定义 1.1 命题　具有确切真值的陈述句(或断言)称为命题(Proposition)。

- 注意：由定义知，一切没有判断内容的句子如命令，感叹句，疑问句，祈使句，二义性的陈述句等都不能作为命题。
- 命题的真值有时可明确给出，有时还需要依靠环境条件，实际情况，时间才能确定其真值。但其真值一定是唯一确定的。

定义 1.2 逻辑联结词　“¬”为否定联结词、“∧”为合取联结词、“∨”为析取联结词、“→”为蕴含联结词、“↔”为等价联结词

- P→Q 为假当且仅当 P 为真 Q 为假。
- 蕴含式 P→Q 可以用多种方式陈述：“如果 P 则 Q”；“若 P，则 Q”; “P 是 Q 的充分条件”; “Q 是 P 的必要条件”; “Q 每当 P”; “P 仅当 Q”；“因为 P，所以 Q”等。
- “除非 A,否则 B”：除非 A 发生，否则都是 B 发生。(¬A→B　¬B→A)
  “A,除非 B”：多数条件下都是 A 发生，只有 B 发生的条件下 A 不发生。(B→¬A)
- 给定命题 P→Q，我们把 Q→P，¬P→¬Q，　¬Q→¬P 分别叫作命题 P→Q 的逆命题，反命题和逆反命题。
- P↔Q 为真当且仅当 P，Q 同为真假

定义 1.7　一个特定的命题是一个常值命题(Constant Proposition)，它不是具有值“T”(“1”)，就是具有值“F”(“0”)。而一个任意的没有赋予具体内容的原子命题是一个变量命题，常称它为命题变量(或命题变元、命题变项)(Proposition Variable)。命题变量无具体的真值，它的值域是集合{T，F}(或{1，0})。

定义 1.8 命题公式

(1).命题变元本身是一个公式；

(2).如果 P 是公式，则¬P 也是公式；

(3).如果 P，Q 是公式，则 P∧Q、 P∨Q、 P→Q、 P↔Q 也是公式；

(4).命题公式(Prepositional Formula)是仅由有限步使用规则(1)~(3)后产生的结果。公式常用符号 G、H…等表示。

- 公式本身没有真值，只有在对其所有命题变元指定真值后才变成一个具有真值的命题。
- 合成公式的层次：

(1).若公式 A 是一单个的命题变项，则称 A 为 0 层公式；

(2).称 A 是 n+1(n≥0)层公式只需满足下列情况之一：

a).　A=¬B，B 是 n 层公式；

b). A=B∧C，其中 B，C 分别为 i 层和 j 层公式,且 n=max(i, j)；

c).　A=B∨C，其中 B，C 的层次同 b；

d).　A=B→C，其中 B，C 的层次同 b；

e).　A=B↔C，其中 B，C 的层次同 b；

定义 1.9 解释　设命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在公式 G 中的所有命题变元，指定 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 一组真值，则这组称为 G 的一个解释(Explanation),并记作 I。一般来说，若有 n 个命题变元，则应有 2^n 个不同的解释。

定义 1.11　(1). 永真公式（重言式）：所有解释下都为“真”；

(2). 可满足公式：不是永假的；

(3). 永假公式：所有解释下都为“假”

定义 1.12 等价式　公式 G，H，如果在其任意解释下，其真值相同，则称 G 是 H 的等价式或称 G 恒等于 H，记作 G⇔H。

定理 1.1　对于公式 G 和 H，G⇔H 的充分必要条件是公式 G↔H 是重言式。

- 注意⇔与↔不同：
  (1). ⇔ ：逻辑等价关系，G⇔H 不是命题公式；
  (2). ↔：逻辑联结词，G↔H 是命题公式；
- 常用逻辑恒等式（P，Q，R 为任意命题，T 为真命题，F 为假命题）：
  吸收律 ：P∨(P∧Q) <=>P　　P∧ (P∨Q) <=>P
  蕴含等值式：(P→Q) <=>¬P∨Q
  等价等值式：(P↔Q) <=>(P→Q) ∧(Q→P)
  输出律：(P∧Q→R) <=>(P→(Q→R))
  归谬律：((P→Q) ∧(P→¬Q)) <=>¬P
  逆反律：(P→Q) <=>¬Q→¬P

定义 1.13　若 A→B 是一永真式，那么称为永真蕴含式，记为 A⇒B，读作 A 永真蕴含 B

恒等式和永真蕴含式的两个性质：

(1) 传递性：若 A<=>B，B<=>C，则 A<=>C；若 A=>B，B=>C，则 A=>C.

(2) 若 A=>B，A=>C，则 A=>B∧C.

定理 1.2 代入定理　设 $G(P_1, \cdots, P_n)$是一个命题公式，其中 $P_1, \cdots, P_n$是命题变元，$G_1(P_1, \cdots, P_n), \cdots G_n(P_1, \cdots, P_n)$为任意的命题公式，此时若 G 是永真公式或永假公式，则用 G_1 取代 $P_1, \cdots, G_n$ 取代 P_n 后，得到的新的命题公式 $G(G_1, \cdots, G_n)$ <=> $G'(P_1, \cdots, P_n)$也是一个永真公式或永假公式。

定理 1.3 替换定理　设 G1 是 G 的子公式，H1 是任意的命题公式，在 G 中凡出现 G1 处都以 H1 替换后得到的新的命题公式 H，若 G1<=>H1，则 G<=>H

定义 1.14 对偶公式　设公式 A，其中仅有联结词∧，∨，¬。在 A 中将∧，∨，T，F 分别换以∨，∧，F，T 得到公式 A*，则 A*称为 A 的对偶公式。

定理 1.4　设 A 和 A*是对偶式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$是出现于 A 和 A*中所有命题变元，于是

$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$　【归纳法证明】

定理 1.5　若 A<=>B，且 A，B 为命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 及联结词∧，∨，¬构成的公式，则 A*<=>B*　【利用定理 1.4 证明】

定理 1.6　如果 A=>B，且 A，B 为命题变元 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 及联结词∧，∨，¬构成的公式，则 B*=>A*

定义 1.15 联结词完备集　设 S 是联结词的集合，(1)用 S 中的联结词表示的公式，可以等价地表示任何命题公式，则称 S 是一个联结词完备集（或全功能集合）(Adequate Set of Connectives)，(2)S 是一个联结词的完备集，且 S 中无冗余的联结词(即集合中不存在可以被其中的其它联结词所定义的联结词)，则称 S 为极小联结词完备集。

- {¬,∧,∨,→,↔}是一个联结词完备集，
- A↔B<=>(A→B)∧(B→A)，A→B<=>¬A∨B，A∨B<=>¬(¬A∧¬B)　{¬,∧}是一个极小联结词完备集。
- 同理，{¬,∨}，{¬, →}，{¬,蕴含否定}也是极小完备集，{↑}，{↓}也是极小完备集，

P↑Q<=>¬(P∧Q) ， P↓Q<=>¬(P∨Q)

定义 1.16

(1)：命题变元或命题变元的否定称为文字；

(2)：有限个文字的析取式称为简单析取式(基本和)，有限个文字的合取式称为简单合取式(基本积)；

(3)：由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式(Disjunctive Normal From)，由有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式(Conjunctive Normal From)。

定义 1.17

(1)包含 A 中所有命题变元或其否定一次仅一次的简单合取式，称为极小项；
(2)包含 A 中所有命题变元或其否定一次仅一次的简单析取式，称为极大项；
(3)由有限个极小项组成的析取范式称为主析取范式；
(4)由有限个极大项组成的合取范式称为主合取范式。

- ¬P∧¬Q∧¬R 可用 m000 来表示，又如¬P∧Q∧¬R 可用 m010 来表示。
- ¬P∨¬Q∨¬R 可用 M111 来表示

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	m0= ¬P∧¬Q∧¬R	M0= P∨Q∨R
0	0	1	m1= ¬P∧¬Q∧R	M1= P∨Q∨¬R
0	1	0	m2= ¬P∧Q∧¬R	M2= P∨¬Q∨R
0	1	1	m3= ¬P∧Q∧R	M3= P∨¬Q∨¬R
1	0	0	m4= P∧¬Q∧¬R	M4= ¬P∨Q∨R
1	0	1	m5= P∧¬Q∧R	M5= ¬P∨Q∨¬R
1	1	0	m6= P∧Q∧¬R	M6= ¬P∨¬Q∨R
1	1	1	m7= P∧Q∧R	M7= ¬P∨¬Q∨¬R

【真值表技术】求主析取范式时，将真值为 1 的解释对应的极小项做析取（∨）
求主合取范式时，将真值为 0 的解释对应的极大项做合取（∧）

【主析取与主合取的相互转化】

G=(P∧Q)∨(¬P∧R)∨(¬Q∧¬R)
<=>(P∧Q∧(¬R∨R))∨(¬P∧(¬Q∨Q)∧R)∨((¬P∨P)∧¬Q∧¬R)
<=>(P∧Q∧¬R)∨(P∧Q∧R)∨(¬P∧¬Q∧R) (¬P∧Q∧R)∨(¬P∧¬Q∧¬R)∨(P∧¬Q∧¬R)
<=>(¬P∧¬Q∧¬R)∨(¬P∧¬Q∧R)∨(¬P∧Q∧R)∨(P∧¬Q∧¬R)∨(P∧Q∧¬R)∨(P∧Q∧R)
<=>m0∨m1∨m3∨m4∨m6∨m7
¬G= m2∨m5
G<=> ¬ ¬G <=> ¬ (m2∨m5) <=> ¬m2∧¬m5
<=>M2∧M5<=>(P∨¬Q∨R)∧(¬P∨Q∨¬R)

定义 1.18 设 G1，G2，…，Gn，H 是命题公式，若对于 G1，G2，…，Gn，H 中出现的命题变元的任意一组赋值，或者 G1∧G2∧…Gn 为假，或者当 G1∧G2∧…Gn 为真，H 也为真，则称 H 是 G1，G2，…，Gn 的有效结论(Efficacious Conclusion)或逻辑结果(Logic Conclusion)。 G1，G2，…，Gn 称为一组前提(Premise)。

定理 1.9 命题公式 G1，G2，…，Gn 推出结论 H 的推理正确或公式 H 是前提条件{G1，G2，…，Gn}的逻辑结果，当且仅当(G1∧G2∧…Gn) →H 为重言式。

将由{G1，G2，…，Gn}正确推理出 H，用蕴含式表示为： G1∧G2∧…Gn =>H

【判断结论有效的方法】1.真值表法；2.等值演算法；3.主析取范式法

【构造证明法】
⑴前提引入规则
⑵结论引入规则
⑶置换规则
⑷附加规则：A |= (A∨B)
⑸化简规则：(A∧B) |= A
⑹假言推理规则：(A→B) ，A |= B
⑺拒取式规则：(A→B)，¬B |= ¬A
⑻假言三段论规则：(A→B)，(B→C) |= (A→C)
⑼析取三段论规则：(A ∨ B)，¬B |= A
⑽构造性二难规则：(A→B)，(C→D)，(A∨C) |= (B∨D)
⑾破坏性二难规则：(A→B)，(C→D)，(¬B∨¬D) |= (¬A∨¬C)
⑿合取引入规则：A，B |= (A∧B)
⒀CP 规则：若 P1，P2，…，Pn ，P|= Q，则 P1，P2，…，Pn |= P→Q
【归谬法】将结论的否定作为附加前提引入，公式序列的最后得到一矛盾式，则原结论成立。

定义 2.1 集合的运算

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ $\overline{A} = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

定义 2.2 关系的性质

(1)若 $\forall x(x \in A \to <x, x> \in R)$，则称 R 是自反的(Reflexive)；

(2)若 $\forall x(x \in A \to <x, x> \notin R)$，则称 R 是反自反的(Irreflexive)；

(3)若 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \to yRx)$，则称 R 是对称的(Symmetric)

(4)若 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$，则称 R 是反对称的

(Antisymmetric)

(5)若 $\forall x \forall y \forall z(x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$，则称 R 是传递的(Transitive)

(1)$R_1 = \{<a,a>,<a,c>,<c,a>\}$是对称的；
(2)$R_2 = \{<a,a>,<a,c>\}$是反对称的；
(3)$R_3 = \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<c,a>\}$既不是对称的，也不是 反对称的；
(4)$R_4 = \{<a,a>,<c,c>\}$既是对称的，也是反对 称的。

$(1)R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>,<a,c>\}$是传递的；

$(2)R_2=\{<a,b>\}$是传递的；

$(3)R_3=\{<a,a>,<a,b>,<b,c>\}$不是传递的；

$(4)R_4=\{<a,b>,<b,c>,<a,c>,<c,d>\}$不是传递的。

定义 3.1 形式系统　形式系统一般有以下几个部分组成

(1).字母表：由不加定义而采用的符号组成，字母表指此形式系统可以使用的符号；

(2).字母表上符号串的一个子集—公式集(Form)：Form 中的元素称为公式，Form 指此形式系统可以使用的符号串；

(3).Form 的一个子集是公理集(Axiom)： Axiom 中的元素称为公理， Axiom 指此形式系统一开始便接受而不加证明的定理；

(4).推理规则系 Rule 或证明：Rule 中的元素称为推理规则，Rule 规定了公式间的转换关系。

定义 3.2 公式集 L(X)　设由命题变元集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$出发得到的可数的公式集 L(X)。由可数集 X 及二元集{1,2}出发定义列集：

$L_0=X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$,

$L_1=(\{1\}\times L_0)\cup(\{2\}\times L_0\times L_0)$

$=\{(1,x_1),(1,x_2),\cdots,(1,x_n),\cdots\ (2,x_1,x_1),(2,x_1,x_2),(2,x_2,x_1),\cdots\}$,

$L_2=(\{1\}\times L_1)\cup(\{2\}\times L_0\times L_1)\cup(\{2\}\times L_1\times L_0),\cdots$

$L_k=(\{1\}\times L_{k-1})\cup(\cup_{i+j=k-1}\{2\}\times L_i\times L_j),k>0$

L(X)可表示为这一列集的并：$L(X)=\cup_{k=0}^{\infty}L_k$

- 在公式集 L(X)中定义运算¬和→： $\neg p=(1,p)$、$p\to q=(2,p,q)$
- 令 $X_n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，则称命题代数 $L(X_n)$为集 X_n 生成的{¬,→}型代数，为 L(X)的子代数。

定义 3.3 命题演算 L　命题变元集 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$上的命题演算 L 是指带有下面规定的公理和证明的命题代数 L(X)：

(1)公理：取 L(X)的具有以下形状的公式作为公理：

(L1) $p\to(q\to p)$	肯定后件律
(L2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$	蕴含词分配律
(L3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$	换位律

其中 $p,q,r\in L(X)$。

(2)证明：设$\Gamma\subseteq L(X),p\in L(X)$,若存在 L(X)的公式有限序列 $p_1,\cdots,p_n$,其中 $p_n=p$,且每个 $p_k(k=1,\cdots,n)$满足：

a)$p_k\in\Gamma$，b)p_k是公理，或 c)存在 i,j<k 使 $p_j=p_i\to p_k$

则称公式 p 是从公式集Γ可证的， $p_1,\cdots,p_n$ 叫做 p 从Γ的证明

定义 3.4 语法推论　如果公式 p 从公式集Γ可证，则记作$\Gamma\vdash p$ 或$\Gamma\vdash_L p$。这时Γ中的公式叫做假定，p 叫做假定集Γ的语法推论。若$\varnothing\vdash p$，则称 p 是 L 的定理，记作$\vdash p$。p 在 L 中从∅的证明 $p_1,\cdots,p_n$ 简称为 p 在 L 中的证明。

定义 3.5 无矛盾公式集　如果对任何公式 q，$\Gamma\vdash q$ 和$\Gamma\vdash\neg q$ 二者都不同时成立，就称公式

集Γ是无矛盾公式集，否则称Γ为有矛盾公式集。

定理 3.1 **(演绎定理)** $\Gamma\cup\{p\}\vdash q \Leftrightarrow \Gamma\vdash p\to q$

定理 3.2 **(反证律)** $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash q$ **且** $\Gamma\cup\{\neg p\}\vdash\neg q \Rightarrow \Gamma\vdash p$

定理 3.3 **(归谬律)** $\Gamma\cup\{p\}\vdash q$ **且** $\Gamma\cup\{p\}\vdash\neg q \Rightarrow \Gamma\vdash\neg p$

【可直接引用的公式】

1.	$\vdash p\to p$	同一律
2.	$\vdash \neg q\to(q\to p)$	否定前件律
3.	$\vdash (\neg p\to p)\to p$	否定肯定律
4.	$\vdash (p\to q)\to((q\to r)\to(p\to r))$	HS,假设三段论
5.	$\vdash \neg\neg p\to p$	双重否定律
6.	$\vdash p\to\neg\neg p$	第二双重否定律
7.	$\vdash (p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$	换位律
8.	(L1) $p\to(q\to p)$	肯定后件律
9.	(L2) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$	蕴含词分配律
10.	(L3) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$	换位律

$\vdash p\to p$（同一律）

证明：

(1) $p\to((p\to p)\to p)$	(L1)
(2) $(p\to((p\to p)\to p))\to((p\to(p\to p))\to(p\to p))$	(L2)
(3) $(p\to(p\to p))\to(p\to p)$	(1),(2),MP
(4) $p\to(p\to p)$	(L1)
(5) $p\to p$	(3),(4),MP

$\vdash \neg q\to(q\to p)$ (否定前件律)

证明：

(1) $(\neg p\to\neg q)\to(q\to p)$	(L3)
(2) $((\neg p\to\neg q)\to(q\to p))\to(\neg q\to((\neg p\to\neg q)\to(q\to p)))$	(L1)
(3) $\neg q\to((\neg p\to\neg q)\to(q\to p))$	(1),(2),MP
(4) $(\neg q\to((\neg p\to\neg q)\to(q\to p)))\to((\neg q\to(\neg p\to\neg q))\to(\neg q\to(q\to p)))$	(L2)
(5) $(\neg q\to(\neg p\to\neg q))\to(\neg q\to(q\to p))$	(3),(4),MP
(6) $\neg q\to(\neg p\to\neg q)$	(L1)
(7) $\neg q\to(q\to p)$	(5),(6),MP

$\vdash(\neg p\to p)\to p$ (否定肯定律)

证明：按照演绎定理，只用证明$\{\neg p\to p\}\vdash p$，如下：

(1) $\neg p\to(p\to\neg(\neg p\to p))$	否定前件律
(2) $(\neg p\to(p\to\neg(\neg p\to p)))\to((\neg p\to p)\to(\neg p\to\neg(\neg p\to p)))$	(L2)
(3) $(\neg p\to p)\to(\neg p\to\neg(\neg p\to p))$	(1),(2),MP
(4) $\neg p\to p$	假设
(5) $\neg p\to\neg(\neg p\to p)$	(3),(4),MP
(6) $(\neg p\to\neg(\neg p\to p))\to((\neg p\to p)\to p)$	(L3)
(7) $(\neg p\to p)\to p$	(5),(6),MP
(8) p	(4),(7),MP

$\{\neg\neg p\}\vdash p$ 或 $\vdash\neg\neg p\to p$ (双重否定律)

证明：用反证律，将$\neg p$ 作为新的假设，则有：

(1) $\{\neg\neg p,\neg p\}\vdash\neg p$,

(2) $\{\neg\neg p,\neg p\}\vdash\neg\neg p$,

由(1),(2),用反证律即得{¬¬p} ├p，然后使用演绎定理即可得 ├¬¬p→p。

{p} ├¬¬p 或 ├p→¬¬p (第二双重否定律)

证明：因

(1) {p,¬p} ├p

(2) {p,¬p} ├¬p

由(1),(2),用归谬律即得{p} ├¬¬p。

定义 3.6 赋值 具有“保运算性”的映射 v:L(X)→Z_2 叫做 L(X)的赋值。映射 v 具有保运算性，是指对任意 p,q∈L(X)，v 满足：

(1) v(¬p)=¬v(p)； (2) v(p→q)=v(p)→v(q).

对任意公式 p∈L(X)，**v(p)叫做 p 的真值**。同样，具有保运算性的映射 v:L(X_n)→Z_2 叫做 L(X_n)的赋值(X_n={x_1,⋯,x_n})。

定义 3.7 真值指派 映射 v_0:X→Z_2= $\{0,1\}$叫做命题变元的真值指派。若把其中 X 换成 X_n={x_1,⋯,x_n}，则 v_0 叫做 x_1,⋯,x_n 的真值指派。

定理 3.4 命题变元 X={x_1,⋯,x_n,⋯}的任一真值指派，**必可唯一地扩张成 L(X)的赋值**；X_n={x_1,⋯,x_n}的任一真值指派，**必可唯一地扩张成 L(X_n)的赋值**。

定义 3.8 永真公式 若公式 p 的真值函数取常值 1，则 p 叫做命题演算 L 的永真公式或重言式，记作 ⊨p。即， ⊨p ⇔ L(X)的任何赋值 v 都使 v(p)=1。

定理 3.5 L 的所有**公理都是永真式**，即对任意 p,q,r∈L，

(1) ⊨p→(q→p);

(2) ⊨(p→(q→r))→((p→q)→(p→r))

(3) ⊨(¬p→¬q)→(q→p)

定义 3.9 语义推论 设Γ⊆L(X),p∈L(X).如果Γ中所有公式的任何公共**成真指派**都一定是公式 p 的成真指派，则说 p 是公式集Γ的语义推论，记作Γ ⊨p

(1) ∅ ⊨p⇔L(X)的任一赋值 v 都使 v(p)=1⇔ ⊨p(即 p 永真)

(2) p∈Γ⇒Γ ⊨p

(3) ⊨p⇒Γ ⊨p，即永真公式是任何公式集Γ的语义推论

定义 4.1 在原子命题中，可以独立存在的客体(句子中的主语，宾语等)，称为**个体词**(Individual)。而用以刻画个体词的性质或个体词之间的关系的词即是**谓词**(Predicate)。

定义 4.2 个体词和谓词根据其具有的抽象分为两种：

(1).表示具体或特定的个体词称为**个体常量**(Individual Constant)，一般个体词常量用小写字母 a, b, c, ⋯表示；表示抽象的或泛指的个体词称为**个体变量**(Individual Variable),一般用 x, y, ⋯等表示；

(1).表示具体性质或关系的谓词称为**谓词常量**(Predicate Constant)，表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称为**谓词变量**(Predicate Variable)，谓词一般都用大写字母 F, G, H, ⋯表示。

定义 4.3 个体域 (1)个体词的取值范围称为个体域(或论域)，常用 D 表示；

(2)宇宙间所有个体域聚集在一起构成的个体域称为**全总个体域**

定义 4.4 设 D 为非空的个体域，定义在 D^n(表示 n 个个体都在个体域 D 上取值)上取值于

{0，1}上的 n 元函数，称为 n 元命题函数或 n 元谓词(Propositional Function)，记为 P(x1, x2, …, xn)，此时个体变量 x1, x2, …, xn 的定义域都为 D， P(x1, x2, …, xn)的值域为{0，1}。

定义 4.5
(1).将日常生活和数学中常用的“一切的”，“所有的”，“每一个”，“任意的”等词称为全称量词(Universal Quantifier)，符号化为“∀”；
(2).将日常生活和数学中常用的“存在”，“有一个”，“至少有一个”，等词称为存在量词(Existential Quantifier)，符号化为“∃”。
定义 4.6 特性谓词　用来刻画个体变量的变化范围的谓词。
特性谓词在加入到命题函数中式遵循如下规则：
(1).对应全称量词，刻划其对应个体域的特性谓词作为蕴含式的前件加入；
(2).对应存在量词，刻划其对应个体域的特性谓词作为合取项加入。

定义 4.7 项的形成规则
(1).个体变元 x_i 与个体常元 c_i 都是
(2).若 $t_1,\cdots,t_n$ 是项，则 $f_i^n(t_1,\cdots,t_n)$ 也是导出项（f_i^n 是函数集 F 中的第 i 个 n 元函数）
(3).有限次使用(1)(2)得到的都是项
定义 4.8 闭项　只含有个体常元的项叫做闭项。
定义 4.9 原子公式集是指

$$Y=\bigcup_{i,n}(\{R_i^n\}\times \underbrace{T\times\cdots\times T}_{n\text{ 个 }T})$$

即 $Y=\{R_i^n(t_1,\cdots,t_n)|R_i^n\in R, t_1,\cdots,t_n\in T\}$，其中谓词集 $R=\{R_1^1, R_2^1,\cdots, R_1^2, R_2^2,\cdots\}$，$R_i^n$ 叫做第 i 个 n 元谓词。
定义 4.10　谓词演算公式的形成规则：
(1) 每个原子公式是公式
(2) 若 p, q 是公式，则¬p, p→q, $\forall x_i p$ (i=1,2,…)都是公式
(3) 任一公式皆由规则(1)(2)的有限次使用形成。

定义 4.11　给定一个合式公式 G，若变元 x 出现在使用该变元的量词的辖域之内，则称变元 x 的出现为约束出现(Bound Occurrence)，此时的变元 x 称为约束变元(Bound Variable),若 x 的出现不是约束出现，则称它为自由出现(Free Occurrence)，此时的变元称为自由变元(Free Variable)。
- 约束变元的改名规则

(1).将量词中出现的变元以及该量词辖域中此变量之所有约束出现，都用新的个体变元替换；
(2).新的变元一定要有别于改名辖域中的所有其它变元。
- 自由变元的代替规则

(1).将公式中出现该自由变元的每一处都用新的个体变元替换；
(2).新变元不允许在原公式中以任何约束形式出现。
改名规则只对公式中的一个量词及其辖域内施行，即只对公式的一个子公式施行，代替规则必须对整个公式同一自由变元的所有自由出现同时施行，即必须对整个公式施行

定义 4.12 闭式　若公式中不含自由出现的变元，则称该公式为闭式。

定义 4.13 t 对 p 中 x 是自由的　用项 t 去代替公式 p 中自由出现的个体变元 x 时，若在代换后的新公式里，t 的变元都是自由的，则说 t 对 p 中 x 是可自由代换的，简称 t 对 p 中 x 是可代换的，或简称 t 对 p 中 x 是自由的【项的定义 定义 4.7】

- p(t)表示用项 t 去代换公式 p(x)中所有自由出现的变元 x 所得的结果

定义 4.14 谓词演算 K 是指带有如下规定的“公理”和“证明”的公式集 K(Y)：

“公理”：

(K1) p→(q→p)

(K2) (p→(q→r))→((p→q)→(p→r))

(K3) (¬p→¬q)→(q→p)

(K4) ∀xp(x)→p(t)，其中项 t 对 p(x)中的 x 是自由的

(K5) ∀x(p→q)→(p→∀xq)，其中 x 不在 p 中自由出现

其中，p,q,r,p(x)都是任意的公式

“证明”：

设 p 是某个公式，Γ是某个公式集。p 从Γ可证明，记作Γ ├p，是指存在着公式的有限序列 $p_1,\cdots,p_n$,其中 $p_n=p$，且对每个 k=1,⋯,n 有

(1).$p_k\in\Gamma$，或

(2). p_k 为公理，或

(3).存在 i,j<k，使 $p_j=p_i\to p_k$(此时说由 $p_i,p_i\to p_k$ 使用 MP 规则得到 p_k)，或

(4).存在 j<k，使 $p_k=\forall xp_j$.此时说由 p_j 使用“Gen”(推广)规则得到 p_k。x 叫做 Gen 变元

定理 4.1($\exists_1$ 规则)　设项 t 对 p(x)中的 x 自由，则有 ├ p(t)→∃xp(x)

定理 4.2(演绎定理)

(1)若Γ ├p→q，则Γ∪{p} ├q

(2)若Γ∪{p} ├q，且证明中所用 Gen 变元不在 p 中自由出现，则不增加新的 Gen 变元就可得Γ ├p→q

- 当 p 是闭式的时候，Γ∪{p} ├q ⇔ Γ ├p→q

定理 4.3(反证律)　若Γ∪{¬p} ├q 及¬q，且所用 Gen 变元不在 p 中自由出现，则不增加新的 Gen 变元便可得Γ ├p。

定理 4.4(归谬律)　若Γ∪{p} ├q 及¬q，且所用 Gen 变元不在 p 中自由出现，则不增加新的 Gen 变元便可得Γ ├¬p。

定理 4.5($\exists_2$ 规则)　设Γ∪{p} ├q，其证明中 Gen 变元不在 p 中自由出现，且 x 不在 q 中自由出现，那么有Γ∪{∃xp} ├q，且除了 x 不增加其他 Gen 变元。

定义 4.15 K 的解释域　设非空集 M 具有以下性质：

1)对 K 的每个个体常元 c_i，都有 M 的元素$\bar{c}_i$与之对应：

$$c_i \mapsto \bar{c}_i, \bar{c}_i \in M$$

2)对 K 的每个函数或运算符f_i^n,都有 M 上的 n 运算符$\overline{f_i^n}$与之对应：

$f_i^n \mapsto \overline{f_i^n}$，$\overline{f_i^n}$是 M 上的 n 元运算

3)对 K 的每个谓词R_i^n，都有 M 上的 n 元关系$\overline{R_i^n}$与之对应：

$R_i^n \mapsto \overline{R_i^n}$，$\overline{R_i^n}$是 M 上的 n 元关系

带有上述三个映射的非空集合 M 叫做 K 的解释域，通常也叫做解释或结构。

定义 4.16 项解释　对给定的解释域 M，项解释φ是指具有以下性质的映射φ:T→M：

1) $\varphi(x_i)=\varphi_0(x_i)$，$\varphi(c_i)=\overline{c_i}$，

其中映射$\varphi_0:X\to M$叫做个体变元的对象指派，φ_0给变元 x_i 指派的个体对象是$\varphi_0(x_i)\in M$。

2)若$\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n)$已有定义，则令

$\varphi(f_i^n(t_1,\cdots,t_n))=\overline{f_i^n}(\varphi(t_1),\cdots,\varphi(t_n))$

- 项解释φ由个体变元的指派φ_0完全确定。φ_0可随意取，只要φ_0取定，变元有了指派，每个项的解释则可由 1)和 2)唯一确定下来

定义 4.17 项解释的变元变通 对给定的解释域 M，把所有的项解释组成的集合记作$\Phi_M=\{\varphi|\varphi:T\to M$ 是项解释$\}$。设 x 是某个给定的个体变元，y 是任意的个体变元，且$\varphi,\varphi'\in\Phi_M$满足条件： $y\neq x\Rightarrow\varphi'(y)=\varphi(y)$，

则把φ'叫做φ 的 x 变通。(φ'和φ互为对方的 x 变通)

- 互为变通的φ与φ'的差别仅在于对变元 x 的指派可能不同(也可能相同)，而它们对其他变元的指派则全都相同。

定义 4.18 公式的赋值函数 设 M 是给定的解释域，p 是 K 中任一公式。由公式 p 按下面的方式归纳定义的函数$|p|:\Phi_M\to Z_2$叫做公式 p 的赋值函数。对任一项解释$\varphi\in\Phi_M$，记 x 的指派为$\bar{x}=\varphi(x)$，项 t 的解释为$\bar{t}=\varphi(t)$，并

1)当 p 为原子公式$R_i^n(t_1,\cdots,t_n)$时，令

$$|p|(\varphi)=\begin{cases}1, & 若(\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_n)\in\overline{R_i^n}\\ 0, & 若(\bar{t}_1,\dots,\bar{t}_n)\notin\overline{R_i^n}\end{cases}$$

2)当 p 是¬q 或 q→r 时，令 $|\neg q|(\varphi)=\neg|q|(\varphi)$， $|q\to r|(\varphi)=|q|(\varphi)\to|r|(\varphi)$

3)当 p 是∀xq 时，令

$$|\forall xq|(\varphi)=\begin{cases}1, & 若\ \varphi\ 的任一x变通\varphi'都使|q|(\varphi')=1\\ 0, & 若存在\ \varphi\ 的x变通\varphi'使|q|(\varphi')=0\end{cases}$$

定义 4.19 公式在解释域中恒真与恒假 公式 p 在解释域 M 中恒真，记作$|p|_M=1$，是指对任意$\varphi\in\Phi_M$，$|p|(\varphi)=1$；公式 p 在解释域 M 中恒假，记作$|p|_M=0$，是指对任意$\varphi\in\Phi_M$，$|p|(\varphi)=0$；在解释域 M 中非恒假公式叫做在 M 中可满足公式。

【常用的等价式】

1.消去量词等值式。设个体域为有限集 $D=\{a_1,\cdots a_n\}$，则由谓词公式的真值定义，有

$$(1).\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$$

$$(2).\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\cdots\vee A(a_n)$$

2.量词否定等值式

$(1).\neg(\forall x)A(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg A(x)$;

$(2).\neg(\exists x)A(x)\Leftrightarrow(\forall x)\neg A(x)$.

3.量词辖域收缩与扩张等值式

设 A(x)是任意的含个体变元 x 的公式，B 中不含有 x，则

$(\forall x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \vee B$
$(\forall x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge B$
$(\forall x)(A(x) \to B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \to B$
$(\forall x)(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to (\forall x)A(x)$

$(\exists x)(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee B$
$(\exists x)(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \wedge B$
$(\exists x)(A(x) \to B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \to B$
$(\exists x)(B \to A(x)) \Leftrightarrow B \to (\exists x)A(x)$

4.量词分配律

(1). $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$
(2). $(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$

5.改名规则

(1) : $(\exists x)G(x) \Leftrightarrow (\exists y)G(y)$; (2) : $(\forall x)G(x) \Leftrightarrow (\forall y)G(y)$.

6.补充四条

(1). $(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y))$
(2). $(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y))$
(3). $\forall x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$
(4). $\exists x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$

【常用的永真蕴含式】

(1). $(\forall x)A(x) \Rightarrow (\exists x)A(x)$
(2). $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$
(3). $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$
(4). $(\forall x)(A(x) \to B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)$
(5). $(\forall x)(A(x) \to B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \to (\exists x)B(x)$
(6). $(\exists x)(\forall y)G(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)G(x, y)$
(7). $(\forall x)(\forall y)G(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)G(x, y)$
(8). $(\forall y)(\forall x)G(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)G(x, y)$
(9). $(\exists y)(\forall x)G(x, y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)G(x, y)$
(10). $(\forall x)(\exists y)G(x, y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)G(x, y)$
(11). $(\forall y)(\exists x)G(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)G(x, y)$

定义 4.20 前束范式　设 A 为一个一阶逻辑公式，如果 A 中的一切量词都位于该公式的最前端，且这些量词的辖域都延伸到公式的末端，则称 A 为前束范式。

定义 4.21SKolem 标准形　设公式 G 是一个前束范式，如消去 G 中所有的存在量词和全称量词，所得到的公式称为 SKolem 标准形。

设 G 的前束范式为：G=$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\cdots x_n)$

(1).如果 Q_i是存在量词，且 Q_i的左边没有全称量词，则直接用一个常量符号 a 来取代 x_i在 M 中的一切出现，且该 a 不同于 M 中的任何其他常量符号；

(2).如果 Q_i是存在量词，且 Q_i的左边有全称量词(任意 x_j)，(任意 x_l)，…(任意 x_k)，则直接用一个函数 $f(x_j, x_l, \cdots x_k)$来取代 x_i在 M 中的一切出现，该函数符号 f 不同于 M 中的任何其他函数符号；

(3).如果 Q_i是全称量词，则直接用一个变量符号 x 来取代 x_i在 M 中的一切出现，且该变量 x 不同于 M 中的任何其他变量符号；

(4).反复使用上述(1), (2), (3)，可消去前束范式中的所有存在量词的全称量词，此时得到的公式为该公式的 Skolem 标准形。

定义 4.22 **模型** 设 M 是 K 的一个解释域，M 是公式集Γ的模型，指 Γ的每个公式都在 M 中恒真：$r\in\Gamma\Rightarrow|r|_M=1$。Γ=∅时任何解释域都是Γ的模型。

定义 4.23 **语义推论** 公式 p 是公式集Γ的语义推论，记作Γ ⊨p，指 p 在Γ的所有模型中都恒真，即：在使Γ的每个成员都恒真的解释域中，p 也恒真；或者说，Γ的任何模型也都是Γ∪{p}的模型。

定义 4.24 **有效式与满足公式** ∅ ⊨p 时，p 叫做 K 的有效式，记作 ⊨p。若¬p 不是有效式，则 p 叫做 K 的可满足公式

- 命题 1： Γ ⊨p 且Γ ⊨p→q ⇒ Γ ⊨q.
- 命题 2： Γ ⊨p ⇔ Γ ⊨∀xp.

【谓词演算的语义推论-推理规则】

(1).全称量词消去规则 UI $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y), (\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$

其中 y 为任意的不在 A(x)中约束出现的个体变量，c 为任意的个体常量；

(2).存在量词消去规则 EI $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$

其中，c 是使 A 为真的个体域中的某个个体，即一个特定的个体常项，要求$(\exists x)A(x)$中无其它自由出现的个体变项，如有，必须用函数符号来取代。

(3).全称量词引入规则 UG $A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$

其中无论 A(y)中自由出现的个体变量 y 取何值，A(y)应该均为真，x 不能在 A(y)中约束出现。

(4).存在量词引入规则 EG $A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$

其中，c 是特定的个体常量，x 不能在 A(c)中出现过。

定义 5.1 **等词公理**

(E1) R_1^2 (t, t)

(E2) R_1^2 (t_k, u) → R_1^2 (f_i^n ($t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_m$), f_i^n ($t_1, \cdots, u, \cdots, t_n$))

(E3) R_1^2 (t_k, u) → (R_i^n($t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_m$) → R_i^n ($t_1, \cdots, u, \cdots, t_n$))

用≈表示等词

(E1) t ≈ t

(E2) t_k ≈ u → (f_i^n ($t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_m$) ≈ f_i^n ($t_1, \cdots, u, \cdots, t_n$))

(E3) $t_k \approx u \to (R_i^n(t_1, \cdots, t_k, \cdots, t_m) \to R_i^n(t_1, \cdots, u, \cdots, t_n))$

定理 5.1 等词定理

1。E $\vdash t \approx t$

2。E $\vdash t \approx u \to u \approx t$

3。E $\vdash t \approx u \to (u \approx v \to t \approx v)$

定义 5.2 算术公理

(N1) $t' \not\approx \overline{0}$

(N2) $t'_1 \approx t'_2 \to t_1 \approx t_2$

(N3) $t + \overline{0} \approx t$

(N4) $t_1 + t'_2 \approx (t_1 + t_2)'$

(N5) $t \times overline0 \approx \overline{0}$

(N6) $t_1 \times t'_2 \approx t_1 \times t_2 + t1$

(N7) $p(\overline{0}) \to (\forall x(p(x) \to p(x')) \to \forall x p(x))$

其中t, t_1, t_2是任意的项，$p(x)$是任意的公式,算术公理的集记为$\mathcal{N}$

定理 3 $\mathcal{N} \vdash \overline{m} + \overline{n} \approx m + n$

定理 4 $\mathcal{N} \vdash \overline{m} \times \overline{n} \approx m \times n$

定理 5 $\mathcal{N} \vdash \overline{0} + t \approx t$

定理 6 $\mathcal{N} \vdash t'_1 + t_2 \approx (t_1 + t_2)'$

定理 7 (加法交换律) $\mathcal{N} \vdash t'_1 + t_2 \approx (t_1 + t_2)'$
其中t_1, t_2是任意的项

定理 8 (加法结合律) $\mathcal{N} \vdash (t_1 + t_2) + t_3 \approx t_1 + (t_2 + t_3)$
其中t_1, t_2, t_3是任意的项

定理 9 (加法消去律) $\mathcal{N} \vdash t_1 + t_2 \approx t_2 \leftarrow t_1 \approx \overline{0}$
其中t_1, t_2是任意的项

定理 10 $\mathcal{N} \vdash t_1 + t_2 \approx \overline{0} \to t_1 \approx \overline{0}$

定理 11 $\mathcal{N} \vdash t_3 + t_1 \approx t_2 \to (t_4 + t_2 \approx t_1 \to t_1 \approx t_2)$

定理 12 $\mathcal{N} \vdash \exists x(x + t_1 \approx t_2) \to (\exists x(x + t_2 \approx t_1) \to (t_1 \approx t_2))$

定理 13 $\mathcal{N} \vdash t \not\approx \overline{0} \to \overline{1} \leqslant t$

定义 5.3 可表示函数

k 元函数 f 在 K_N 中可表示，如果存在 $k+1$ 个自由变元的公式 $p(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$ 使对任意对 $p(x_1,\dots,x_{k+1})$ 中 x_{k+1} 自由的项 u 及 $n_1,\dots,n_{k+1}\in\mathbb{N}$ 有，

$$1^\circ\quad f(n_1,\dots,n_k)=n_{k+1}\ \Rightarrow\ \vdash_{K_N} p(\overline{n_1},\dots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})$$

$$2^\circ\quad f(n_1,\dots,n_k)\neq n_{k+1}\ \Rightarrow\ \vdash_{K_N} \neg p(\overline{n_1},\dots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})$$

$$3^\circ\quad \vdash_{K_N} p(\overline{n_1},\dots,\overline{n_k},u)\rightarrow u\approx\overline{f(n_1,\dots,n_k)}$$

定义 5.4 基本函数

1° 一元零函数 z, $z(n)=0$;

2° 一元后继函数 s, $s(n)=n+1$;

3° k 元投影函数 p_i^k, $p_i^k(n_1,\dots,n_k)=n_i$.

定义 5.5 递归函数

三个基本函数以及由它们经过有限次应用三个规则生成的函数称为（一般）递归函数，不使用 μ 算子生成的称为原始递归函数，不要求根存在条件地应用 μ 算子生成的为部分递归函数。

定理 5.3

所有递归函数（关系，集）是 K_N 可表示的，

所有 K_N 可表示的函数（关系，集）是递归的。