/cte.tera:.2f} THz")
print(f"$v_2$ = {v_2:.0f} Hz = {v_2/cte.tera:.2f} THz")
print(f"$Δv$ = {Δv:.0f} Hz = {Δv/cte.tera:.2f} THz")
```

```
299792458.0
$v_1$= 237930522222222 Hz = 237.93 THz
v_2 = 220435630882353 Hz = 220.44 THz
Δv = 17494891339869 Hz = 17.49 THz
```

Double-click (or enter) to edit

(B) (5 points) Soit le champ électrique complexe d'une onde plane $\tilde{E} = \tilde{E}_0 \exp(j(\omega t - kz + \phi_0))$. À partir de l'équation d'onde de Maxwell, démontrez que la vitesse de phase est donnée par :

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}}.$$

Les 4 équations de Maxwell sont

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ici, le courant est la densité de charge est nulle alors $\vec{J} = 0$ et $\rho = 0$.

Commençons en prenant la deuxième équation et en appliquant un rotationnel supplémentaire.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (0 + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Avec les propriétés vectorielles de la divergence et du rotationnel, on simplifie

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = 0 - \nabla^2 \vec{E}$$

ce qui donne

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Maintenant, revenons à l'équation pour la vitesse de phase qui est définie comme :

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

Ce qui provient de l'équation d'onde générale suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \\ -k^2 \tilde{E}_0 e^{j(\omega t - kz + \phi_0)} &= \frac{-\omega^2}{v_p^2} \tilde{E}_0 e^{j(\omega t - kz + \phi_0)} \\ k^2 &= \frac{1}{v^2} \omega^2 \\ v_p^2 &= \frac{\omega^2}{k^2} \\ v_p &= \frac{\omega}{k}\end{aligned}$$

En correspondant les deux équations, on réalise que la vitesse de l'onde est relié à la permittivité électrique $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ et à la perméabilité magnétique $\mu = \mu_0 \mu$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{v_p^2} &= \mu \epsilon = \mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r = \frac{\omega}{k}\end{aligned}$$

Avec la perméabilité magnétique $\epsilon_r = 1$ car le milieu est non magnétique.

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}}$$

Start coding or [generate](#) with AI.

(C) (5 points) Quelle est la vitesse de phase d'une onde ($\lambda = 1310$ nm) si elle se propage dans l'air? Quelle est sa vitesse de phase si elle se propage dans une fibre optique ($n = 1.44$)?

La vitesse de phase s'écrit aussi en fonction de la vitesse de la lumière et de l'indice de réfraction n du milieu.

$$v_p = \frac{c}{n}$$

```
λ = 1310E-9
print(cte.c)

print("v_p_air =", cte.c/1, "[m/s]")
print("v_p_n=144 =", cte.c/1.44, "[m/s]")
```

```
299792458.0
v_p_air = 299792458.0 [m/s]
v_p_n=144 = 208189206.94444445 [m/s]
```

✓ (E) (5 points) Démontrez que:

$$\alpha[dB/m] = 4.34\alpha[1/m].$$

où α correspond au coefficient d'absorption.

Le coefficient d'absorption est un taux de décroissant de l'amplitude selon une exponentielle décroissante après un mètre de distance parcourue. Le taux de décroissance linéaire serait α_{lin} dans la formule

$$P(L) = P_0 e^{-\alpha_{lin} L}$$

Ensuite, on peut passer de linéaire à logarithmique à base 10 avec la formule du coefficient de perte en dB qui est :

$$\alpha_{log_{10}} = -\frac{1}{L} 10 \log_{10} \left(\frac{P(L)}{P_0} \right) = -10 \log_{10} \left(\frac{P_0 e^{-\alpha_{lin} L}}{P_0} \right) = -10 \frac{1}{\ln(10)} \ln(e^{-\alpha_{lin} L}) = \frac{-10}{L} \cdot -\alpha_{lin} L \cdot \frac{1}{\ln(10)} \cdot \ln(e^1) = \alpha_{lin} 10 \cdot 0.43429 = 4.3429 \alpha_{lin}$$

ce qui donne bien

$$\alpha[dB/m] = 4.34\alpha[1/m]$$

```
fact_conv_att_dB_per_m_to_1_per_m = 10*np.log10(np.exp(1))
print(fact_conv_att_dB_per_m_to_1_per_m)
```

```
4.342944819032518
```

✓ (F) (5 points) Démontrez que:

$$\alpha[1/m] = \frac{4\pi Im(n)}{\lambda}$$

où $Im(n)$ est la partie imaginaire de l'indice de réfraction d'un milieu homogène.

La propagation d'une onde dans un milieu homogène est

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - \tilde{k}z)}$$

où

$$\tilde{k} = k_0 \tilde{n} = k_0 \left(Re(\tilde{n}) + Im(\tilde{n}) \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left(Re(\tilde{n}) + Im(\tilde{n}) \right)$$

ce qui donne

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{\frac{-2\pi Im(\tilde{n})z}{\lambda_0}} e^{i\left(\omega t - \frac{2\pi Re(n)}{\lambda_0} z\right)}$$

On peut voir que l'amplitude du champ électrique diminue selon

$$|E(z,t)| = E_0 e^{\frac{-2\pi \cdot Im(\tilde{n})z}{\lambda_0}}$$

Le coefficient d'atténuation est la diminution de la puissance selon la distance

$$\vec{P}(z,t) = |E(z,t)|^2 = E_0^2 e^{\frac{-4\pi \cdot Im(\tilde{n})z}{\lambda_0}} = E_0^2 e^{-\alpha \cdot z}$$

ce qui nous donne bien

$$\alpha[1/m] = \frac{4\pi Im(\tilde{n})}{\lambda_0}$$

Start coding or [generate](#) with AI.

✓ (G) (5 points) Un laser émettant des photons à un taux de 1.51×10^{16} par seconde à une longueur d'onde de 600 nm se propage dans un guide d'onde avec des pertes (α) de 2 dB/cm. Tracez la puissance du laser en fonction de la distance parcourue. Quelle est la puissance mesurée après 1 cm de propagation? Donnez votre réponse en dBm et en mW.

On commence par transformer le nombre de photons par seconde en puissance, sachant que l'énergie de chaque photon est de

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Ensuite, la fonction d'atténuation est une exponentielle décroissante

```

def mw_to_dbm(P_mW):
    """Convert optical power from milliwatts to dBm."""
    P_dBm = 10 * np.log10(P_mW)
    return P_dBm

def dBm_to_mW(P_dBm):
    """Convert power from dBm to mW"""
    return 10**(P_dBm/10)

def fonction_attenuation_dB(P_0,  $\alpha$ , L):
    """
    P_0 in dBm
     $\alpha$  and L unit need to match
     $\alpha$  [dB/cm] and L [cm]
    """
    P = P_0 -  $\alpha$ *L
    return P

def fonction_attenuation_mW(P_0,  $\alpha$ , L):
    """
    P_0 in mW
     $\alpha$  and L unit need to match
     $\alpha$  [1/cm] and L [cm]
    """
    P = P_0*np.e**(- $\alpha$ *L)
    return P

```

```

 $\lambda$  = 600E-9 #[m]
n_phot_1s = 151E16
E_1phot = cte.h*cte.c/ $\lambda$ 
P_0_W = n_phot_1s*E_1phot
 $\alpha$  = 2 #[dB/cm]
D = 1 #[cm]

print("E_1phot =", E_1phot, "[J]")
print("Nombre de photons/s =", n_phot_1s)
print("P_0 =", P_0_W, "[J/s = W]")

D = np.linspace(0, 15, 1000)
P_0_dBm = mw_to_dbm(P_0_W*1000)
P_dBm = fonction_attenuation_dB(P_0_dBm,  $\alpha$ , D)
P_mW = dBm_to_mW(P_dBm)

plt.plot(D, P_mW)
plt.title(f"Atténuation de la puissance optique selon la distance avec  $\alpha$ ={ $\alpha$ } dB/cm ")
plt.ylabel("Puissance optique [mW]")
plt.xlabel("Distance propagation [cm]")
plt.show()

plt.plot(D, P_dBm)
plt.ylabel("Puissance optique [dBm]")
plt.xlabel("Distance propagation [cm]")

```

```
plt.show()
```

```
print("Puissance à 1cm =", fonction_attenuation_dB(P_0_dBm,  $\alpha$ , 1), "[dBm]")
```

```
print("Puissance à 1cm =", dBm_to_mW(fonction_attenuation_dB(P_0_dBm,  $\alpha$ , 1)), "[mW]")
```

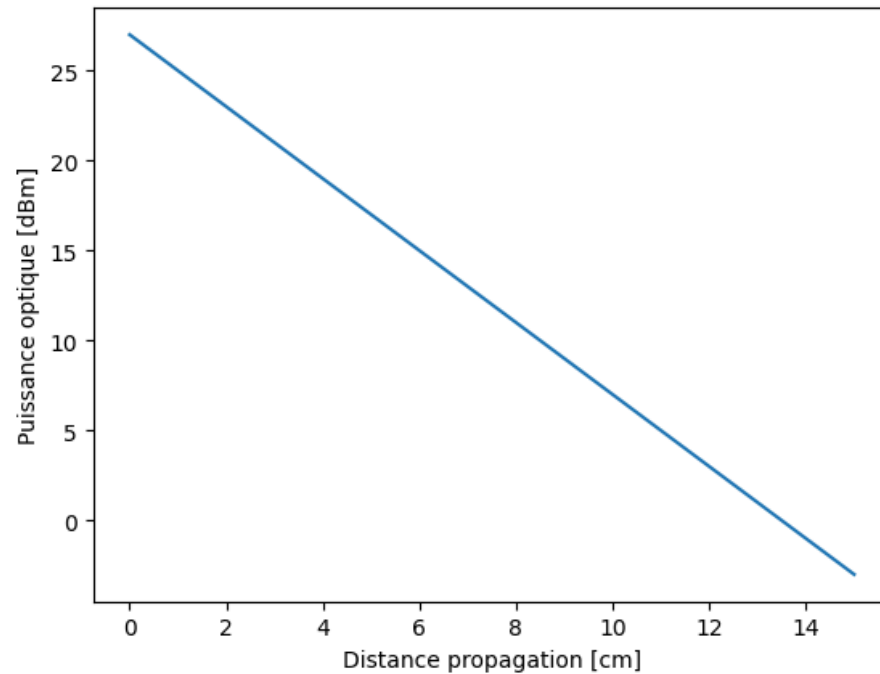
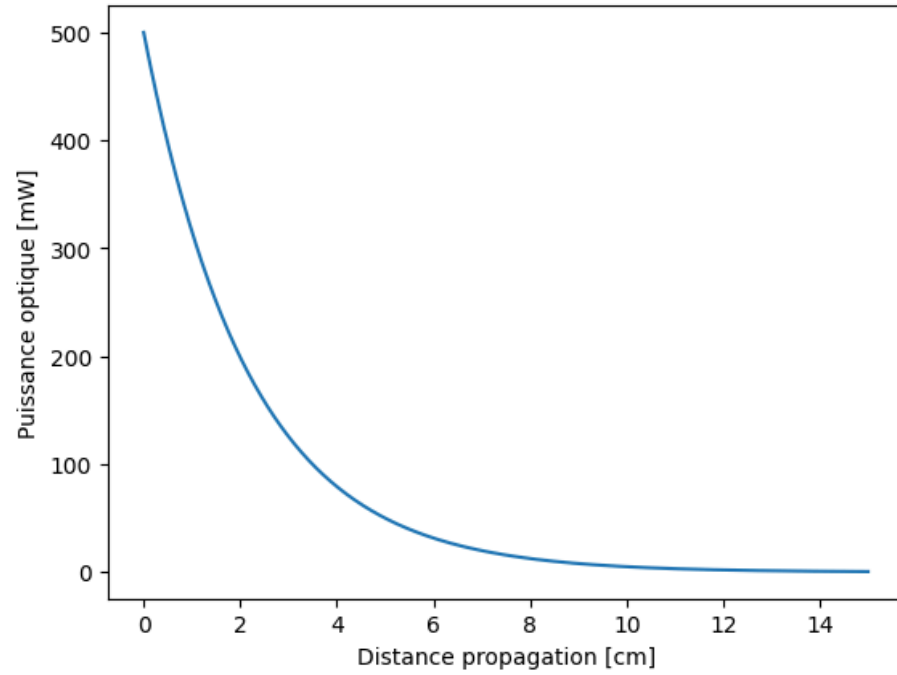
```
print("Puissance à 1cm =", fonction_attenuation_mW(dBm_to_mW(P_0_dBm),  $\alpha$ /fact_conv_att_dB_per_m_to_1_per_m, 1), "[mW]")
```

$E_{\text{1phot}} = 3.3107430952482144 \times 10^{-19} \text{ [J]}$

Nombre de photons/s = 1.51×10^{18}

$P_0 = 0.4999222073824804 \text{ [J/s = W]}$

Atténuation de la puissance optique selon la distance avec $\alpha=2 \text{ dB/cm}$



Puissance à 1cm = 24.98902429269998 [dBm]

Puissance à 1cm = 315.42958841672623 [mW]

Puissance à 1cm = 315.42958841672635 [mW]

✓ Question 2 - Interface en diélectriques et condition modale (30%)

✓ (A) (6 points) Une onde se propageant dans un milieu 1 arrive à incidence normale sur l'interface avec un milieu 2. Calculez la réflectivité et la transmittance et démontrez que la puissance est conservée si $\epsilon_1 = 4.0$ et $\epsilon_2 = 1.0$.

Pour une onde avec une certaine polarisation TE, \perp ou TM, \parallel , les coefficients de réflexion et de transmission sont

$$\begin{aligned}r_{TE} &= \frac{E'_{10}}{E_{10}} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \\r_{TM} &= \frac{E'_{10}}{E_{10}} = \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \\t_{TE} &= \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \\t_{TM} &= \frac{E_{20}}{E_{10}} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}\end{aligned}$$

À incidence normale, le coefficient de réflexion se simplifie à

$$\begin{aligned}r &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \\t &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2}\end{aligned}$$

Et pour passer de coefficient de réflexion à réflectivité :

$$\begin{aligned}R &= |r|^2 \\T &= \frac{n_2}{n_1} |t|^2\end{aligned}$$

De plus, on peut trouver les indices de réfraction avec la permittivité électrique du milieu $\epsilon_1 = 4$ et $\epsilon_2 = 1$ sachant que

$$\begin{aligned}v_p &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \\c &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \\n &= \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} \\\Downarrow \\n_1 &= \sqrt{4} = 2 \quad n_2 = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

Ainsi, les coefficients de réflectivité et les coefficients de transmission sont

$$\begin{aligned}r &= \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3} \\R &= \left| \frac{1}{3} \right|^2 = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Pour la réflectivité

$$t = \frac{2 \cdot 2}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$
$$T = \frac{1}{2} \left| \frac{4}{3} \right|^2 = \frac{1}{2} \frac{16}{9} = \frac{8}{9}$$

Ce qui respecte bien la loi de conservation de la puissance

$$R + T = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$$

Start coding or [generate](#) with AI.

(B) (6 points) Une onde est incidente ($\theta_i = 25^\circ$) sur un empilement de 5 couches diélectriques dont les permittivités sont [1.5, 2.0, 3.0, 2.0, 1.5]. Quel sera l'angle à la sortie de l'empilement ?

Si l'onde revient dans le même milieu $n_6 = 1$ que l'onde incidente dans $n_0 = 1$, alors l'angle à la sortie sera le même.

Par contre, on peut vérifier l'onde n'aura pas de réflexion totale interne à l'une des interfaces.

$$\theta_C = \arcsin\left(\frac{n_i}{n_t}\right) \quad n_i > n_t$$

On rappelle la loi de Snell-Descartes:

$$n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$$

```
from math import nan
def angle_snell(theta_i, n_i, n_t):
    """
    Angle input is in degree
    """
    theta_i_rad = np.deg2rad(theta_i)
    theta_t_rad = np.arcsin(n_i/n_t*np.sin(theta_i_rad))
    return float(np.rad2deg(theta_t_rad))

def angle_critique(n_i, n_t):
    """
    Return critic angle in degree
    """
    if n_i < n_t:
        # Comme l'indice transmis est plus grand que l'indice incident, il n'existe pas d'angle
        return np.inf
    theta_c_rad = np.arcsin(n_t/n_i)
    return np.rad2deg(theta_c_rad)
```

```
epsilon_r = [1, 1.5, 2.0, 3.0, 2.0, 1.5, 1]
n = np.sqrt(epsilon_r)
```

```
theta = [0,0,0,0,0,0,0] # Initialisation de l'angle dans chaque millieu
```

```
θ[0] = 20.0 # \degree l'angle d'incidence
```

```
# Calcul de l'angle dans chaque milieu
for i in range(len(θ)-1):
    θ[i+1] = angle_snell(θ[i],n[i],n[i+1])

print("θ° = ", θ)
```

```
# Calcul de l'angle critique de réflexion total interne à chaque interface
θ_c = np.zeros(len(θ)-1)
θ_c[0] = angle_critique(n[0], n[1])

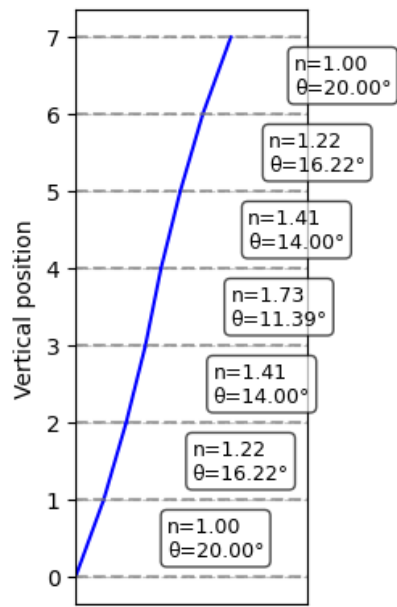
for i in range(len(θ)-1):
    θ_c[i] = angle_critique(n[i],n[i+1])

print("θ_c°=", θ_c)
```

```
for i in range(len(θ_c)):
    # Itérer sur tous les angles et regarder si l'angle d'incidence est plus grand que l'angle
    # print(θ[i], " >?", θ_c[i])
    if θ[i] > θ_c[i]:
        print(f"L'angle dans le milieu {i} est de {θ[i]}° et est plus grand que {θ_c[i]}° ce qui résulte en une réflexion totale interne.")
```

```
θ° = [20.0, 16.215941397841586, 13.995445358891416, 11.388782791007355, 13.995445358891418, 16.215941397841586, 20.000000000000004]
θ_c°= [          inf          inf          inf 54.73561032 60.          54.73561032]
```

[Show code](#)



(C) (6 points) Pour une onde incidente d'un milieu 1 sur un milieu 2 avec $n_1 = 3.481$, $n_2 = 1.484$ et $\theta_i = 80^\circ$, trouvez la profondeur à laquelle l'amplitude du champ électrique du mode TE atteint sa valeur $1/e$ si $\lambda_0 = 1550$ nm.

Ici, il s'agit d'un problème d'onde évanescente.

Comme $n_1 > n_2$, calculons l'angle critique

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1.484}{3.481}\right) = 25.23^\circ$$

Ce qui confirme qu'il y aurait bien une réflexion totale interne.

Selon la formule dans les notes de cours, le vecteur d'onde transmis dans la direction perpendiculaire à la surface sera :

$$k_{tx} = i\alpha_{tx} = i\sqrt{k_1^2 \sin^2(\theta_i) - k_2^2}$$

Pour que le champ électrique transmis soit :

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_t e^{ik_{tx}\vec{r}} = \vec{E}_t e^{-\alpha_{tx}\vec{r}}$$

Ainsi, la norme du champ électrique est proportionnelle à une exponentielle décroissante avec un facteur

$$\alpha_{tx} = \sqrt{k_1^2 \sin^2(\theta_i) - k_2^2}$$

où

$$k_1 = \frac{n_1 2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi \cdot 3.481}{1550 \times 10^{-9}} = 1.4111 \times 10^7 [1/m]$$

$$k_2 = \frac{n_2 2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi \cdot 1.484}{1550 \times 10^{-9}} = 6.0156 \times 10^6 [1/m]$$

Ce qui donne

$$\alpha_{tx} = \sqrt{(1.4111 \times 10^7)^2 \sin^2(80^\circ) - (6.0156 \times 10^6)^2} = 1.2527 \times 10^7 [1/m]$$

La distance à laquelle l'amplitude $|E|$ devient $\frac{1}{e} E_0 = 0.3678 E_0$ est alors.

$$\frac{1}{e} E_0 = E_0 e^{-\alpha_{tx} x}$$

$$-1 = -\alpha_{tx} x$$

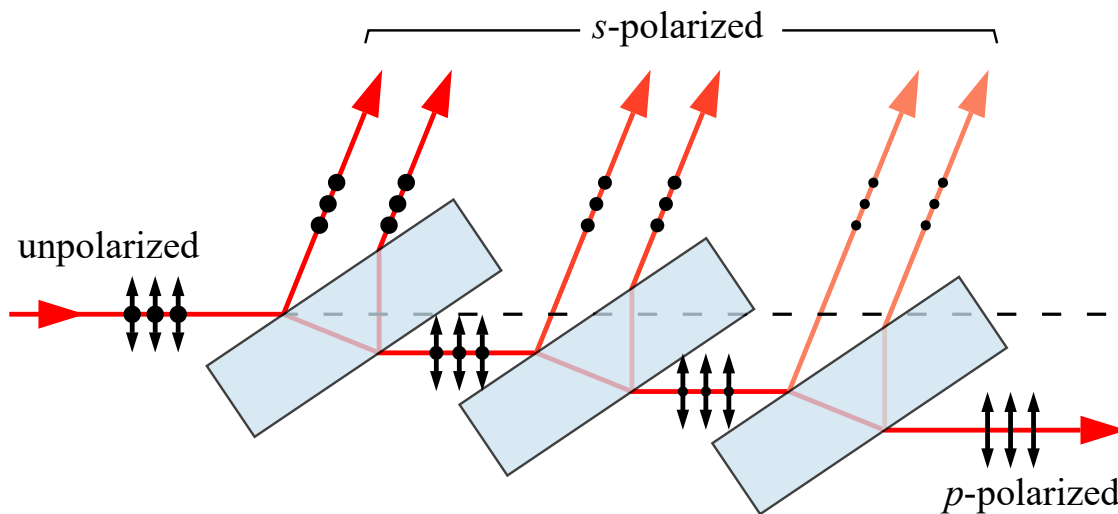
$$x = 1/\alpha_{tx} = 7.9828 \times 10^{-8} [m] = 79.84 [nm]$$

```
n_1 = 3.481
n_2 = 1.484
theta_i = 80
lambda_0 = 1550E-9 #m

theta_c = angle_critique(n_1, n_2)
print("theta_c° =", theta_c)

theta_c° = 25.233881285450078
```

Un polariseur permet de séparer la polarisation-s (\perp) et la polarisation-p (\parallel) d'un faisceau incident. À l'angle de Brewster, la réflectivité de la polarisation-p est nulle et seule la polarisation-s est réfléchie.



On vous demande de concevoir un polariseur basé sur le concept d'angle de Brewster. Pour ce faire, vous disposez d'un nombre illimité de lames de silice (SiO_2). Considérez que $n_{\text{SiO}_2} = 1.44$ et que la lumière incidente se propage dans l'air $n_{\text{air}} = 1.0$. Assumez que la propagation de la lumière dans la silice n'induit pas de pertes optiques.

- ✓ (D) (6 points) À quel angle (θ_B) la lumière doit-elle être incidente sur votre polariseur?

On calcule l'angle de Brewster avec la formule suivante.

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arctan\left(\frac{1.44}{1}\right) = 55.22^\circ$$

```
theta_B = np.rad2deg(np.arctan(1.44/1))
print("theta_B° = ", theta_B)
```

```
theta_B° = 55.22216863363612
```

- ✓ (E) (6 points) Tracez la réflectance (R) pour la polarisation-s (\perp , TE) en fonction du nombre de lames utilisées.

Suggestion: écrivez d'abord une fonction qui calcule la transmission à travers une lame en Pol-S

Nous avons deux différents changements d'interface entre l'air $n_1 = 1$ et la silice $n_2 = 1.44$.

Nous assumons que l'angle d'incidence sera choisi comme étant l'angle de Brewster

$$\theta_i = \theta_B = 55.22^\circ$$

Cela résulte à un angle dans le verre de

$$n_i \sin(\theta_i) = n_t \sin(\theta_t)$$

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{n_i}{n_t} \sin(\theta_i)\right)$$

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{1}{1.44} \sin(55.22)\right) = 34.78^\circ$$

La formule de la réflectance à une interface est

$$R_{\perp} = |r_{\perp}|^2 = \left| \frac{n_i \cos(\theta_i) - n_t \cos(\theta_t)}{n_i \cos(\theta_i) + n_t \cos(\theta_t)} \right|^2$$

$$R_{\perp,1 \rightarrow 2} = \left| \frac{1 \cos(55.22^\circ) - 1.44 \cos(34.78^\circ)}{1 \cos(55.22^\circ) + 1.44 \cos(34.78^\circ)} \right|^2 = 0.1220$$

Il y aura aussi une partie réfléchiée à l'interface $2 \rightarrow 1$

$$R_{\perp,2 \rightarrow 1} = \left| \frac{1.44 \cos(34.78^\circ) - 1 \cos(55.22^\circ)}{1.44 \cos(34.78^\circ) + 1 \cos(55.22^\circ)} \right|^2 = 0.1220$$

On pourrait considérer une infinité de réflexions à l'intérieur, mais allons approximer qu'il y a seulement une réflexion à l'intérieur de la lame de verre (comme sur le schéma plus haut).

Ainsi, la partie de puissance qui est réfléchiée et transmise après une lame est de

$$R_{1 \text{ lame}} = R_{\perp,1 \rightarrow 2} + R_{\perp,2 \rightarrow 1} = 0.1220 + 0.1220 = 0.2440$$

$$T_{1 \text{ lame}} = 1 - R_{1 \text{ lame}} = 0.756$$

On peut ainsi tracer la puissance optique transmise et réfléchiée en fonction du nombre de lames.

$$T_{n \text{ lame}} = T_{1 \text{ lame}}^n$$

$$R_{n \text{ lame}} = 1 - T_{n \text{ lame}} = 1 - (1 - R_{1 \text{ lame}})^n$$

```

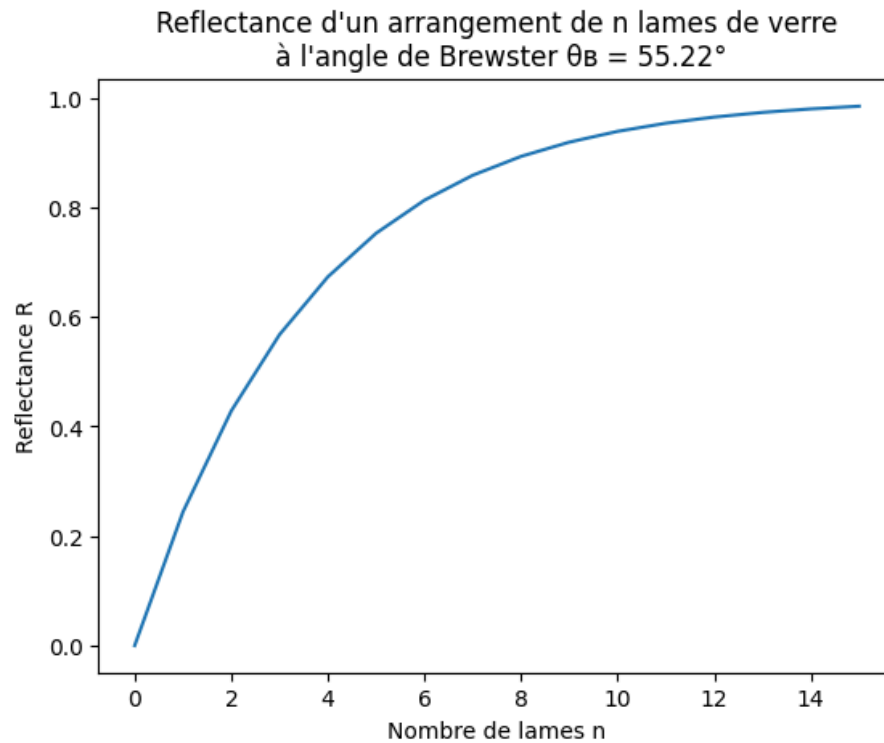
R_1_lame = 0.2440

nombre_lame = 15
R_n_lame = []
for i in range(nombre_lame+1):
    R_n_lame.insert(i,1-(1-R_1_lame)**i)

plt.plot(range(nombre_lame+1), R_n_lame)
plt.title(f"Reflectance d'un arrangement de n lames de verre\n à l'angle de Brewster  $\theta_B = \{\theta_B:.2f\}^\circ$ ")
plt.xlabel("Nombre de lames n")
plt.ylabel("Reflectance R")

```

Text(0, 0.5, 'Reflectance R')



Question 3 - Dispersion et propagation d'une impulsion optique (15%)

(A) (5 points) Démontrez que le temps de propagation (e.g. le délai de groupe T_g) d'une impulsion optique dans un milieu homogène de longueur L est donné par:

$$T_g = L \left(\frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega} \right) = L \left(\frac{n}{c} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

La dispersion chromatique est induite par la variation de l'indice de réfraction pour chaque longueur d'onde que compose une impulsion de lumière. Théoriquement, si un pulse était monochromatique, il se propagerait avec la même vitesse de phase v ainsi le temps de propagation d'une onde monochromatique serait.

$$T = \frac{L}{v_g} \left[\frac{m}{m/s} = s \right]$$

Rappelons la définition de la vitesse de groupe qui est la dérivée du nombre d'onde $k = \frac{n(\omega)\omega}{c}$ par rapport à la fréquence angulaire ω .

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \left[\frac{\partial k}{\partial \omega} \right]^{-1}$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{n(\omega)\omega}{c} \right) = \frac{1}{c} \left(n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right)$$

On peut ensuite changer toutes les fréquences angulaires ω en longueur d'onde avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ ainsi que la règle des dérivées en chaîne.

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{\lambda}{\omega}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega} = \frac{dn}{d\lambda} \cdot \frac{-\lambda}{\omega}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left(n + \frac{2\pi c}{\lambda} \frac{dn}{d\lambda} \cdot \frac{-\lambda}{\omega} \right)$$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n(\lambda)}{c} - \frac{1}{c} \frac{2\pi c}{\omega} \frac{dn}{d\lambda}$$

avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \rightarrow \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda$

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n(\lambda)}{c} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda}$$

Pour finalement nous donner le temps de groupe

$$T_g = \frac{L}{v_g} = L \left(\frac{n(\lambda)}{c} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

Start coding or [generate](#) with AI.

Considérez la propagation d'une impulsion optique dans un guide d'onde de lithium niobate sur une distance de 100 cm. L'indice de réfraction est donné par la formule de dispersion suivante:

$$n^2 - 1 = \frac{2.6734\lambda^2}{\lambda^2 - 0.01764} + \frac{1.2290\lambda^2}{\lambda^2 - 0.05914} + \frac{12.614\lambda^2}{\lambda^2 - 474.60}.$$

✓ (B) (2.5 points) Tracez la vitesse de groupe en fonction de la longueur d'onde.

Nous avons l'équation de Sellmeier

$$n = \sqrt{\frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3} + 1}$$

avec les constantes pour le LiNbO₃ à 25°C selon [référence](#).

$$B_1 = 2.6734$$

$$B_2 = 1.2290$$

$$B_3 = 12.614$$

$$C_1 = 0.01764 [\mu m^2]$$

$$C_2 = 0.05914 [\mu m^2]$$

$$C_3 = 474.60 [\mu m^2]$$

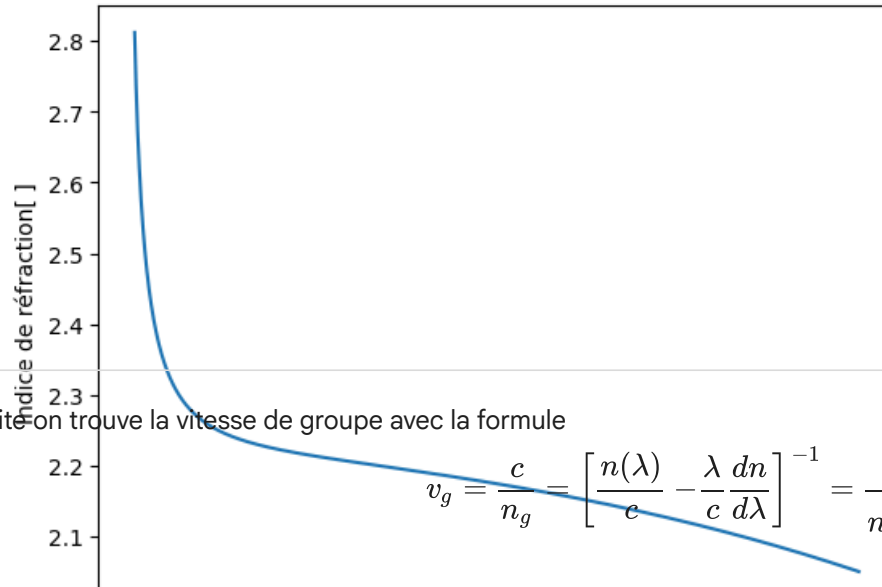
```
def calculate_n_LiNbO3_function_lambda(lambda, B_1 = 2.6734, B_2 = 1.2290, B_3 = 12.614, C_1 = 0.01764, C_2 = 0.05914, C_3 = 474.60):  
    """  
    Wavelength input is in [m]  
    """  
    lambda = lambda*1E6 #but Sellmeier take in micrometers  
    n = np.sqrt((B_1*lambda**2/(lambda**2 - C_1)) + (B_2*lambda**2/(lambda**2 - C_2)) + (B_3*lambda**2/(lambda**2 - C_3)) + 1)  
    return n
```

Pour vérifier que la fonction est bien écrite, une comparaison avec la [référence suivante](#) est faite. Le site web nous dit qu'à $n(\lambda = 1550 \text{ nm}) = 2.2111$, ce qui est bien le cas.

```
print("Indice n(lambda=1550 nm) = ", calculate_n_LiNbO3_function_lambda(1550E-9))  
  
lambda = np.linspace(300E-9, 5000E-9, 1000000)  
n_LiNbO3 = calculate_n_LiNbO3_function_lambda(lambda)  
  
plt.plot(lambda*1E9, n_LiNbO3)  
plt.xlabel("Longueur d'onde [nm]")  
plt.ylabel("Indice de réfraction [ ]")  
plt.title("Indice de réfraction du LiNbO3, en fonction de la longueur d'onde lambda")  
plt.show()
```

Indice $n(\lambda=1550 \text{ nm}) = 2.21111110086535737$

Indice de réfraction du LiNbO_3 en fonction de la longueur d'onde λ



Ensuite on trouve la vitesse de groupe avec la formule

$$v_g = \frac{c}{n_g} = \left[\frac{n(\lambda)}{c} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda} \right]^{-1} = \frac{c}{n(\lambda) - \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda}}$$

```
dn / dλ = np.gradient(n_LiNbO3, λ)

v_g = cte.c / (n_LiNbO3 - λ * dn / dλ)

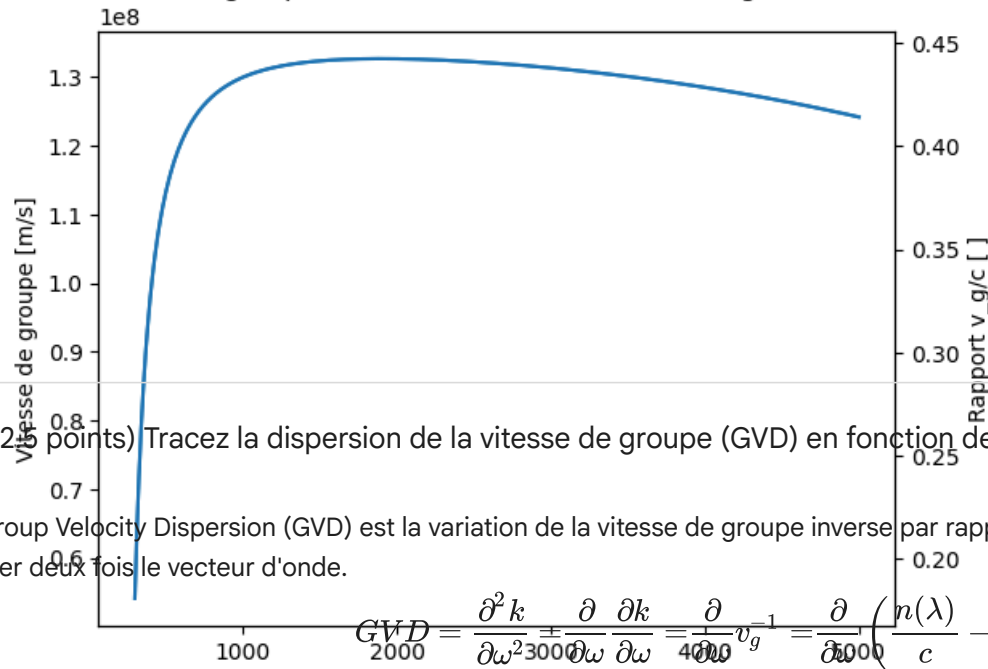
fig, ax1 = plt.subplots()

ax1.plot(λ*1E9, v_g)
ax1.set_xlabel("Longueur d'onde [nm]")
ax1.set_ylabel("Vitesse de groupe [m/s]")
ax1.set_title("Vitesse de groupe du LiNbO3 en fonction de la longueur d'onde")

ax2 = ax1.twinx()
ax2.plot(λ*1E9, v_g/cte.c)
ax2.set_ylabel("Rapport v_g/c [ ]", color='black')
ax2.tick_params(axis='y', labelcolor='black')

plt.show()
```

Vitesse de groupe du LiNbO₃ en fonction de la longueur d'onde



✓ (C) (2 points) Tracez la dispersion de la vitesse de groupe (GVD) en fonction de la longueur d'onde. unités en fs² m⁻¹.

La Group Velocity Dispersion (GVD) est la variation de la vitesse de groupe inverse par rapport à la fréquence angulaire ω . Cela revient à dériver deux fois le vecteur d'onde.

$$GVD = \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial k}{\partial \omega} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{c}{n(\lambda)} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{c}{c} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right)$$

On change encore ici la dérivée par rapport à ω avec $\frac{d}{d\omega} = -\frac{\lambda}{\omega^2} \frac{d}{d\lambda}$

$$GVD = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \omega} n(\lambda) - \frac{\partial}{\partial \omega} \lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right)$$

$$GVD = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} - \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \right) \right)$$

Avec la dérivée de produit $(uv)' = u'v + uv'$

$$GVD = \frac{1}{c} \left(-\frac{\lambda}{\omega} \cdot \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\lambda}{\omega} \cdot \left(\frac{d\lambda}{d\lambda} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} + \lambda \frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} \right) \right)$$

$$GVD = \frac{1}{c} \left(-\frac{\lambda}{\omega} \cdot \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\lambda}{\omega} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\lambda^2}{\omega} \frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} \right)$$

$$GVD = \frac{1}{c} \left(\frac{\lambda^2}{\omega} \frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} \right)$$

et finalement avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

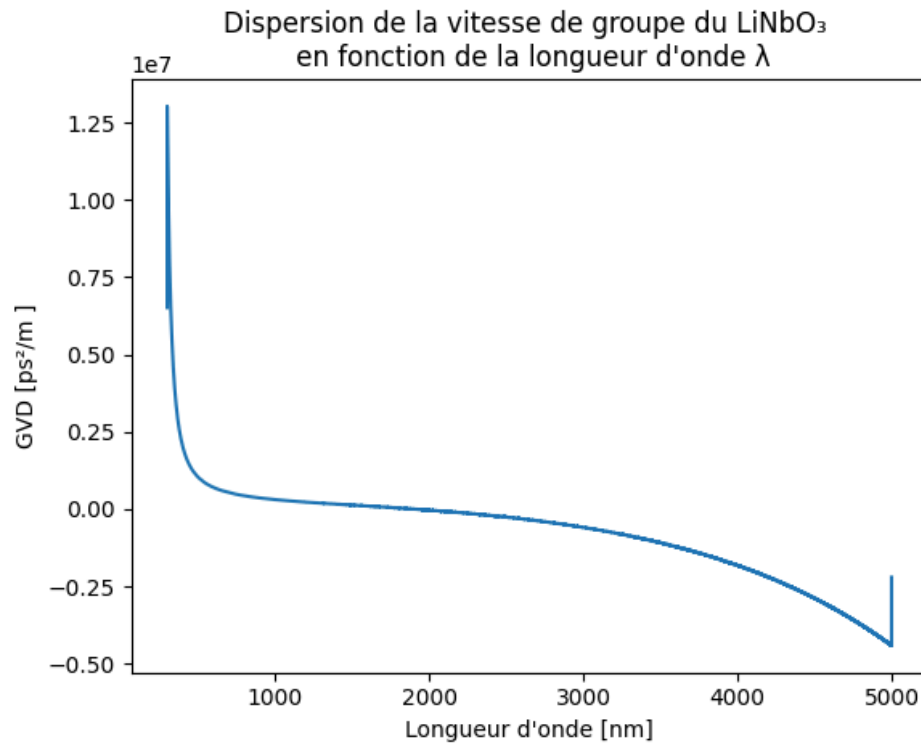
$$GVD = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} \quad \frac{[m]^3}{[m/s]^2} \frac{[]^2}{[m]^2} = \left[\frac{s^2}{m} \right]$$

Pour avoir les unités en $\left[\frac{fs^2}{m} \right]$ on multiplie par $(1 \times 10^{15})^2 = 1 \times 10^{30}$

$$GVD = \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n(\lambda)}{d\lambda^2} \times 10^{30} \quad \left[\frac{fs^2}{m} \right]$$

```
GVD = (λ**3*d2n/dλ2*1E30)/(2*np.pi*cte.c**2)
```

```
plt.plot(λ*1E9, GVD)
plt.xlabel("Longueur d'onde [nm]")
plt.ylabel("GVD [ps²/m ]")
plt.title("Dispersion de la vitesse de groupe du LiNbO₃ \n en fonction de la longueur d'onde λ")
plt.show()
```



(D) (5 points) Vous faites propager deux impulsions, la première à une longueur d'onde de 800 nm et la seconde à 1550 nm. Quel sera le délai entre ces deux impulsions après 100 cm.

$$T_g = \frac{L}{v_g} = L \left(\frac{n(\lambda)}{c} - \frac{\lambda}{c} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

```
def calculate_T_g(L, v_g):
    """
    L is in meters
```