

Cours de modélisation mathématique

Guilherme Dias da Fonseca

Projet 4 – Ensemble Dominant

1 Présentation abstraite

Entrée : Un graphe non-dirigé $G = (V, E)$, où V est l'ensemble de sommets et E est l'ensemble d'arêtes.

Sortie : Un sous-ensemble $D \subseteq V$ tel que pour tous les sommets $v \in V$, soit $v \in D$, soit il y a un voisin u de v qui appartient à D . On dit que u *domine* v .

Objectif : Minimiser la taille $|D|$.

2 Présentation appliquée

Un commerçant a une liste de villes où il veut être capable de livrer ses produits rapidement. Il trouve une liste de paires de ces villes tels que il peut transporter les produits rapidement entre les villes du pair (dans les deux sens). Alors, il faut choisir les villes où placer ses dépôts de façon à atteindre ses objectifs de livraison. C'est à dire, il faut choisir un ensemble de villes de dépôt tel que pour toutes les villes de la liste, il y a un dépôt soit dans la ville elle même, soit dans une ville d'où on peut transporter rapidement.

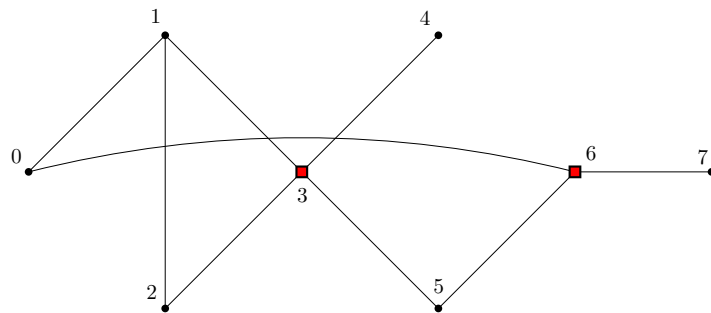


FIGURE 1 – Exemple de graphe et son ensemble dominant de taille 2.

3 Exemple

Disons que la rentrée est le graphe avec l'ensemble de sommets

$$V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

et l'ensemble d'arêtes

$$V = \{\{0, 1\}, \{0, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}.$$

Un ensemble dominant de taille 2 est $D = \{3, 6\}$. Voir figure 1.

4 Fichiers d'entrée

Le fichier d'entrée est textuel et la plupart des lignes contient deux entiers séparés par un espace, qui indiquent qu'il y a une arête entre les deux sommets. La première ligne contient le nombre de sommets n (qui sont numérotés de 0 à $n - 1$) et la deuxième ligne contient le nombre d'arêtes m . Chaque arête apparait seulement une fois dans le fichier, soit dans une direction, soit dans l'autre.

Pour l'exemple on a le fichier :

```
8
9
0 1
0 6
1 2
1 3
2 3
3 4
3 5
5 6
6 7
```

Il y a 4 fichiers d'entrée sur l'ENT :

1. **16.in4** : $n = 16, m = 24$
Grille 4×4 (figure 2).
2. **256.in4** : $n = 256, m = 1024$
8-hypercube, les sommets sont les octets et il y a une arête si il y a seulement un bit de différence dans la représentation binaire (figure 3). L'étiquette de chaque sommet a été mélangée au hasard.
3. **1000.in4** : $n = 1000, m = 2980$
Triangulation de Delaunay de 1000 villes grecques (figure 4).
4. **4039.in4** : $n = 4039, m = 87889$
Relations d'amitié sur facebook.
Source : <http://snap.stanford.edu/data/egonets-Facebook.html>

5 Fichier de sortie

Le format du fichier de sortie est simple. La première ligne du fichier de sortie est l'entier $|D|$. Ensuite on liste sommets de D , un par ligne. Pour l'exemple où $D = \{3, 6\}$ on a le fichier :

2
3
6

6 Stratégies

La stratégie la plus simple est une méthode gloutonne (greedy) où à chaque pas on choisi un sommet à mettre dans la solution et ensuite on enlève le sommet choisi du tableau d'entrée. On répète jusqu'à avoir dominé tous les sommets. Le critère pour bien choisir un sommet à chaque pas est très important. Il faut penser que :

- On préfère un sommet qui a beaucoup de voisins pas encore dominés.
- On préfère un sommet qui a des voisins qui ont peu de voisins parce qu'ils sont plus durs à dominer. Par exemple un sommet qui à un voisin que n'a pas d'autre voisin doit surement être ajouté à la solution.

Ajoutez des facteurs aléatoires pour essayer plusieurs solutions possibles et garder la meilleure. Aussi, ça peut être bien de pouvoir ajouter à la solution un sommet déjà dominé ou pas, selon le fichier.

7 Notation

La notation sera basée sur le tableau ci-dessous, qui indique la taille de la solution nécessaire pour avoir la note à gauche pour chaque fichier. La note du projet est la moyenne des notes des 4 fichiers.

Note	16.in4	256.in4	1000.in4	4039.in4
10	6	50	194	344
11		48	193	262
12		46	191	255
13		44	188	230
14	5	42	186	195
15		40	184	165
16		38	182	135
17		36	180	100
18		34	178	75
19		33	177	70
20	4	32	176	68

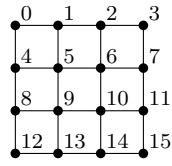


FIGURE 2 – Graphe du fichier 16.in4.

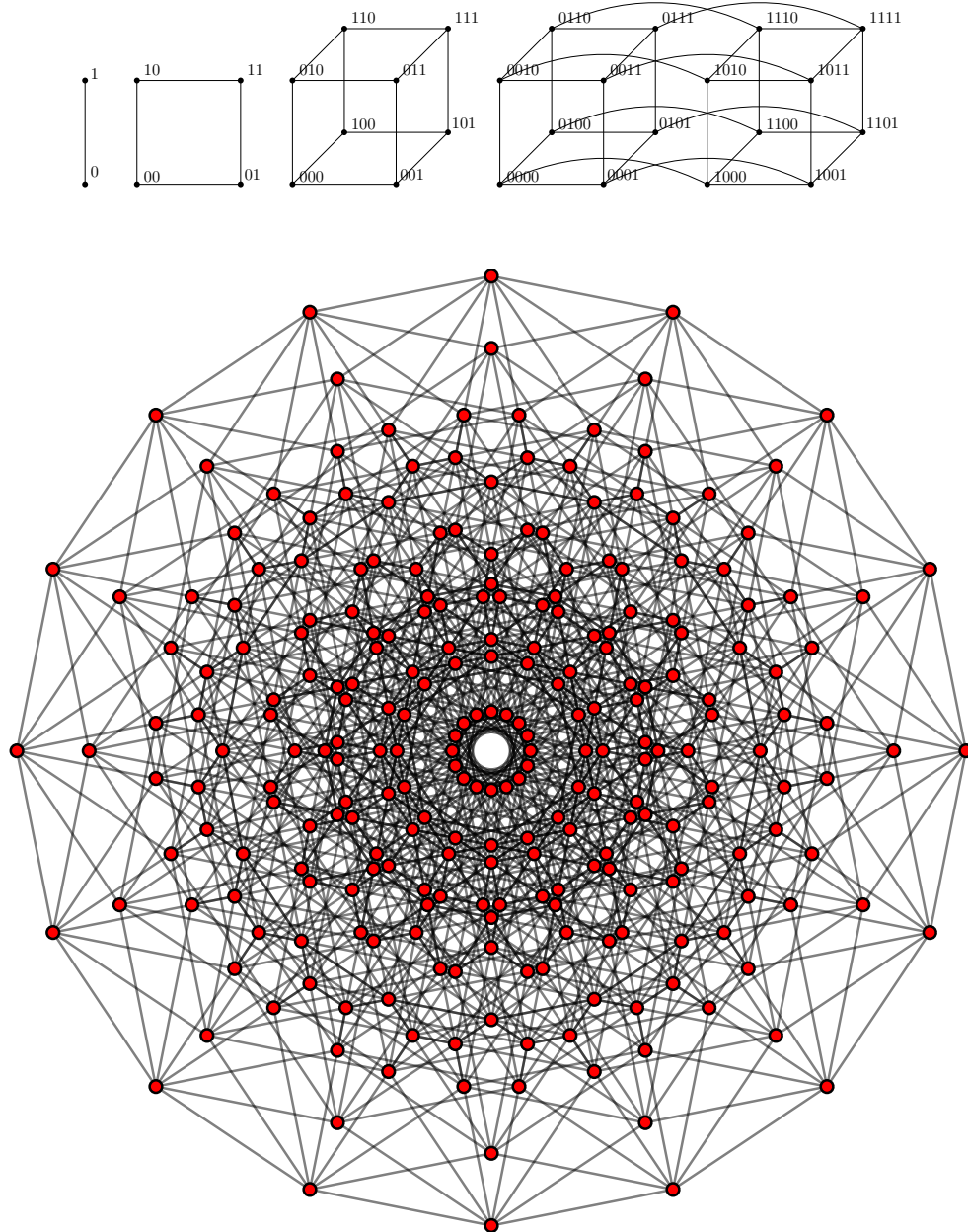


FIGURE 3 – Construction des hypercubes de 1 à 4 dimensions et le graphe du fichier, un hypercube de 8 dimensions. Source : <http://en.wikipedia.org/wiki/Hypercube>

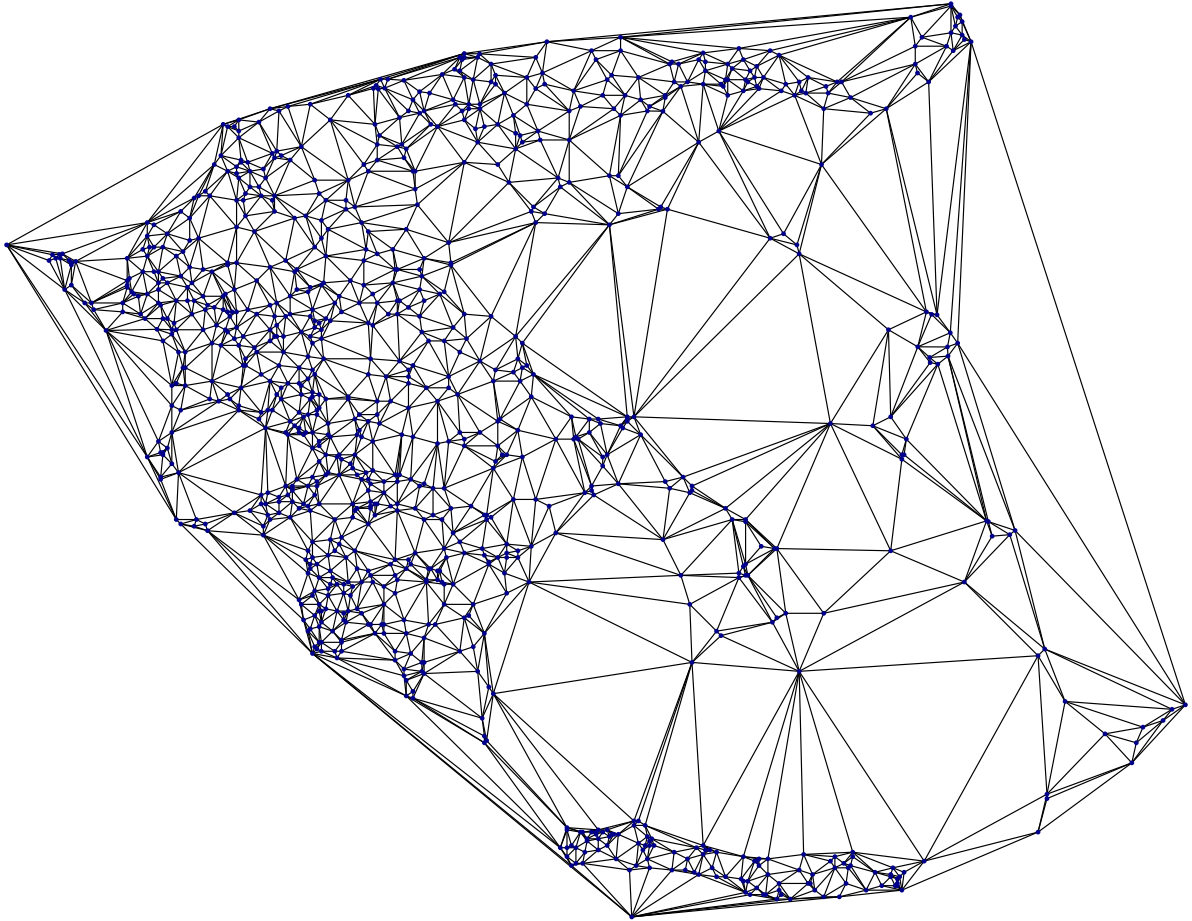


FIGURE 4 – Graphe du fichier 1000.in4, correspondant à la triangulation de Delaunay de 1000 villes grecques.