15. 若 $X_1, X_2, \cdots$ 独立且有相同的以 λ 为参数的指数分布, N 服从几何分布, 即

$$P(N=n)=\beta(1-\beta)^{n-1}, \quad n=1,2,\cdots, \quad 0<\beta<1.$$

试求随机和 $Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$ 的分布.

由题可知, $X_1 \ldots X_n$ 相互独立且有相同的以入为参数的指数分布

由指数分布可加性可知 $N=n$ 时, $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 服从 (n, λ) 为参数的Γ分布

$$f_{Y|N}(y|n)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t} \quad t\geq 0$$

因此 Y 的分布为

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{Y|N}(y|n)P(N=n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\cdot\beta(1-\beta)^{n-1}\\
&= \lambda\beta e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\lambda(1-\beta)t]^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \lambda\beta e^{-\lambda t}e^{\lambda(1-\beta)t}\\
&= \lambda\beta e^{-\lambda\beta t}
\end{aligned}$$

故Y服从参数为 $\lambda\beta$ 的指数分布

2. $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 为一强度是 λ 的 Poisson 过程. 对 $s>0$ 试计算 $E[N(t)\cdot N(t+s)]$.

$$\begin{aligned}
E[N(t)N(t+s)] &= E\{N(t)[(N(t+s)-N(t))+N(t)]\}\\
&= E[N(t)(N(t+s)-N(t))]+E[N^2(t)]\\
&= E[N(t)]E[N(t+s)-N(t)]+Var[N(t)]+[E(N(t))]^2\\
&= \lambda t\cdot\lambda s+\lambda t+(\lambda t)^2\\
&= \lambda t[\lambda(t+s)+1]
\end{aligned}$$

4. $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 为一 $\lambda=2$ 的 Poisson 过程, 试求:

(i) $P\{N(1)\leqslant 2\}$;

(ii) $P\{N(1)=1$ 且 $N(2)=3\}$;

(iii) $P\{N(1)\geqslant 2|N(1)\geqslant 1\}$.

(i)
$$\begin{aligned}
P\{N(1)\leq 2\} &= P\{N(1)=0\}+P\{N(1)=1\}+P\{N(1)=2\}\\
&= \frac{2^0}{0!}e^{-2}+\frac{2^1}{1!}e^{-2}+\frac{2^2}{2!}e^{-2}\\
&= 5e^{-2} \approx 0.6767
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
P\{N(1)=1 \text{ 且 } N(2)=3\} &= P\{N(1)=1\ \ N(2)-N(1)=2\}\\
&= P\{N(1)=1\}P\{N(2)-N(1)=2\}\\
&= \frac{2^1}{1!}e^{-2}\cdot\frac{2^2}{2!}e^{-2}\\
&= 4e^{-4} \approx 0.0733
\end{aligned}$$

(iii)
$$P\{N(1)\geq 2|N(1)\geq 1\}=\frac{P\{N(1)\geq 2, N(1)\geq 1\}}{P\{N(1)\geq 1\}}=\frac{P\{N(1)\geq 2\}}{P\{N(1)\geq 1\}}$$

$$\begin{aligned}
P\{N(1)\geq 2\} &= 1-P\{N(1)<2\}\\
&= 1-\{P\{N(1)=0\}+P\{N(1)=1\}\}\\
&= 1-3e^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\{N(1)\geq 1\} &= 1-P\{N(1)<1\}\\
&= 1-P\{N(1)=0\}\\
&= 1-e^{-2}
\end{aligned}$$

$$\therefore P\{N(1)\geq 2|N(1)\geq 1\}=\frac{1-3e^{-2}}{1-e^{-2}}\approx 0.6870$$

9. 考虑参数为 λ 的 Poisson 过程 $N(t)$, 若每一事件独立地以概率 p 被观察到, 并将观察到的过程记为 $N_1(t)$. 试问 $N_1(t)$ 是什么过程? $N(t)-N_1(t)$ 呢? $N_1(t)$ 与 $N(t)-N_1(t)$ 是否独立?

对 $0\leq s<t$, 有 $P(N_1(t)-N_1(s)=m|N(t)-N(s)=n)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$

由 $\{N(t): t\geq 0\}$ 是参数为入的Poisson过程可知, 对 $0\leq s<t$ 有

$$P(N(t)-N(s)=n)=\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)} \quad n=0,1,2\ldots$$

$$\begin{aligned}
\therefore P(N_1(t)-N_1(s)=m) &= \sum_{n=m}^{\infty}P(N_1(t)-N_1(s)=m|N(t)-N(s)=n)P(N(t)-N(s)=n)\\
&= \sum_{n=m}^{\infty}C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\frac{[\lambda(t-s)]^n}{n!}e^{-\lambda(t-s)}\\
&= \frac{p^m}{m!}e^{-\lambda(t-s)}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-m}[\lambda(t-s)]^n}{(n-m)!}=\frac{[\lambda p(t-s)]^m}{m!}e^{-\lambda p(t-s)} \quad m=0,1,2\ldots
\end{aligned}$$

故 $N_1(t)-N_1(s)$ 服从参数为 $\lambda p(t-s)$ 的Poisson分布

再由题可知 $N_1(0)=0$. $\{N_1(t):t\geq0\}$是一独立增量过程

可知 $\{N_1(t):t\geq0\}$是一参数为 λp 的 Poisson过程

若n个随机事件独立. 则这n个事件的对立事件也相互独立

$\therefore$ $\{N_1(t):t\geq0\}$ 与 $\{N(t)-N_1(t):t>0\}$ 独立.

由 $\{N_1(t):t\geq0\}$ 与 $\{N(t)-N_1(t):t>0\}$ 的对称性可知. $\{N(t)-N_1(t):t\geq0\}$是参数为 $\lambda(1-p)$ 的Poisson过程