激光谐振腔内光的模拟

Simulation of optical field in laser resonators cavity

刘光成[1]

School of Physics and Technology
Wuhan University

激光原理, May 2022

目录

首先单色激光的标量场可以写为 (满足波动方程 $\nabla^2 V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$):

$$V(x,y,z,t) = U(x,y,z)e^{-iwt} = U(x,y,z)e^{-ikct} \tag{1}$$

其中空间场部分满足 Helmholtz 方程:

$$(\nabla^2 + k^2)\,U(x,y,yz) = 0 \tag{2}$$

接下来要用到一个恒等式" 格林第二恒等式"
那首先先介绍一下" 格林第一恒等式"
设定向量场 $\mathbf{F} = \psi\nabla\phi$; 其中, 在 $\mathbb{R}^3$ 的某区域 $\mathbb{U}$ 内 ϕ 是二次连续可微标量函数, ψ 是一次连续可微标量函数
则有 (由高斯定理)

$$\int_{\mathbb{U}} (\psi\nabla^2\phi + \nabla\phi\cdot\nabla\psi)\,\mathrm{d}V = \oint_{\partial\mathbb{U}} \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{3}$$

则交换 ψ,ϕ 的位置得到对称的式子且将两式相减即可得到" 格林第二恒等式"

$$\int_{\mathbb{U}}(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi)\mathrm{d}V=\oint_{\partial\mathbb{U}}(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n})\mathrm{d}S \tag{4}$$

将 $\phi=U',\psi=U$ 代入

$$\iiint_{v}(U\nabla^2U'-U'\nabla^2U)\mathrm{d}V=-\iint_{S}(U\frac{\partial U'}{\partial n}-U'\frac{\partial U}{\partial n})\mathrm{d}S \tag{5}$$

若 U' 也满足 Helmholtz 方程 (2) 式则 (5) 式左边为 0, 我们考虑惠更斯定理 (Huygens–Fresnel principle) 其必定有个解为 e^{ikr}/r 代入右边得到:(其中 r 是点源 P 到空间中任意一点 (x,y,z) 的距离)

$$\iint_{S}(U\frac{\partial(e^{ikr}/r)}{\partial n}-(\frac{e^{ikr}}{r})\frac{\partial U}{\partial n})dS=0 \tag{6}$$

而由于 e^{ikr}/r 有一个奇点, 以上的面积分需要分为两部分包含奇点 P 的一个无穷小球面 S 以及除 S 以外的面 S' 即有:

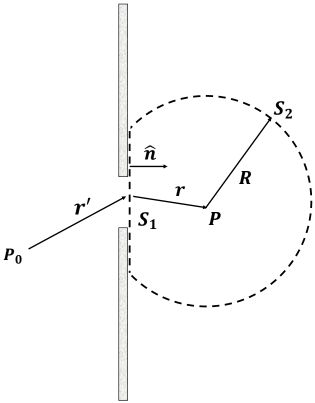
$$\{\iint_S + \iint_{S'}\}[U\frac{\partial(e^{ikr}/r)}{\partial n} - (\frac{e^{ikr}}{r})\frac{\partial U}{\partial n}]dS = 0$$

$$\Rightarrow \iint_S (U\frac{\partial(e^{ikr}/r)}{\partial n} - (\frac{e^{ikr}}{r})\frac{\partial U}{\partial n})dS \tag{7}$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0}\iint_\Omega (U\frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon}(ik - \frac{1}{\epsilon}) - \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon}\frac{\partial U}{\partial n})\epsilon^2 d\Omega = 4\pi U$$

而基尔霍夫衍射公式可以从上式的积分中得到
假设波源为有限尺寸，位于曲面 $\mathbb{S}$ 的波扰表达为 $U_0(\mathbf{r}')$，则位于点 P 的波扰为

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_S [U_0(\mathbf{r}')\frac{\partial(e^{ikr}/r)}{\partial n} - (\frac{e^{ikr}}{r})\frac{\partial U_0(\mathbf{r}')}{\partial n}] \tag{8}$$



化简 (8) 并令 $G = e^{ikR}/R$ 可以得到:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_2}(U_0(ikG) - G\frac{\partial U_0}{\partial n})dS \tag{9}$$

由索墨菲辐射条件得到[1]:

$$\lim_{R\to\infty} R(ikU - \frac{\partial U}{\partial n}) = 0 \tag{10}$$

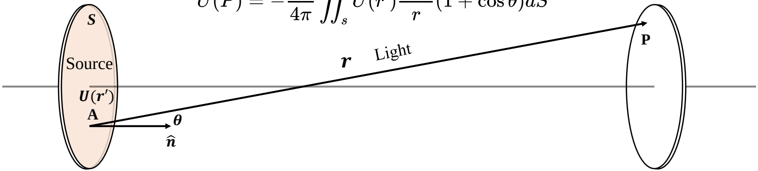
则 S_2 表面的积分贡献为 0 另外对于 S_1 表面, 除了孔径的地方其余地方的 $U, \frac{\partial U}{\partial n}$ 均为 0

假设 $U_0(\mathbf{r}')$ 处具有良好的方向性则 $U_0(\mathbf{r}') = u(r')e^{ikr'}$ 代入上式最终得到:

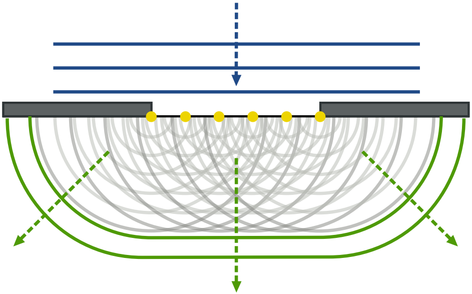
$$U(r) = -\frac{ik}{2\pi}\iint_{S_1} u(r')\frac{e^{ikr}}{r}K(\theta)\,dS \tag{11}$$

其中 $K(\theta) = \frac{\cos(\theta)+1}{2}$ 为倾斜因子 (Obliquity Factor),r 是目标点距离点源的位置而上式也正是惠更斯-菲涅耳原理的数学形式
最终得到以下公式:

$$U(P) = -\frac{ik}{4\pi}\iint_s U(r')\frac{e^{ikr}}{r}(1+\cos\theta)dS$$



惠更斯-菲涅耳原理 (Huygens–Fresnel Principle)



惠更斯-菲涅耳原理

波前的每一点发出次波，这些次波互相干涉，叠加形成新的波前

这个原理好像很自然那他有什么更深层的含义呢？

重写一下 Huygens–Fresnel Principle

$$U(x, y) = \int_S K(x, y; x', y')\, U(x', y')\, dS \tag{12}$$

上面方程的形式特别像量子力学中费曼提出的路径积分的形式
通过初始的波函数得到最终的波函数:

$$\psi(\mathbf{r}', t') = \int d^3\mathbf{r} K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')\psi(\mathbf{r}, t) \tag{13}$$

其中 Kernel 函数为:

$$K(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \langle \mathbf{r} | \exp(-iH(t' - t)/\hbar) | \mathbf{r}' \rangle \tag{14}$$

对比一下惠更斯-菲涅尔衍射公式的 Kernel 函数:

$$K(x, y; x', y') = -\frac{ik}{4\pi} \frac{\exp(ik\rho(x, y; x', y'))}{\rho(x, y; x', y')}(1 + \cos\theta) \tag{15}$$

现在看着很不像是吧, 让我们接着往下看

PHOTON PROPAGATOR

先将电磁场二次量子化:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + w^2\hat{q}) \tag{16}$$

计算出来的传播子为:

$$\langle q_F| \exp(-i\hat{H}t/\hbar) |q_I\rangle = (\frac{w}{2\pi i\hbar \sin wt})^{\frac{1}{2}} e^{(\frac{i}{2\hbar}w[(q_I^2+q_F^2)\cos wt - \frac{2q_Iq_F}{\sin wt}])} \tag{17}$$

则经过时间 t 演化后的波函数为:

$$\psi(q_F, t) = (\frac{w}{2\pi i\hbar \sin wt})^{\frac{1}{2}} \int_R \psi(q_I, 0) \times e^{(\frac{i}{2\hbar}w[(q_I^2+q_F^2)\cos wt - \frac{2q_Iq_F}{\sin wt}])} dq_I \tag{18}$$

下面我们做一些参数变换:

$$\rho^2 = \frac{w}{2\pi\hbar}q_I^2, \sigma^2 = \frac{w}{2\pi\hbar}q_F^2 \tag{19}$$

最后得到 (这个变换形式也被称为分数傅里叶变换 (FRFT)[2])

$$\Psi(x_F, z) = (\frac{i}{\lambda z})^{\frac{1}{2}} \exp(-\frac{ik}{2z}x_F^2) \int_{\sum} \exp(-\frac{ik}{2z}x_I^2) \exp(\frac{ik}{z}x_I x_F)\psi(x_I, 0)\, dx_I \tag{20}$$

其中 $x_I^2 = \frac{\alpha}{m_\lambda} q_I^2, x_F^2 = \frac{\alpha}{m_\lambda} q_F^2$ 而 m_λ 为等效质量为 $m_\lambda = \frac{\hbar k}{c}$
对比一下一维的夫琅禾费衍射公式:

$$U(x) = \sqrt{\frac{i}{\lambda z}} e^{ikz} \int_{\sum} u(x') \exp(-ik(x - x')^2/2z)\, dx' \tag{21}$$

发现两者完全一致具体的推导过程见[3]:Santos E A, Castro F, Torres R. Huygens-Fresnel principle: Analyzing consistency at the photon level[J]. Physical Review A, 2018, 97(4): 043853.
另一方面惠更斯-菲涅耳原理也是奇数维空间的必然结果[4]

数值方法

Fox-Li Method[5]

由于是数值求解我们可以直接从定义出发:

$$U(x,y) = \frac{ik}{4\pi}\iint_s U(x',y')\frac{e^{-ik\rho}}{\rho}(1+\cos\theta)\,dS \tag{22}$$

Algorithm 1 Calculate Self Consistent Mode U

Require: The initial distribution U_0(Matrix)

Ensure: U

Define the mesh L_x, L_y, dx, dy

for m **to** number of iterations **do**

$\rho = \sqrt{((i-i')dx)^2 + ((j-j')dy)^2 + L^2}$

$U_{m+1}[i'][j'] = \frac{ik}{4\pi}\sum_{i,j} U_m[i][j]\frac{e^{-ik\rho(i,i',j,j')}}{\rho(i,i',j,j')}(1+\cos\theta)$

$U_{m+1} = U_{m+1}/(\mathrm{MAX}(U_{m+1}))$

$m \leftarrow m+1$

end for

Fox-Li Method 初体验

首先最简单的我们将正方形平面镜网格化 (初始化)

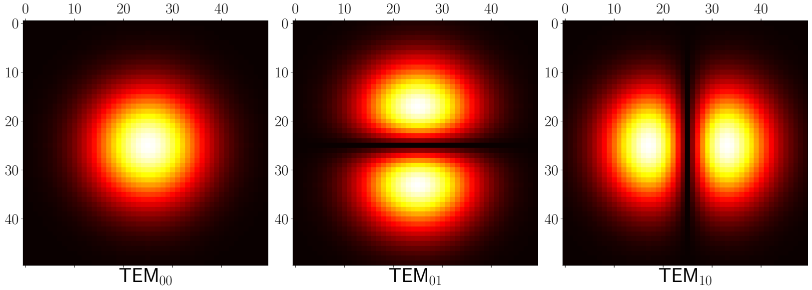
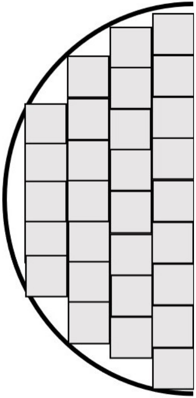


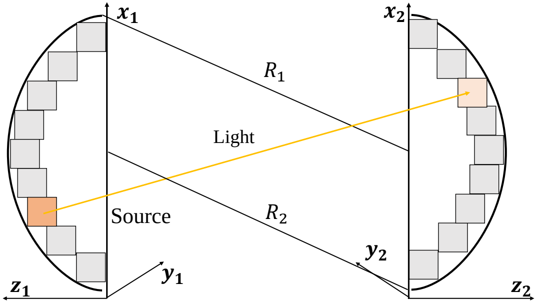
Figure: 其中取 x, y 方向网格为 50 个, 取
$a = 25\lambda, L = 100\lambda, a^2/L\lambda = 6.25$ 对应的 2500 个网格



利用同样的方法，我们可以修改反射平面镜的形状，通过生成网格的限制，每次迭代后将不在平面镜范围内的值设置为 0 即可
当然为了实现自再现的数值模拟，我们不得不将二维平面拓展到三维，当然每个网格储存的信息不再是 x, y 而是要存储一个三维的信息 (三维的张量)

方形孔径共焦腔的自再现数值模拟

此处建网格是立体的网格,x 方向与 y 方向相同



通过此我们也可以写出相关的伪代码, 并执行算法

Algorithm 2 Calculate Self-reproductive Mode U

Require: The initial distribution U_0(Matrix)

Ensure: U

Define the mesh L_x, Ly, L_z, dx, dy, dz
and select by the radius($R_1 = R_2 = L$)

for m **to** number of iterations **do**

$\rho = \sqrt{((i-i')dx)^2 + ((j-j')dy)^2 + ((k+k'+L)dz)^2}$

此处的 $\cos\theta = \frac{\sqrt{((i-i')dx)^2+((j-j')dy)^2}}{\rho}$

$U_{m+1}[i'][j'][k'] = \frac{ik}{4\pi} e^{-ik(x)} \sum_{i,j,k} U_m[i][j][k] \frac{e^{-ik\rho(i,i',j,j',k,k')}}{\rho(i,i',j,j',k,k')}(1 + \cos\theta)$

$U_{m+1} = U_{m+1}/(\mathsf{MAX}(U_{m+1}))$

Set the value zeros of mesh that outside the radius

$m \leftarrow m + 1$

end for

平面镜自再现模式

一般来说 $L \gg a, a \gg \lambda$
平面镜的 z 变化相比 L 来说微乎其微, 故我们不考虑 z 方向的变化, 而 x, y 方向的场强对称我们可以只考虑单一方向上的光强变化

$$U_{i+1}(x) = \sqrt{\frac{i}{L\lambda} e^{-ikL}} \int_{-a}^{a} dx' \, U_i(x') \, e^{-ik(x-x')^2/2L} \tag{23}$$

然后归一化 U 故:

$$\widetilde{U}_i(x) = U_i(x)/\mathrm{MAX}(U_i(x)) \tag{24}$$

通过反复迭代即可得到最终的最低模式 (自再现模式)

Prony's method[6]

这个方法的本质就是解矩阵的本征值与量子力学的本质问题一样
回过头来看一下基尔霍夫衍射公式:

$$u(r) = \frac{ik}{4\pi} \iint_{S_1} u(r') \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos\theta) dS \tag{25}$$

本质就是 $\vec{u}$ 向量之间的变换, 对于一维的向量

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{bmatrix} \tag{26}$$

记从镜 1 到镜 2 的传播矩阵为 A_{12} 则传播回到原处的总的传播矩阵为 $A = A_{21}A_{12}$
故最终的稳定模式就是对应的本征向量, 而对应的损耗也就是对应的本征值

参考文献

[1] A. Sommerfeld, "Die greensche funktion der schwingungsgleichung," *J.-Ber. Deutsch Math.-Verein*, vol. 21, pp. 309–353, 1912.

[2] M. A. Kutay and H. M. Ozaktas, "The fractional fourier transform and harmonic oscillation," *Nonlinear Dynamics*, vol. 29, no. 1, pp. 157–172, 2002.

[3] E. A. Santos, F. Castro, and R. Torres, "Huygens-fresnel principle: Analyzing consistency at the photon level," *Physical Review A*, vol. 97, no. 4, p. 043853, 2018.

[4] "https://www.mathpages.com/home/kmath242/kmath242.htm," https://www.mathpages.com/home/kmath242/kmath242.htm, (Accessed on 05/19/2022).

[5] A. G. Fox and T. Li, "Resonant modes in a maser interferometer," *Bell System Technical Journal*, vol. 40, no. 2, pp. 453–488, 1961.

[6] A. E. Siegman and H. Miller, "Unstable optical resonator loss calculations using the prony method," *Applied optics*, vol. 9, no. 12, pp. 2729–2736, 1970.