1. 试推导如下Runge－Kutta公式的局部截断误差及误差主项.判断该公式/格式的(精度)阶数

提示：利用二元函数的Taylor展开

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(3k_1+k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n+2h, y_n+2hk_1) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(3f(x_n, y_n) + f(x_n+2h, y_n+2hf(x_n, y_n)))$$

$$R_n = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= y(x_{n+1}) - y_n - \frac{3}{4}hf(x_n, y_n) - \frac{h}{4}f(x_n+2h, y_n+2hf(x_n, y_n))$$

$y(x_{n+1})$在 x_n 处Taylor展开

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(x_n) + O(h^4)$$

$f(x_n+2h, y_n+2hf(x_n, y_n))$在$(x_n, y_n)$处Taylor展开

$$f(x_n+2h, y_n+2hf(x_n, y_n)) = f(x_n, y_n) + 2hf_x(x_n, y_n) + 2hf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)$$

代入R_n

$$R_n = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + O(h^3) - y(x_n) - \frac{3}{4}hf(x_n, y_n)$$
$$-\frac{h}{4}[f(x_n, y_n) + 2hf_x(x_n, y_n) + 2hf(x_n, y_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^2)]$$
$$= \frac{1}{6}h^3y^{(3)}(x_n) + O(h^4)$$

误差主项为$\frac{1}{6}h^3y^{(3)}(x_n)$ 精度为2阶

2. 讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ 的绝对稳定性.($h>0$)

将梯形格式应用到 $\frac{dy}{dx} = \lambda y$. 得 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda y_{n+1})$

其特征方程为 $\rho(\xi) = (1-\frac{1}{2}h\lambda)\xi - (1+\frac{1}{2}h\lambda)$

其根为 $\xi = \frac{1+\frac{1}{2}h\lambda}{1-\frac{1}{2}h\lambda} = \frac{2+h\lambda}{2-h\lambda} = 1 + \frac{2h\lambda}{2-h\lambda}$

当 $Re\lambda<0$ 时. 恒有$|\xi|<1$. 故梯形公式的绝对稳定区域是整个左半复平面

3. 用幂法估算下面矩阵的按模最大的特征值和相应的特征向量.

(取初始向量$(1,1)^T$, 迭代6次即可)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

取 $X^{(0)} = (1,1)^T$ 按迭代公式 $X^{(k+1)} = AX^{(k)}$

$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^{(1)}/x_1^{(0)} = 4$, $\quad x_2^{(1)}/x_2^{(0)} = 5$

$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^{(2)}/x_1^{(1)} = 4.5$, $\quad x_2^{(2)}/x_2^{(1)} = 4.8$

$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 114 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^{(3)}/x_1^{(2)} = 4.667$, $\quad x_2^{(3)}/x_2^{(2)} = 4.75$

$X^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 84 \\ 114 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 396 \\ 540 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^{(4)}/x_1^{(3)} = 4.714$, $\quad x_2^{(4)}/x_2^{(3)} = 4.737$

$X^{(5)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 396 \\ 540 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1872 \\ 2556 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^{(5)}/x_1^{(4)} = 4.7273$, $\quad x_2^{(5)}/x_2^{(4)} = 4.7333$

$X^{(6)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1872 \\ 2556 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8856 \\ 12096 \end{pmatrix}$ $\quad x_1^{(6)}/x_1^{(5)} = 4.731$, $\quad x_2^{(6)}/x_2^{(5)} = 4.732$

由上可知A的模最大特征值只有一个 且可取 $\lambda_1 \approx 4.73$ 对应特征向量为 $V_1 \approx X^{(6)} = (8856, 12096)^T$

4. 分别写出规范运算的幂迭代和反幂迭代公式. 若分别用这两种公式去求一个以 2、-3、3、-4、4、-5、5、-6、6 为特征值的 9 阶实矩阵 A 的特征值, 所能计算的特征值分别是多少?. 可以取初始向量 $X^{(0)}=(2,2,\dots,2)^T$

规范运算的幂迭代公式为

$$\begin{cases} y^{(0)} = X^{(0)} \neq 0 \\ X^{(k+1)} = Ay^{(k)} \\ y^{(k+1)} = \dfrac{X^{(k+1)}}{\|X^{(k+1)}\|_\infty} \end{cases}$$

计算的特征值为 6、-6.

反幂迭代公式为

$$\begin{cases} y^{(0)} = X^{(0)} \neq 0 \\ X^{(k+1)} = A^{-1}y^{(k)} \\ y^{(k+1)} = \dfrac{X^{(k+1)}}{\|X^{(k+1)}\|_\infty} \end{cases}$$

计算的特征值为 2

5. 考虑用 Jacobi 方法计算矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 的全部特征值.

求对 A 作第一次 Givens 相似变换时的 Givens 变换矩阵 (要求相应的计算效率最高)

记 $A^{(0)}=A$. 取 $p=1$ $q=3$ $a_{pq}^{(0)}=a_{13}^{(0)}=2$

于是有 $s=\dfrac{a_{33}^{(0)}-a_{11}^{(0)}}{2a_{13}^{(0)}}=\dfrac{7-3}{2\times2}=1$ t 取为 $t^2+2st-1=0$ 的按模较小根 故 $t=0.4142136$

则 $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}=0.9238795$ $\sin\theta=t\cos\theta=0.3826834$

$\therefore$

$$Q_1=Q(p,q,\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9238795 & 0 & 0.3826834 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.3826834 & 0 & 0.9238795 \end{pmatrix}$$

Q_1 即为对 A 作第一次 Givens 相似变换时的 Givens 变换矩阵