Exercícios resolvidos sobre Teoremas de Probabilidade

Aqui você tem mais uma oportunidade de estudar os teoremas da probabilidade, por meio de um conjunto de exercícios resolvidos. Observe como as propriedades da probabilidade se aplicam aos problemas apresentados.

Exercício 1

Em uma empresa há 10 homens e 25 mulheres. Entre os homens, 5 são formados em Direito e, entre as mulheres, 7 são formadas também em Direito. Os demais são formados em Administração. Ao sortear uma pessoa desse grupo:

a) qual é a probabilidade de ser um homem formado em Administração?

b) sabendo-se que a pessoa sorteada é formada em Administração, qual é a probabilidade de ser homem?

c) sabendo-se que é um homem, qual é a probabilidade de ser formado em Administração?

d) sabendo-se que a pessoa sorteada é formada em Direito, qual é a probabilidade de ser uma mulher?

e) sabendo-se que a pessoa sorteada é uma mulher, qual é a probabilidade de ser formada em Direito?

Solução

Enunciado

Em uma empresa há 10 homens e 25 mulheres. Entre os homens, 5 são formados em Direito e, entre as mulheres, 7 são formadas também em Direito. Os demais são formados em Administração. Ao sortear uma pessoa desse grupo:

a) qual é a probabilidade de ser um homem formado em Administração?

b) sabendo-se que a pessoa sorteada é formada em Administração, qual é a probabilidade de ser homem?

c) sabendo-se que é um homem, qual é a probabilidade de ser formado em Administração?

d) sabendo-se que a pessoa sorteada é formada em Direito, qual é a probabilidade de ser uma mulher?

e) sabendo-se que a pessoa sorteada é uma mulher, qual é a probabilidade de ser formada em Direito?

Solução

As informações dadas são:

Homens 10	Administração 5
	Direito 5

Mulheres 25	Administração 18
	Direito 7

Sejam os eventos:

H = ser homem

M = ser mulher

A = ser formado(a) em Administração

D = ser formado(a) em Direito

Vamos verificar as alternativas uma a uma.

a) Temos de calcular a probabilidade de ser um homem *e* de ser formado em Administração → Evento *intersecção* → *Regra do Produto*

$$P(H \cap A) = P(H) \cdot P(A|H) = \frac{10}{35} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$$

b) Para calcular a probabilidade de a pessoa sorteada ser homem, sabendo-se que ela é formada em Administração, fazemos a aplicação direta da Probabilidade Condicionada.

$$P(H|A) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{5+18}{35}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{35}{23} = \frac{5}{23}$$

c) Para calcular a probabilidade de a pessoa ser formada em Administração, sabendo-se que o sorteado foi um homem, aplicamos a Probabilidade Condicionada.

$$P(A|H) = \frac{P(H \cap A)}{P(H)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{10}{35}} = \frac{1}{7} \cdot \frac{35}{10} = \frac{1}{2}$$

d) O cálculo utilizado é da Probabilidade Condicionada:

$$P(M|D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{7}{35}}{\frac{7+5}{35}} = \frac{7}{35} \cdot \frac{35}{12} = \frac{7}{12}$$

e) Mais uma vez, trata-se da Probabilidade Condicionada:

$$P(D|M) = \frac{P(M \cap D)}{P(M)} = \frac{\frac{7}{35}}{\frac{25}{35}} = \frac{7}{35} \cdot \frac{35}{25} = \frac{7}{25}$$

Exercício 2

É preciso formar uma comissão e para sua constituição há disponíveis 2 professores e 4 assistentes. São escolhidas ao acaso 3 pessoas. Qual é a probabilidade de que sejam escolhidos para esta comissão 1 professor e 2 assistentes?

Solução

Enunciado

É preciso formar uma comissão e para sua constituição há disponíveis 2 professores e 4 assistentes. São escolhidas ao acaso 3 pessoas. Qual é a probabilidade de que sejam escolhidos para esta comissão 1 professor e 2 assistentes?

Solução

Temos: 2 professores
4 assistentes

Queremos formar uma comissão com três pessoas, escolhidas ao acaso. Há $\binom{6}{3} = 20$ maneiras de fazer isso.

Consideremos, agora, o caso particular em que a comissão é formada por um professor e dois assistentes. Existem duas maneiras de escolher esse professor (dentre os dois disponíveis) e $\binom{4}{2} = 6$ maneiras de escolher os dois assistentes (dentre os quatro disponíveis). Assim, o total de comissões formadas por um professor e dois assistentes é $2 \times 6 = 12.$

Portanto, se E for o evento "a comissão é constituída por um professor e dois assistentes", teremos

$$P(E) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Exercício 3

Um casal vai mergulhar em busca de pérolas no oceano. Sabemos que em razão das habilidades e do condicionamento físico deles, o rapaz tem 3/7 de chance de encontrar alguma pérola e a moça, 2/7 de chance. Sabemos que a chance de os dois encontrarem pérolas é de 1/7. Sabendo-se que o rapaz encontrou uma pérola:

a) Qual é a chance de a moça NÃO ter achado pérola alguma *antes* e *depois* de saber que seu esposo encontrou uma delas?

b) Qual é a chance de a moça *encontrar* uma pérola depois de saber que o rapaz conseguiu uma pérola?

c) Decida se o evento de não encontro de pérola do rapaz é mutuamente excludente ao evento do não encontro de pérola da moça.

d) Sem ter a informação do achado do rapaz, qual é a chance de somente um deles encontrar alguma pérola?

Solução

Enunciado

Um casal vai mergulhar em busca de pérolas no oceano. Sabemos que em razão das habilidades e do condicionamento físico deles, o rapaz tem 3/7 de chance de encontrar alguma pérola e a moça, 2/7 de chance. Sabemos que a chance de os dois encontrarem pérolas é de 1/7. Sabendo-se que o rapaz encontrou uma pérola:

a) Qual é a chance de a moça NÃO ter achado pérola alguma *antes* e *depois* de saber que seu esposo encontrou uma delas?

b) Qual é a chance de a moça *encontrar* uma pérola depois de saber que o rapaz conseguiu uma pérola?

c) Decida se o evento de não encontro de pérola do rapaz é mutuamente excludente ao evento do não encontro de pérola da moça.

d) Sem ter a informação do achado do rapaz, qual é a chance de somente um deles encontrar alguma pérola?

Solução

Sejam os eventos:

HA = rapaz encontra pérola

HS = rapaz não encontra pérola

MA = moça encontra pérola

MS = moça não encontra pérola

Sabemos que $P(HA) = 3/7$, $P(MA) = 2/7$ e $P(HA \cap MA) = 1/7$.

Vamos verificar cada uma das alternativas.

a) Uma informação adicional pode alterar a probabilidade de ocorrência de um evento. Sem a informação sobre o sucesso do rapaz, a chance de insucesso da moça é calculada pelo evento complementar.

$$P(MS) = 1 - P(MA) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Após a informação, calculamos também pelo evento complementar, atentando para o espaço amostral considerado (que inclui apenas os eventos em que o rapaz encontra uma pérola):

$$P(MS|HA) = 1 - P(MA|HA)$$

A probabilidade $P(MA|HA)$ é calculada pela expressão da Probabilidade Condicionada:

$$P(MA|HA) = \frac{P(MA \cap HA)}{P(HA)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

Então, substituindo na expressão anterior:

$$P(MS|HA) = 1 - P(MA|HA) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Portanto, a informação sobre o achado do rapaz afeta a chance de a moça não encontrar algo.

b) Após a informação de que o rapaz encontrou uma pérola, a chance de a moça encontrar é calculada pela Probabilidade Condicionada:

$$P(MA|HA) = \frac{P(MA \cap HA)}{P(HA)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3}$$

c) Eventos mutuamente excludentes devem apresentar intersecção nula. Nesse caso, devemos procurar calcular a intersecção dos eventos de encontrar uma pérola para cada um deles. Pela Regra do Produto temos:

$$P(HS \cap MS) = P(HS).P(MS|HS)$$

Porém não sabemos ainda o valor de *P(MS|HS)*. No entanto, podemos obtê-lo por meio do teorema da Probabilidade Total, pois a chance de a moça achar uma pérola depende de o rapaz ter encontrado ou não.

$$P(MS) = P(HA).P(MS|HA) + P(HS).P(MS|HS)$$

Foi calculada anteriormente a probabilidade de a moça não ter achado nenhuma pérola, dado que o rapaz encontrou:

$$P(MS|HA) = \frac{2}{3}$$

Assim, podemos fazer as substituições na expressão da Probabilidade Total e obter o valor de *P(MS|HS)*.

$$P(MS) = \frac{5}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{7} \cdot P(MS|HS)$$

$$\frac{5}{7} = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} \cdot P(MS|HS)$$

$$4.P(MS|HS) = 5 - 2$$

$$P(MS|HS) = \frac{3}{4}$$

Voltando à Regra do Produto, temos então:

$$P(HS \cap MS) = P(HS).P(MS|HS) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{7}$$

E, como a probabilidade de ocorrência de intersecção é não nula, os eventos não são mutuamente excludentes.

d) Sem ter a informação do achado do rapaz, a chance de somente um dos dois encontrar uma pérola é calculada pela Regra da Soma para a ocorrência de *algum* dos eventos "*HS* e *MA*" e "*HA* e *MS*", que são mutuamente excludentes.

$$\begin{aligned} P(apenas\ um\ encontra) &= P(HS \cap MA) + P(HA \cap MS) \\ &= P(HS).P(MA|HS) + P(HA).P(MS|HA) \end{aligned}$$

P(MA|HS) nada mais é que a probabilidade de o evento complementar a "*MS|HS*", cuja probabilidade foi calculada no item anterior.

$$P(MA|HS) = 1 - P(MS|HS) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

P(MS|HA) também foi calculada anteriormente e vale 2/3. Portanto, substituindo na Regra da Soma:

$$\begin{aligned} P(apenas\ um\ encontra) &= P(HS \cap MA) + P(HA \cap MS) \\ &= P(HS).P(MA|HS) + P(HA).P(MS|HA) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Exercício 4

Considere três caixas, cada uma delas com dois compartimentos. Na caixa 1 há uma nota de R$ 50 em cada compartimento. Na caixa 2 há uma nota de R$ 10 em cada compartimento. Na caixa 3 há uma nota de R$ 50 em um compartimento e uma nota de R$ 10 em outro. Escolhendo uma caixa ao acaso, abrimos um compartimento. Se a nota é de R$ 50, qual é a probabilidade de que no outro compartimento também haja uma nota de R$ 50?

Solução

Enunciado

Considere três caixas, cada uma delas com dois compartimentos. Na caixa 1 há uma nota de R$ 50 em cada compartimento. Na caixa 2 há uma nota de R$ 10 em cada compartimento. Na caixa 3 há uma nota de R$ 50 em um compartimento e uma nota de R$ 10 em outro. Escolhendo uma caixa ao acaso, abrimos um compartimento. Se a nota é de R$ 50, qual é a probabilidade de que no outro compartimento também haja uma nota de R$ 50?

Solução

Este exercício é mais simples do que parece.

Supondo que a primeira nota retirada era de R$ 50, queremos saber a chance de a segunda também ser de R$ 50.

$$P(2^{\underline{a}}\ R\$50 | 1^{\underline{a}}\ R\$50) = \frac{P(1^{\underline{a}}\ R\$50\ \cap 2^{\underline{a}}\ R\$50)}{P(1^{\underline{a}}\ R\$50)}$$

A intersecção dos eventos em questão ocorre apenas na caixa 1, que contém 2 notas de R$ 50. Então:

$$P(1^{\underline{a}}\ R\$50\ \cap 2^{\underline{a}}\ R\$50) = \frac{1}{3}$$

A probabilidade de retirar em primeiro lugar uma nota de R$ 50 pode ser entendida da seguinte forma: temos 6 notas no total, das quais apenas 3 são de R$ 50. Isso é possível, pois é igualmente provável escolher qualquer uma das 3 caixas, assim como os compartimentos. Logo:

$$P(1^{\underline{a}}\ R\$50) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Então, substituindo na primeira expressão:

$$P(2^{\underline{a}}\ R\$50 | 1^{\underline{a}}\ R\$50) = \frac{P(1^{\underline{a}}\ R\$50\ \cap 2^{\underline{a}}\ R\$50)}{P(1^{\underline{a}}\ R\$50)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Exercício 5

Em uma caixa existem 3 envelopes brancos e 2 envelopes pardos. Eles são extraídos da caixa sem reposição. Calcule:

a) a chance de que saiam três envelopes brancos sucessivos.

b) a chance de que saiam 2 pardos sucessivamente

c) a chance de que saiam ou 2 pardos sucessivos ou 3 brancos sucessivos.

d) a chance de que os envelopes sejam sorteados em tipos intercalados.

Solução

Enunciado

Em uma caixa existem 3 envelopes brancos e 2 envelopes pardos. Eles são extraídos da caixa sem reposição. Calcule:

a) a chance de que saiam três envelopes brancos sucessivos.

b) a chance de que saiam 2 pardos sucessivamente

c) a chance de que saiam ou 2 pardos sucessivos ou 3 brancos sucessivos.

d) a chance de que os envelopes sejam sorteados em tipos intercalados.

Solução

Considere os eventos:

A = saírem 3 brancos sucessivos

B = saírem 2 pardos sucessivos

E = saírem intercalados

Vamos testar as alternativas uma a uma:

a) A chance de que saiam 3 brancos sucessivos é de 0,3.

Antes de calcular as probabilidades das retiradas, devemos verificar quantas são as permutações possíveis. Neste caso são 3. Observe:

Branco	Branco	Branco		
	Branco	Branco	Branco	
		Branco	Branco	Branco

Agora sim, vamos aplicar a Regra do Produto, multiplicando as probabilidades por 3.

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

b) A chance de que saiam 2 pardos sucessivamente é 0,4.

A resolução é análoga à do item anterior.

Pardo	Pardo			
	Pardo	Pardo		
		Pardo	Pardo	
			Pardo	Pardo

Aplicando a Regra do Produto:

$$P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

c) A chance de que saiam ou 2 pardos sucessivos ou 3 brancos sucessivos é de 0,5.

Como calculamos nos itens anteriores:

$$P(A) = 0{,}3 \; e \; P(B) = 0{,}4$$

Para obtermos a probabilidade de ocorrência do evento união, aplicamos a Regra da Soma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Observe que existem duas combinações, entre as 10 possíveis, em que os eventos ocorrem simultaneamente:

Pardo	Pardo	Branco	Branco	Branco
Branco	Branco	Branco	Pardo	Pardo

Portanto, $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = 0{,}2$ e, substituindo na Regra da Soma, temos:

$$P(A \cup B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}5$$

d) A chance de que os envelopes sejam sorteados em tipos intercalados é de 0,1.

Aqui, aplicamos a Regra do Produto para a única combinação possível em que os envelopes saem intercalados.

$$P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

Exercício 6

Considere dois eventos A e B. Sabendo que $P(A) = 0,4$ e $P(A \cup B) = 0,7$. Seja $P(B) = p$. A partir disso, calcule os valores de p para que os eventos A e B sejam:

a) Mutuamente excludentes

b) Independentes

Solução

Enunciado

Considere dois eventos A e B. Sabendo que P(A) = 0,4 e P(A U B) = 0,7. Seja P(B) = p. A partir disso, calcule os valores de p para que os eventos A e B sejam:

a) Mutuamente excludentes

b) Independentes

Solução

Eventos *mutuamente excludentes* são aqueles cuja intersecção é nula. Nesse caso, conforme o axioma visto na primeira aula, a probabilidade de ocorrência da união dos eventos é calculada diretamente pela soma de cada uma das probabilidades.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$0{,}7 = 0{,}4 + p$$

$$p = 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3$$

Eventos independentes são aqueles tais que a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de ocorrência do outro. Ou seja:

$$P(A|B) = P(A) \quad ou\ ainda\ P(B|A) = P(B)$$

Neste caso, a probabilidade da intersecção é calculada pelo produto das probabilidades de cada um dos eventos elementares. Dessa forma, aplicando a Regra da Soma teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$

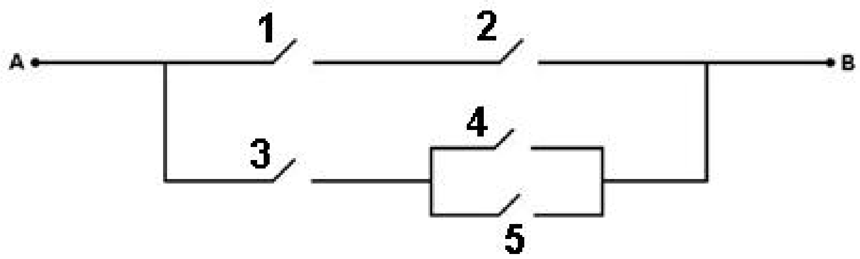
$$0{,}7 = 0{,}4 + p - 0{,}4p$$

$$0{,}6p = 0{,}3$$

$$p = 0{,}5$$

Exercício 7

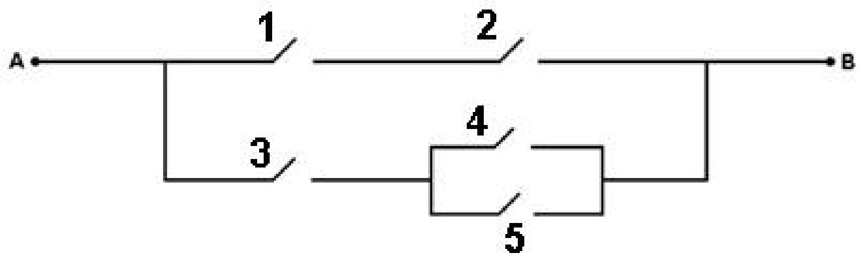
Considere o circuito elétrico ilustrado a seguir. É preciso que passe um pulso entre os pontos A e B. Como a estrutura onde ele está instalado é muito precária, cada chave ilustrada do circuito tem probabilidade igual a ½ de estar fechada. Além disso, cada chave tem funcionamento completamente independente das demais. Qual é a chance de sucesso do pulso?



Solução

Enunciado

Considere o circuito elétrico ilustrado a seguir. É preciso que passe um pulso entre os pontos A e B. Como a estrutura onde ele está instalado é muito precária, cada chave ilustrada do circuito tem probabilidade igual a ½ de estar fechada. Além disso, cada chave tem funcionamento completamente independente das demais. Qual é a chance de sucesso do pulso?



Solução

Vamos analisar em que condições o pulso não será transmitido entre os terminais.

Não haverá transmissão se:

Chave 1 aberta *OU* Chave 2 aberta	*E*	Chave 4 *E* chave 5 abertas *OU* Chave 3 aberta

− Chave 1 aberta OU chave 2 aberta:

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

− Chaves 4 e 5 abertas OU chave 3 aberta:

$$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Então, a chance de não passar o pulso é de:

$$P(não\ passar) = P_1 \cap P_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$$

E a chance de passar o pulso será dada pelo evento complementar:

$$P(passar\ o\ pulso) = 1 - P(não\ passar) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32} \cong 0{,}53$$

Exercício 8

Este exercício é conhecido como “jogo das 3 portas” e consiste em 3 portas das quais apenas uma delas esconde um prêmio. O participante escolhe uma delas na qual ele acredita estar o prêmio. Uma vez escolhida a porta, o apresentador, que sabe onde está o prêmio, abre uma porta sem prêmio que não tenha sido escolhida pelo participante. Restam assim a porta escolhida pelo participante e a outra fechada. Por fim o apresentador pergunta se o participante quer trocar de porta ou continuar com a primeira escolhida.
Se você estivesse participando do jogo e o apresentador te desse a opção de trocar de porta, o que você faria?

Solução

Enunciado

Este exercício é conhecido como "jogo das 3 portas" e consiste em 3 portas das quais apenas uma delas esconde um prêmio. O participante escolhe uma delas na qual ele acredita estar o prêmio. Uma vez escolhida a porta, o apresentador, que sabe onde está o prêmio, abre uma porta sem prêmio que não tenha sido escolhida pelo participante. Restam assim a porta escolhida pelo participante e a outra fechada. Por fim o apresentador pergunta se o participante quer trocar de porta ou continuar com a primeira escolhida.

Se você estivesse participando do jogo e o apresentador te desse a opção de trocar de porta, o que você faria?

Solução

É comum pensar que, após a abertura de uma das portas (que não esconde o prêmio), a probabilidade de acerto passa a ser 1/2, pois existem agora apenas duas portas possíveis. No entanto, devemos lembrar que probabilidade é uma medida da informação que temos a respeito da ocorrência de um evento.

Como vimos nesta unidade, a probabilidade condicional depende exatamente da quantidade de informação que temos a respeito de dois eventos sucessivos.

Nesse caso, os eventos são a escolha de uma porta e a posterior abertura de outra delas. O que ocorre é teoricamente simples.

Quando inicialmente se escolhe uma das portas, apesar de contarmos com nossa "intuição", a informação que temos é clara: temos 1/3 de chance de ganhar com qualquer uma das portas. No entanto, quando o apresentador escolhe uma das portas restantes e abre, a informação que temos a respeito do jogo muda.

Sabemos que o apresentador detém a informação de qual porta esconde o prêmio. Sabemos também que ele jamais abriria essa porta, afinal o jogo acabaria logo.

Com a abertura dessa porta o que ocorre é simples: a chance de o prêmio estar na porta que escolhemos continua a ser de 1/3; afinal, uma vez escolhida nossa porta, nada aconteceu com ela até o momento. Ela continua sendo a mesma porta do início do jogo com essa probabilidade de sucesso. Contudo, ganhamos a informação de que a porta aberta passou a ter 0% de chance de conter o prêmio. Automaticamente, a porta que não foi escolhida nem aberta passa a ser detentora de $\frac{2}{3}$ das chances de esconder o prêmio.

Em um primeiro momento parece inacreditável e incorreta essa conclusão, contudo após refletir bastante você verá que é coerente com a teoria aprendida.