Topologia

$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$
$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ igualtat si f injectiva.
$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}$
$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}$
$f^{-1}(B - Y) = A - f^{-1}(Y)$
$X \subset f^{-1}(f(X))$ igualtat si f injectiva.
$f^{-1}(f(Y)) \subset Y$ igualtat si f exhaustiva.

Axiomàtica d'espai topològic

❶ $0, X \in \mathcal{T}$ ❷ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$ ❸ $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$
Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ diem que $\mathcal{T}'$ és mes fina que $\mathcal{T}$

Algunes topologies

❶ **Grollera:** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ ❷ **Discreta:** $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ ❸**Cofinita:** $A \subset X$ obert $\Leftrightarrow A = \emptyset$ o $X - A$ és finit
Propietat de Hausdorff. Donats dos punts $x \neq y$ existeixen oberts disjunts U, V tals que $x \in U, y \in V$.
Tot **espai mètric** és Hausdorff.
No són Hausdorff:

(a) X amb més d'un punt amb la topologia grollera.

(b) Un espai infinit amb la topologia cofinita

(c) $\mathbb{R}$ amb oberts $\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, x)\forall x \in \mathbb{R}$

Bases d'una topologia

$\mathcal{B}$ és una base d'una topologia si $\forall A$ obert d'X i tot punt $x \in A$, existeix un obert $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$. També és diu que $\mathcal{B}$ és una base d'oberts de X
Proposició 2.2 Sigui X un conjunt $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{B}$ compleix ❶ $\cup\mathcal{B} = X$ ❷ $\forall U, V \in \mathcal{B}$ i $\forall x \in U \cap V$, $\exists W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subset U \cap V$. Aleshores $\exists!$ topologia $\tau a X$ que compleix

1. $\mathcal{B}$ és una base de la topologia $\mathcal{T}$
2. $\mathcal{T}$ és la topologia més fina que conté $\mathcal{B}$

Entorns interior i adherència

A és un **entorn** de $x \in X$ si existeix un obert U tal que $x \in U \subset A$.
x és un punt interior de A si A és un entorn de x
L'interior de A és el conjunt de tots els punts interiors.

1. $\mathrm{Int}(A)$ és obert.
2. $\mathrm{Int}(A)$ és la unió de tots els oberts continguts a A.
3. $\mathrm{Int}(A)$ és l'obert més gran contingut a A.
   ($B \subset A$ obert $\implies B \subset \mathrm{Int}(A)$)
4. A és obert $\Leftrightarrow A = \mathrm{Int}(A)$

x és un punt adherent a A si tot entorn de x talla A
L'adherència de A és el conjunt de tots els punts adherents.

1. $\mathrm{Cl}(A)$ és tancat.
2. $\mathrm{Cl}(A)$ és intersecció de tots els tancats que contenen A.
3. $\mathrm{Cl}(A)$ és el tancat més petit que conté A
   ($A \subset T$ T tancat $\implies \mathrm{Cl}(A) \subset T$)
4. A és tancat $\Leftrightarrow A = \mathrm{Cl}(A)$

proposició 2.5 $\mathrm{Cl}(A) = X - \mathrm{Int}(X - A)$
definició 2.6 $A \subset X$ és dens si $\mathrm{Cl}(A) = X$
definició 2.7 La frontera d'un conjunt $A \subset X$ és defineix com $\partial A := \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X - A)$

Aplicacions contínues

f és **oberta** si la imatge de tot obert és obert.
f és **tancada** si la imatge de tot tancat és tancat.
f és **contínua** si la antiimatge de tot obert és obert.

Homeomorfísmes

$f : X \to Y$ diem que es homeomorfísme si compleix: f és contínua, bijectiva $f^{-1} : Y \to X$ contínua (o f és oberta)
Teorema 3.3 Siguin $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ aplicacions contínues. Suposem que es compleixen aquestes condicions:

1. f és exhaustiva i g és bijectiva
2. Z compleix la propietat de Hausdorff
3. X és homeomorf a un subesai tancat de $[0, 1]^n$, $n > 0$

Aleshores g és un homeomorfisme.

Subespais

Definició 4.1 Sigui X un espai topològic i $A \subset X$.Direm que $U \subset A$ és un obert de A si existeix un obert W (de X) tal que $U = A \cap W$
Els oberts de A formen la topologia induïda per la inclusió $A \subset X$. Diem que A és subespai de X

1. $T \subset A$ és tancat de A $\Leftrightarrow$ existeix un tancat $K \subset X$ tal que $T = A \cap K$.
2. Si A obert, llavors $U \subset A$ obert a A $\Leftrightarrow U$ obert a X.
3. Si A tancat, llavors $U \subset A$ tancat a A $\Leftrightarrow U$ tancat a X.
4. l'aplicació inclusió $i : A \hookrightarrow X$ és contínua.
5. la topologia induïda sobre A és la menys fina que fa que la inclusió $i : A \hookrightarrow X$ sigui contínua.
6. Si $f : X \to Y$ és contínua, aleshores $f|_A : A \to X$ també és contínua.
7. Si X espai mètric amb distància d, $A \subset X$ La topologia donada per la distància d i la topologia induïda per la topologia de X coincideixen.
8. $f : A \to X$ una aplicació, podem definir una topologia sobre A que tingui per oberts els conjunts $f^{-1}(U)$ per a cada obert U de X.

Continuïtat de funcions definides a trossos Siguin $X = A \cup B, Y$ espais topològics i sigui $f : X \to Y$ una aplicació. Suposem que $f|_A, f|_B$ són contínues. Aleshores:

1. Si A,B són oberts, f és contínua.
2. Si A, B són tancats, f és contínua.

La topologia producte

la **topologia producte** a $X \times Y$ és la topologia que té per base els conjunts de la forma $U \times V$ on U és obert de X i V és obert de Y. Anomenem els oberts $X \times Y$ **oberts bàsics**

1. les projeccions $\pi_X : X \times Y \to X$,$\pi_Y : X \times Y \to Y$ són contínues.
2. una aplicació $f : Z \to X \times Y$ és contínua si i només si els seus components són contínues, és a dir, si i només si $\pi_X f$ i $\pi_Y f$ són aplicacións contínues.
3. les projeccions π_X, π_Y són obertes. (En general no són tancades).
4. Si $f_i : X_i \to Y_i, i = 1, 2$ són aplicacions contínues, aleshores $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ també és contínua.
5. si $X_1 \cong X_2$ i $Y_1 \cong Y_2$, aleshores $X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2$
6. $X \times \{*\} \cong X$
7. $X \times Y \cong Y \times X$
8. si $A \subset X, B \subset Y$ i considerem $A \times B \subset X \times Y$. La topologia induïda sobre $A \times B$ com a subespai de $X \times Y$ i la topologia $A \times B$ considerant que A i B són espais topològics coincideixen.
9. $\mathbb{R}^n$ amb la topologia induïda per la distància euclidiana i la topologia producte $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ coincideixen.

(a) El tor com a producte de circumferències. $T \cong S^1 \times S^1$

(b) El cilindre. $\mathbb{R}^n - \{0\} \cong S^{n-1} \times \mathbb{R}$

El producte infinit

La **topologia producte** a ΠX_i és la topologia que té com a base d'oberts els productes $\Pi_{i\in I} U_i$ tals que ❶ Cada U_i és un obert de X_i. ❷ $U_i = X_i$ excepte per a un nombre finit de $i \in I$.
El **conjunt de Cantor C** és homeomorf a $\Pi_{i=1}^{\infty}\{a, b\}$

La topologia quocient

Suposem que X és un espai topològic, Y és un conjunt i $p : X \twoheadrightarrow Y$ és una aplicació exhaustiva. La **topologia quocient** a Y és la topologia que té per oberts els subconjunts $U \subset Y$ que tenen la propietat que $p^{-1}(U)$ és un obert de X.
Direm que «Y té la topologia quocient per p»

1. $p : X \to Y$ és continua.
2. La topologia quocient és la topologia més fina sobre Y que fa que $p : X \to Y$ sigui continua.
3. $T \subset Y$ és tancat si i només si $p^{-1}(T)$ és tancat de X.
4. Sigui $f : Y \to Z$ una aplicació. Es compleix qe f és continua si i només si f_p és continua.

(a) $[0, 1] \cong S^1$

(b) $(0, t) \sim (1, t)\,\forall t \in [0, 1]$. $I^2/\sim \cong S^1 \times [0, 1]$

(c) $(0, t) \sim (1, t)$ i $(s, 0) \sim (s, 1)\forall s, t \in [0, 1]$. $I^2/\sim \cong T^2$

(d) $(0, t) \sim (1, 1 - t)\,\forall t \in [0, 1]$. Banda de Moebius.

(e) El disc $D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$ quocient per la relació $(x, y) \sim (x, -y)\forall(x, y) \in S^1$ és l'esfera S^2.

(f) $(0,t) \sim (1,t)$ i $(s,0 \sim (1-s,1) \forall s,t \in [0,1]$. $I^2/\sim \cong$ Ampolla de Klein.

(g) El disc $D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| \leq 1\}$ quocient per la relació $(x,y) \sim (-x,-y) \forall (x,y) \in S^1$ és el pla projectiu $\mathbb{R}P^2$.

L'espai projectiu

L'**espai projectiu** de dimensió n $\mathbb{R}P^n$ és el conjunt de rectes de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passen per l'origen de coordenades.
$\mathbb{R}P^2 \cong D^2/\{(x,y) \sim (-x,-y) \forall (x,y) \in S^1 \subset D^2\}$
$\mathbb{R}P^n \cong S^n/\{-v \sim v\}$
$(M \sqcup D^2)/\sim \cong \mathbb{R}P^2$ on $\sim$ és la identificació natural entre $S^1 \subset D^2$ i $S^1 \sim \partial M$

Acció d'un grup sobre un espai

Una **acció d'un grup G sobre un espai topològic X** consisteix en tenir, per cada $g \in G$, una aplicació continua $\theta_g : X \to X$ de manera que ❶ θ_1 és la identitat $I : X \to X$. ❷ $\theta_g \theta_h = \theta_{gh} \forall g, h \in G$

(a) Hi ha una acció de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ donada per $k \cdot x := k + x$. Un domini fonamental és $D = [0,1)$.

(b) Hi ha una acció de $\mathbb{Z}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ donada per $(k_1, \ldots, k_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (k_1 + x_1, \ldots, k_n + x_n)$. Un domini fonamental és el cub $D = [0,1)^n$.

Quocient d'un espai per l'acció d'un grup

$x \sim y$ si i només si existeix $g \in G$ tal que gx=y. La aplicació de pas al quocient $\pi : X \to X/G := X/\sim$ és oberta.

(a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ amb l'acció $k \cdot x := k + x$

(b) $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ amb l'acció producte.

(c) el quocient de S^n per la acció antipodal és $\mathbb{R}P^2$.

(d) $R^2/\langle S, R\rangle \cong K$ amb l'acció $S(x,y) := (x, y+1), T(x,y) = (x+1, -y)$

(e) $[0,1] \times \frac{[0,1/2]}{\{(x,0) \sim (1-x,1/2),(0,y) \sim (1,y): x,y \in [0,1]\}} \cong K$

Espais compactes

recobriments

- $\{U_i\}_{i \in I}$ és un recobriment d'un espai X si $X = \cup U_i$
- Si U_i són oberts, $\{U_i\}$ és un recobriment obert.

Un espai topològic X direm que és **compacte** si tot recobriment obert de X té algun subrecobriment finit.

1. La imatge d'un compacte per una aplicació continua és un compacte.
2. Un subespai tancat d'un espai compacte és compacte.
3. El producte d'una família d'espais compactes no buits és compacte si i només si cada espai ho és.

Compactes de $\mathbb{R}^n$

Teorema de Heine-Borel Un subespai de $\mathbb{R}^n$ - topologia ordinària- és compacte si i només si és tancat i acotat.

Compactificació per un punt

Sigui X un espai topològic i definim $\tilde{X} = X \sqcup \{*\}$. Direm que $U \subset \tilde{X}$ és un obert si es compleix una de les següents condicions: ❶ $U \subset X$ i U és un obert de X. ❷ $U = U' \sqcup \{*\}$, U' és un obert de X i $X - U'$ és un compacte.
L'espai X té la topologia induïda per la inclusió $X \subset \tilde{X}$.
L'espai $\tilde{X}$ és comacte.
La compactificació per un punt de $\mathbb{R}^n$ és homeomorf a S^n

Espais de Hausdorff

- Espais T_0 o de Kolmologrov. Donats dos punts diferents, hi ha un obert que conté un d'ells i no l'altre.
- Espais T_1 o de Fréchet. Donats $x \neq y$, hi ha oberts U, V tals que $x \in U - V$. Aquest axioma és equivalent a que els punts siguin tancats.
- Els espais T_2 són els espais Hausdorff.
- Espais T_3 o regulars. Es compleix l'axioma T_1 i a més donats un tancat F i punt $x \notin F$, existeixen oberts disjunts U, V tals que $x \in U, F \subset V$.
- Espais T_4 o normals. Es compleix l'axioma T_1 i a més donats tancats disjunts A, B, existeixen oberts disjunts U, V tals que $A \subset U, B \subset V$.

1. Si X és un espai de Hausdorff i $A \subset X$ és compacte, aleshores A és tancat a X.
2. Un producte d'espais no buits és Hausdorff si i només si ho són cada un dels factors.
3. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua i bijectiva. Suposem que X és un espai compacte i Y és un espai Hausdorff. Aleshores, f és un homeomorfisme.
4. Tot espai compacte Hausdorff és normal.
5. Sigui X un espai compacte Hausdorff i $A \subset X$ un subespai tancat. X/A és compacte Hausdorff.
6. Sigui X un espai compacte Hausdorff i G un grup finit que actua sobre X. X/G és compacte Hausdorff.

Connexió

Un espai topològic és connex si compleix

- No és unió disconnexa de dos espais-p.
- No és unió de dos oberts-p/tancats-p disjunts
- Si $A \subset Z$ és obert i tancat, aleshores $A = \emptyset, Z$.

1. Siguin $Y_i \subset X, i \in I$, subespais connexos d'un espai X, tals que $\bigcap_i Y_i \neq \emptyset$. Aleshores $\bigcup_i Y_i$ és un espai connex.
2. Siguin $Y_i \subset X, i = 0, 1, 2, \ldots$, subespais connexos d'un espai X, tals que $\forall i, Y_i \cap Y_{i+1} \neq \emptyset$. Aleshores $\bigcup_i Y_i$ és un espai connex.
3. Si $f : X \to Y$ és contínua i $A \subset X$ és connex, aleshores $f(A)$ és connex.
4. Un producte d'espais-p és connex si i només si ho és cada factor.
5. $A \subset B \subset Cl(A) \subset X$ i suposem que A és connex. Aleshores B també ho és.

connexió per camins

Un espai X és **connex per camins o arcconnex** si $\forall x, y \in X$ existeix un camí ω amb $\omega(0) = x, \omega(1) = y$.
Tot espai connex per camis és connex.

Components connexos d'un espai

Teorema de la corba de Jordan Una corba tancada simple al pla $\mathbb{R}^2$ divideix el pla en dos components connexos. Un d'aquests components és acotat i l'altre no. La corba és la seva frontera.

Varietats topològiques

Un espai topològic $X \neq \emptyset$ és una varietat de dimensió n si tot punt té un entorn homeomorf a $\mathbb{R}^n$, si X és Hausdorff i si té una base d'oberts numerable.

Varietats connexes

Si M és una varietat de dimensió n i $M_i, i \in I$ els seus components connexos.

1. Els M_i són oberts de M
2. I és numerable, si M és compacta I és finit.
3. M_i és una varietat de dimensió n.
4. M és unió disconnexa dels seus components connexos: $M = \sqcup_{i \in I} M_i$.

Orientacions

Direm que una varietat M és **orientable** si admet un atles on totes les funcions de transició conserven l'orientació.
El producte de dues varietats orientables és orientable. $\mathbb{R}P^n$ és orientable si i només si n és senar. $S + R$ és orientable si i només si S i R són orientables.
$S_g := S^2 + T + \ldots^g + T$ $N_h := \mathbb{R}P^2 + \ldots^h + \mathbb{R}P^2$
$K \cong \mathbb{R}P^2 + \mathbb{R}P^2$
$T + \mathbb{R}P^2 \cong \mathbb{R}P^2 + \mathbb{R}P^2 + \mathbb{R}P^2$ per tant, $S_g + N_h \cong N_k$ amb $k = h + 2g$
Tota superfície és triangulable.
$\chi(S) = v - a + c$
$\chi(S + S') = \chi(S) + \chi(S') - 2$
$\chi(S_g) = 2 - 2g$
$\chi(N_h) = 2 - h$ Tota superfície compacta i connexa és homeomorfa a S_g o N_h
Dues superfícies (compactes i connexes) són homeomorfes si i només si $\chi(S) = \chi(S')$ i tenen la mateixa orientablilitat.

Eloi Torrents 2018