1、根据下列数据，用最小二乘法求形如 $y=ae^{bx}$ 的经验公式

x_i	−0.5	−0.2	0.25	0.75
y_i	1.2	1.25	2.5	4.25

由题可知 $\ln y=\ln a+bx$ 令 $\ln y=z$ $\ln a=A$ $b=B$ 则 $z=A+BX$

x_i	−0.5	−0.2	0.25	0.75
y_i	1.2	1.25	2.5	4.25
z_i	ln1.2	ln1.25	ln2.5	ln4.25

对数组 $\{(x_i,z_i)\}_{i=1}^{4}$ 进行线性拟合 $z=A+BX$，可得法方程，

$\sum_{i=1}^{4}x_i=0.3$ $\sum_{i=1}^{4}x_i^2=0.915$. $\sum_{i=1}^{4}z_i=2.76867$ $\sum_{i=1}^{4}x_iz_i=1.17847$

$$\begin{pmatrix}4 & 0.3\\ 0.3 & 0.915\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.76867\\ 1.17847\end{pmatrix}\Rightarrow A\approx 0.610586\quad B\approx 1.087753$$

$\therefore$ $a=e^{A}\approx 1.841510$ $b=B\approx 1.087753$

$\therefore$ 拟合曲线为 $y=1.841510\times e^{1.087753}$

2. 设 $n>1$ 给出用牛顿法计算 $\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$ 时的迭代公式，并用此公式来计算 $\sqrt[5]{11}$ 取初值 $x_0=2$，迭代4次，求 x_4.

令 $f(x)=x^n-a$. 则 Newton 迭代公式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $\Rightarrow$ $x_{k+1}=\frac{n-1}{n}x_k+\frac{a}{nx_k^{n-1}}$

令 $a=11$ $n=5$ 则 $x_{k+1}=\frac{4}{5}x_k+\frac{11}{5x_k^4}$

$x_0=2$ $\Rightarrow$ $x_1=1.7375$

$\Rightarrow$ $x_2=1.631392308$

$\Rightarrow$ $x_3=1.615704971$

$\Rightarrow$ $x_4=1.615394386$

3. 写出对方程 $x^3-4x^2+5x-2=0$ 求根时的 Newton 迭代公式，$x_n=\varphi(x_{n-1})$ 取初值 $x_0=0$. 判断极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 是否存在，请给出你的理由或证明

令 $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$ 则 $f'(x)=3x^2-8x+5$

则 Newton 迭代公式为 $x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{2x_{n-1}^3-4x_{n-1}^2+2}{3x_{n-1}^2-8x_{n-1}+5}$

$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证明：设 $\varphi(x)=\frac{2x^3-4x^2+2}{3x^2-8x+5}$ $f(x)=2x^3-4x^2+2$ $g(x)=3x^2-8x+5$

$\forall x\in[0,1]$ $f(x)>0$ $g(x)>0$. $\Rightarrow$ $\frac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)\geq 0$

且 $f(x)-g(x)=2x^3-7x^2+8x-3<0$ $x\in[0,1]$

$\therefore$ $\frac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)\leq 1$

$\therefore$ $0\leq\varphi(x)\leq 1$ $x\in[0,1]$

设 $h(x)=x^3-4x^2+5x-2$ 则 $\varphi'(x)=\frac{h(x)h''(x)}{[h'(x)]^2}$

根据 $\varphi'(x)$ 的单调性可知 $\exists\,0<L<1$. s.t. 对 $\forall x\in[0,1]$ 有 $|\varphi'(x)|\leq L$.

故由压缩映射定理 $\forall x_0\in[0,1]$，迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛