高等数学讲义

1 常用数学知识

1.1 幂函数

1.1.1 立方相关公式

立方公式1:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1}$$

立方公式2:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^3 - b^3\$ \tag{2}$$

1.1.2 立方差公式

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{3}$$

1.1.3 立方和公式

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{4}$$

1.1.4 二项式定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \tag{5}$$

注意: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

1.1.5 n方差公式

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \tag{6}$$

1.2 三角函数与反三角函数

1.2.1 三角函数重要公式

1. $\csc(\alpha) = \dfrac{1}{sin(\alpha)}$
2. $\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$
3. $cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$
4. $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$
5. $1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha)$
6. $1 + cot^2(\alpha) = csc^2(\alpha)$

1.2.2 两角和差公式

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

1.2.3 二倍角公式

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha)$
2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
3. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

1.2.4 降次公式

1. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
2. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

1.2.5 和差化积

1. $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$
2. $\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)]$
3. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + sin(\alpha-\beta)]$
4. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - sin(\alpha-\beta)]$

1.2.6 积化和差

1. $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
2. $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
3. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
4. $\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

证明提示: 令$A = \alpha+\beta$，$B = \alpha-\beta$，则$\alpha = \frac{A+B}{2}$,$\beta = \frac{A-B}{2}$，然后引入和差化积公式化简得。

1.2.7 辅助角公式

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) \tag{7}$$

注意:

其中$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

1.2.8 万能公式

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \tag{8}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{9}$$

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \tag{10}$$

说明: $t = \tan^2\frac{\alpha}{2}$

1.2.9 反三角函数常见结论

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

$$\arctan x + arccotx = \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

1.3 常见不等式

1.3.1 绝对值不等式

$$||x| + |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \tag{13}$$

1.3.2 均值不等式（算数平均值≥几何平均值 ）

注释:

调和不等式≤几何平均值 ≤算数平均值≤平方平均值

1.4 数列

1.4.1 等比数列

求和公式:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q_n)}{1 - q} \tag{14}$$

1.4.2 等差数列

求和公式:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \tag{15}$$

1.5 数学归纳法

1. 验证 $n = 1$成立
2. 假设 \$n = k成立
3. 推出$n = k + 1$成立

2 极限与连续

2.1 数列的极限

2.1.1 数列极限定义

已知数列$\{a_n\}$和常数A，如果对于任意给定的正数ε(无论它多么小)，都存在正整数N,使得对于$n > N$的一切a_n，不等式$|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称当 $n \to \infty$时，$\{a_n\}$以A为极限，或$\{a_n\}$收敛于A，记为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$或$a_n \to \infty$.

2.1.2 极限的性质

1. 唯一性
2. 全局有界性
3. 保号性
4. 数列收敛，其任意子数列也收敛

2.2 函数的极限

2.2.1 函数极限的定义

2.2.1.1 $x \to \infty$时$f(x)$的极限的定义

设函数$f(x)$在$|x|$ 充分大时有定义，A为一常数，如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，都存在一个正数N，使得适合不等式$|x| > N$的一切x所对应的函数值$f(x)$都满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{16}$$

则称当$x \to \infty$时，$f(x)$以A为极限，记为 $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$或$f(x) \to A(x \to \infty)$.

2.2.1.2 $x \to x_0$时$f(x)$的极限的定义

设有函数$f(x)$在x_0点的，某一去心邻域内有定义，A为一常数，如果对于任意给定的$\varepsilon > 0$，都存在一个正数$\delta > 0$，使得适合不等式$|x - x_0| > \delta$的一切x所对应的函数值$f(x)$都满足

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{17}$$

则称当$x \to x_0$时，$f(x)$以A为极限，记为 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$或$f(x) \to A(x \to x_0)$.

2.3 极限存在准则和两个重要极限

2.4 无穷小的比较

2.5 函数的连续性与间断点

3 导数和微分

3.1 导数的概念

3.2 函数的求导法则

3.3 函数的积分

4 微分中值定理和导数应用

4.1 微分中值定理

4.2 洛必达法则

4.3 泰勒公式

5 不定积分

5.1 不定积分的概念与性质

5.2 换元积分法

5.3 分部积分法

5.4 有理函数积分法

6 定积分

6.1 定积分的概念与性质

6.2 微积分学的基本定理

6.3 定积分的计算方法

6.4 反常积分

6.5 定积分的运用

7 常微分方程

7.1 基本概念

7.2 一阶微分方程

7.3 可降解的微分方程

7.4 高阶线性微分方程

7.4.1 二阶常系数齐次微分方程

7.4.2 二阶常系数非齐次微风方程

7.5 微分算子法

8 空间解析几何

8.1 向量及其运算

8.2 平面与直线

8.3 空间曲面、曲线及其方程

9 多元函数微分学

9.1 多元函数的极限与连续

9.2 偏导数

13.2 曲率与弧长

13.3 面积与体积

13.4 物理运用