智能软件开发
方向基础

第七章 朴素贝叶斯分类
Naive Bayes Classifier
PART1

张朝晖

2022~2023学年第二学期

河北师范大学软件学院
Software College of Hebei Normal University

序号	内容
1	概述
2	机器学习的基本概念
3	模型的选择与性能评价
4	数据的获取、探索与准备
5	近邻模型------分类、回归
6	决策树模型------分类、回归
7	集成学习------分类、回归
8	(朴素)贝叶斯模型------分类
9	聚类
10	特征降维及低维可视化(PCA, t-SNE)
11	总复习

本课概要

两种典型的(朴素)贝叶斯分类模型

(1)最小错误率贝叶斯分类

(2)最小风险贝叶斯分类

模型的学习 -- 概率密度函数与概率估计

朴素贝叶斯实现流程

主要内容

1. 引言
2. 贝叶斯决策模型
    2.1 最小错误率贝叶斯决策
        连续情况；离散情况
    2.2 最小风险的贝叶斯决策
        连续情况；离散情况
3. 正态分布的概率密度函数
4. 概率/概率密度函数估计
5. 朴素贝叶斯(Naive Bayes)分类实现流程

河北师范大学软件学院
Software College of Hebei Normal University

几个基本概念

[1]**特征空间(输入空间)**及特征维数

d维特征空间,记为$\Re = \boldsymbol{R}^d$

[2]特征向量(随机向量)$\boldsymbol{X} = [X_1, \ldots, X_d]^T$

其中 $X_1, X_2, \ldots, X_d$分别为随机变量。

$\forall \boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_d]^T \in \boldsymbol{R}^d$ 或：观察样本$\boldsymbol{x}$为d维

[3]**状态空间(输出空间)**$\{\omega_1, \ldots, \omega_c\}$

类别状态数$\boldsymbol{c}$,类别状态变量ω(随机变量) $\omega \in \{\omega_1, \ldots, \omega_c\}$

[4](状态)先验概率

预先已知的，或可估计的分类系统位于某一类别的概率。

一般的$\boldsymbol{c}$类问题：各类别ω_i的先验概率$P_\omega(\omega_i), \boldsymbol{i} = 1, \ldots, c$

$$P_\omega(\omega_1) + \ldots + P_\omega(\omega_c) = 1$$

[5]样本分布密度(或：总体概率密度)$p_X(x)$

$$\int_{\Re} p_X(x)dx = 1$$

[6]类条件概率密度函数

(*class - conditional probability density function*)

系统位于某种类别条件下，模式样本x的概率密度分布。

同一类别对象的各属性具有一定变化范围，以函数形式表示，记为：$p_{X|\omega}(x \mid \omega_i), \boldsymbol{i} = 1, \ldots, c$

$$\int_{\Re} p_{X|\omega}(x \mid \omega_i)dx = 1, \qquad \boldsymbol{i} = 1, \ldots, c$$

[7]后验概率(*posterior probability*)

给定某具体模式样本的观测x，该样本属于某类别的概率。

记为：$P_{\omega|X}(\omega_i \mid x), \boldsymbol{i} = 1, \ldots, c$ $\qquad \sum_{i=1}^{c} P_{\omega|X}(\omega_i \mid x) = 1$

连续情况下，贝叶斯决策条件：

[1] 类别数目c一定，类别状态ω_i，　$\boldsymbol{i}=1,\ldots,c$

[2] 给定：

$$\begin{cases} \text{类先验概率} & P_\omega(\omega_i),\quad \boldsymbol{i}=1,\ldots,c \\ \text{类条件概率密度} & p_{X|\omega}(x\mid\omega_i),\quad \boldsymbol{i}=1,\ldots,c \\ \text{损失代价} & \lambda_{ij} \end{cases}$$

（对真实状态为ω_j类的向量$\boldsymbol{x}$采取决策α_i所带来的损失）

特殊情况　　0−1代价 $\lambda_{ij}=\begin{cases}0 & \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\\ 1 & \boldsymbol{i}\neq\boldsymbol{j}\end{cases}$

问题：如何最为合理地对观测向量$\boldsymbol{x}=\left[x_1,x_2,\ldots,x_d\right]^T\in\boldsymbol{R}^d$进行判决？

→ 两种典型决策模型

为方便描述，贝叶斯模型描述作如下简化：

$p_X(x) \Rightarrow p(x)$

$P_X(x) \Rightarrow P(x)$

$p_{X|\omega}(x\mid\omega_i) \Rightarrow p(x\mid\omega_i)$

$P_{X|\omega}(x\mid\omega_i) \Rightarrow P(x\mid\omega_i)$

$P_{\omega|X}(\omega_i\mid x) \Rightarrow P(\omega_i\mid x)$

$P_\omega(\omega_i) \Rightarrow P(\omega_i)$

主要内容

河北师范大学软件学院
Software College of Hebei Normal University

分析一个两类问题----正常/异常的识别问题

➔ 预测某具体观测x的类别状态。

给定：

(1) 两类的分类问题： c=2

类别状态集合{w1=正常，w2=异常}

(2) 关于该问题，需要借助的一些信息，几种可能：

方式1. 仅仅依靠先验知识：$P(w=w_1)$，$P(w=w_2)$

方式2. 先验知识、该细胞的具体观测x

方式3. 先验知识、观测x、不同决策所带来的损失

➔ 如何决策？

1.仅依靠先验知识(未使用关于该样本x的具体观测信息)

判决规则 若$P(\omega_1)>P(\omega_2)$,则决策为$\boldsymbol{x}\in\omega_1$; 反之, $\boldsymbol{x}\in\omega_2$

$P(\omega_1)=0.9 \quad P(\omega_2)=0.1$

➔ 所有待识别细胞全部决策为 ω_1= 正常细胞。

➔ 决策错误率: $P(error)=1-P(\omega_1)=P(\omega_2)$

产生原因: 状态先验概率提供的分类信息太少。

$P(\omega1)$ 、$P(\omega2)$ 不等时, 仅利用先验概率, 只能把未知样本都归于某一类, 无法达到正确分类的目的。

因此,先验概率不能作为判决的唯一依据.

2.“先验知识”+“证据(即:该观测样本x)”

贝叶斯公式的实质: 通过观测信息x(证据), 将状态先验概率$P(\omega_j)$转化为状态后验概率$P(\omega_j|x)$

$$posterior=\frac{likelihood\times prior}{evidence} \qquad \sum_{i=1}^{c}P(\omega_j\mid x)=1$$

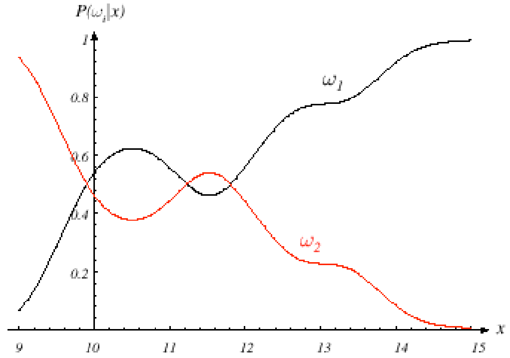
观测空间为连续特征空间

$$P(\omega_j\mid x)=\frac{p(x,\omega_j)}{p(x)}=\frac{p(x\mid\omega_j)P(\omega_j)}{p(x)}=\frac{p(x\mid\omega_j)P(\omega_j)}{\sum_{i=1}^{c}p(x\mid\omega_i)P(\omega_i)}$$

观测空间为离散特征空间

$$P(\omega_j\mid x)=\frac{P(x,\omega_j)}{P(x)}=\frac{P(x\mid\omega_j)P(\omega_j)}{P(x)}=\frac{P(x\mid\omega_j)P(\omega_j)}{\sum_{i=1}^{c}P(x\mid\omega_i)P(\omega_i)}$$

例：一维连续特征情况下，某两类问题的**状态后验概率**



似然函数： 其它条件相等情况下，对应较大取值$p(x|\omega_j)$的ω_j更有可能为x的真实类别.因此，称$p(x|\omega_j)$为ω_j关于x的似然函数。

(1) 连续特征空间，两类别分类问题：决策规则

对于观测样本x，计算$P(\omega_j \mid x)$:

$$P(\omega_j \mid x) = \frac{p(x \mid \omega_j)P(\omega_j)}{p(x)} = \frac{p(x \mid \omega_j)P(\omega_j)}{\sum_{i=1}^{2} p(x \mid \omega_i)P(\omega_i)} \qquad j = 1,2$$

决策规则
$$\begin{cases} \text{若} P(\omega_1 \mid x) > P(\omega_2 \mid x), \text{则决策为} x \in \omega_1 \\ \text{若} P(\omega_2 \mid x) > P(\omega_1 \mid x), \text{则决策为} x \in \omega_2 \end{cases}$$

上述决策对应的错误概率$P(e \mid x)$:

$$P(e \mid x) = \begin{cases} 1 - P(\omega_1 \mid x) = P(\omega_2 \mid x) < P(\omega_1 \mid x) & \text{若决策} x \in \omega_1 \\ 1 - P(\omega_2 \mid x) = P(\omega_1 \mid x) < P(\omega_2 \mid x) & \text{若决策} x \in \omega_2 \end{cases}$$

$$= 1 - \max\{P(\omega_1 \mid x), P(\omega_2 \mid x)\} = \min\{P(\omega_1 \mid x), P(\omega_2 \mid x)\}$$

基于**最大后验概率**的决策 ⇔ 基于**最小条件错误概率**$P(e \mid x)$的决策

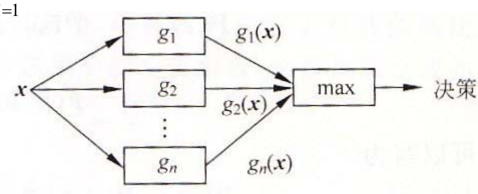
(2) 多类问题情况下，基于最小错误率的贝叶斯决策

后验概率

$$P(\omega_j|x)=\frac{p(x|\omega_j)P(\omega_j)}{p(x)}=\frac{p(x|\omega_j)P(\omega_j)}{\sum_{i=1}^{c}p(x|\omega_i)P(\omega_i)}\qquad j=1,2,\dots,c$$

样本x的错分概率

$$P(e|x)=1-\max_{j=1,2,\dots,c}P(\omega_j|x)$$



基于最小错误率的决策规则：

若$P(\omega_i|x)=\max_{j=1,2,\dots,c}P(\omega_j|x)$　　则 $x\in\omega_i$

或

若$p(x|\omega_i)P(\omega_i)=\max_{j=1,2,\dots,c}p(x|\omega_j)P(\omega_j)$　　则 $x\in\omega_i$

连续特征空间，错误率(平均错误率)

错误率(平均错误率)是错误概率$P(e|x)$的期望，记为$P(e)$

对于连续随机变量x，有

$$P(e)=\int_{\Re}P(e|x)p(x)dx\qquad P(e|x)\geq 0,\ p(x)\geq 0$$

依据：$E\left[f\left(X\right)\right]=\int_{\Re}f(x)p_X(x)dx$

最大后验概率贝叶斯决策就是基于最小错误率贝叶斯决策

每个x的判决，都对应一个条件错分概率$P(e|x)$,

对于所有x，若能保证决策时关于x的后验概率最大，

则可保证$P(e|x)$最小，则有$P(e)$最小。

例：离散特征空间基于最小错误率的贝叶斯决策—例题分析

例1：为了对某种疾病进行诊断，对一批人进行一次普查，对每个人各打试验针，观察反应，然后进行统计，规律如下：

(1)这一批人中，每1000个人中有5个关于该疾病的病人；

(2)这一批人中，每100个正常人中有一个试验呈阳性反应；

(3)这一批人中，每100个病人中有95人试验呈阳性反应。

问：若某人（甲）呈阳性反应，甲是否正常？

分析：类别状态空间$\Omega=\{\omega_1=\text{正常},\omega_2=\text{异常}\}$

$$\begin{cases}(1)\Rightarrow\text{先验概率}\\(2)\Rightarrow\text{类条件概率}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\omega_1)\\(3)\Rightarrow\text{类条件概率}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\omega_2)\end{cases}$$

确定$\boldsymbol{P}(\omega_i\mid\boldsymbol{x}=\text{阳性}),\boldsymbol{i}=1,2$

解：观测$\boldsymbol{x}$=阳性。

(1) 类别状态ω有两种：$\omega=\omega_1$ 正常；$\omega=\omega_2$ 某疾病患者

(2) 根据已知条件，计算关于类别状态的后验概率。

由条件1，状态先验概率： $\boldsymbol{P}(\omega_1)=0.995,\boldsymbol{P}(\omega_2)=0.005$

由条件2,3，类条件概率：$\begin{cases}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\boldsymbol{w}_1)=0.01\\\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\boldsymbol{w}_2)=0.95\end{cases}$

(3) 决策过程：

$$\boldsymbol{P}(\omega_1\mid\boldsymbol{x}=\text{阳性})=\frac{\boldsymbol{P}(\omega_1)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\boldsymbol{w}_1)}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性})}$$

$$=\frac{\boldsymbol{P}(\omega_1)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\boldsymbol{w}_1)}{\boldsymbol{P}(\omega_1)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\boldsymbol{w}_1)+\boldsymbol{P}(\omega_2)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\boldsymbol{w}_2)}=\frac{0.995\times0.01}{0.995\times0.01+0.005\times0.95}=0.677$$

$$\boldsymbol{P}(\omega_2\mid\boldsymbol{x}=\text{阳性})=1-0.677=0.323$$

$$\boldsymbol{P}(\omega_1\mid\boldsymbol{x}=\text{阳性})>\boldsymbol{P}(\omega_2\mid\boldsymbol{x}=\text{阳性})$$

由最小错误率决策规则，将"阳性反应的甲"判决为ω_1(正常人），

判决错误率：0.323

由于$\boldsymbol{P}(\omega_1)>\boldsymbol{P}(\omega_2)$，判决时，先验概率起了明显的作用。

最小错误率贝叶斯决策—小结

两类情况下，基于最小错误率的判决规则，各等价形式：

1，状态后验概率 $\begin{cases} P(\omega_1 \mid \boldsymbol{x}) > P(\omega_2 \mid \boldsymbol{x}), 则\boldsymbol{x} \in \omega_1类 \\ P(\omega_1 \mid \boldsymbol{x}) < P(\omega_2 \mid \boldsymbol{x}), 则\boldsymbol{x} \in \omega_2类 \end{cases}$

2，似然值×先验概率 $\begin{cases} P(\omega_1) p(\boldsymbol{x} \mid \omega_1) > P(\omega_2) p(\boldsymbol{x} \mid \omega_2), 则\boldsymbol{x} \in \omega_1类 \\ P(\omega_1) p(\boldsymbol{x} \mid \omega_1) < P(\omega_2) p(\boldsymbol{x} \mid \omega_2), 则\boldsymbol{x} \in \omega_2类 \end{cases}$

最小错误率贝叶斯决策—小结

多类情况下，基于最小错误率的判决规则，各等价形式

(1)后验概率：

若 $P(\omega_i \mid \boldsymbol{x}) = \max\limits_{j=1,2,\ldots,c} P(\omega_j \mid \boldsymbol{x})$

则 $\boldsymbol{x} \in \omega_i$类

(2)似然值×先验概率：

若 $p(\boldsymbol{x} \mid \omega_i) P(\omega_i) = \max\limits_{j=1,2,\ldots,c} p(\boldsymbol{x} \mid \omega_j) P(\omega_j)$

则 $\boldsymbol{x} \in \omega_i$类

主要内容

1. 引言
2. 贝叶斯决策模型
   - 2.1 最小错误率贝叶斯决策
     - 连续情况；离散情况
   - 2.2 最小风险的贝叶斯决策
     - 连续情况；离散情况

"先验知识" + "证据观测x" + "不同决策所带来的损失

3. 正态分布的概率密度函数
4. 概率/概率密度函数估计
5. 朴素贝叶斯(Naive Bayes)分类实现流程

最小错误率的贝叶斯决策，仅仅考虑判决错误。

实际决策过程中，不同类别的错误决策，还存在不同程度的损失或风险。

例：疾病的诊断

正常诊断为疾病，带来精神负担，但可进一步检查；

疾病诊断为正常，延误治疗、危及生命，损失严重。

因此，决策时可考虑不同类别的决策错误所引起的风险（损失）。

→ 最小风险贝叶斯决策

1.问题描述

[1]观测$\boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{x}$为$\boldsymbol{d}$维随机向量，$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_d]^T$

$x_1,x_2,\ldots,x_d$分别为随机变量。

[2]状态空间Ω

$\boldsymbol{c}$个自然状态（$\boldsymbol{c}$类），$\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_c\}$

[3]决策空间(或：行动空间)$\mathcal{A}$

对观测$\boldsymbol{x}$可能采取的k个决策 $\mathcal{A}=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$

注：$\boldsymbol{c}$与k可能不同

[4]损失函数$\lambda(\alpha_i,\omega_j)$

对真实类别状态为ω_j的观察$\boldsymbol{x}$，采取决策α_i

所带来的损失(或：风险)，简称λ_{ij}。

$\boldsymbol{i}=1,2,\ldots,\boldsymbol{k}$　　$\boldsymbol{j}=1,2,\ldots,\boldsymbol{c}$

以"决策表格"形式提供λ_{ij}

[5]**特征空间连续**--类条件概率密度$p(\boldsymbol{x}\mid\omega_i)$

$$\int_{\Re} p(x\mid\omega_i)dx=1,\qquad \boldsymbol{i}=1,\ldots,c$$

特征空间离散--类条件概率$P(\boldsymbol{x}\mid\omega_i)$

$$\sum_{x\in\Re} P(\boldsymbol{x}\mid\omega_i)=1,\qquad \boldsymbol{i}=1,\ldots,c$$

[6]状态先验概率$P(\omega_i)$　　$\sum_{i=1}^{c} P(\omega_i)=1\qquad \boldsymbol{i}=1,\ldots,\boldsymbol{c}$

$\Rightarrow$目标：对所有的$\boldsymbol{x}$进行决策，使损失最小。

2.与“风险”“损失”有关的几个名词

[1]决策表(损失函数)

对于具体观测x，所有可能采取的决策或行动都会带来一定风险，以决策表表示：

决策	自然状态					
	ω_1	ω_2	…	ω_j	…	ω_c
α_1	$\lambda(\alpha_1,\omega_1)$	$\lambda(\alpha_1,\omega_2)$	…	$\lambda(\alpha_1,\omega_j)$	…	$\lambda(\alpha_1,\omega_c)$
α_2	$\lambda(\alpha_2,\omega_1)$	$\lambda(\alpha_2,\omega_2)$	…	$\lambda(\alpha_2,\omega_j)$	…	$\lambda(\alpha_2,\omega_c)$
⋮	损失函数 $\lambda(\alpha_i,\omega_j)=\lambda_{ij}$					⋮
α_i	$\lambda(\alpha_i,\omega_1)$	$\lambda(\alpha_i,\omega_2)$	…	$\lambda(\alpha_i,\omega_j)$	…	$\lambda(\alpha_i,\omega_c)$
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮
α_k	$\lambda(\alpha_k,\omega_1)$	$\lambda(\alpha_k,\omega_2)$	…	$\lambda(\alpha_k,\omega_j)$	…	$\lambda(\alpha_k,\omega_c)$

[2]观测x的**条件期望损失**(或：x的条件风险)$R(\alpha(x)|x)$

分析：

$\boxed{\text{观测}x}$ → $\boxed{\text{真实类别状态}\ \omega=?\quad \omega_j,\ j=1,2,\dots,c}$ $\xrightarrow[f(\omega)]{\lambda(\alpha_i,\omega_j)}$ $\boxed{\text{决策行为}\ \alpha(x)\quad \alpha_i,\ i=1,2,\dots,k}$

⇒ **条件期望损失**：$R(\alpha(x)|x)$

对**观测x**在各种可能类别下，采取**某具体决策**$\alpha(x)$所造成的平均损失。

$$R(\alpha(x)|x)=E[f(\omega)|x]=\sum_{j=1}^{c}f(\omega=\omega_j)P(\omega=\omega_j|x)$$

[2]观测x的**条件期望损失**(或：x的条件风险)$R(\alpha(x)|x)$

$$R(\alpha(x)|x)=E[f(\omega)|x]=E[\lambda(\alpha(x),\omega)|x]$$

$$=\sum_{j=1}^{c} f(\omega=\omega_j)P(\omega=\omega_j|x)$$

$$=\sum_{j=1}^{c}\lambda(\alpha(x),\omega=\omega_j)P(\omega=\omega_j|x)=\sum_{j=1}^{c}\lambda(\alpha(x),\omega_j)P(\omega_j|x)$$

当$\alpha(x)=\alpha_i$时，

$$R(\alpha_i|x)=\sum_{j=1}^{c}\lambda(\alpha_i,\omega=\omega_j)P(\omega=\omega_j|x)\qquad i=1,2,\ldots,k$$

$\Rightarrow$ 对于观测x，可选择行为α_i，使$R(\alpha_i|x)=\min\limits_{j=1,2,\ldots,k}R(\alpha_j|x)$

[3]**期望风险(平均风险)**$R(\alpha)$

$R(\alpha)$是条件期望风险$R(\alpha(x)|x)$关于观测x的数学期望。

$$R(\alpha)=\int R(\alpha(x)|x)p(x)dx$$

意义：对特征空间的所有x，采取相应决策$\alpha(x)$所带来的平均风险。

$\Rightarrow$ 对于每个x，若能选择$\alpha(x)$，使条件风险$R(\alpha(x)|x)$最小，则能保证期望风险$R=R(\alpha)$最小

[4]**贝叶斯风险**：最小的期望风险 $R^*=\min\limits_{\alpha}R(\alpha)$

3.最小风险贝叶斯决策规则

若　对于$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{R}(\alpha_j \mid \boldsymbol{x}) = \min\limits_{i=1,2,\ldots,k} \boldsymbol{R}(\alpha_i \mid \boldsymbol{x})$

则　应对$\boldsymbol{x}$采取行为$\alpha = \alpha_j$

河北师范大学软件学院
Software College of Hebei Normal University

4.最小风险贝叶斯决策的计算步骤

对于观测$\boldsymbol{x}$

(1) 计算后验概率：

$$\boldsymbol{P}(\omega_j \mid \boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{P}(\omega_j)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} \mid \omega_j)}{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})} = \frac{\boldsymbol{P}(\omega_j)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} \mid \omega_j)}{\sum\limits_{i=1}^{c} \boldsymbol{P}(\omega_i)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x} \mid \omega_i)}$$

$$\boldsymbol{j} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{c}$$

(2) 计算$\boldsymbol{x}$的条件风险： $\boldsymbol{R}(\alpha_i \mid \boldsymbol{x}) = \sum\limits_{j=1}^{c} \lambda\left(\alpha_i, \omega_j\right) \boldsymbol{P}(\omega_j \mid \boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{i} = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{k}$$

(3) 决策：　选择关于$\boldsymbol{x}$的条件风险最小的决策α，即

$$\alpha = \arg \min_{i=1,2,\ldots,k} \boldsymbol{R}(\alpha_i \mid \boldsymbol{x})$$

河北师范大学软件学院
Software College of Hebei Normal University

5.最小风险贝叶斯决策举例--两类别问题

例2：在例1的异常诊断问题中，所有化验结果对应两种判决。试验人为两类；并且，由于决策会产生不同程度风险。对应决策表如下。

决策 α_i $i=1,2$	自然状态 ω_j $j=1,2$	
	ω_1=正常	ω_2=异常
α_1=判决为ω_1	$\lambda(\alpha_1,\omega_1)=0.5$	$\lambda(\alpha_1,\omega_2)=6$
α_2=判决为ω_2	$\lambda(\alpha_2,\omega_1)=2$	$\lambda(\alpha_2,\omega_2)=0.5$

为了对疾病进行诊断，对一批人进行一次普查，对每个人各打试验针，观察反应，然后进行统计，规律如下：

（1）这一批人中，每1000个人中有5个病人；

（2） 这一批人中，每100个正常人中有一个试验呈阳性反应；

（3）这一批人中， 每100个病人中有95人试验呈阳性反应。

问：若某人（甲）呈阳性反应，甲是否正常？

分析：

$$\begin{cases} \text{状态空间}\Omega=\{\omega_1=\text{正常},\omega_2=\text{异常}\} \\ \text{决策空间}\mathcal{A}=\{\alpha_1=\text{判决为}\omega_1,\alpha_2=\text{判决为}\omega_2\} \\ \text{有关概率信息}\begin{cases}(1)\Rightarrow\text{先验概率} \\ (2)\Rightarrow\text{类条件概率}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\omega_1) \\ (3)\Rightarrow\text{类条件概率}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\text{阳性}\mid\omega_2)\end{cases}\end{cases}$$

确定：$\boldsymbol{R}(\alpha_i\mid\boldsymbol{x}=\text{阳性}),\boldsymbol{i}=1,2$

河北师范大学软件学院
Software College of Hebei Normal University

解：设$\boldsymbol{x}$ =“实验反应为阳性”。

(1)类别状态ω有两种：$\omega=\omega_1$正常；$\omega=\omega_2$病患

判决结果与例1相反，影响判决结果的主导因素为“损失”。

(2)根据已知，计算后验概率。

由条件1，状态先验概率：$\boldsymbol{P}(\omega_1)=0.995, \boldsymbol{P}(\omega_2)=0.005$

由条件2，条件概率：$\mathrm{P}(\boldsymbol{x}\mid\omega_1)=0.01, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}\mid\omega_2)=0.95$

后验概率：$\boldsymbol{P}(\omega_1\mid\boldsymbol{x})=\dfrac{\boldsymbol{P}(\omega_1)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}\mid\omega_1)}{\boldsymbol{P}(\omega_1)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}\mid\omega_1)+\boldsymbol{P}(\omega_2)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}\mid\omega_2)}=0.677$

$\boldsymbol{P}(\omega_2\mid\boldsymbol{x})=1-0.677=0.323$

(3)计算条件风险：

$\boldsymbol{R}(\alpha_1\mid\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}(\omega_1\mid\boldsymbol{x})\lambda_{11}+\boldsymbol{P}(\omega_2\mid\boldsymbol{x})\lambda_{12}=0.677\times0.5+0.323\times6=2.2765$

$\boldsymbol{R}(\alpha_2\mid\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}(\omega_1\mid\boldsymbol{x})\lambda_{21}+\boldsymbol{P}(\omega_2\mid\boldsymbol{x})\lambda_{22}=0.677\times2+0.323\times0.5=1.5155$

$\boldsymbol{R}(\alpha_2\mid\boldsymbol{x})<\boldsymbol{R}(\alpha_1\mid\boldsymbol{x})$

由最小风险判决，″阳性反应的甲″判决为ω_2（病患），判决风险：1.5155

最小风险贝叶斯决策-小结

- 最小风险贝叶斯决策意义
- 最小风险贝叶斯决策规则
- 基于最小风险贝叶斯决策规则，对观测X的分类步骤

河北师范大学软件学院
Software College of Hebei Normal University