

# 高等数学讲义

## 1 常用数学知识

### 1.1 幂函数

1.1.1 立方相关公式

1.1.2 立方差公式

1.1.3 立方和公式

1.1.4 二项式定理

1.1.5  $n$ 方差公式 (P14, 心一基础讲义) -->

### 1.2 三角函数与反三角函数

1.2.1 三角函数重要公式

1.2.2 两角和差公式

1.2.3 二倍角公式

1.2.4 降次公式

1.2.5 和差化积

1.2.6 积化和差

1.2.7 辅助角公式

1.2.8 万能公式

1.2.9 反三角函数常见结论

### 1.3 常见不等式

1.3.1 绝对值不等式

1.3.2 均值不等式 (算数平均值  $\geq$  几何平均值)

### 1.4 数列

1.4.1 等比数列

1.4.2 等差数列

### 1.5 数学归纳法

## 2 极限与连续

### 2.1 数列的极限

2.1.1 数列极限定义

2.1.2 极限的性质

### 2.2 函数的极限

2.2.1 函数极限的定义

2.2.1.1  $x \rightarrow \infty$  时  $f(x)$  的极限的定义

2.2.1.2  $x \rightarrow x_0$  时  $f(x)$  的极限的定义

### 2.3 极限存在准则和两个重要极限

### 2.4 无穷小的比较

### 2.5 函数的连续性与间断点

## 3 导数和微分

### 3.1 导数的概念

### 3.2 函数的求导法则

### 3.3 函数的积分

## 4 微分中值定理和导数应用

### 4.1 微分中值定理

### 4.2 洛必达法则

### 4.3 泰勒公式

## 5 不定积分

### 5.1 不定积分的概念与性质

- 5.2 换元积分法
- 5.3 分部积分法
- 5.4 有理函数积分法
- 6 定积分**
  - 6.1 定积分的概念与性质
  - 6.2 微积分学的基本定理
  - 6.3 定积分的计算方法
  - 6.4 反常积分
  - 6.5 定积分的运用
- 7 常微分方程**
  - 7.1 基本概念
  - 7.2 一阶微分方程
  - 7.3 可降解的微分方程
  - 7.4 高阶线性微分方程
    - 7.4.1 二阶常系数齐次微分方程
    - 7.4.2 二阶常系数非齐次微分方程
  - 7.5 微分算子法
- 8 空间解析几何**
  - 8.1 向量及其运算
  - 8.2 平面与直线
  - 8.3 空间曲面、曲线及其方程
- 9 多元函数微分学**
  - 9.1 多元函数的极限与连续
  - 9.2 偏导数
  - 9.3 全微分
  - 9.4 多元函数极值
  - 9.5 多元函数微分学的几何应用
  - 9.6 方向导数与梯度
- 10 重积分**
  - 10.1 二重积分的概念与性质
  - 10.2 二重积分的计算
  - 10.3 三重积分的定义
  - 10.4 三重积分的计算
- 11 曲线积分与曲面积分**
  - 11.1 第一类曲线积分
  - 11.2 第二类曲线积分
  - 11.3 格林公式及其应用
  - 11.4 第一类曲面积分
  - 11.5 第二类曲面积分
  - 11.6 高斯公式
  - 11.7 斯托克斯公式
- 12 无穷级数**
  - 12.1 常数项级数的概念和性质
  - 12.2 常数项级数审敛法
  - 12.3 幂级数
  - 12.4 函数展开成幂级数
  - 12.5 傅里叶级数

### 13 零碎知识

13.1 参数方程

13.2 曲率与弧长

13.3 面积与体积

13.4 物理运用

# 1 常用数学知识

## 1.1 幂函数

### 1.1.1 立方相关公式

立方公式1:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (1)$$

立方公式2:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (2)$$

### 1.1.2 立方差公式

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \quad (3)$$

### 1.1.3 立方和公式

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \quad (4)$$

### 1.1.4 二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \quad (5)$$

注意:  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

### 1.1.5 n方差公式

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad (6)$$

## 1.2 三角函数与反三角函数

### 1.2.1 三角函数重要公式

1.  $\csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$
2.  $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$
3.  $\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$
4.  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$
5.  $1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$
6.  $1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha)$

### 1.2.2 两角和差公式

1.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$
2.  $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)$
3.  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$
4.  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta)$

### 1.2.3 二倍角公式

1.  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos(\alpha)$
2.  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
3.  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

### 1.2.4 降次公式

1.  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
2.  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

### 1.2.5 和差化积

1.  $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
2.  $\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$
3.  $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
4.  $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

### 1.2.6 积化和差

1.  $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
2.  $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
3.  $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
4.  $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$

证明提示: 令  $A = \alpha + \beta$ ,  $B = \alpha - \beta$ , 则  $\alpha = \frac{A+B}{2}$ ,  $\beta = \frac{A-B}{2}$ , 然后引入和差化积公式化简得。

### 1.2.7 辅助角公式

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi) \quad (7)$$

注意:

其中  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\tan \varphi = \frac{b}{a}$

### 1.2.8 万能公式

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (8)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad (9)$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2} \quad (10)$$

说明:  $t = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$

### 1.2.9 反三角函数常见结论

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

## 1.3 常见不等式

### 1.3.1 绝对值不等式

$$||x| + |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \quad (13)$$

### 1.3.2 均值不等式（算数平均值 $\geq$ 几何平均值）

注释：

调和不等式 $\leq$ 几何平均值 $\leq$ 算数平均值 $\leq$ 平方平均值

## 1.4 数列

### 1.4.1 等比数列

求和公式：

$$S_n = \frac{a_1(1 - q_n)}{1 - q} \quad (14)$$

### 1.4.2 等差数列

求和公式：

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (15)$$

## 1.5 数学归纳法

1. 验证  $n = 1$ 成立
2. 假设  $n = k$ 成立
3. 推出  $n = k + 1$ 成立

## 2 极限与连续

### 2.1 数列的极限

#### 2.1.1 数列极限定义

已知数列 $\{a_n\}$ 和常数A, 如果对于任意给定的正数 $\epsilon$ (无论它多么小), 都存在正整数 $N$ ,使得对于 $n > N$ 的一切 $a_n$ , 不等式 $|a_n - A| < \epsilon$  恒成立, 则称当  $n \rightarrow \infty$ 时,  $\{a_n\}$ 以A为极限, 或 $\{a_n\}$ 收敛于A, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 或 $a_n \rightarrow \infty$ .

#### 2.1.2 极限的性质

1. 唯一性
2. 全局有界性
3. 保号性
4. 数列收敛, 其任意子数列也收敛

## 2.2 函数的极限

### 2.2.1 函数极限的定义

#### 2.2.1.1 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 的极限的定义

设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义,  $A$ 为一常数, 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ , 都存在一个正数 $N$ , 使得适合不等式 $|x| > N$ 的一切 $x$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (16)$$

则称当 $x \rightarrow \infty$ 时,  $f(x)$ 以 $A$ 为极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A(x \rightarrow \infty)$ .

#### 2.2.1.2 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限的定义

设有函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的, 某一去心邻域内有定义,  $A$ 为一常数, 如果对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ , 都存在一个正数 $\delta > 0$ , 使得适合不等式 $|x - x_0| > \delta$ 的一切 $x$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (17)$$

则称当 $x \rightarrow x_0$ 时,  $f(x)$ 以 $A$ 为极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A(x \rightarrow x_0)$ .

## 2.3 极限存在准则和两个重要极限

## 2.4 无穷小的比较

## 2.5 函数的连续性与间断点

## 3 导数和微分

### 3.1 导数的概念

### 3.2 函数的求导法则

### 3.3 函数的积分

## 4 微分中值定理和导数应用

### 4.1 微分中值定理

### 4.2 洛必达法则

### 4.3 泰勒公式

## 5 不定积分

- 5.1 不定积分的概念与性质
- 5.2 换元积分法
- 5.3 分部积分法
- 5.4 有理函数积分法

## 6 定积分

- 6.1 定积分的概念与性质
- 6.2 微积分学的基本定理
- 6.3 定积分的计算方法
- 6.4 反常积分
- 6.5 定积分的运用

## 7 常微分方程

- 7.1 基本概念
- 7.2 一阶微分方程
- 7.3 可降解的微分方程
- 7.4 高阶线性微分方程
  - 7.4.1 二阶常系数齐次微分方程
  - 7.4.2 二阶常系数非齐次微分方程
- 7.5 微分算子法

## 8 空间解析几何

- 8.1 向量及其运算
- 8.2 平面与直线
- 8.3 空间曲面、曲线及其方程

## 9 多元函数微分学

- 9.1 多元函数的极限与连续
- 9.2 偏导数



- 9.3 全微分
- 9.4 多元函数极值
- 9.5 多元函数微分学的几何应用
- 9.6 方向导数与梯度

## 10 重积分

- 10.1 二重积分的概念与性质
- 10.2 二重积分的计算
- 10.3 三重积分的定义
- 10.4 三重积分的计算

## 11 曲线积分与曲面积分

- 11.1 第一类曲线积分
- 11.2 第二类曲线积分
- 11.3 格林公式及其应用
- 11.4 第一类曲面积分
- 11.5 第二类曲面积分
- 11.6 高斯公式
- 11.7 斯托克斯公式

## 12 无穷级数

- 12.1 常数项级数的概念和性质
- 12.2 常数项级数审敛法
- 12.3 幂级数
- 12.4 函数展开成幂级数
- 12.5 傅里叶级数

## 13 零碎知识

- 13.1 参数方程

- 13.2 曲率与弧长
- 13.3 面积与体积
- 13.4 物理运用