极客时间算法训练营

第十一课

动态规划（一）

李煜东

《算法竞赛进阶指南》作者

目录

再探：零钱兑换问题

零钱兑换

https://leetcode-cn.com/problems/coin-change/

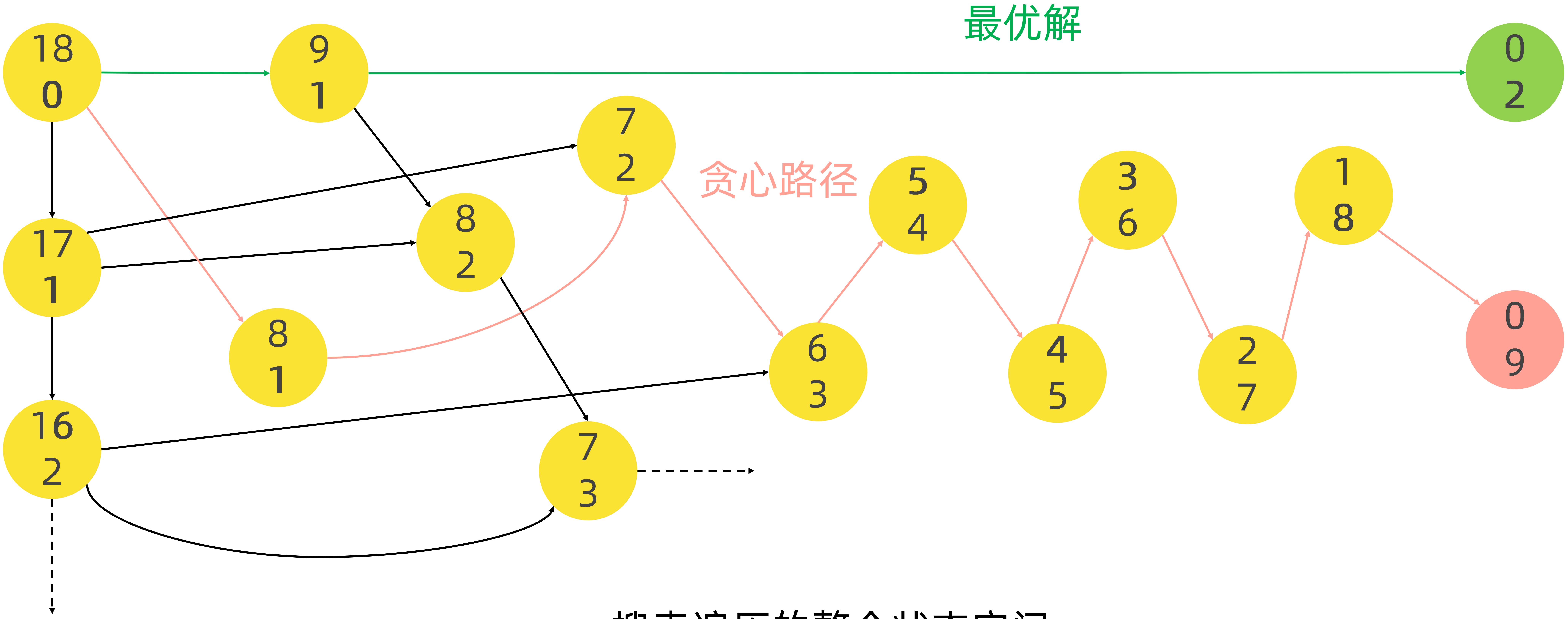
给一个硬币面额的可选集合 coins，求拼成金额 amount 最少需要多少枚硬币。

例：coins = [20, 10, 5, 1]，amount = 46

答案：46 = 20 + 20 + 5 + 1

零钱兑换：搜索

状态：剩余金额、已用硬币枚数



搜索遍历的整个状态空间

零钱兑换：最优子结构

状态中没有必要包含“已用硬币枚数”

对于每个“剩余金额”，搜一次，求出“兑换这个金额所需的最少硬币枚数”就足够了

原始状态：剩余金额、已用硬币枚数，目标：到达终点（0元）

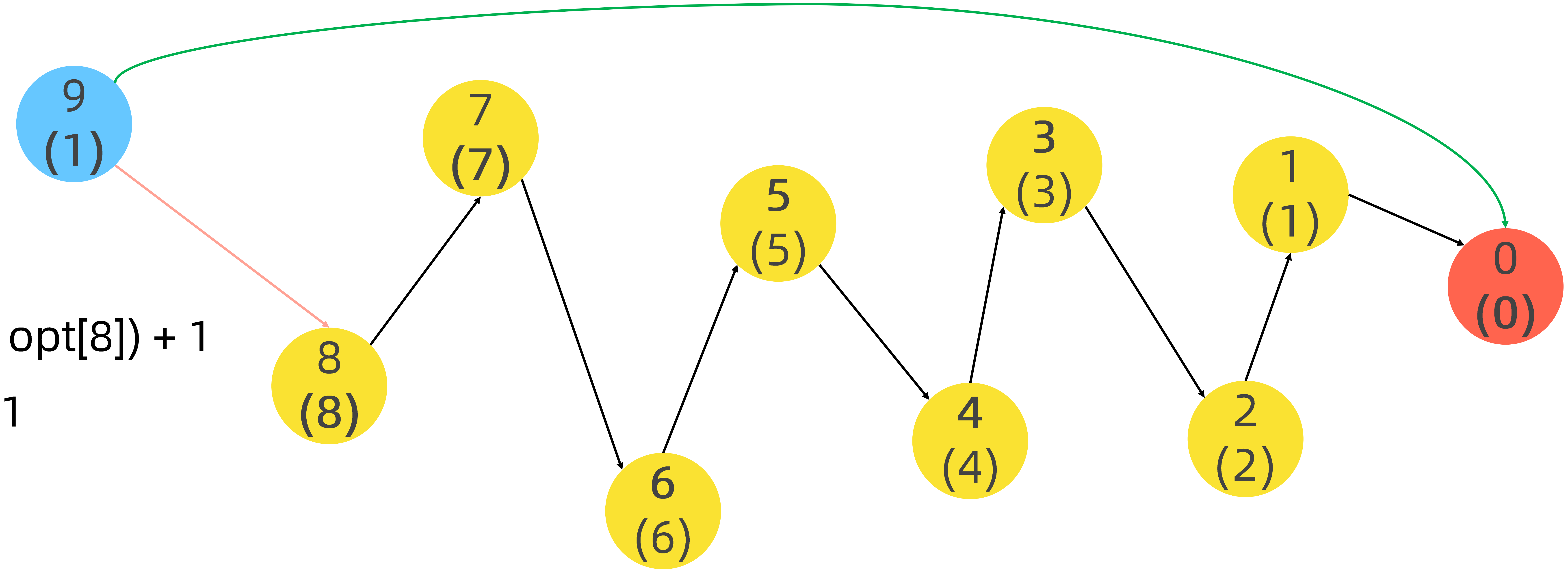
新状态：剩余金额，最优化目标：硬币枚数最少

推导关系：“兑换 n 元的最少硬币枚数” opt(n) = min(opt(n - 1), opt(n - 9), opt(n - 10))

状态 + 最优化目标 + 最优化目标之间具有递推关系 = 最优子结构

零钱兑换：最优子结构

状态：剩余金额（括号中表示凑成这个金额的最少硬币数）



opt[9]

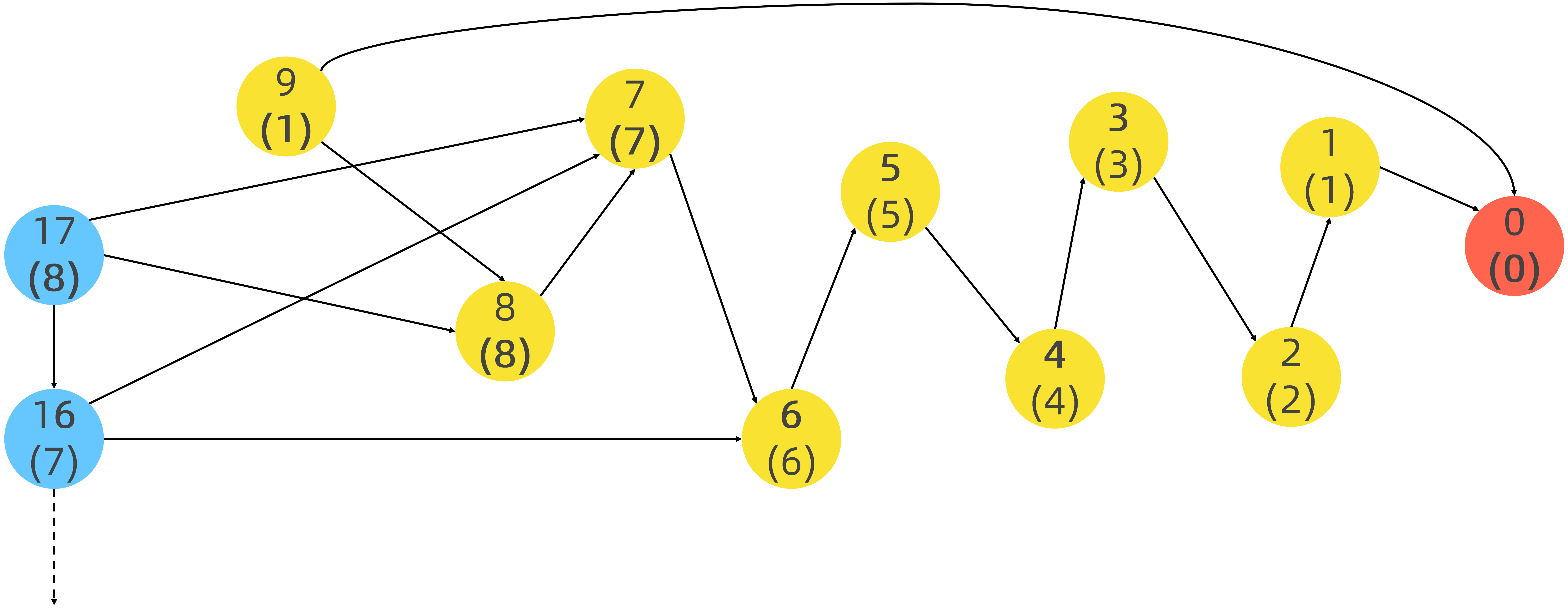
= min(opt[0], opt[8]) + 1

= min(0, 8) + 1

= 1

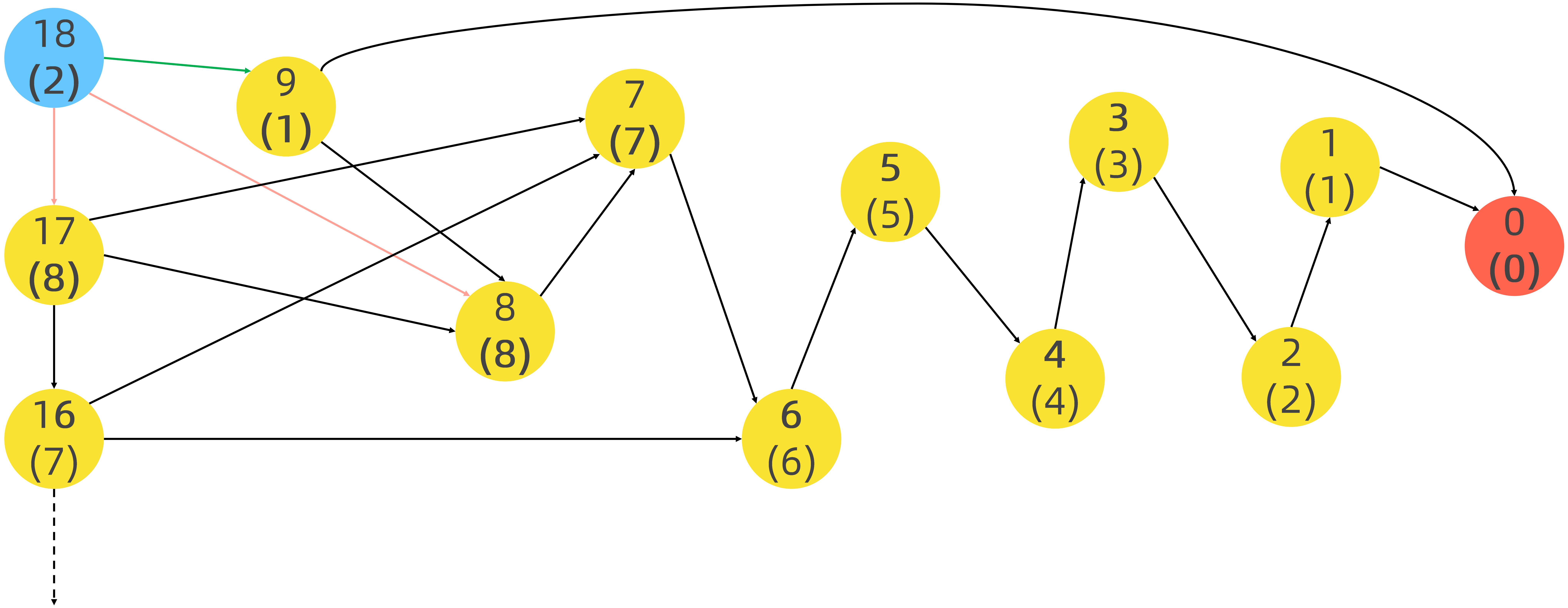
零钱兑换：最优子结构

状态：剩余金额（括号中表示凑成这个金额的最少硬币数）



零钱兑换：最优子结构

状态：剩余金额（括号中表示凑成这个金额的最少硬币数）



零钱兑换：递推实现

```java
class Solution {
    public int coinChange(int[] coins, int amount) {
        int INF = (int)1e9;
        int[] opt = new int[amount + 1];
        opt[0] = 0;
        for (int i = 1; i <= amount; i++) {
            opt[i] = INF;
            for (int j = 0; j < coins.length; j++)
                if (i - coins[j] >= 0)
                    opt[i] = Math.min(opt[i], opt[i - coins[j]] + 1);
        }
        if (opt[amount] >= INF) opt[amount] = -1;
        return opt[amount];
    }
}
```

零钱兑换：记忆化搜索

```python
class Solution:
    def coinChange(self, coins: List[int], amount: int) -> int:
        self.coins = coins
        self.opt = list([-1]) * (amount + 1)
        ans = self.calc(amount)
        return ans if ans < 1e9 else -1

    def calc(self, amount):
        if amount == 0:
            return 0
        if amount < 0:
            return 1e9
        if self.opt[amount] != -1:
            return self.opt[amount]
        self.opt[amount] = 1e9
        for coin in self.coins:
            self.opt[amount] = min(self.opt[amount], self.calc(amount - coin) + 1)
        return self.opt[amount]
```

无论是递推实现还是记忆化搜索（递归实现）
这种定义状态 + 最优子结构 + 推导关系的解题方法
其实就是 动态规划 算法

动态规划

动态规划（DP, dynamic programming）是一种对问题的状态空间进行分阶段、有顺序、不重复、决策性遍历的算法

动态规划的关键与前提：

重叠子问题 —— 与递归、分治等一样，要具有同类子问题，用若干维状态表示

最优子结构 —— 状态对应着一个最优化目标，并且最优化目标之间具有推导关系

无后效性 —— 问题的状态空间是一张有向无环图（可按一定的顺序遍历求解）

动态规划一般采用递推的方式实现

也可以写成递归或搜索的形式，因为每个状态只遍历一次，也被称为记忆化搜索

动态规划

动态规划三要素：阶段、状态、决策

阶段（线性增长）

```
opt[0] = 0;
for (int i = 1; i <= amount; i++) {
    opt[i] = INF;
    for (int j = 0; j < coins.length; j++)
        if (i - coins[j] >= 0)
            opt[i] = Math.min(opt[i], opt[i - coins[j]] + 1);
}
```

决策（找到子问题）

重叠子问题

状态（具有最优子结构）

动态规划

一道动态规划题目的标准题解：

设 $opt[i]$ 表示凑成金额 i 所需的最少硬币数

状态转移方程

$$opt[i] = \min_{coin \in coins} \{\, opt[i - coin] \,\}$$

边界

$$opt[0] = 0, \qquad opt[i] = +\infty \ (i > 0)$$

目标

$$opt[amount]$$

时间复杂度：$O(amount)$

一道动态规划题目，写出状态转移方程，就已经完成了大半的工作

剩下的任务就是照着方程写几个循环递推实现就行了

实战：路径计数

不同路径 II

https://leetcode-cn.com/problems/unique-paths-ii/

一个机器人位于一个 m x n 网格的左上角

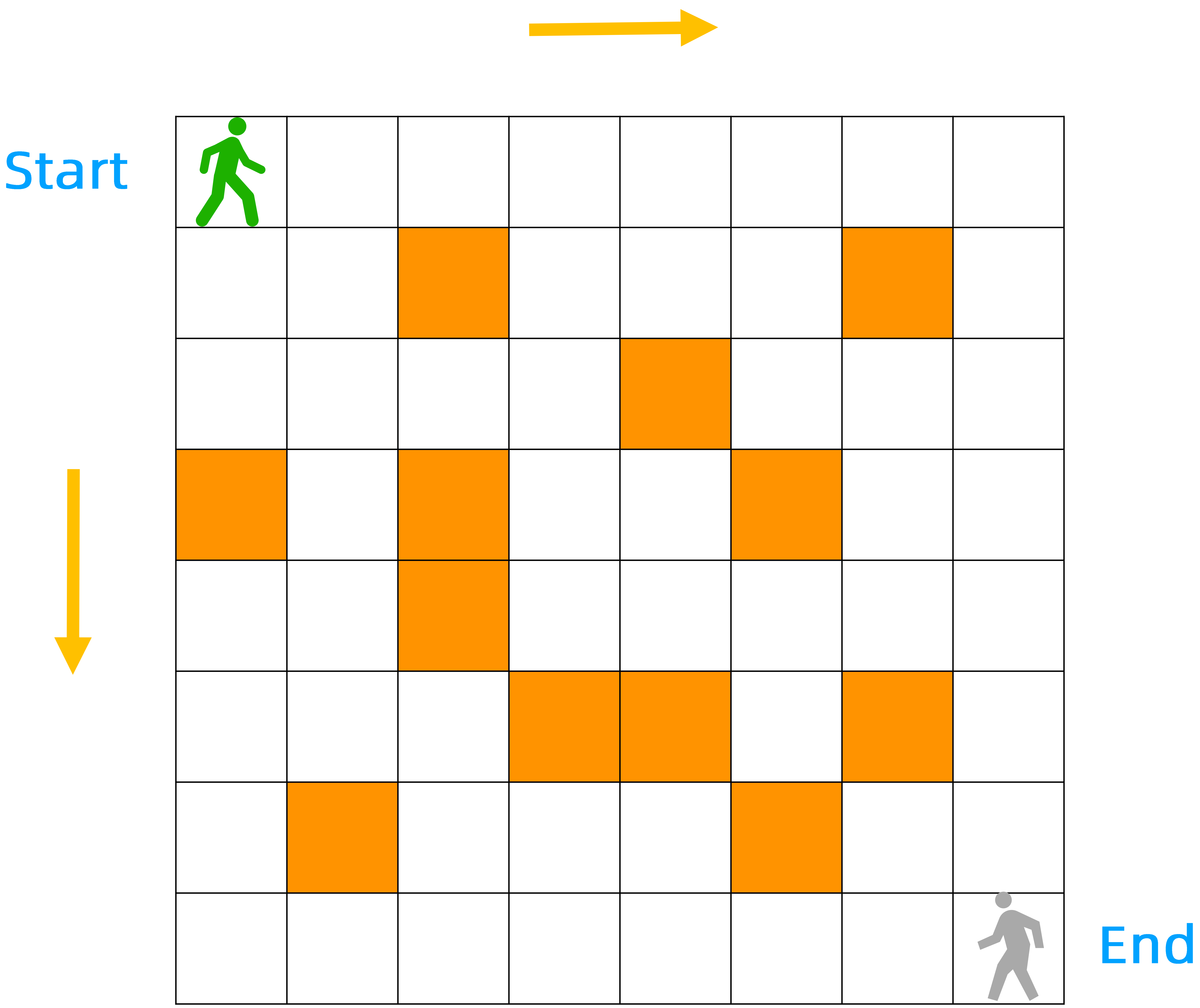
机器人每次只能向下或者向右移动一步

机器人试图达到网格的右下角

现在考虑网格中有障碍物

那么从左上角到右下角将会有多少条不同的路径?

路径计数



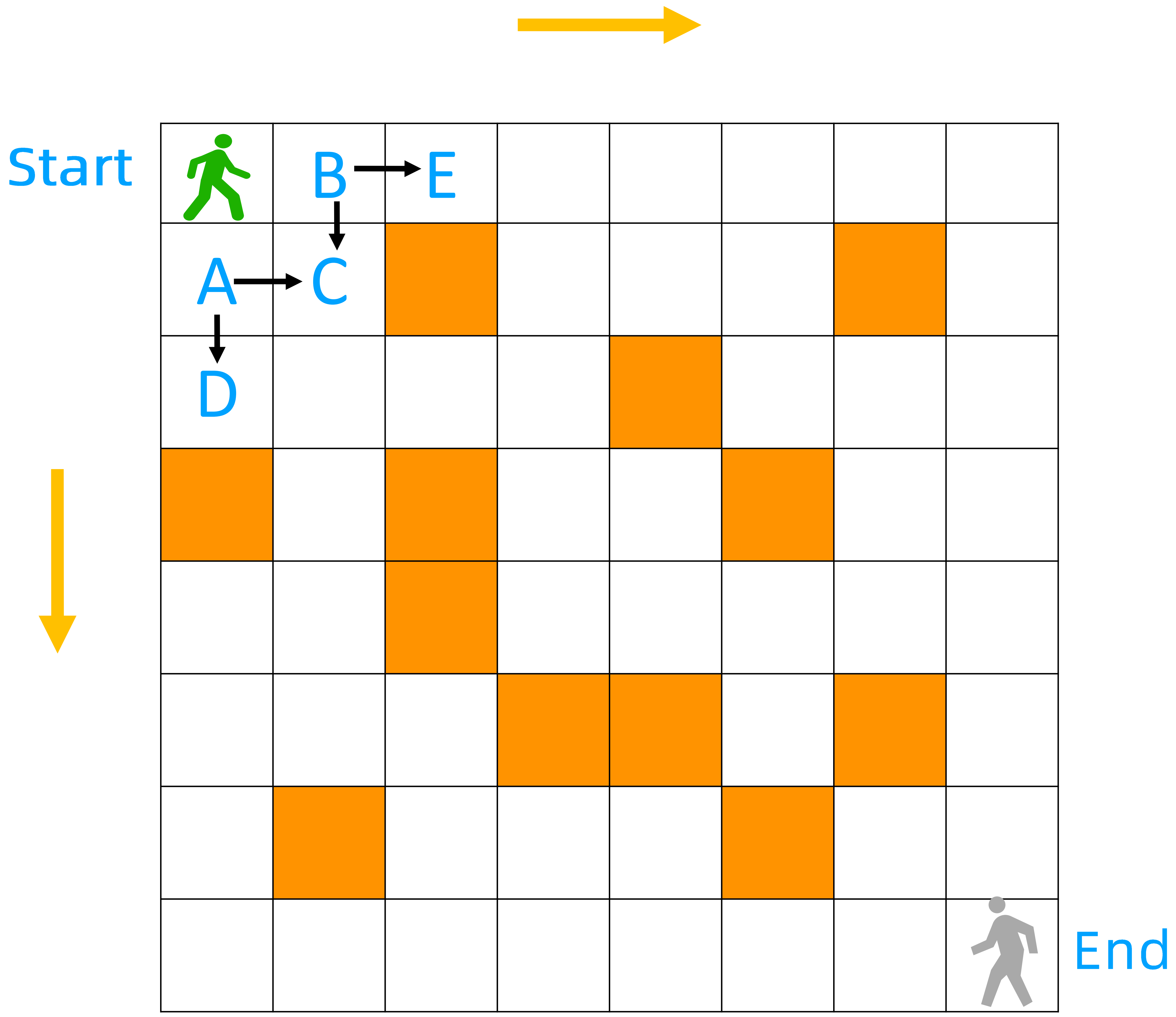
路径计数

paths (start, end) =

paths (A, end) + paths (B, end)

paths (A, end) = paths (D, end) + paths (C, end)

paths (B, end) = paths (C, end) + paths (E, end)



路径计数

Bottom-up

$f[i,j]$ 表示从 (i,j) 到 End 的路径数

如果 (i,j) 是空地，$f[i,j]=f[i+1,j]+f[i,j+1]$

否则 $f[i,j]=0$

Top-down

$f[i,j]$ 表示从 Start 到 (i,j) 的路径数

如果 (i,j) 是空地，$f[i,j]=f[i-1,j]+f[i,j-1]$

否则 $f[i,j]=0$

路径计数

27

Start

	17	12	12	7	4	1	1
10	5		5	3	3		1
5	5	2	2		3	3	1
	3		2	1		2	1
7	3		1	1	1	1	1
4	3	3			0		1
1		3	2	1		2	1
1	1	1	1	1	1	1	

End

Start

	1	1	1	1	1	1	1
1	2		1	2	3		1
1	3	3	4		3	3	4
	3		4	4		3	7
0	3		4	8	8	11	18
0	3	3			8		18
0		3	3	3		0	18
0	0	3	6	9	9	9	

End

27

路径计数

Bottom-up 记忆化搜索（递归、分治思想）

```
int countPaths(boolean[][]grid, int row, int col) {
    if (!validSquare(grid, row, col)) return 0;
    if (isAtEnd(grid, row, col)) return 1;
    return countPaths(grid, row + 1, col) + countPaths(grid, row, col + 1);
}
```

路径计数

```
int n = grid.length, m = grid[0].length;
int[][] f = new int[n][m];
for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int j = 0; j < m; j++) {
        if (grid[i][j] == 1) f[i][j] = 0;
        else if (i == 0 && j == 0) f[i][j] = 1;
        else if (i == 0) f[i][j] = f[i][j - 1];
        else if (j == 0) f[i][j] = f[i - 1][j];
        else f[i][j] = f[i - 1][j] + f[i][j - 1];
    }
return f[n - 1][m - 1];
```

实战：最长公共子序列

https://leetcode-cn.com/problems/longest-common-subsequence/

给两个字符串，求最长公共子序列（LCS），例如：

text1 = "abcde"

text2 = "ace"

入手DP问题第一步：人工模拟的话怎么算?

拿一个小例子，画个表

	a	ac	ace
a	1 (a)	1 (a)	1 (a)
ab	1 (a)	1 (a)	1 (a)
abc	1 (a)	2 (ac)	2 (ac)
abcd	1 (a)	2 (ac)	2 (ac)
abcde	1 (a)	2 (ac)	3 (ace)

最长公共子序列（LCS）

确定“状态”的原则：寻找变化信息

- abcd, ac (ac) => abcde, ace (ace)
- 两个子串的长度是变化的，内容是固定的

确定“最优子结构”的原则：寻找代表

- 同样的两个子串，能组成很多公共子序列
- 只关心最大长度，不关心具体长什么样

确定“阶段”的原则：线性增长的轮廓

- “轮廓”是已计算区域与未计算区域的分界

确定“决策”的原则：人工模拟时考虑了哪些选项？

	a	ac	ace
a	1 (a)	1 (a)	1 (a)
ab	1 (a)	1 (a)	1 (a)
abc	1 (a)	2 (ac)	2 (ac)
abcd	1 (a)	2 (ac)	2 (ac)
abcde	1 (a)	2 (ac)	3 (ace)

最长公共子序列（LCS）

$f[i,j]$ 表示 text1 的前 i 个字符和 text2 的前 j 个字符能组成的 LCS 的长度

如果 text1[i] = text2[j]：$f[i,j]=f[i-1,j-1]+1$

如果 text1[i] ≠ text2[j]：$f[i,j]=\max(f[i-1,j],f[i,j-1])$

动规题目的边界处理技巧

方法一：

$f[0,0]=0$， 然后递推时用 if 语句判断，目标 $f[n-1,m-1]$

方法二：

认为字符串下标从1开始，$f[i,0]=0$ 与 $f[0,j]=0$ 均作为边界，目标 $f[n,m]$

实战：最长上升子序列（LIS）

https://leetcode-cn.com/problems/longest-increasing-subsequence/

例：0,3,1,6,2,7

选 0?	0						
选 3?	3	0,3					
选 1?	1	0,1					
选 6?	6	0,6	3,6	1,6	0,3,6	0,1,6	
选 2?	2	0,2	1,2	0,1,2			
选 7?	7	0,7	3,7	……	0,3,6,7	0,1,6,7	0,1,2,7

实战：最长上升子序列（LIS）

同样是以 6 为结尾，我们真的需要 [6] [0,6] [3,6] [1,6] 吗？

对于 [0,3,6] 和 [0,1,6]，6 前面是什么数对后续的选择有影响吗？

我们只关心：选了几个数，结尾的数是哪个

以 a[0] = 0 为结尾的 LIS 长度是 1

以 a[1] = 3 为结尾的 LIS 长度是 2

以 a[2] = 1 为结尾的 LIS 长度是 2

以 a[3] = 6 为结尾的 LIS 长度是 3

以 a[4] = 2 为结尾的 LIS 长度是 3

以 a[5] = 7 为结尾的 LIS 长度是 4

实战：最长上升子序列（LIS）

蛮力搜索本来要遍历状态空间中的所有可能上升序列

但我们可以选取“结尾数，最长长度”作为一系列序列的代表

并且它们之间还具有推导关系 —— 找到了最优子结构！

$f[i]$ 表示前 i 个数构成的以 $a[i]$ 为结尾的最长上升子序列的长度

$$f[i] = \max_{j<i,\ a[j]<a[i]} \{f[j] + 1\}$$

边界：$f[i] = 1\ (0 \le i < n)$

目标：$\max_{0 \le i < n} \{f[i]\}$

$f[0] = 1$

$f[1] = 2$

$f[2] = 2$

$f[3] = 3$

$f[4] = 3$

$f[5] = 4$

动态规划解题步骤

人力模拟 / 蛮力搜索

关注“轮廓变化”

定义状态

关注“代表”以及它们之间的推导关系

确定最优子结构

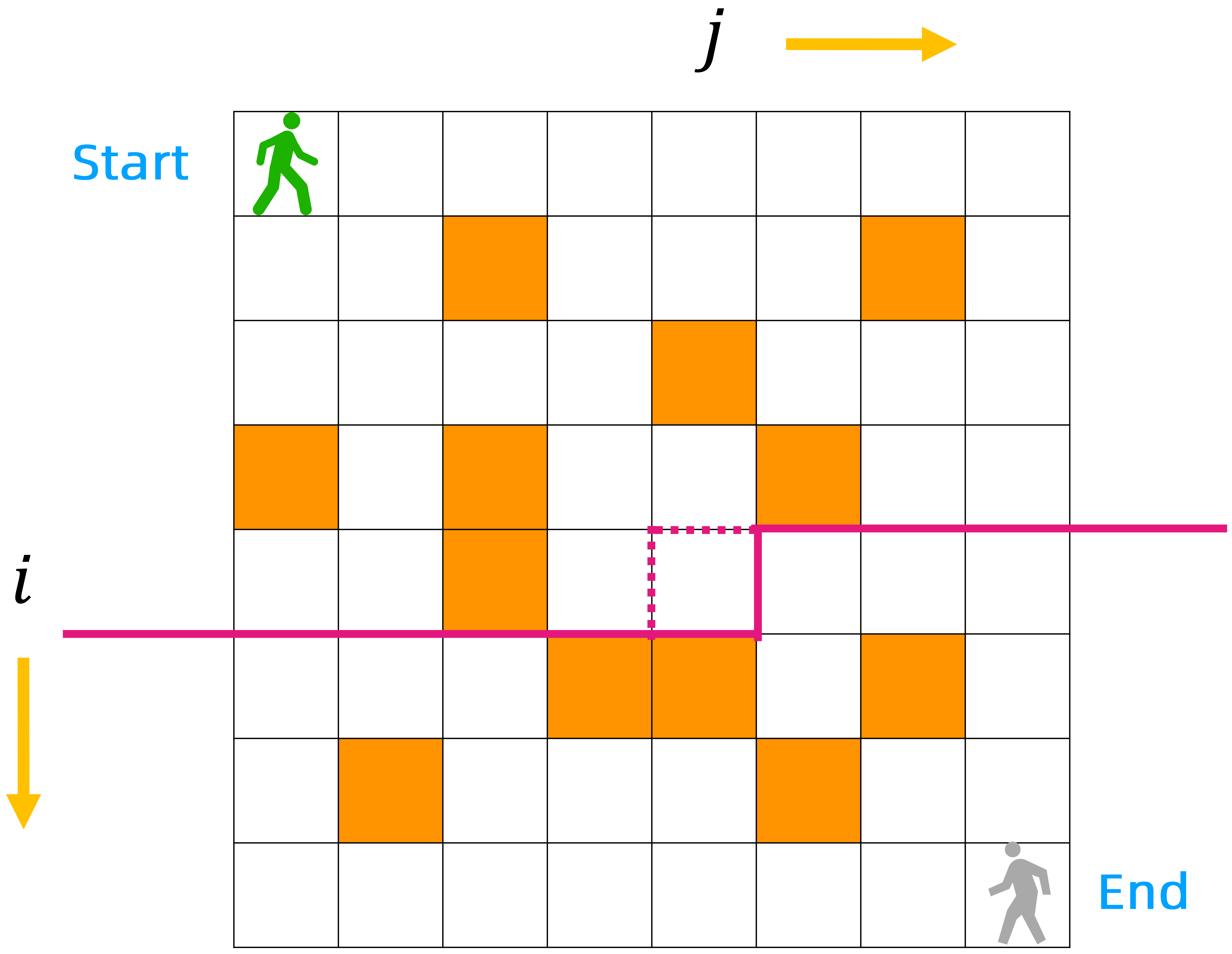
关注人力模拟时做出的决策

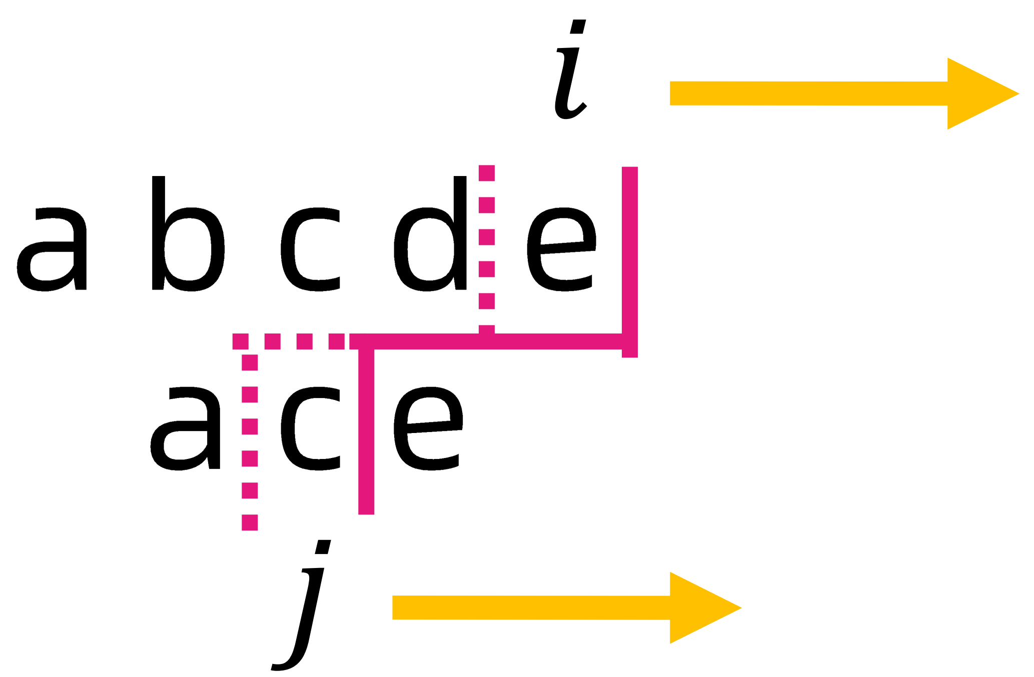
写出状态转移方程

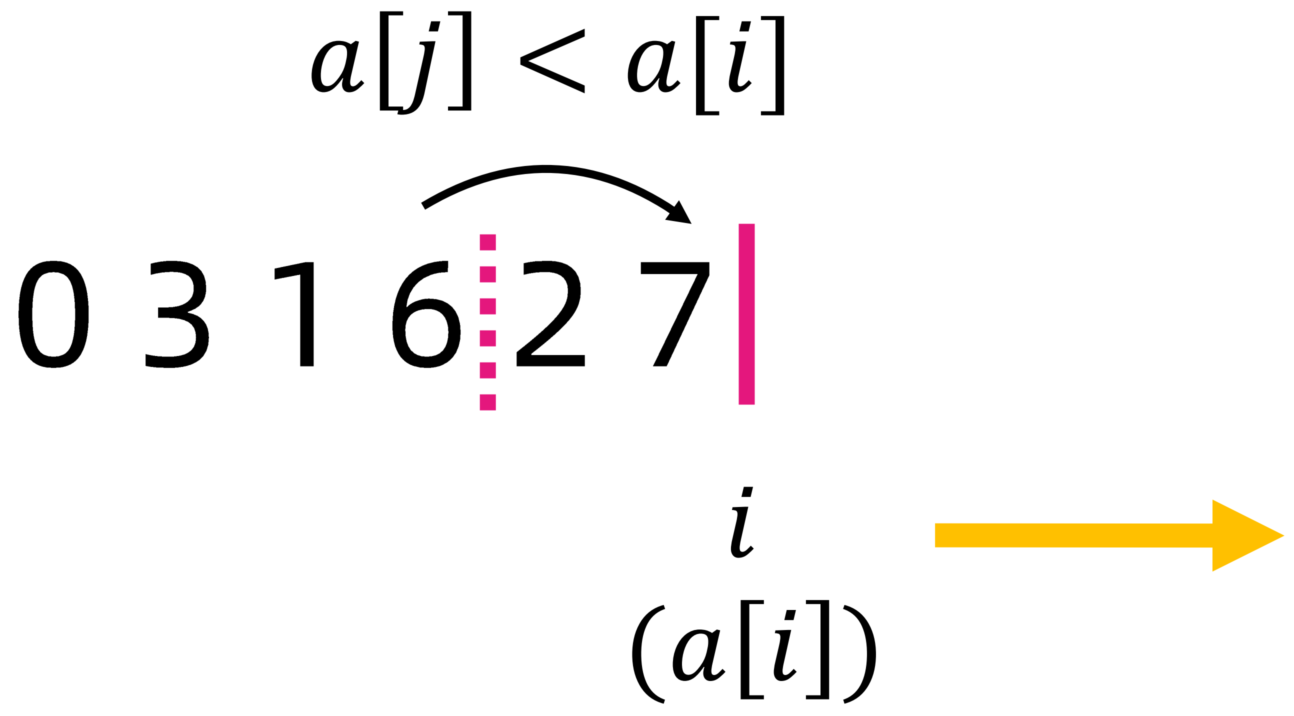
边界包括：起点、会访问到的不合法状态

确定边界、目标，递推实现

动态规划“轮廓变化”







动态规划打印方案

动态规划题目打印方案的原则：记录转移路径 + 递归输出

动态规划选取“代表”，维护了一个最优子结构

如果记录每个最优子结构的详细方案，时间复杂度会上升

以 LCS 为例，本来是 $O(len^2)$，每个 $opt[i,j]$ 记录一个方案（字符串），就变成了 $O(len^3)$

正确做法：

记录每个 $f[i,j]$ 是从哪里转移过来的（$f[i-1,j]$，$f[i,j-1]$ 还是 $f[i-1,j-1]$）

整个动规完成，求出 $f[n,m]$ 后，再从 (n,m) 开始递归复原最优路径

实战：最大子序和

https://leetcode-cn.com/problems/maximum-subarray/

$f[i]$ 表示以 i 为结尾的最大子序和

$f[i] = \max(f[i-1] + nums[i], nums[i])$

边界：$f[0] = nums[0]$

目标：$\max\limits_{0 \le i < n} f[i]$

状态中何时需要"包含结尾"？

——当结尾参与判定条件时，例如 LIS 中 $a[j] < a[i]$，此处子序和要"连续"

实战：乘积最大子数组

https://leetcode-cn.com/problems/maximum-product-subarray/

$f[i]$ 表示以 i 为结尾的乘积最大子数组

$f[i] = \max(f[i-1] * nums[i], nums[i])$ —— 这样还对吗?

请注意，“代表”之间要有推导关系，才满足最优子结构！

当 $nums[i]$ 是负数的时候，max 还能推导出 max 吗?

max和min一起作为代表，才满足最优子结构！

$fmax[i], fmin[i]$ 表示以 i 为结尾的乘积最大、最小子数组

$fmax[i] = \max(fmax[i-1] * nums[i], fmin[i-1] * nums[i], nums[i])$

$fmin[i] = \min(fmax[i-1] * nums[i], fmin[i-1] * nums[i], nums[i])$

Homework

爬楼梯

https://leetcode-cn.com/problems/climbing-stairs/description/

三角形最小路径和

https://leetcode-cn.com/problems/triangle/description/

最长递增子序列的个数

https://leetcode-cn.com/problems/number-of-longest-increasing-subsequence/

THANKS

极客时间 | 训练营