(L1) $p\to(q\to p)$ 肯定后件律

(L2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$ 蕴含词分配律

(L3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$ 换位律

$\vdash p\to p$ 同一律

$\vdash \neg q\to(q\to p)$ 否定前件律

$\vdash (\neg p\to p)\to p$ 否定肯定律

$\vdash (p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$ HS,假设三段论

$\vdash \neg\neg p\to p$ 双重否定律

$\vdash p\to\neg\neg p$ 第二双重否定律

$\vdash (p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$ 换位律

(K1) $p\to(q\to p)$

(K2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$

(K3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$

(K4) $\forall x p(x)\to p(t)$，其中项 t 对 p(x)中的 x 是自由的

(K5) $\forall x(p\to q)\to(p\to\forall x q)$，其中 x 不在 p 中自由出现

其中，p,q,r,p(x)都是任意的公式

($\exists_1$规则) 设项 t 对 p(x)中的 x 自由，则有 $\vdash p(t)\to\exists x p(x)$

($\exists_2$规则) 设$\Gamma\cup\{p\}\vdash q$，其证明中 Gen 变元不在 p 中自由出现，且 x 不在 q 中自由出现，那么有$\Gamma\cup\{\exists xp\}\vdash q$，且除了 x 不增加其他 Gen 变元。

【常用的等价式】

(1).$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$;

(2).$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$.

(3).$(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$

(4).$(\exists x)(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$

(5).$(\exists x)G(x) \Leftrightarrow (\exists y)G(y)$;(2):$(\forall x)G(x) \Leftrightarrow (\forall y)G(y)$.

【常用的永真蕴含式】

(1).$(\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)A(x)$

(2).$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x)\vee B(x))$

(3).$(\exists x)(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

(4).$(\forall x)(A(x)\to B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x)\to(\forall x)B(x)$

(5).$(\forall x)(A(x)\to B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x)\to(\exists x)B(x)$

(6).$(\exists x)(\forall y)G(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x,y)$

(7).$(\forall x)(\forall y)G(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)G(x,y)$

(8).$(\forall y)(\forall x)G(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)G(x,y)$

(9).$(\exists y)(\forall x)G(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)G(x,y)$

(10).$(\forall x)(\exists y)G(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x,y)$

(11).$(\forall y)(\exists x)G(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)G(x,y)$

定理（化前束范式）

令 Q^* 为 Q 的对偶量词.

1. 若 y 不在 $p(x)$ 中出现，则 $\vdash Qxp(x) \leftrightarrow Qyp(y)$;
2. 若 x 不在 p 中出现，则 $\vdash (p \to Qxq) \leftrightarrow Qx(p \to q)$;
   若 x 不在 q 中出现，则 $\vdash (Qxp \to q) \leftrightarrow Q^*x(p \to q)$;
3. $\vdash \neg Qxp \leftrightarrow Q^*x\neg p$;
4. $\vdash (\forall xp \wedge \forall xq) \leftrightarrow \forall x(p \wedge q)$;
5. $\vdash (\exists xp \vee \exists xq) \leftrightarrow \exists x(p \vee q)$;
6. 若 x 不在 p 中出现，则 $\vdash (p \vee Qxq) \leftrightarrow Qx(p \vee q)$, $\vdash (p \wedge Qxq) \leftrightarrow Qx(p \wedge q)$.

【谓词演算的语义推论-推理规则】

(1).全称量词消去规则 UI $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$, $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$

其中 y 为任意的不在 A(x)中约束出现的个体变量，c 为任意的个体常量；

(2).存在量词消去规则 EI $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$

其中，c 是使 A 为真的个体域中的某个个体，即一个特定的个体常项，要求$(\exists x)A(x)$**中无其它自由出现的个体变项，如有，必须用函数符号来取代。**

(3).全称量词引入规则 UG $A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$

其中无论 A(y)中自由出现的个体变量 y 取何值，A(y)应该均为真，x 不能在 A(y)中约束出现。

(4).存在量词引入规则 EG $A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$

其中，c 是特定的个体常量，x 不能在 A(c)中出现过。

等词公理

(E1) R_1^2 **(t, t)**

(E2) R_1^2 $(t_k, u) \to R_1^2\ (f_i^n\ (t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_m),\ f_i^n\ (t_1, \cdots, u, \cdots, t_n))$

(E3) R_1^2 $(t_k, u) \to (R_i^n(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_m) \to R_i^n\ (t_1, \cdots, u, \cdots, t_n))$

用≈表示等词

(E1) $t \approx t$

(E2) $t_k \approx u \to (f_i^n\ (t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_m) \approx f_i^n\ (t_1, \cdots, u, \cdots, t_n))$

(E3) $t_k \approx u \to (R_i^n(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_m) \to R_i^n\ (t_1, \cdots, u, \cdots, t_n))$

算术公理

(N1) $t' \not\approx \bar{0}$

(N2) $t'_1 \approx t'_2 \to t_1 \approx t_2$

(N3) $t+\overline{0} \approx t$
(N4) $t_1 + t'_2 \approx (t_1+t_2)'$
(N5) $t \times overline0 \approx \overline{0}$
(N6) $t_1 \times t'_2 \approx t_1 \times t_2 + t1$
(N7) $p(\overline{0}) \to (\forall x(p(x) \to p(x')) \to \forall x p(x))$
其中t, t_1, t_2是任意的项，$p(x)$是任意的公式,算术公理的集记为$\mathcal{N}$

定理 3 $\mathcal{N} \vdash \overline{m} + \overline{n} \approx m+n$

定理 4 $\mathcal{N} \vdash \overline{m} \times \overline{n} \approx m \times n$

定理 5 $\mathcal{N} \vdash \overline{0} + t \approx t$

定理 6 $\mathcal{N} \vdash t'_1 + t_2 \approx (t_1+t_2)'$

定理 7 (加法交换律) $\mathcal{N} \vdash t'_1 + t_2 \approx (t_1+t_2)'$
其中t_1, t_2是任意的项

定理 8 (加法结合律) $\mathcal{N} \vdash (t_1+t_2)+t_3 \approx t_1 + (t_2+t_3)$
其中t_1, t_2, t_3是任意的项

定理 9 (加法消去律) $\mathcal{N} \vdash t_1 + t_2 \approx t_2 \leftarrow t_1 \approx \overline{0}$
其中t_1, t_2是任意的项

定理 10 $\mathcal{N} \vdash t_1 + t_2 \approx \overline{0} \to t_1 \approx \overline{0}$

定理 11 $\mathcal{N} \vdash t_3 + t_1 \approx t_2 \to (t_4 + t_2 \approx t_1 \to t_1 \approx t_2)$

定理 12 $\mathcal{N} \vdash \exists x(x+t_1 \approx t_2) \to (\exists x(x+t_2 \approx t_1) \to (t_1 \approx t_2))$

定理 13 $\mathcal{N} \vdash t \not\approx \overline{0} \to \overline{1} \leqslant t$

├ p→p（同一律）

证明：(1) p→((p→p)→p) (L1)

(2)(p→((p→p)→p))→((p→(p→p))→(p→p)) (L2)

(3)(p→(p→p))→(p→p) (1),(2),MP

(4) p→(p→p) (L1)

(5) p→p (3),(4),MP

├ ¬q→(q→p) (否定前件律)

证明：(1)(¬p→¬q)→(q→p) (L3)

(2)((¬p→¬q)→(q→p))→(¬q→((¬p→¬q)→(q→p))) (L1)

(3) ¬q→((¬p→¬q)→(q→p)) (1),(2),MP

(4)(¬q→((¬p→¬q)→(q→p)))→ ((¬q→(¬p→¬q))→(¬q→(q→p))) (L2)

(5)(¬q→(¬p→¬q))→(¬q→(q→p)) (3),(4),MP

(6) ¬q→(¬p→¬q) (L1)

(7) ¬q→(q→p) (5),(6),MP

├(¬p→p)→p (否定肯定律)

(1) ¬p → (¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) (L1)

(2) (¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p))) (L3)

(3) ((¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p)))) → (¬p → ((¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p))))) (L1)

(4) ¬p → ((¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p)))) (2) (3) MP

(5) (¬p → ((¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p))))) → ((¬p → (¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p)) → (¬p → (p → ¬ (p → (¬p → p))))) (L2)

(6) (¬p → (¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p)) → (¬p → (p → ¬ (p → (¬p → p)))) (4) (5) MP

(7) ¬p → (p → ¬ (p → (¬p → p))) (1) (6) MP

(8) (¬p → (p → ¬ (p → (¬p → p)))) → ((¬p → p) → (¬p → ¬ (p → (¬p → p)))) (L2)

(9) (¬p → p) → (¬p → ¬ (p → (¬p → p))) (7) (8) MP

(10) (¬p → ¬ (p → (¬p → p))) → ((p → (¬p → p)) → p) (L3)

(11) ((¬p → ¬ (p → (¬p → p))) → ((p → (¬p → p)) → p)) → ((¬p → p) → ((¬p → ¬ (p → (¬p → p))) → ((p → (¬p → p)) → p))) (L1)

(12) (¬p → p) → ((¬p → ¬ (p → (¬p → p))) → ((p → (¬p → p)) → p)) (10) (11) MP

(13) ((¬p → p) → ((¬p → ¬ (p → (¬p → p))) → ((p → (¬p → p)) → p))) → (((¬p → p) → (¬p → ¬ (p → (¬p → p)))) → ((¬p → p) → ((p → (¬p → p)) → p)))(L2)

(14) ((¬p → p) → (¬p → ¬ (p → (¬p → p)))) → ((¬p → p) → ((p → (¬p → p)) → p)) (12) (13) MP

(15) (¬p → p) → ((p → (¬p → p)) → p) (9) (14) MP

(16) ((¬p → p) → ((p → (¬p → p)) → p)) → (((¬p → p) → (p → (¬p → p))) → ((¬p → p) → p)) (L2)

(17) ((¬p → p) → (p → (¬p → p))) → ((¬p → p) → p) (15) (16) MP

(18) (¬p → p) → (p → (¬p → p)) (L1)

(19) (¬p → p) → p (17) (18) MP □

├(p→q)→((q→r)→(p→r))(HS,假设三段论)

$$(1)(q \to r) \to (p \to (q \to r)) \qquad (L1)$$

$$(2)(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \qquad (L2)$$

$$(3)((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))) \qquad (L1)$$

$$(4)(q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \qquad MP(2)(3)$$

$$(5)((q \to r) \to ((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))) \to (((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)))) \qquad (L2)$$

$$(6)((q \to r) \to (p \to (q \to r))) \to ((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \qquad MP(4)(5)$$

$$(7)(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r)) \qquad MP(1)(6)$$

$$(8)((q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to$$

$r) \to (p \to r)))$ $(L2)$

$(9)((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))$ $MP(7)(8)$

$(10)(((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))) \to ((p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$ $(L1)$

$(11)(p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$ $MP(9)(10)$

$(12)((p \to q) \to (((q \to r) \to (p \to q)) \to ((q \to r) \to (p \to r)))) \to (((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))))$ $(L2)$

$(13)((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q))) \to ((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$ $MP(11)(12)$

$(14)(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to q)$ $(L1)$

$(15)(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)$ $MP(13)(14)$

⊢¬¬p→p(双重否定律)

$(1)\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)$ $(L1)$

$(2)(\neg\neg p \to ((\neg\neg p \to \neg\neg p) \to \neg\neg p)) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p))$ $(L2)$

$(3)(\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $MP(1)(2)$

$(4)\neg\neg p \to (\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

$(5)\neg\neg p \to \neg\neg p$ $MP(3)(4)$

$(6)\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

$(7)(\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)(L3)$

$(8)((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $(L1)$

$(9)\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))$ $MP(7)(8)$

$(10)(\neg\neg p \to ((\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p) \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)))$ $(L2)$

$(11)(\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p))MP(9)(10)$

$(12)\neg\neg p \to (\neg\neg\neg\neg p \to \neg\neg p)$ $(L1)$

$(13)\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)$ $MP(11)(12)$

$(14)(\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)(L3)$

$(15)((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)) \to (\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p)))$ $(L1)$

$(16)\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))$ $MP(14)(15)$

$(17)(\neg\neg p \to ((\neg p \to \neg\neg\neg p) \to (\neg\neg p \to p))) \to ((\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p)))$ $(L2)$

$(18)(\neg\neg p \to (\neg p \to \neg\neg\neg p)) \to (\neg\neg p \to (\neg\neg p \to p))$ $MP(16)(17)$

$(19)\neg\neg p\to(\neg\neg p\to p)$ $MP(13)(18)$

$(20)(\neg\neg p\to(\neg\neg p\to p))\to((\neg\neg p\to\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to p))$ $(L2)$

$(21)(\neg\neg p\to\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to p)$ $MP(19)(20)$

$(22)\neg\neg p\to p$ $MP(5)(21)$

├p→¬¬p 第二双重否定律

$(1)\neg\neg\neg p\to((\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to\neg\neg\neg p)$ $(L1)$

$(2)(\neg\neg\neg p\to((\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to\neg\neg\neg p))\to((\neg\neg\neg p\to$
$(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p))$ $(L2)$

$(3)(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)$ $MP(1)(2)$

$(4)\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)$ $(L1)$

$(5)\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p$ $MP(3)(4)$

$(6)\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)$ $(L1)$

$(7)(\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)(L3)$

$(8)((\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to$
$((\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)))$ $(L1)$

$(9)\neg\neg\neg p\to((\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p))MP(7)(8)$

$(10)(\neg\neg\neg p\to((\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)))\to$
$((\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg p\to$
$\neg\neg\neg\neg p)))$ $(L2)$

$(11)(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg p\to$
$\neg\neg\neg\neg p))$ $MP(9)(10)$

$(12)\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)$ $(L1)$

$(13)\neg\neg\neg p\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)$ $MP(11)(12)$

$(14)(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)(L3)$

$(15)((\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to((\neg\neg p\to$
$\neg\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)))$ $(L1)$

$(16)\neg\neg\neg p\to((\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p))$ $MP(14)(15)$

$(17)(\neg\neg\neg p\to((\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)))\to((\neg\neg\neg p\to$
$(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)))$ $(L2)$

$(18)(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg p\to\neg\neg\neg\neg p))\to(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to$
$\neg p))$ $MP(16)(17)$

$(19)\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)$ $MP(13)(18)$

$(20)(\neg\neg\neg p\to(\neg\neg\neg p\to\neg p))\to((\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to$
$\neg p))$ $(L2)$

$(21)(\neg\neg\neg p\to\neg\neg\neg p)\to(\neg\neg\neg p\to\neg p)$ $MP(19)(20)$

$(22) \neg \neg \neg p \to \neg p$ $MP(5)(21)$

$(23) (\neg \neg \neg p \to \neg p) \to (p \to \neg \neg p)(L3)$

$(24) p \to \neg \neg p$ $MP(22)(23)$

¬(p→q)→p

(1) (¬q→¬p)→(p→q) (L3)

(2) ((¬q→¬p)→(p→q))→(¬p→((¬q→¬p)→(p→q))) (L1)

(3) ¬p→((¬q→¬p)→(p→q)) MP(1)(2)

(4) (¬p→((¬q→¬p)→(p→q)))→((¬p→(¬q→¬p))→(¬p→(p→q))) (L2)

(5) (¬p→(¬q→¬p))→(¬p→(p→q)) MP(3)(4)

(6) ¬p→(¬q→¬p) (L1)

(7) ¬p→(p→q) MP(5)(6)

(8) ¬¬¬(p→q)→((¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→¬¬¬(p→q)) (L1)

(9) (¬¬¬(p→q)→((¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→¬¬¬(p→q)))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))) (L2)

(10) (¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)) MP(8)(9)

(11) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)) (L1)

(12) ¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q) MP(10)(11)

(13) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)) (L1)

(14) (¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)) (L3)

(15) ((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))) (L1)

(16) ¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))) MP(14)(15)

(17) (¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))) (L2)

(18) (¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))MP(16)(17)

(19) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)) (L1)

(20) ¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)) MP(18)(19)

(21) (¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)) (L3)

(22) ((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))) (L1)

(23) ¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))) MP(21)(22)

(24) (¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))) (L2)

(25) (¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))) MP(23)(24)

(26) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)) MP(20)(25)

(27) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)))\to((\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)))$(L2)

(28) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg\neg\neg(p\to q))\to(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q))$ MP(26)(27)

(29) $\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q)$ MP(12)(28)

(30) $(\neg\neg\neg(p\to q)\to\neg(p\to q))\to((p\to q)\to\neg\neg(p\to q))$ (L3)

(31) $(p\to q)\to\neg\neg(p\to q)$ MP(29)(30)

(32) $((p\to q)\to\neg\neg(p\to q))\to(\neg p\to((p\to q)\to\neg\neg(p\to q)))$ (L1)

(33) $\neg p\to((p\to q)\to\neg\neg(p\to q))$ MP(31)(32)

(34) $(\neg p\to((p\to q)\to\neg\neg(p\to q)))\to((\neg p\to(p\to q))\to(\neg p\to\neg\neg(p\to q)))$ (L2)

(35) $(\neg p\to(p\to q))\to(\neg p\to\neg\neg(p\to q))$ MP(33)(34)

(36) $\neg p\to\neg\neg(p\to q)$ MP(8)(35)

(37) $(\neg p\to\neg\neg(p\to q))\to(\neg(p\to q)\to p)$ (L3)

(38) $\neg(p\to q)\to p$ MP(36)(37)

$\neg(p\to q)\to\neg q$

(1) $\neg\neg q\to((\neg\neg q\to\neg\neg q)\to\neg\neg q)$ (L1)

(2) $(\neg\neg q\to((\neg\neg q\to\neg\neg q)\to\neg\neg q))\to((\neg\neg q\to(\neg\neg q\to\neg\neg q))\to(\neg\neg q\to\neg\neg q))$ (L2)

(3) $(\neg\neg q\to(\neg\neg q\to\neg\neg q))\to(\neg\neg q\to\neg\neg q)$MP(1)(2)

(4) $\neg\neg q\to(\neg\neg q\to\neg\neg q)$(L1)

(5) $\neg\neg q\to\neg\neg q$ MP(3)(4)

(6) $\neg\neg q\to(\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q)$(L1)

(7) $(\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q)\to(\neg q\to\neg\neg\neg q)$ (L3)

(8) $((\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q)\to(\neg q\to\neg\neg\neg q))\to(\neg\neg q\to((\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q)\to(\neg q\to\neg\neg\neg q)))$ (L1)

(9) $\neg\neg q\to((\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q)\to(\neg q\to\neg\neg\neg q))$ MP(7)(8)

(10) $(\neg\neg q\to((\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q)\to(\neg q\to\neg\neg\neg q)))\to((\neg\neg q\to(\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q))\to(\neg\neg q\to(\neg q\to\neg\neg\neg q)))$(L2)

(11) $(\neg\neg q\to(\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q))\to(\neg\neg q\to(\neg q\to\neg\neg\neg q))$ MP(9)(10)

(12) $\neg\neg q\to(\neg\neg\neg\neg q\to\neg\neg q)$ (L1)

(13) $\neg\neg q\to(\neg q\to\neg\neg\neg q)$ MP(11)(12)

(14) $(\neg q\to\neg\neg\neg q)\to(\neg\neg q\to q)$ (L3)

(15) $((\neg q\to\neg\neg\neg q)\to(\neg\neg q\to q))\to(\neg\neg q\to((\neg q\to\neg\neg\neg q)\to(\neg\neg q\to q)))$ (L1)

(16) $\neg\neg q\to((\neg q\to\neg\neg\neg q)\to(\neg\neg q\to q))$ MP(14)(15)

(17) $(\neg\neg q\to((\neg q\to\neg\neg\neg q)\to(\neg\neg q\to q)))\to((\neg\neg q\to(\neg q\to\neg\neg\neg q))\to(\neg\neg q\to(\neg\neg q\to q)))$ (L2)

(18) $(\neg\neg q\to(\neg q\to\neg\neg\neg q))\to(\neg\neg q\to(\neg\neg q\to q))$ MP(16)(17)

(19) $\neg\neg q\to(\neg\neg q\to q)$ MP(13)(18)

(20) $(\neg\neg q\to(\neg\neg q\to q))\to((\neg\neg q\to\neg\neg q)\to(\neg\neg q\to q))$ (L2)

(21) $(\neg\neg q\to\neg\neg q)\to(\neg\neg q\to q)$ MP(19)(20)

(22) $\neg\neg q\to q$ MP(5)(21)

(23) $q\to(p\to q)$ (L1)

(24) $(q\to(p\to q))\to(\neg\neg q\to(q\to(p\to q)))$ (L1)

(25) $\neg\neg q\to(q\to(p\to q))$ MP(23)(24)

(26) (¬¬q→(q→(p→q)))→((¬¬q→q)→(¬¬q→(p→q)))   (L2)

(27) (¬¬q→q)→(¬¬q→(p→q))   MP(25)(26)

(28) ¬¬q→(p→q)   MP(22)(27)

(29) ¬¬¬(p→q)→((¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→¬¬¬(p→q))   (L1)

(30) (¬¬¬(p→q)→((¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→¬¬¬(p→q)))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))   (L2)

(31) (¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))   MP(29)(30)

(32) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))(L1)

(33) ¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)   MP(31)(32)

(34) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))(L1)

(35) (¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))   (L3)

(36) ((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))))   (L1)

(37) ¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))   MP(35)(36)

(38) (¬¬¬(p→q)→((¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))))   (L2)

(39) (¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))MP(37)(38)

(40) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))(L1)

(41) ¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))MP(39)(40)

(42) (¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))   (L3)

(43) ((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))))   (L1)

(44) ¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))   MP(42)(43)

(45) (¬¬¬(p→q)→((¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))))→((¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))))   (L2)

(46) (¬¬¬(p→q)→(¬¬(p→q)→¬¬¬¬(p→q)))→(¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))   MP(44)(45)

(47) ¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))MP(41)(46)

(48) (¬¬¬(p→q)→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))→((¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q)))(L2)

(49) (¬¬¬(p→q)→¬¬¬(p→q))→(¬¬¬(p→q)→¬(p→q))   MP(47)(48)

(50) ¬¬¬(p→q)→¬(p→q)   MP(33)(49)

(51) (¬¬¬(p→q)→¬(p→q))→((p→q)→¬¬(p→q))   (L3)

(52) (p→q)→¬¬(p→q)   MP(50)(51)

(53) ((p→q)→¬¬(p→q))→(¬¬q→((p→q)→¬¬(p→q)))   (L1)

(54) ¬¬q→((p→q)→¬¬(p→q))   MP(52)(53)

(55) (¬¬q→((p→q)→¬¬(p→q)))→((¬¬q→(p→q))→(¬¬q→¬¬(p→q)))   (L2)

(56) (¬¬q→(p→q))→(¬¬q→¬¬(p→q))   MP(54)(55)

(57) $\neg\neg q \to \neg\neg(p \to q)$ MP(28)(56)

(58) $(\neg\neg q \to \neg\neg(p \to q)) \to (\neg(p \to q) \to \neg q)$ (L3)

(59) $\neg(p \to q) \to \neg q$ MP(57)(58)