* MU proche du dépôt ?
* Biblio sur Chap Méthodes...

CHAPITRE 4

PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS MIXTES DE SMEPC

Sommaire

une tournée. La station de départ *Dépôt* a l'étiquette $Depot = 0$ et est appelé dépôt initial. La station de fin *Dépôt* a l'étiquette $Depot = M + 1$ et est appelé dépôt final. Le temps nécessaire au véhicule pour se déplacer de la station j à la station $j+1$ est égal à t_j, en tenant compte du temps passé par le véhicule pour effectuer des tâches locales aux stations. Le véhicule quitte le dépôt initial à la date 0 et doit terminer son parcours au plus tard à une date limite $TMax$.

Notre véhicule est alimenté à l'hydrogène (H^2). La capacité du réservoir du véhicule est appelé C^{Veh} et on connait, pour tout $j = 0, \dots, M$, la quantité d'hydrogène e_j dont le véhicule a besoin pour aller de la station j à la station $j+1$. La quantité d'hydrogène initiale dans le réservoir du véhicule est noté E_0 et le véhicule doit finir sa tournée avec au moins la quantité d'hydrogène E_0, pour éviter les tournées triviales, c'est-à-dire les tournées durant lesquelles il n'y a ni recharge, ni production. Le véhicule doit se recharger périodiquement en hydrogène. Les opérations de recharges en hydrogène ont lieu dans une micro-usine (voir figure (4.1)), proche du dépôt : le temps nécessaire au véhicule pour se déplacer de la station j à la micro-usine est désigné par d_j, et le temps nécessaire au véhicule pour se déplacer de la micro-usine à la station j est noté d_j^*. De la même manière, l'énergie nécessaire au véhicule pour se déplacer de la station j à la micro-usine est désigné par ε_j, et l'énergie nécessaire au véhicule pour se déplacer de la micro-usine à la station j est noté ε_j^*. Les quantités t_j; d_j et d_j^*, ainsi que les quantités e_j, ε_j et ε_j^* sont non nulles et satisfont l'inégalité triangulaire (4.2), ~~et sont telles~~ que $E_0 \geq \varepsilon_0$.

la quantité de l'énergie initiale du vehicule assure son deplacement à la MU ie $E_0 \geq \varepsilon_0$

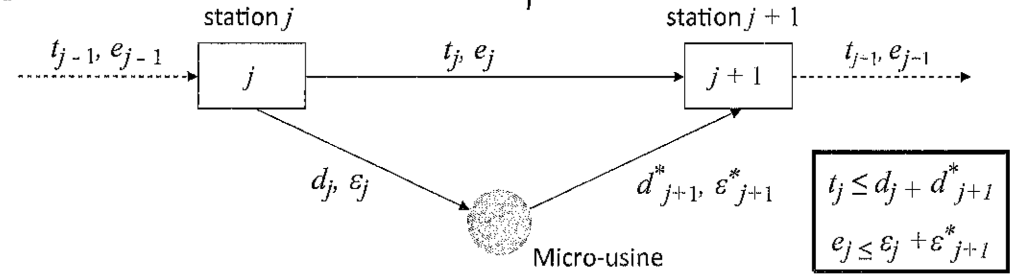


FIGURE 4.2 – Notations concernant les valeurs de temps et d'énergie pour deux stations consécutives j et $j+1$ ($j = 1, \dots, M$).
0

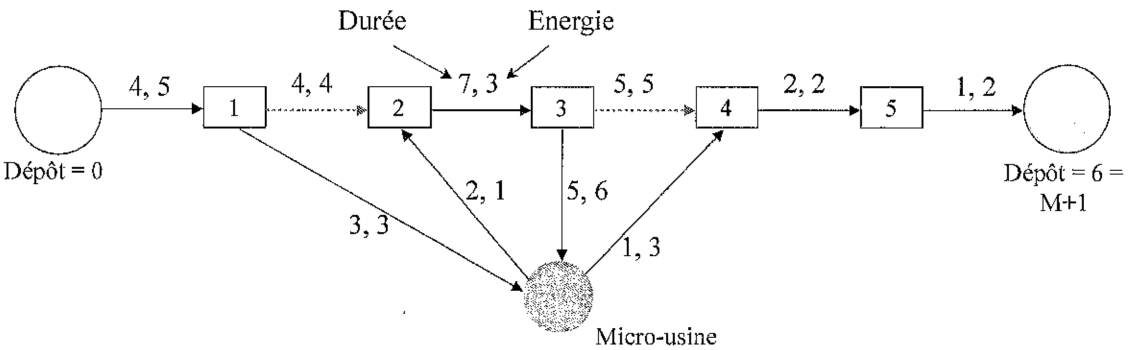


FIGURE 4.3 – Une tournée de véhicule avec ses opérations de recharges en hydrogène avec $M = 5$.

La figure (4.3) montre un exemple de tournée effectuée par le véhicule : il passe par les stations $Depot = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 = Depot$, tout en faisant le plein d'hydrogène entre la station 1 et la station 2, et ensuite entre la station 3 et la station 4.

D'autre part, on suppose que la micro-usine produit de l'hydrogène in situ à partir de l'eau par

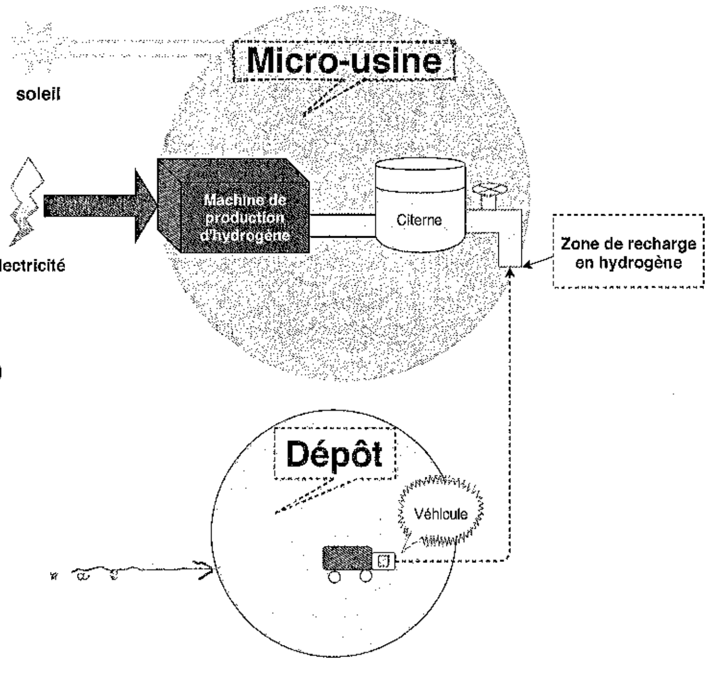
4.1 Introduction

Ce chapitre présente la modélisation linéaire en nombres entiers qu'on a réalisé du problème SMEPC. Dans la **section** 4.2, on explique la problématique des travaux de recherche réalisés durant ce projet de thèse, à savoir la conception d'algorithmes et de modèles pour résoudre le problème de synchronisation de la production et des activités d'un véhicule autonome. On définit les données d'entrées et une solution d'une instance du problème **SMEPC**. La **section** 4.3 liste les différentes extensions du problème **SMEPC**, qui seront considérées comme des perspectives éventuelles pour une extension de ce travail. La **section** 4.4 présente le modèle mathématique du problème **SMEPC** en présentant les variables, la fonction objectif et les contraintes du problème. La **section** 4.5 présente le programme linéaire à variable mixte de SMEPC. Dans la **section** 4.6, on présente la relaxation linéaire du programme précédent. La **section** 4.7 présente une approche branch-and-cut pour SMEPC. La **section** 4.8 présente les résultats de complexité qu'on a obtenu, puis, on démontre que le problème **SMEPC** est NP-difficile. On finit ce chapitre en présentant à la section 4.9 les résultats expérimentaux.

4.2 Le problème SMEPC : *Synchronous Management of Energy Production and Consumption*

Dans cette partie, on explique le problème **SMEPC** : Synchronous Management of Energy Production and Consumption. Pour cela, ~~on énumère d'abord~~ nous précisons quelles sont les données d'entrées de notre problème. Ensuite, on présente ce qu'est une solution d'une instance du problème **SMEPC**. Enfin, on explique les sous-problèmes qui émanent du problème **SMEPC**.

utilisez nous plutôt que "on"



véhicule
Zoom

FIGURE 4.1 – Le dépôt et la micro-usine.

Nous considérons ici un véhicule qui doit effectuer des tâches de logistique interne, tout en suivant un itinéraire Γ qui commence et se termine sur une station particulière appelée *Dépôt* illustré à la figure (4.1). Le véhicule parcourt les stations $j = 1, \ldots, M$, selon cet ordre. Cet itinéraire est appelé une combinaison de photolyse et d'électrolyse. L'hydrogène résultant est stocké dans un réservoir directement lié à la micro-usine, dont la capacité (en unités d'énergie) est désignée par C^{Tank}.

On suppose que l'espace temps $\{0,\ldots,TMax\}$ est divisé en périodes $P_i = [p \times i, p \times (i+1)[$, $i = 0,\ldots,N-1$, toutes d'une même longueur égale à p telle que $TMax = N \times p$. Par souci de simplicité, nous désignons une période P_i par son indice i. La figure (4.4) illustre 4 périodes qui valent chacune 2 unités de temps c'est-à-dire $p = 2$, on a les périodes suivantes :

- ☐ $P_0 = [2 \times 0, 2 \times (0+1)[= [0,2[$;
- ☐ $P_1 = [2 \times 1, 2 \times (1+1)[= [2,4[$;
- ☐ $P_2 = [2 \times 2, 2 \times (2+1) = [4,6[$;
- ☐ $P_3 = [2 \times 3, 2 \times (3+1) = [6,8[$.

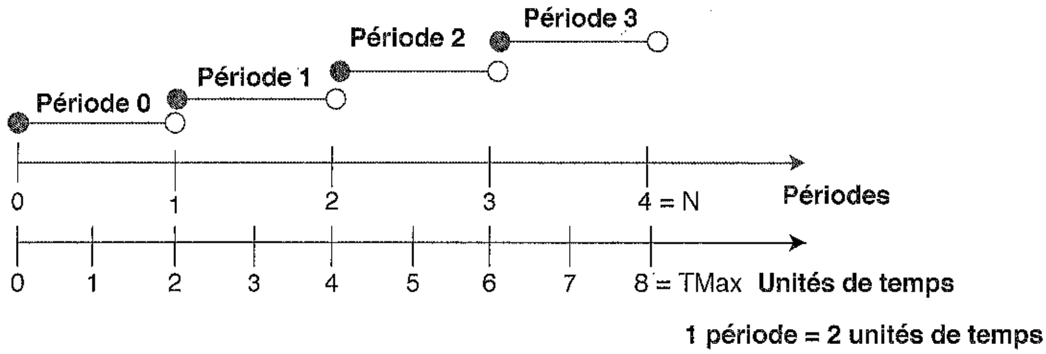


FIGURE 4.4 – Intervalle de temps correspondant à une période.

Si la micro-usine est active à un moment donné pendant la période i, alors elle est active pendant toute la période i, et produit R_i unités d'hydrogène avec R_i dépendant de la période i. A la date 0, la charge actuelle du réservoir de la micro-usine est égale à $H_0 \leqslant C^{Tank}$ et la micro-usine n'est pas active. Nous imposons que la même situation se produise à la date $TMax$.

La figure (4.5) présente un exemple de **stratégie de production** réalisée par la micro-usine : les périodes soulignées en rouge correspondent aux périodes où la micro-usine est activée. Les périodes en bleu correspondent aux périodes où la micro-usine est active.

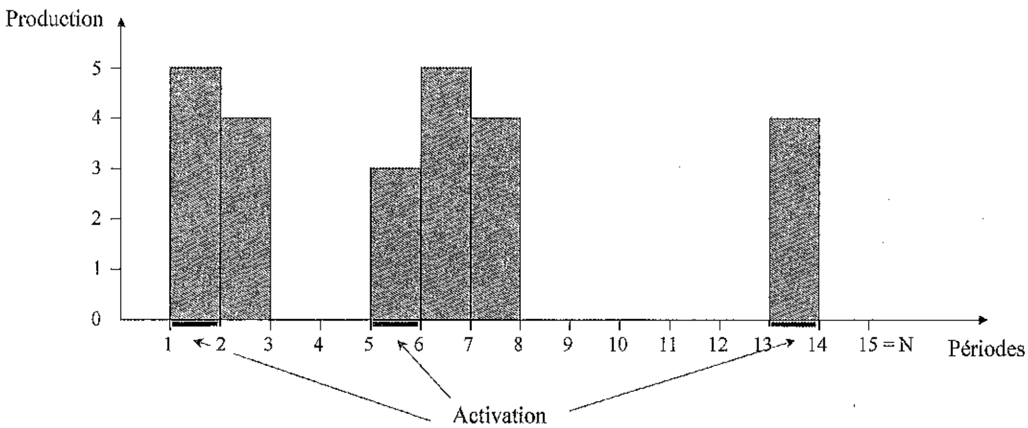


FIGURE 4.5 – Un exemple de stratégie de production.

Pour des raisons de sécurité, on suppose que le véhicule ne peut pas se recharger en hydrogène pendant que la micro-usine produit. Toute opération de recharge~~s~~ d'un véhicule doit commencer au début d'une période $i = 0, \ldots, N-1$ et se terminer à la fin de la période i. Etant donné que la recharge du véhicule et la production d'hydrogène s'excluent mutuellement, le véhicule peut attendre dans la micro-usine avant d'être autorisé à se recharger.

La production d'hydrogène a un coût, qui est décomposé ici en 2 composantes :

- ☐ Un coût d'activation, fixe et noté $Cost^F$, qui est facturé à chaque fois que la micro-usine est activée ;
- ☐ Un coût de production dépendant du temps, qui correspond à l'énergie produite pendant la période i, à condition que la micro-usine soit active pendant cette période : ce coût $Cost_i^V$ est indépendant de la quantité d'hydrogène réellement produite pendant la période i, et reflète les prix indexés sur le temps facturés par le fournisseur d'électricité.

La figure (4.6) affiche les coûts d'activation et les coûts de production en fonction du temps liés à la micro-usine de la figure (4.5).

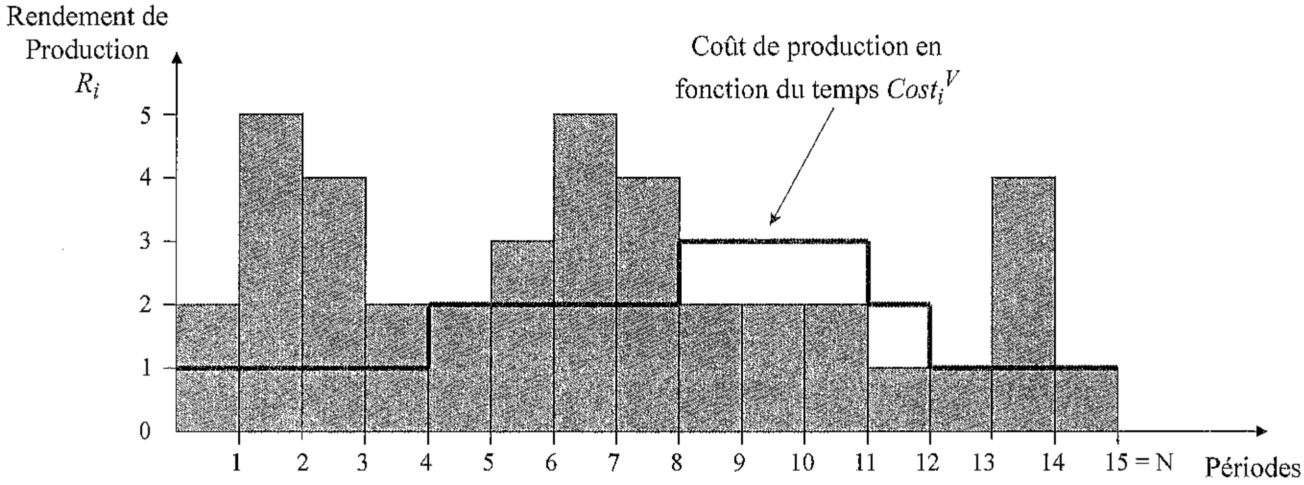


FIGURE 4.6 – Coûts de production et rendement en fonction du temps pour la micro-usine de la figure (4.5).

Notre problème **SMEPC** consiste à planifier à la fois les recharges du véhicule et la production de la micro-usine de manière à ce que :

- ☐ Le véhicule part du dépôt initial $Depot = 0$, visite toutes les stations $j = 1, \ldots, M$ et revient au dépôt final $Depot = M + 1$ à une date $T \in [0, TMax]$, tout en se déplaçant, à chaque fois qu'il est nécessaire, vers la micro-usine afin de faire le plein d'hydrogène ;
- ☐ La micro-usine produit et stocke l'hydrogène nécessaire au véhicule de sorte que la quantité nécessaire à la recharge soit disponible à l'usine quand le véhicule se recharge ;
- ☐ Le coût $Cost$ de production d'hydrogène et le temps T de durée du parcours sont les plus faibles possibles. Nous fusionnons les deux coûts ci-dessus en un seul : $Cost + \alpha \times T$, où α est un coefficient d'échelle qui permet d'uniformiser les différentes composantes de la fonction objectif. Dans notre cas, on convertit le temps en coût.

Exemple 1 *La figure (4.7) montre une solution du problème de synchronisation. On y voit les recharges du véhicule et la production de la micro-usine associée aux figures (4.3), (4.5), (4.6) dans le cas où* $p = 2$, $E_0 = 8$, $H_0 = 4$, $TMax = 30$, $Cost^F = 7$, $C^{Tank} = 15$, $C^{Veh} = 15$, $\alpha = 1$. *Dans ce cas, le véhicule se* *recharge deux fois : la première recharge a lieu à la période 4, impliquant 14 unités d'hydrogène, et la deuxième recharge a lieu à la période 12, impliquant 11 unités d'hydrogène. Le temps T est égal à 30. Le coût d'activation global qui en résulte est de 3*7 = 21. Le coût de production dépendant du temps est égal à 1+1+2+2+2+1=9. Ainsi, le coût global est égal à 21 + 9 + 30 = 60.*

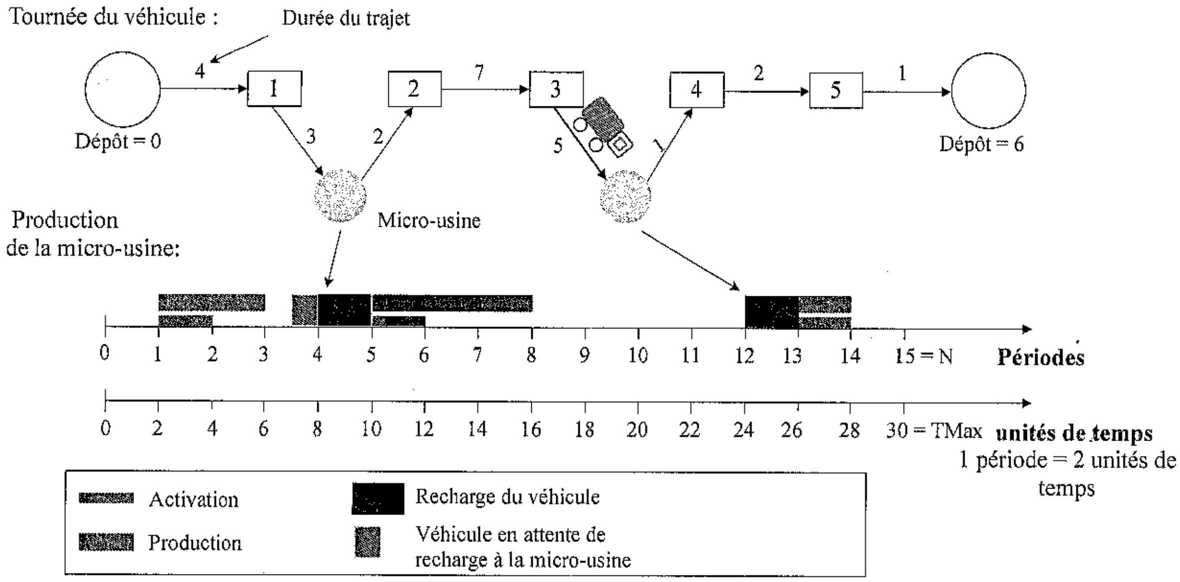


FIGURE 4.7 – Une solution possible de l'instance de **SMEPC** associée à la figure (4.3), à la figure (4.5) et à la figure (4.6).

Remarque 3 *Nous nous concentrons ici sur les mécanismes de synchronisation et considérons donc une version déterministe de notre problème.* ?

Le tableau (4.1) résume toutes les entrées du problème **SMEPC**.

Noms	Significations
M	Nombre de stations (Dépôt et micro-usine exclus) fixe
$\Gamma = (Depot = 0, 1, \ldots, M, Depot = M+1)$	Tournée du véhicule (sans les recharges).
$TMax$	Le délai maximal pour que le véhicule puisse effectuer sa tournée
C^{Veh}	Capacité du réservoir en hydrogène du véhicule
E_0	Charge initiale en hydrogène du véhicule
Pour $j = 0, \ldots, M$, t_j	Temps nécessaire pour aller de la station j à la station j + 1
Pour $j = 0, \ldots, M$, d_j	Temps nécessaire pour aller de la station j à la micro-usine
Pour $j = 0, \ldots, M$, d_j^*	Temps nécessaire pour aller de la micro-usine à la station j
Pour $j = 0, \ldots, M$, e_j	Energie nécessaire pour aller de la station j à la station j + 1
Pour $j = 0, \ldots, M$, ε_j	Energie nécessaire pour aller de la station j à la micro-usine
Pour $j = 0, \ldots, M$, ε_j^*	Energie nécessaire pour aller de la micro-usine à la station j
C^{Tank}	Capacité de la citerne d'hydrogène
N	Nombre de périodes de production
p	Durée en unités de temps d'une période de production
H_0	Charge initiale de la citerne d'hydrogène
$Cost^F$	Coût d'activation de la micro-usine
Pour $i = 0, \ldots, N-1$, $P_i = [p \times i, p \times (i+1)[$	Intervalle de temps correspondant à une période de production
Pour $i = 0, \ldots, N-1$, R_i	Rendement de production lié à la période i
Pour $i = 0, \ldots, N-1$, $Cost_i^V$	Coût de production lié à la période i

TABLE 4.1 – Entrées du problème **SMEPC**.

En analysant le problème **SMEPC**, on remarque qu'il peut être divisé en deux sous-problèmes illustrés à la figure (4.8) :

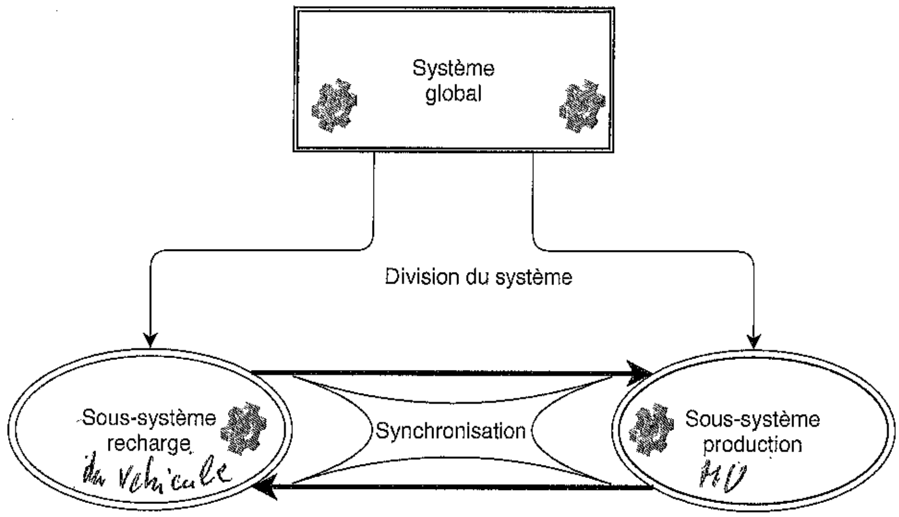


FIGURE 4.8 – Décomposition du problème **SMEPC**.

- ☐ Le problème *Vehicle-Driver (VD)* qui consiste à faire abstraction dans le problème **SMEPC** de la partie planification de la production d'hydrogène en supposant qu'on a une quantité infinie d'hydrogène à la micro-usine ;
- ☐ Le problème *Production-Manager (PM)* qui consiste à faire abstraction dans le problème **SMEPC** de la partie planification des recharges en hydrogène du véhicule en supposant qu'on connait toutes les demandes du véhicule.

Nous venons de présenter le modèle **SMEPC**. Nous constatons que ce modèle peut être étendu, notamment, en supposant premièrement que le véhicule est alimentée avec plusieurs types d'énergies, en supposant deuxièmement qu'on a plusieurs véhicules pour effectuer les différentes tâches, etc. La section suivante sera consacrée à la présentation plus ou moins exhaustive de façon précise des extensions possibles du problème **SMEPC**.

4.3 Extensions du problème SMEPC

Le problème **SMEPC** peut être étendu en modifiant ses caractéristiques. Si on décide que le véhicule fonctionne avec deux types d'énergies, par exemple l'hydrogène et l'électricité. Ceci signifie que le véhicule contient une pile à hydrogène pour conserver l'hydrogène et une batterie pour stocker l'électricité. L'une des difficultés ici serait de calculer quelle proportion d'hydrogène et d'électricité le véhicule devrait dépenser pour se déplacer d'une station à l'autre. De plus, il faudrait décider quelles proportions d'hydrogène et d'électricité seront rechargée lorsque le véhicule ira se recharger.

Si on décide qu'il y a plusieurs véhicules (au lieu d'un seul) pour effectuer les tâches de logistique interne, on a plusieurs difficultés : l'une est d'empêcher les collisions entre les véhicules en faisant en sorte qu'ils ne se croisent jamais sur la même route ou à un carrefour. Une autre difficulté est d'attribuer des tâches de façon optimale à chaque véhicule. Aussi, on doit pouvoir ~~planifier dans quel ordre les véhicules vont se recharger au cas où~~ gérer la file d'attente au niveau de la MU ils se retrouvent à plusieurs à la micro-usine. Une autre difficulté est d'optimiser les tournées des véhicules.

Parmi les variants du problème **SMEPC** avec tournée fixée, on peut citer :

1. On suppose que la quantité d'hydrogène rechargée par le véhicule est la même à chaque recharge, la recharge dure une période. La quantité d'hydrogène produite est variable (La micro-

usine produit à chaque pas de temps une quantité d'hydrogène comprise entre 1 et un seuil max à fixer.). Le véhicule n'attend pas au niveau de la micro-usine, il se recharge immédiatement car il est prioritaire ;

2. On suppose que la quantité d'hydrogène rechargée par le véhicule est la même à chaque recharge, la recharge dure une période. La quantité d'hydrogène produite est fixe (La micro-usine produit à chaque pas de temps une quantité d'hydrogène connue.). Le véhicule n'attend pas au niveau de la micro-usine, il se recharge immédiatement car il est prioritaire ;
3. On suppose que la quantité d'hydrogène rechargée par le véhicule est la même à chaque recharge, la recharge se fait en δ ~~unités de temps~~ périodes. La quantité d'hydrogène produite est fixe et on n'a pas de temps d'attente ;
4. Le véhicule fait le plein de son réservoir d'hydrogène à chaque recharge, la recharge se fait en δ unités de temps, la quantité d'hydrogène produite est fixe et on n'a pas de temps d'attente ;
5. Le véhicule fait le plein de son réservoir d'hydrogène à chaque recharge, la recharge dure une période, la quantité d'hydrogène produite est fixe et le véhicule peut attendre à la micro-usine (par exemple il peut attendre que la micro-usine produise la quantité dont il a besoin).

Le tableau (4.2) synthétise les variants du problème **SMEPC** présenté ci-dessus.

Caractéristiques	Possibilités					
Quantité rechargée	fixe	1	2	3		
	Variable				4	5
Durée de la recharge	δ unités			3	4	
	1 unité	1	2			5
Quantité produite	fixe		2	3	4	5
	variable	1				
Attente avant recharge	oui					5
	non	1	2	3	4	

TABLE 4.2 – Synthèse de quelques variants du problème **SMEPC**.

→ quel cas Q recharge fixe, Durée fixe, Q produite var, attente non

On a listé les extensions possibles du problème **SMEPC**. On va dans la partie suivante modéliser le problème **SMEPC** en présentant sa modélisation mathématique et sa modélisation linéaire. En effet, on présente les variables, la fonction objectif et les contraintes de chaque modèle.

4.4 Formulation mathématique

par progra linéaire mixte.

Dans cette partie, on propose une formulation ~~orientée Programmation~~ Mathématique, ~~puis~~ dans la section suivante on linéarise certaines contraintes de ce modèle pour obtenir un Programme Linéaire à Variables ~~Entières~~ Mixtes (MIP). → Une formulation est proposée dans un premier tps puis celle-ci est linéarisée pour finalement obtenir un pgm line mix PLM

4.4.1 Variables

1. Les variables du problème **PM** sont :

☐ $z = (z_i, i = 0, \ldots, N-1)$, $z_i \in \{0, 1\}$

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si la micro-usine est active pendant la période i} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ☐ $y = (y_i, i = 0, \ldots, N-1)$, $y_i \in \{0, 1\}$:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la micro-usine est activée au début de la période i} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ☐ $V^{Tank} = (V_i^{Tank}, i = 0, \ldots, N)$, V_i^{Tank} est une valeur entière non négative qui représente la quantité d'hydrogène dans la citerne au début de la période i. Nous tenons compte ici d'une période fictive N afin d'exprimer le fait que la quantité d'hydrogène dans la citerne de la micro-usine à la fin du processus devrait être au moins égale H_0 ;
- ☐ $\delta = (\delta_i, i = 0, \ldots, N-1)$, $\delta_i \in \{0, 1\}$:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule se recharge durant la période i} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ☐ $L^* = (L_i^*, i = 0, \ldots, N-1)$, L_i^* est une valeur entière non négative. Si $\delta_i = 1$, L_i^* est la quantité d'hydrogène donnée par l'usine au véhicule pendant la période i.

2. Les variables du problème **VD** sont :

- ☐ $x = (x_j, j = 0, \ldots, M)$, $x_j \in \{0, 1\}$:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule se recharge en hydrogène lorsqu'il se déplace de la station j à la station j + 1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- ☐ $L = (L_j, j = 0, \ldots, M)$, L_j est une valeur entière non négative qui représente la quantité d'hydrogène donnée par l'usine au véhicule lorsqu'il se déplace de la station j à la station $j+1$;
- ☐ $T = (T_j, j = 0, \ldots, M+1)$, T_j est une valeur entière non négative qui représente la date d'arrivée du véhicule à la station j ;
- ☐ $T^* = (T_j^*, j = 0, \ldots, M+1)$, T_j^* est une valeur entière non négative. Si $x_j = 1$, T_j^* est la date à laquelle le véhicule commence à se recharger en hydrogène entre la station j et la station $j+1$;
- ☐ $V^{Veh} = (V_j^{Veh}, j = 0, \ldots, M+1)$ V_j^{Veh} est une valeur entière non négative qui représente la quantité d'hydrogène dans le réservoir du véhicule lorsqu'il arrive à la station j.

Ces variables seront contraintes comme suit :

4.4.2 Fonction objectif

La fonction objectif concerne à la fois la minimisation du coût de production d'hydrogène et de la durée de la tournée. On convertit le temps en coût à l'aide d'un coefficient qu'on nomme α. On passe donc du bi-objectif à un objectif unique de la façon suivante :

$$\textbf{Min}\left\{\sum_{i=0}^{N-1}[(Cost^F \times y_i) + (Cost_i^V \times z_i)] + \alpha \times T_{M+1}\right\} \tag{4.1}$$

Où α est le facteur de conversion du temps en coût économique.

4.4.3 Contraintes du problème PM

Les contraintes du problème **PM** sont :

$$\begin{aligned}
z_0 = y_0, \delta_0 &= 0 && && (4.2a)\\
z_i + \delta_i &\leqslant 1 && \forall i = 0, \dots, N-1 && (4.2b)\\
y_i = 1 \rightarrow (z_{i-1} &= 0 \wedge z_i = 1) && \forall i = 1, \dots, N-1 && (4.2c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_0^{Tank} &= H_0 && && (4.3a)\\
V_N^{Tank} &\geqslant H_0 && && (4.3b)\\
V_i^{Tank} &\leqslant C^{Tank} && \forall i = 0, \dots, N-1 && (4.3c)\\
V_{i+1}^{Tank} &= V_i^{Tank} + z_i \times R_i - L_i^* && \forall i = 0, \dots, N-1 && (4.3d)\\
L_i^* &\geqslant 0 && \forall i = 0, \dots, N-1 && (4.3e)\\
L_i^* &\leqslant C^{Tank} \times \delta_i && \forall i = 0, \dots, N-1 && (4.3f)
\end{aligned}$$

La contrainte (4.2a) définit l'état initial de l'usine. La contrainte (4.2b) traduit le fait que la production d'hydrogène et la recharge du véhicule ne se font pas simultanément. La contrainte (4.2c) traduit le fait que démarrer la micro-usine à la période i signifie que la micro-usine ne produisait pas de l'hydrogène à la période $i-1$ et commence à produire l'hydrogène à la période i.

La contrainte (4.3a) signifie que la quantité d'hydrogène dans la citerne de la micro-usine au début de la tournée du véhicule est H_0. La contrainte (4.3b) signifie que la quantité d'hydrogène dans la citerne à la fin du processus doit au moins être égale à H_0. La contrainte (4.3c) signifie que durant toute la tournée, la quantité d'hydrogène dans la citerne de la micro-usine ne dépasse pas la capacité maximal C^{Tank} de la citerne. La contrainte (4.3d) signifie que le stock d'hydrogène dans la citerne à la période i diminue de la quantité d'hydrogène donnée au véhicule pendant la période i (s'il y a recharge) et augmente de la quantité d'hydrogène produite à la période i (s'il y a production).

4.4.4 Contraintes du problème VD

Les contraintes du problème **VD** sont :

$$V_0^{Veh} = E_0 \tag{4.4a}$$
$$V_{M+1}^{Veh} \geqslant E_0 \tag{4.4b}$$
$$V_j^{Veh} \leqslant C^{Veh} \qquad \forall j = 1, \ldots, M+1 \tag{4.4c}$$
$$V_j^{Veh} \geqslant \varepsilon_j \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.4d}$$
$$V_{j+1}^{Veh} = V_j^{Veh} - e_j + x_j \times (e_j - \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}^*) + L_j \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.4e}$$
$$L_j \geqslant 0 \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.4f}$$
$$L_j \leqslant C^{Veh} \times x_j \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.4g}$$
$$L_j \leqslant C^{Veh} + \varepsilon_j - V_j^{Veh} \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.4h}$$

$$T_0 = 0 \tag{4.5a}$$
$$T_{M+1} \leqslant TMax \tag{4.5b}$$
$$T_{j+1} \geqslant (1 - x_j) \times (T_j + t_j) + x_j \times (T_j^* + p + d_{j+1}^*) \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.5c}$$
$$T_j^* \geqslant T_j + d_j \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.5d}$$

La contrainte (4.4a) signifie que lorsque le véhicule commence sa tournée au dépôt initial $Depot = 0$, la quantité d'hydrogène dans son réservoir est E_0. Cette valeur est une donnée. La contrainte (4.4b) signifie que le véhicule arrive au dépôt final $Depot = M + 1$ avec au moins la quantité d'hydrogène E_0 qu'il avait au dépôt initial $Depot = 0$. La contrainte (4.4c) signifie que durant toute la tournée, la quantité d'hydrogène dans le réservoir du véhicule ne dépasse pas sa capacité maximal C^{Veh} car le réservoir d'hydrogène a une capacité limitée. La contrainte (4.4d) signifie qu'à tout moment après une station, le véhicule doit pouvoir se rendre à la micro-usine et faire le plein, et s'appuie sur l'inégalité triangulaire pour les coefficients énergétiques e_j et ε_j. La contrainte (4.4e) signifie que lorsque le véhicule est à la station j, s'il décide de continuer sa tournée en allant à la station $j + 1$ alors la quantité d'hydrogène dans son réservoir diminue de e_j. De plus, elle signifie aussi que lorsque le véhicule est à la station j, s'il décide de partir se recharger alors la quantité d'hydrogène dans son réservoir diminue du détour induit $\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}^*$ et augmente de la quantité d'hydrogène rechargée. Les contraintes (4.4f), (4.4g) et (4.4h) signifient que la quantité d'hydrogène L_j rechargée par le véhicule ne doit jamais être plus grande que la capacité maximal du véhicule et la différence entre C^{Veh} et la recharge courante du réservoir du véhicule. Nous devons néanmoins veiller à éviter de produire plus que nécessaire.

La contrainte (4.5a) signifie que le véhicule commence sa tournée au dépôt initial $Depot = 0$ à la date 0. La contrainte (4.5b) signifie le véhicule arrive au dépôt final $Depot = M + 1$ au plus tard à la date $TMax$. La contrainte (4.5c) signifie que lorsque le véhicule est à la station j, s'il décide de continuer sa tournée en allant à la station $j + 1$ alors sa date d'arrivée T_j à la station j augmente de t_j. Alors que, si le véhicule décide de partir se recharger alors sa date d'arrivée à la station $j + 1$ est $T_j^* + p + d_{j+1}^*$. La contrainte (4.5d) signifie que le véhicule peut commencer sa recharge lorsqu'il est arrivé à la micro-usine.

4.4.5 Contraintes de synchronisation

Pour obtenir une formulation complète, nous devons expliquer la façon dont les activités du véhicule et de la micro-usine sont synchronisées. Pour cela, il faut introduire une variable de synchronisation $U = (U_{i,j}, i = 0, \ldots, N-1, j = 0, \ldots, M)$ prenant des valeurs booléennes, qui nous indiqueront, dans le cas où le véhicule décide de faire le plein entre la station j et la station $j+1$, durant quelle période i il le fera.

$$U_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si le véhicule se recharge en hydrogène durant la période i lors de sa tournée de j à j + 1.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous complétons notre formulation **SMEPC** avec les contraintes de synchronisation suivantes :

$$\sum_{i=0,\ldots,N-1} U_{i,j} = x_j \qquad \forall j = 0, \ldots, M \qquad (4.6a)$$

$$\delta_i = \sum_{j=0,\ldots,M} U_{i,j} \qquad \forall i = 0, \ldots, N-1 \qquad (4.6b)$$

$$T_j^* \geqslant \sum_{i=0,\ldots,N-1} p \times i \times U_{i,j} \qquad \forall j = 0, \ldots, M \qquad (4.6c)$$

$$x_j = 1 \rightarrow \sum_{i=0,\ldots,N-1} p \times i \times U_{i,j} \geqslant T_j + d_j \qquad \forall j = 0, \ldots, M \qquad (4.6d)$$

$$L_i^* \geqslant \sum_{j=0,\ldots,M} U_{i,j} \times L_j \qquad \forall i = 0, \ldots, N-1 \qquad (4.6e)$$

Les contraintes (4.6) signifient que le véhicule se recharge en hydrogène durant une unique période $i = 0, \ldots, N-1$ lors de sa tournée de la station j à la station $j+1$. De plus, la quantité rechargée est au moins L_j.

Formulation par prog linéaire en variable mixtes

4.5 $MILP_{SMEPC}$: Une formulation de programmation linéaire ~~en nombres entiers mixtes~~

Dans la ~~section~~ le paragraphe précédent nous avons associé au

Da~~ns le~~ modèle mathématique, nous avons utilisé une formulation logique, facile à transformer en MIP : Mixed-Integer Program avec la technique du Big M. Pour obtenir le MIP du problème **SMEPC**, il suffit de linéariser d'abord les contraintes contenant une implication (4.2c) et (4.6d). Ensuite de linéariser les contraintes quadratiques (4.5c) et (4.6e).

Le tableau (4.3) regroupe la linéarisation des contraintes du modèle. La variable m est une variable de linéarisation du modèle. On appellera ce programme linéaire à variables entières mixtes $MILP_{SMEPC}$.

pbm SMEPC une formulation ~~à~~ mathématique avec certaines contraintes linéaires et d'autres plutôt logiques. Ici, nous linéarisons ces dernières en nous servant des big M lorsque c'est nécessaire.

$MILP_{SMEPC}$ avec le même coût. 1

Soit $\bar{J}$ l'ensemble des indices $j \in \{0, \ldots, M\}$ pour lesquels x_j prend la valeur un. En appliquant les contraintes (4.4a) et (4.4e), la quantité d'hydrogène dans le réservoir du véhicule V^{Veh} est calculée de façon itérative de la manière suivante : si $j \in \bar{J}$, alors $\bar{V}^{Veh}_{j+1} = \bar{V}^{Veh}_j - \varepsilon_j + \bar{L}_j - \varepsilon^*_{j+1}$, ~~alors~~ ~~sinon~~ autrement $\bar{V}^{Veh}_{j+1} = \bar{V}^{Veh}_j - e_j$.

Comme le véhicule se rend directement à la station suivante après avoir été rechargé durant une période, $\bar{T}^*$ peut être choisi de telle sorte que :

$\bar{T}^*_j = \bar{T}_{j+1} - d^*_{j+1} - p$ et $\bar{T}^*_j \in \{0, p, \ldots, (N-1) \times p\}$, pour $j \in \bar{J}$.

Lorsque j n'appartient pas à $\bar{J}$, T^*_j peut prendre n'importe quelle valeur non négative. La validité de la tournée du véhicule est conditionnée par le fait que les vecteurs T et T^* vérifient le bloc de contraintes linéarisées (4.5).

De plus, un indice $\hat{i}(j)$ peut être attribué à chaque j dans $\bar{J}$, en prenant $\hat{i}(j) \times p = \bar{T}^*_j$. Soit $\bar{I} = \{\hat{i}(j) : j \in \bar{J}\}$. On peut supposer que $\delta_i = 1$, $L^*_i = L_j$ pour $i \in \bar{I}$, et $\delta_i = L^*_i = 0$ sinon.

De même, $U_{i,j} = 1$ si $i = \hat{i}(j), j \in \bar{J}$, et $U_{i,j} = 0$ sinon.

Soit $\bar{I}^A = \{i \in [\![0, N-1]\!] : \bar{z}_i = 1\}$. $\bar{I}^A$ peut être divisé en intervalles disjoints de la forme $[f_k, g_k]$, $k = 1, \ldots, q$, sur lesquels la micro-usine est active. Notons que $\bar{z}_{f_k - 1} = 0 = \bar{z}_{g_k+1}$, si $f_k > 0$, $g_k < N-1$, $1 \leqslant k \leqslant N-1$. Comme la micro-usine ne peut pas être active pendant que le véhicule fait le plein, $\bar{I} \cap \bar{I}^A = \varnothing$, ceci implique que (4.2b) est satisfait.

Définissons $\bar{y}_i$:

$$\bar{y}_i = \begin{cases} 1 & \text{si i} = f_k, \text{ pour un certain } k \leqslant q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(4.2a)-(4.2c) sont donc vérifiés par $\bar{y}$ et $\bar{z}$. A partir de (4.3a), l'application itérative de l'équation (4.3d) nous permet de déterminer le volume V^{Tank}_i, pour $i = 0, \ldots, N-1$. Toutes les autres inégalités sont des contraintes de capacité qui sont nécessairement satisfaites par une solution réalisable de SMEPC.

Réciproquement, considérons une solution optimale réalisable

$(\bar{y}, \bar{\delta}, \bar{x}, \bar{L}, \bar{z}, \bar{L}^*, \bar{T}, \bar{T}^*, \bar{V}^{Veh}, \bar{V}^{Tank}, \bar{U})$

de $MILP_{SMEPC}$.

Par les contraintes ((4.6a)-(4.6b)), le vecteur $\bar{U}$ définit une correspondance $j \leftarrow \hat{i}(j)$ entre les ensembles $\bar{J} = \{j \in \{0, \ldots, M\} : \bar{x}_j = 1\}$ et $\bar{I} = \{i \in \{0, \ldots, N-1\} : \delta_i = 1\}\}$. Cette correspondance est cohérente avec l'ordre linéaire standard : si $j_1 < j_2$ alors $\hat{i}(j_1) < \hat{i}(j_2)$. En effet, les inégalités (4.5a)-(4.5b) assurent que $T_{j+1} > T_j$, $\forall j$ et $T_{j+1} > T^*_j > T_j$, $\forall j \in \bar{J}$. Donc $T^*_{j_2} > T_{j_2} \geqslant T_{j_1+1} > T^*_{j_1}$. D'après (4.6c)-(4.6d), nous déduisons que $\hat{i}(j_2) \times p > T_{j_2} > T_{j_1} \geqslant \hat{i}(j_1) \times p$. Par conséquent, $\hat{i}(j_1) < \hat{i}(j_2)$.

Par optimalité de la solution, les contraintes (23), (4.5c) et (4.6c) sont serrées. Ainsi, $\bar{T}$ définit date du véhicule. Comme $L^*_{\hat{i}(j)} = L_j$, $j \in \bar{J}$ d'après les contraintes linéarisées 4.6e, le réservoir du véhicule et de la micro-usine ont des volumes réalisables en raison des contraintes de type de flux et de capacité.

Nous concluons qu'une solution de SMEPC peut être extraite de la solution optimale réalisable de $MILP_{SMEPC}$, les deux ayant le même coût. $\blacksquare$

On vient de modéliser le problème **SMEPC** en présentant ses variables, sa fonction objectif et ses contraintes. La partie qui suit est consacré à la présentation de la relaxation linéaire de la formulation $MILP_{SMEPC}$.

Numéro	Contraintes	Bornes	Linéarisation
4.2a	$z_0 - y_0 = 0,\ \delta_0 = 0$		
4.2b	$z_i + \delta_i \leqslant 1$	$\forall i = 0,\ldots,N-1$	
4.2c	$y_i = 1 \rightarrow (z_{i-1} = 0 \wedge z_i = 1)$	$\forall i = 1,\ldots,N-1$	$y_i - z_i \leqslant 0$ $y_i + z_{i-1} \leqslant 1$ $z_i - z_{i-1} - y_i \leqslant 0$
4.3a	$V_0^{Tank} = H_0$		
4.3b	$V_N^{Tank} \geqslant H_0$		
4.3c	$V_i^{Tank} \leqslant C^{Tank}$	$\forall i = 0,\ldots,N-1$	
4.3d	$V_{i+1}^{Tank} = V_i^{Tank} + z_i \times R_i - L_i^*$	$\forall i = 0,\ldots,N-1$	
4.3e	$L_i^* \geqslant 0$	$\forall i = 0,\ldots,N-1$	
4.3f	$L_i^* \leqslant C^{Tank} \times \delta_i$	$\forall i = 0,\ldots,N-1$	
4.4a	$V_0^{Veh} = E_0$		
4.4b	$V_{M+1}^{Veh} \geqslant E_0$		
4.4c	$V_j^{Veh} \leqslant C^{Veh}$	$\forall j = 1,\ldots,M+1$	
4.4d	$V_j^{Veh} \geqslant \varepsilon_j$	$\forall j = 0,\ldots,M$	
4.4e	$V_{j+1}^{Veh} = V_j^{Veh} - e_j + (e_j - \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}^*) \times x_j + L_j$	$\forall j = 0,\ldots,M$	
4.4f	$L_j \geqslant 0$	$\forall j = 0,\ldots,M$	
4.4g	$L_j \leqslant C^{Veh} \times x_j$	$\forall j = 0,\ldots,M$	
4.4h	$L_j \leqslant C^{Veh} + \varepsilon_j - V_j^{Veh}$	$\forall j = 0,\ldots,M$	
4.5a	$T_0 = 0$		
4.5b	$T_{M+1} \leqslant TMax$		
4.5c	$T_{j+1} \geqslant (1 - x_j) \times (T_j + t_j) + x_j \times (T_j^* + p + d_{j+1}^*)$	$\forall j = 0,\ldots,M$	$T_{j+1} - T_j - t_j \geqslant -2 \times TMax \times x_j$ $T_{j+1} - (T_j^* + p + d_{j+1}^*) \geqslant -2 \times TMax \times (1 - x_j)$
4.5d	$T_j^* \geqslant T_j + d_j$	$\forall j = 0,\ldots,M$	
4.6a	$\sum_{i=0,\ldots,N-1} U_{i,j} = x_j$	$\forall j = 0,\ldots,M$	
4.6b	$\delta_i = \sum_{j=0,\ldots,M} U_{i,j}$	$\forall i = 0,\ldots,N-1$	
4.6c	$T_j^* \geqslant \sum_{i=0,\ldots,N-1} p \times i \times U_{i,j}$	$\forall j = 0,\ldots,M$	
4.6d	$x_j = 1 \rightarrow \sum_{i=0,\ldots,N-1} p \times i \times U_{i,j} \geqslant T_j + d_j$	$\forall j = 0,\ldots,M$	$\sum_{i=0,\ldots,N-1} p \times i \times U_{i,j} \geqslant T_j + d_j - 2 \times TMAX \times (1 - x_j)$
4.6e	$L_i^* = \sum_{j=0,\ldots,M} U_{i,j} \times L_j$	$\forall i = 0,\ldots,N-1$	$L_i^* = \sum_{j=0,\ldots,M} m_{i,j}$ $m_{i,j} \geqslant 0$ $m_{i,j} \leqslant C^{Veh} \times U_{i,j}$ $m_{i,j} \leqslant L_j$ $m_{i,j} \geqslant L_j - C^{Veh} \times (1 - U_{ij})$

TABLE 4.3 – Linéarisation des contraintes.

$L_j \leq L_i^* + (C^{HP} + C^{Veh})(1 - U_{ij})$

$L_i^* \leq L_j + (\ldots)$

$U_{ij} \geq 0$

(L, V ne sont pas forcément entiers
Pourquoi parler de PL mixte alors ?)

Théorème 2 *$MILP_{SMEPC}$ a une solution réalisable si et seulement si SMEPC a une solution ~~avec le~~ de même coût.*

Démonstration

Considérons une solution optimale $(\bar{z}, \bar{T}, (\bar{L}, \bar{x}))$ de SMEPC, qui décrit respectivement le programme d'activité de la micro-usine, l'horaire d'arrivée des véhicules aux stations et la politique de recharges en carburant du véhicule. Nous vérifions qu'elle peut être transformée en une solution réalisable du

4.6 $RMILP_{SMEPC}$: Relaxation linéaire de la formulation $MILP_{SMEPC}$ et contraintes additionnelles STC et EC

On désigne par $RMILP_{SMEPC}$ la relaxation linéaire de $MILP_{SMEPC}$, et par $\bar{Z}_r$ sa valeur optimale. Souvent, les techniques de BigM induisent des relaxations linéaires très faibles. Mais ici, nous avons ce qui suit.

Lemme 0 : $\bar{Z}_r = 0$, réalisable

Lemme 1 *Si $RMILP_{SMEPC}$ est faisable alors $\bar{Z}_r > 0$.*

Démonstration

Version anglaise

Supposons au contraire qu'il existe une solution optimale $(\bar{y}, \bar{\delta}, \bar{x}, \bar{L}, \bar{z}, \bar{L}^*, \bar{T}, \bar{T}^*, \bar{V}^{Veh}, \bar{V}^{Tank}, \bar{U})$ de $RMILP_{SMEPC}$ telle que $\bar{Z}_r = 0$. Nécessairement $\bar{y}_i = \bar{z}_i = 0$, pour $i = 0, \ldots, N-1$.

Si $RMILP_{SMEPC}$ admet une solution optimale $(\bar{y} \ldots)$ telle que $\bar{Z}_r = 0$ alors

Puis de (4.3d) on obtient que $V_{i+1}^{Tank} = V_i^{Tank} - L_i^*$, pour $i = 0, \ldots, N-1$. Par (4.3a) et (4.3b), $L_i^* = 0$, pour $i = 0, \ldots, N-1$. La première équation de la linéarisation de (4.6e) implique que $m_{i,j} = 0$, pour $j = 0, \ldots, M$, $i = 0, \ldots, N-1$. Des deux dernières équations de la linéarisation de (4.6e), $L_j = 0$, pour $j = 0, \ldots, M$. Dorénavant, (4.4e) donne $V_{j+1}^{Veh} < V_j^{Veh}$, pour $j = 0, \ldots, M$. Mais ceci contredit les conditions initiales et finales (4.4a) et (4.4a).

Pour obtenir le modèle fractionnaire correspondant au modèle linéaire présenté dans la section suivante, il suffit de rendre toutes les variables du modèle linéaire réelles. Les variables deviendront :

- ☐ $z = (z_i, i = 0, \ldots, N-1)$, $z_i \in [0,1]$;
- ☐ $y = (y_i, i = 0, \ldots, N-1)$, $y_i \in [0,1]$;
- ☐ $V^{Tank} = (V_i^{Tank}, i = 0, \ldots, N)$, $V^{Tank} \in \mathbb{R}^+$;
- ☐ $\delta = (\delta_i, i = 0, \ldots, N-1)$, $\delta_i \in [0,1]$;
- ☐ $L^* = (L_i^*, i = 0, \ldots, N-1), L^* \in \mathbb{R}^+$;
- ☐ $x = (x_j, j = 0, \ldots, M)$, $x_j \in [0,1]$;
- ☐ $L = (L_j, j = 0, \ldots, M)$, $L_j \in \mathbb{R}^+$;
- ☐ $T = (T_j, j = 0, \ldots, M+1)$, $T_j \in \mathbb{R}^+$;
- ☐ $T^* = (T_j^*, j = 0, \ldots, M+1)$, $T_j^* \in \mathbb{R}^+$;
- ☐ $V^{Veh} = (V_j^{Veh}, j = 0, \ldots, M+1)$ $V_j^{Veh} \in \mathbb{R}^+$
- ☐ $U_{i,j} \in [0,1]$
- ☐ $m_{i,j} \in [0,1]$.

Après avoir exécuté le modèle fractionnaire tel qu'il est actuellement sur quelques instances, on constate que les valeurs valent toutes 0. ?

Pour servir de base à une réflexion sur la relaxation linéaire, on propose les inéquations (4.7a), (4.7b), (4.7c), (4.7d) pour renforcer la formulation de la relaxation linéaire actuellement à 0 !

$$
\begin{aligned}
T_{j+1} &\geqslant T_j + t_j && \forall j = 0,\ldots,M && (4.7a)\\
T^*_{j+1} &\geqslant T^*_j && \forall j = 0,\ldots,M && (4.7b)\\
\sum_{i=0,\ldots,N-1} m_{i,j} &\geqslant L_j && \forall j = 0,\ldots,M && (4.7c)\\
L_j &\geqslant x_j \times \varepsilon_j && \forall j = 0,\ldots,M && (4.7d)
\end{aligned}
$$

L'équation (4.7a) traduit la croissance des dates de passage du véhicule aux stations. En utilisant l'équation (4.7a) et l'inégalité triangulaire $t_j + d_{j+1} \geqslant d_j$ on pourrait chercher une solution réalisable qui la satisferait (4.7b). L'équation (4.7c) assure un démarrage minimal de l'usine qui ne fait rien pour le moment. L'équation (4.7d) permet de forcer une recharge si la variable x_j est strictement positive. Elle sous-entend qu'une recharge comble au moins le trajet à la station, sinon il est inutile d'y aller.

Si on ajoute ces contraintes au modèle linéaire, on doit remplacer l'équation (4.7d) par (4.8). (4.8) permet aussi de forcer une recharge si la variable x_j est strictement positive. Elle remplace la précédente tout en étant indolore pour le PLNE.

$$L_j \geqslant x_j \times (\varepsilon_j + \varepsilon^*_{j+1} - e_j) \quad \forall j = 0,\ldots,M \qquad (4.8)$$

alors que $z_r > 0$

On a constaté que l'introduction des inéquations (4.7a), (4.7b), (4.7c),(4.8) ne changeait pas la solution optimale entière. La relaxation linéaire n'est plus nulle et atteint environ 50% de la valeur optimale.

cohérente ?

On propose les inéquations supplémentaires (4.9) et (4.10).

$$T_{j+1} \geqslant T_j + t_j + x_j \times (d_j + d^*_{j+1} - t_j) \quad \forall j = 0,\ldots,M \qquad (4.9)$$

La contrainte (4.9) permettrait une certaine influence entre les temps de passage aux stations et les détours pour recharge.

j_0

$$j0 = 0,\ldots,j-1, \sum_{k=0,\ldots,i} U_{kj} + \sum_{k=i,\ldots,N-1} U_{k,j0} \leqslant 1 \quad \forall i = 0,\ldots,N-1; \forall j = 0,\ldots,M \qquad (4.10)$$

Théorème 3 *Les inéquations (4.10) sont valides.*

Démonstration

Soient $j0$ et j deux indices de station tels que $j0 < j$. On a $\sum_{k=i,\ldots,N-1} U_{k,j0} \leqslant x_{j0}$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant N-1$. Si $x_{j0} = 0$ (resp. $x_j = 0$), alors $\sum_{k=i,\ldots,N-1} U_{k,j0} = 0$ (resp. $\sum_{k=0,\ldots,i} U_{kj} = 0$) et donc l'inéquation (4.10) est évidemment vérifiée pour tout $0 \leqslant i \leqslant N-1$.

On suppose que $x_{j0} = x_j = 1$. Alors il existe un indice unique i_0 tel que $u_{i0,j0} = 1$. Comme $\sum_{k=i,\ldots,N-1} U_{k,j0} = 1$ pour tout $i > i_0$, l'inéquation (4.10) est encore vérifiée lorsque $i > i_0$. On remarque alors que $\sum_{k=i,\ldots,N-1} U_{k,j0} = \sum_{k=i_0,\ldots,N-1} U_{k,j0} = 1$ pour tout $i \leqslant i_0$. La station j est placée après $j0$. On sait que $T_j > T_{j0}$, par conséquent l'intervalle de recharges pour j intervient après celui de j_0. Donc $\sum_{k=0,\ldots,i_0} U_{kj} = 0$ et l'inéquation (4.10) est satisfaite.

On a constaté que l'introduction des inéquations (4.9), et (4.10) ne changeait pas la solution optimale entière.

4.6.1 Contraintes additionnelles EC et STC

Plusieurs contraintes peuvent être ajoutées pour renforcer la relaxation linéaire. Pour atteindre cet objectif nous introduisons les données suivantes.

Pour tout $j = 1, \ldots, M$, nous fixons :

$D_j = \sum_{k=0,\ldots,j-1} t_k + d_j$: la date d'arrivée la plus proche à la micro-usine pour une première recharge après la station j ;

$D_j^* = d_{j+1}^* + \sum_{k=j+1,\ldots,M} t_k$: la date la plus tardive pour terminer le trajet après avoir fait le plein à la station j ;

$\tau_m(j) = \lceil \frac{D_j}{p} \rceil$: la période la plus proche d'une éventuelle recharge à la station j ;

$\tau_M(j) = N - 1 - \lceil \frac{D_j^*}{p} \rceil$: la période la plus tardive d'une recharge possible à la station j.

Contraintes STC : ***Simple Time Constraints***

$$T_{j+1}^* \geqslant T_j^* \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.11a}$$

$$T_{j+1} \geqslant T_j + t_j + x_j \times (d_j + d_{j+1}^* - t_j) \qquad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.11b}$$

Les inégalités (4.11a) et (4.11b) sont directement considérés comme valides pour $MILP_{SMEPC}$. (4.11a) et (4.11b) assurent que les temps forment des séquences non décroissantes.

Contraintes EC : ***Energy Constraints***

$$L_j \geqslant x_j \times (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}^* - e_j) \quad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.12}$$

En considérant (4.12), le véhicule quittant une station quelconque arrivera à la suivante avec plus d'hydrogène après une recharge que s'il suivait la route directe entre les deux stations.

ou

$$U_{i,j} = 0, i < \tau_m(j) \| i > \tau_M(j) \quad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.13}$$

Les inégalités (4.13) reflètent simplement les définitions de $\tau_m(j)$ et $\tau_M(j)$, pour tout j.

$$\sum_{i=0,\ldots,\tau_M(j)} L_i^* \geqslant \sum_{k=0,\ldots,j} L_k \quad \forall j = 0, \ldots, M \tag{4.14}$$

(4.14) exprime le fait que la quantité totale rechargée par le véhicule à la station j ne dépasse pas la quantité totale d'hydrogène fournie par la micro-usine jusqu'à $\tau_M(j)$. (4.14) a les conséquences suivantes.

Soit $F_{j+1} = F_j + e_j + x_j \times (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1}^* - e_j)$ avec $F_0 = 0$. F_j est l'énergie utilisée par le véhicule de 0 à j.

D'après (4.3d) et (4.4e), on a les contraintes (4.15a) et (4.15b).

$$V_{j+1}^{Veh} = E_0 - F_{j+1} + \sum_{k=0,\dots,j} L_k \qquad \forall j = 0,\dots,M \tag{4.15a}$$

$$V_{\tau_M(j)+1}^{Tank} = H_0 + \sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} R_i \times z_i - \sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} L_i^* \qquad \forall j = 0,\dots,M \tag{4.15b}$$

Donc, on a les contraintes (4.16a) et (4.16b).

$$E_0 + \sum_{k=0,\dots,j} L_k \geqslant F_{j+1} \qquad \forall j = 0,\dots,M \tag{4.16a}$$

$$H_0 + \sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} R_i \times z_i \geqslant \sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} L_i \qquad \forall j = 0,\dots,M \tag{4.16b}$$

On obtient donc :
EC1 : ce sont les contraintes (4.17a) et (4.17b)

$$\sum i = 1,\dots,\tau_M(j) R_i \times z_i \geqslant F_{j+1} - E_0 - H_0 \qquad \forall j = 0,\dots,M \tag{4.17a}$$

$$\sum_{i=1,\dots,N-1} R_i \times z_i \geqslant F_{M+1} \tag{4.17b}$$

La variable binaire y_i est égale à 1 lorsque la micro-usine est activée à la période i. Ainsi, la valeur $\sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} y_i$ indique le nombre d'intervalles de production entre les périodes 0 et $\tau_M(j)$. Pendant chacun de ces intervalles, la production d'hydrogène ne peut pas dépasser la capacité de la micro-usine. Par conséquent on a la contrainte (4.18).

$$C^{Tank} \times \sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} y_i \geqslant \sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} R_i \times z_i \quad j = 0,\dots,M \tag{4.18}$$

D'après (4.17a), cela implique qu'on a les contraintes (4.19a) et (4.19b).
EC2 :

$$C^{Tank} \times \sum_{i=0,dots,\tau_M(j)} y_i \geqslant F_j - E_0 - H_0 \qquad \forall j = 0,\dots,M \tag{4.19a}$$

$$C^{Tank} \times \sum_{i=0,\dots,N-1} y_i \geqslant F_{M+1} \tag{4.19b}$$

De la même manière, à partir de (4.3f), on a la contrainte (4.20).

$$\sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} C^{Tank} \times \delta_i \geqslant \sum_{i=0,\dots,\tau_M(j)} L_i^* \quad \forall j = 0,\dots,M : \tag{4.20}$$

Nous obtenons donc les contraintes (4.21a) et (4.21b).
EC2' :

$$C^{Tank} \times \sum_{i=0,\ldots,\tau_M(j)} \delta_i \geqslant F_j - E_0 \qquad \forall j = 0,\ldots,M \tag{4.21a}$$

$$C^{Tank} \times \sum i = 0,\ldots,N-1\delta_i \geqslant F_{M+1} \tag{4.21b}$$

De façon similaire à (4.14), on peut voir qu'on a la contrainte (4.22).

$$\sum_{i=\tau_m(j),\ldots N-1} L_i^* \geqslant \sum_{k=j,\ldots,M} L_k \quad \forall j = 0,\ldots,M \tag{4.22}$$

(4.22) exprime le fait que la quantité totale rechargée par le véhicule à partir de la station j ne dépasse pas la quantité totale d'hydrogène fournie par la micro-usine à partir de $\tau_m(j)$. Elle peut également être utilisée pour générer des inégalités similaires à celles de type (4.17a) et (4.19a).

Enfin, nous proposons quelques inégalités de couverture. Tout d'abord, posons $\mu_j^0 = \sum_{k=0,\ldots,j-1} e_k + \varepsilon_j$, pour tout $j = 1,\ldots,M$. μ_j^0 est la consommation d'énergie du véhicule qui commence au dépôt et finit à la micro-usine avant de faire le plein à la station j. Ensuite, $\mu_j^* = \varepsilon_{j+1}^* + \sum_{k=j+1,\ldots,M} e_k$ pour tout $j = 0,\ldots,M$. μ_j^* est la consommation d'énergie du véhicule partant de la micro-usine après une recharge en j et et finissant au dépôt.

En fonction du fait que la consommation minimale du véhicule dépasse la quantité initiale d'hydrogène ou la capacité de son réservoir, les contraintes (4.23a) et (4.23b) peuvent être obtenues.

EC3 :

$$\sum_{k=0,\ldots,j} x_k \geqslant 1 \qquad \forall j = 0,\ldots,M \mid \mu_j^0 > E_0 \tag{4.23a}$$

$$\sum_{k=j+1,\ldots,M} x_k \geqslant 1, \qquad \forall j = 0,\ldots,M \mid \mu_j^* > C^{Veh} - E_0 \tag{4.23b}$$

4.7 Étude structurelle et B&C

→ Expliquer le rôle des variables U_{ij} → rappeler la cte $\sum U_{ij} = 1$

Une contrainte antagoniste est basée sur le fait que si on a deux recharges : une à la période i_1 (entre la station j_1 et la station $j_1 + 1$) et une à la période i_2 (entre la station j_2 et la station $j_2 + 1$). cela implique que le véhicule visite forcément la station j_1 avant la station j_2.

Une contrainte Time-inconsistent est basée sur le fait que si on a deux recharges : une à la période i_1 (entre la station j_1 et la station $j_1 + 1$) et une à la période i_2 (entre la station j_2 et la station $j_2 + 1$). cela implique que le nombre de périodes qui sépare la date de visite de la station j_1 de la date de visite de la station j_2 est au moins égal au nombre de périodes qu'il faut pour se déplacer de j_1 à j_2 sans se recharger.

4.7.1 Variables principales

Parmi toutes les inconnues, les variables de décision $(z_i, i = 0,\ldots,N-1)$ et $(U_{i,j}, i = 0,\ldots,N-1, j = 0,\ldots,M)$ jouent un rôle central.

En effet, supposons que les variables (z_i) et $(U_{i,j})$ sont données. Ensuite, en appliquant (4.6a) et (4.6b), (x_j) et (δ_i) sont déterminés, et en conséquence, la compatibilité de (z_i) et $(U_{i,j})$ est vérifiée avec (4.2b). Ensuite, les (y_i) qui indiquent l'activation de la micro-usine sont simplement calculés à partir de (4.2a)-(4.2c).

Nous obtenons ainsi deux modèles de flux, (4.3a)-(4.3f) pour la gestion de la micro-usine et (4.4a)-(4.4h) pour l'évolution du réservoir du véhicule. Ces deux systèmes sont synchronisés à travers les variables $(m_{i,j})$ au sein de (4.6e) et les dates sont calculées séquentiellement par (4.5a)-(4.5b), (4.6c)-(4.5d). Ces remarques confirment le fait que (z_i) et $(U_{i,j})$ sont les variables principales de notre formulation. Nous pensons donc que toute inégalité impliquant ces variables pourrait améliorer la relaxation linéaire. Dans la suite, nous utilisons le graphe biparti complet $G = (I + J, E)$ où les sommets peuvent être partitionnés en deux ensembles indépendants I et J avec $I = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ et $J = \{0, 1, \ldots, M\}$ et l'ensemble des arêtes $E = \{(i,j) : 0 \leqslant i \leqslant N-1, 0 \leqslant j \leqslant M\}$.

4.7.2 Correspondances non croisées

Nous disons que deux arêtes (i,j) et (i',j') d'une correspondance dans G sont croisées si $j < j'$ et $i > i'$. Une correspondance C est dite non croisée si C n'a pas de paire d'arêtes croisées. Soit (z_i) et $(U_{i,j})$ une solution réalisable de $MILP_{SMEPC}$. Grâce à (4.6a) et (4.6b), l'ensemble d'arêtes $C(U) = \{(i,j) : U_{i,j} = 1, 0 \leqslant i \leqslant N-1, 0 \leqslant j \leqslant M\}$ est une correspondance dans G. De plus, en raison des contraintes de temps (4.5a)-(4.5b) et (4.6c)-(4.5d), l'ensemble d'arêtes $C(U)$ ne possède aucune paire croisée.

Ainsi, nous cherchons des contraintes valides pour les correspondances non croisées. Nous associons à G un digraphe acyclique $H = (V(H), A(H))$ comme suit : $V(H) = \{(i,j) : 0 \leqslant i \leqslant N-1, 0 \leqslant j \leqslant M\}$, L'ensemble d'arêtes $A(H)$ contient les arcs de la forme $((i,j),(i,j-1))$, pour $1 \leqslant j \leqslant M$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$ et $((i,j),(i+1,j))$, pour $0 \leqslant i \leqslant N-2$, $0 \leqslant j \leqslant M$.

Notez que $V(H) = E(G)$, et les sommets $(0, M)$ et $(N-1, 0)$ sont le puit et le réservoir de H, respectivement. Tous les chemins maximaux dans H sont de longueur $N + M - 1$. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les chemins maximaux dans H et par $E(P)$ les arêtes de E qui correspondent aux sommets de P, pour $P \in \mathcal{P}$. Le graphe H induit un ordre sur les sommets de $V(H)$ tel que $(i_1, j_1) \preceq (i_2, j2)$ si (i_2, j_2) est atteignable dans H à partir de (i_1, j_1).

Étant donné un plus long chemin $P \in \mathcal{P}$, la contrainte (4.24) est appelée la contrainte antagoniste associée à P.

$$\sum_{(i,j) \in E(P)} U_{i,j} \leqslant 1 \tag{4.24}$$