线性方程组 $Ax=b$ 三种特例

下面3种特殊线性代数方程组$Ax=b$的解，可以直接求出：

1. $A=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})\Rightarrow x_i=\frac{b_i}{a_{ii}}(i=1,\cdots,n)\longmapsto n$次乘(除)法

2. $A=\begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn}\end{pmatrix}\Rightarrow x_i=\frac{b_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}l_{ij}x_j}{l_{ii}}\longmapsto\frac{n(n+1)}{2}$ 次乘法

3. $A=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & & u_{(n-1)(n-1)} & u_{(n-1)n} \\ & & & & u_{nn}\end{pmatrix}\Rightarrow x_i=\frac{b_i-\sum\limits_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j}{u_{ii}}$

$\mapsto\frac{n(n+1)}{2}$次乘法

一、消元法

对增广矩阵 $(A\cdot b)$ 进行变换，变为上述的3种类型之一后再求解

1、Gauss 消元法

第一步： 第1行$\times\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)$+第 i 行， $i=2,\cdots,n.$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}\end{pmatrix}$$

运算量： $(n-1)\cdot(n+1)$

第二步： 第2行$\times\left(-\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right)$+第 i 行， $i=3,\cdots,n.$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{nn}^{(3)} & b_n^{(3)}\end{pmatrix}$$

运算量： $(n-2)\cdot(1+n-1)=(n-2)n$

类似的做下去， 第k步： 第k行$\times\left(-\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\right)$+第 i 行， $i=k+1,\cdots,n.$

运算量： $(n-k)\cdot(1+n-k+1)=(n-k)(n-k+2).$

$n-1$ 步以后，可得增广矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)}\end{pmatrix}$$

化为上三角方程组的运算量为$\sum\limits_{k=1}^{n-1}(n-k)(n-k+2)$，加上 解上述上三角阵的运算量 $\frac{(n+1)n}{2}$，总共为

$$\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}=O(n^3)$$

在Gauss消元过程中，须确保 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$，
等价于 A的所有顺序主子式均不为0，即

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii}\end{pmatrix}\neq 0,\quad i=1,\cdots,n$$

这是Gauss消元法理论上可行的充要条件.

注：如果某步的 $a_{kk}^{(k)}$ 很小的话，可能会产生较大的计算误差, 从而导致最终的计算（求解）失败！

2、列主元消元法.

在Gauss消元第k步消元之前，曾广矩阵(A,b)为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{(k+1)k}^{(k)} & \cdots & a_{(k+1)n}^{(k)} & b_{(k+1)}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

- 列主元消元的基本思路：先选列主元，再消元；若$\max\limits_{k\leqslant i\leqslant n}|a_{ik}^{(k)}|=|a_{jk}^{(k)}|$，交换$k$行和$j$行，即将第$k$到$n$列的模最大元通过行交换移到对角位置，再进行消元.

二、直接分解法.

要解方程组$Ax=b$. 可先将A进行LU分解. 再转化为两个容易求解的方程组.

$$Ax=b \Leftrightarrow LUx=b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly=b & (1) \\ Ux=y & (2) \end{cases}$$

先由(1)求出y再代入(2)求x

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

- 若要求L为单位下三角，则称为 Doolittle 分解.
- 若要求U为单位上三角，则称为 Crout's Factorization.
- 若要求$l_{ij}=u_{ji}\ (i,j=1,\ldots,n)$(要求$A$为对称正定矩阵)，则称为Cholesky 分解 (i.e., $A=LL^T \Longleftrightarrow \tilde{L}D\tilde{L}^T$ 分解).

1、Doolittle 分解:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & \mathbf{u_{22}} & \cdots & \mathbf{u_{2n}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

1. 利用A第1行： $a_{1j}=u_{1j},\ j=1,\cdots,n \Rightarrow u_{1j}=a_{1j}$

2. 利用A第1列： $a_{i1}=l_{i1}u_{11},\ i=2,\cdots,n \Rightarrow l_{i1}=\frac{a_{i1}}{u_{11}}$

3. 利用第2行： $a_{2j}=l_{21}u_{1j}+u_{2j},\ j=2,\cdots,n \Rightarrow u_{2j}=a_{2j}-l_{21}u_{1j}$

4. 利用第2列： $a_{i2}=l_{i1}u_{12}+l_{i2}u_{22},\ i=3,\cdots,n \Rightarrow l_{i2}=\frac{a_{i2}-l_{i1}u_{12}}{u_{22}}$

5. ······

计算顺序：

U的第一行$\longrightarrow$$L$的第一列$\longrightarrow$$U$的第二行$\longrightarrow$ L的第二列$\longrightarrow$······

2、Crout's 分解

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \mathbf{a_{n2}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & \mathbf{l_{22}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \mathbf{l_{n2}} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Crout分解与Doolittle分解类似.

计算顺序： L的第一列$\longrightarrow$$U$的第一行$\longrightarrow$$L$的第二列$\longrightarrow$ U的第二行$\longrightarrow$······

注：1. 直接分解法与Gauss消元法复杂度相同.

2. 多个系数矩阵相同的方程组 $Ax=b_i(i=1,2\cdots,m)$，

矩阵A只需分解一次，其中的 L, U 可保存备用.

3、三对角阵的追赶法

将Crout's Factorization应用于三对角阵 ($A = LU$)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & \\ c_2 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & c_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \gamma_2 & \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

对方程组 $Ax = f$, 其计算过程为(这里$\gamma_i = c_i,\ i = 2, \ldots, n;\ f = (f_1, \ldots, f_n)^T$)：

$$\begin{cases} \alpha_i = a_i - c_i\beta_{i-1} \qquad (c_1 = 0) & \\ \beta_i = b_i/\alpha_i & i = 1, \cdots, n \\ y_i = (f_i - c_i y_{i-1})/\alpha_i & i = 1, \cdots, n \qquad (\text{追}) \\ x_k = y_k - \beta_k x_{k+1}, \quad k = n, \cdots, 1. & (\beta_n = x_{n+1} = 0) \qquad (\text{赶}) \end{cases}$$

Here, $y \equiv (y_1, \cdots, y_n)^T = Ux$. 计算复杂度：$5n - 4 = O(n)$.

对称正定矩阵的LDL^T分解

问题：对称正定阵 $A = (a_{ij})$，求其 LDL^T分解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & 1 & \cdots & l_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

由A正定，则A可以进行Doolittle分解$A = L \cdot U$. 设

$$L = (l_{ij}),\ U = (u_{ij}),\ D = \text{diag}(u_{11}, \cdots, u_{nn}),\ \tilde{U} = D^{-1}U$$

则 $A = LU = LDD^{-1}U = LD\tilde{U}$，其中$\tilde{U}$为单位上三角阵，且这种分解是唯一的. 由$A$对称知 $A = A^T = \tilde{U}^T DL^T$；故有$L = \tilde{U}^T$, 即：$A = LDL^T$.

算法：先计算A的Doolittle分解（或Crout分解）$A = LU$，D取为U（L）的对角元即可.

向量范数：

定义：映射 $\|\cdot\|: R^n \to R^+ \cup \{0\}$ 如满足

- 非负性：$\|X\| \geq 0$ 且 $\|X\| = 0 \iff X = 0$
- 齐次性：$\forall a \in R \quad \|aX\| = |a| \cdot \|X\|$
- 三角不等式：$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

则称该映射为向量范数

几种常见的范数：

1-范数：$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |X_i|$

2-范数：$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

∞-范数：$\|X\|_\infty = \max\{|X_i|\}$

例：计算向量$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1.5 \end{pmatrix}$的1范数，2范数和 ∞范数。

解：由向量范数定义：

$$\|X\|_1 = \sum_{k=1}^{3} |x_k| = 1 + 2 + 1.5 = 4.5$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{3} x_k^2} = \sqrt{1 + (-2)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{7.25} = 2.69258$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq 3} \{|x_k|\} = 2$$

矩阵范数

定义：设$\|\cdot\|$是以n 阶方阵为变量的实值函数(映射)，且满足条件

（1） 非负性：$\|A\| \geq 0$，$\|A\| = 0$当且仅当$A = 0$.

（2） 齐次性：$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

（3） 三角不等式：$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

则映射$\|\cdot\|$定义了一种矩阵范数；若映射$\|\cdot\|$还满足相容性条件, 即

（4） 相容性：$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\forall$ n 阶方阵 A, B

则称映射$\|\cdot\|$为一种相容矩阵范数.

定义：设$\|\cdot\|$ 是一种向量范数，可以由它定义矩阵的范数

$$\|A\| \triangleq \sup_{x \in R^n, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in R^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

称之为向量范数$\|\cdot\|$的诱导(从属)矩阵范数$\|\cdot\|$.

与3种常见的向量$p-$范数 $(\|\cdot\|_p)$对应的诱导矩阵范数分别为

- $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}| \longrightarrow$ 列模(绝对值)和的最大值
- $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}| \longrightarrow$ 行模(绝对值)和的最大值
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$，也称为谱范数

例：计算矩阵$A = \begin{pmatrix} 1.1 & -2 \\ 2.5 & -3.5 \end{pmatrix}$ 的1范数，2范数和 ∞范数和Euclid范数。

解：由矩阵范数定义：

$$\|A\|_1 = Max\{1.1+2.5, |-2|+|-3.5|\} = 5.5$$

$$\|A\|_\infty = Max\{1.1+|-2|, 2.5+|-3.5|\} = 6$$

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{1.1^2+2^2+2.5^2+3.5^2} = 4.86929$$

由 $A^TA = \begin{pmatrix} 7.46 & -10.95 \\ -10.95 & 16.25 \end{pmatrix}$得 $\lambda_1 = 23.6541$， $\lambda_2 = 0.05591$. 故

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{\lambda_1} = 4.86355$$