1、给定函数$f(x)$离散值如下：

x	1.0	1.2	1.4	1.6.	1.8
$f(x)$	3.0	3.6.	4.5	4.8	5.0

分别用复化梯形和复化Simpson公式计算$\int_{1.0}^{1.8} f(x)dx$

- 复化梯形

$$T_4(f(x)) = \frac{b-a}{n}\{\frac{1}{2}f(a)+\sum_{i=1}^{n-1}f(a+hi)+\frac{1}{2}f(b)\}$$
$$= 0.2\{\frac{1}{2}f(1.0)+f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+\frac{1}{2}f(1.8)\}$$
$$= 0.2\{\frac{1}{2}\times 3+3.6+4.5+4.8+\frac{1}{2}\times 5.0\}$$
$$= 3.38$$

- 复化Simpson

$$S_2(f(x)) = \sum_{i=0}^{m-1}\{\frac{b-a}{3n}(f(x_{2i})+4f(x_{2i+1})+f(x_{2i+2})\}$$
$$= \frac{1}{15}\{f(1.0)+4f(1.2)+f(1.4)+f(1.4)+4f(1.6)+f(1.8)\}$$
$$= \frac{1}{15}\{3+4\times 3.6+4.5\times 2+4.8\times 4+5.0\}$$
$$= \frac{253}{75}$$

2. 用具有3阶代数精度的Gauss-Legendre数值积分公式求积分$\int_{-2}^{1}(x^3+3x^2)dx$

由于积分区间为$[-2,1]$ 所以先作变量代换 $x=\frac{-1+3t}{2}$

$$I=\int_{-2}^{1}(x^3+3x^2)dx=\int_{-1}^{1}(\frac{-1+3t}{2})^3+3(\frac{-1+3t}{2})^2\,d(\frac{-1+3t}{2})$$
$$=\frac{3}{16}\int_{-1}^{1}(-1+3t)^3+6(-1+3t)^2dt$$

令 $f(t)=(-1+3t)^3+6(-1+3t)^2$

对于$n=3$ 由三点Gauss-Legendre公式有

$$I\approx\frac{3}{16}[\frac{5}{9}f(-\frac{\sqrt{15}}{5})+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f(\frac{\sqrt{15}}{5})]=5.25$$

3. 试推导积分$\int_0^2(x-1)^2f(x)dx$的2点Gauss积分公式 这里$(x-1)^2$为权重函数

令 $t=x-1$ 则 $\int_0^2(x-1)^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}t^2f(t+1)d(t+1)=\int_{-1}^{1}t^2g(t)dt$ 则权重函数为t^2

利用Gram-Schmidt正交化 依次求出正交多项式序列

$$\begin{cases} P_0(t)=1 \\ P_1(t)=t-\frac{(t,\,P_0(t))}{(P_0(t),\,P_0(t))}P_0(t)=t \\ P_2(t)=t^2-\frac{(t^2,\,P_0(t))}{(P_0(t),\,P_0(t))}P_0(t)-\frac{(t^2,\,P_1(t))}{(P_1(t),\,P_1(t))}P_1(t)=t^2-\frac{3}{5}\end{cases}$$

$P_2(t)$的两个零点为$t_1=-\sqrt{\frac{3}{5}}$ $t_2=\sqrt{\frac{3}{5}}$ 积分系数为

$$A_1=\int_{-1}^{1}x^2l_1(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2\frac{x-x_2}{x_1-x_2}dx=\frac{1}{3}$$
$$A_2=\int_{-1}^{1}x^2l_2(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}dx=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1}t^2g(t)dt=G_2(g)=\frac{1}{3}(g(-\sqrt{\frac{3}{5}})+g(\sqrt{\frac{3}{5}}))$$
$$\therefore \int_{-1}^{1}(x-1)^2f(x)dx=G_2(f)=\frac{1}{3}(f(1-\sqrt{\frac{3}{5}})+f(1+\sqrt{\frac{3}{5}}))$$