高等数学讲义

1　常用数学知识

1.1　幂函数

1.1.1　立方相关公式

立方公式1:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1}$$

立方公式2:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3\$ \tag{2}$$

1.1.2　立方差公式

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{3}$$

1.1.3　立方和公式

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{4}$$

1.1.4　二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \tag{5}$$

注意: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

1.1.5　n方差公式

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{6}$$

1.2　三角函数与反三角函数

1.2.1　三角函数重要公式

1. $\csc(\alpha) = \dfrac{1}{sin(\alpha)}$
2. $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$
3. $cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$
4. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$
5. $1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$
6. $1 + cot^2(\alpha) = csc^2(\alpha)$

1.2.2　两角和差公式

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1.2.3 二倍角公式

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha)$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
3. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

1.2.4 降次公式

1. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
2. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

1.2.5 和差化积

1. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$
2. $\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)]$
3. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$
4. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)]$

1.2.6 积化和差

1. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
2. $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
3. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
4. $\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

证明提示: 令$A = \alpha + \beta$，$B = \alpha - \beta$, 则$\alpha = \frac{A+B}{2}$,$\beta = \frac{A-B}{2}$，然后引入和差化积公式化简得。

1.2.7 辅助角公式

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) \tag{7}$$

注意:

其中$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

1.2.8 万能公式

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{8}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{9}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \tag{10}$$

说明: $t = \tan^2\frac{\alpha}{2}$

1.2.9 反三角函数常见结论

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

$$\arctan x + arccotx = \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

1.3 常见不等式

1.3.1 绝对值不等式

$$||x| + |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \tag{13}$$

1.3.2 均值不等式（算数平均值≥几何平均值 ）

注释:

调和不等式≤几何平均值 ≤算数平均值≤平方平均值

1.4 数列

1.4.1 等比数列

求和公式:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q_n)}{1 - q} \tag{14}$$

1.4.2 等差数列

求和公式:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \tag{15}$$

1.5 数学归纳法

1. 验证 $n = 1$成立
2. 假设 $n = k成立
3. 推出$n = k + 1$成立

2 极限与连续

2.1 数列的极限

2.1.1 数列极限定义

已知数列$\{a_n\}$和常数A，如果对于任意给定的正数ε(无论它多么小)，都存在正整数N,使得对于$n > N$的一切a_n，不等式$|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称当 $n \to \infty$时，$\{a_n\}$以A为极限，或$\{a_n\}$收敛于A，记为$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$或$a_n \to \infty$.

2.1.2 极限的性质

1. 唯一性
2. 全局有界性
3. 保号性
4. 数列收敛，其任意子数列也收敛

2.2 函数的极限

2.2.1 函数极限的定义

2.2.1.1 $x \to \infty$时$f(x)$的极限的定义

设函数$f(x)$在$|x|$ 充分大时有定义，A为一常数，如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，都存在一个正数N，使得适合不等式$|x| > N$的一切x所对应的函数值$f(x)$都满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{16}$$

则称当$x \to \infty$时，$f(x)$以A为极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$或$f(x) \to A(x \to \infty)$.

2.2.1.2 $x \to x_0$时$f(x)$的极限的定义

设有函数$f(x)$在x_0点的，某一去心邻域内有定义，A为一常数，如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，都存在一个正数$\delta > 0$，使得适合不等式$|x - x_0| > \delta$的一切x所对应的函数值$f(x)$都满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{17}$$

则称当$x \to x_0$时，$f(x)$以A为极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A(x \to x_0)$.

2.2.2 极限的性质

1. 唯一性
2. 有界性
3. 局部保号性

2.3 极限存在准则和两个重要极限

2.4 无穷小的比较

2.5 函数的连续性与间断点

3 导数和微分

3.1 导数的概念

3.2 函数的求导法则

3.3 函数的积分

4 微分中值定理和导数应用

4.1 微分中值定理

4.2 洛必达法则

4.3 泰勒公式

5 不定积分

5.1 不定积分的概念与性质

5.2 换元积分法

5.3 分部积分法

5.4 有理函数积分法

6 定积分

6.1 定积分的概念与性质

6.2 微积分学的基本定理

6.3 定积分的计算方法

6.4 反常积分

6.5 定积分的运用

7 常微分方程

7.1 基本概念

7.2 一阶微分方程

7.3 可降解的微分方程

7.4 高阶线性微分方程

7.4.1 二阶常系数齐次微分方程

7.4.2 二阶常系数非齐次微风方程

7.5 微分算子法

8 空间解析几何

8.1 向量及其运算

8.2 平面与直线

8.3 空间曲面、曲线及其方程

9 多元函数微分学

9.1 多元函数的极限与连续

9.2 偏导数

9.3 全微分

9.4 多元函数极值

9.5 多元函数微分学的几何应用

9.6 方向导数与梯度

10 重积分

10.1 二重积分的概念与性质

10.2 二重积分的计算

10.3 三重积分的定义

10.4 三重积分的计算

11 曲线积分与曲面积分

11.1 第一类曲线积分

11.2 第二类曲线积分

11.3 格林公式及其应用

11.4 第一类曲面积分

11.5 第二类曲面积分

11.6 高斯公式

11.7 斯托克斯公式

12 无穷级数

12.1 常数项级数的概念和性质

12.2 常数项级数审敛法

12.3 幂级数

12.4 函数展开成幂级数

12.5 傅里叶级数

13 零碎知识

13.1 参数方程

13.2 曲率与弧长

13.3 面积与体积

13.4 物理运用