第三章一阶理论

吉建民

USTC
jianmin@ustc.edu.cn

2021 年 5 月 11 日

Used Materials

Disclaimer: 本课件采用了陈小平老师讲义内容和汪芳庭《数理逻辑》教材中内容。

Table of Contents

1. Peano Postulates (1889)

1. 0 是自然数；
2. 对任何自然数 x，存在唯一的自然数 x'，称为 x 的后继；
3. 0 不是任何自然数 x 的后继；
4. 任何两个不同的自然数的后继也不同；
5. 任何集合，若它包含 0 和它的每一个元素的后继，则它包含所有自然数。

2. Gottlob Frege (1884)

1. 0 是不等于自身的事物的集合;
2. 1 是仅由 0 组成的集合;
3. 2 是仅由 0 和 1 组成的集合;
4. $\cdots$

3. Von Neumann 表述 (1922, 19 岁)

1. $0 =_{df} \{\ \}$, the empty set;
2. $x' =_{df} x \cup \{x\}$.

It follows that each natural number is equal to the set of all natural numbers less than it:

$$
\begin{aligned}
&0 = \{\ \},\\
&1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\{\ \}\},\\
&2 = 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = \{\{\ \},\{\{\ \}\}\},\\
&3 = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\} = \{\{\ \},\{\{\ \}\},\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}\},\\
&n = n-1 \cup \{n-1\} = \{0,1,\ldots,n-1\}
\end{aligned}
$$

4. Peano 公设的形式化

- 引入一阶公式集 Γ_N，表示 Peano 公设，为此取 K(Y)，包含个体常元 0，一元函数符号 $'$，一元谓词符号 N。
- Γ_N 的每一个模型中，$0, ', N$ 必须分别解释为自然数 0，后继函数 $(+1)$ 和 “是自然数”

(P1) $N(0)$

(P2) $\forall x(N(x) \rightarrow \exists! y(y = x' \wedge N(y)))$

(P3) $\forall x \neg(0 = x')$

(P4) $\forall x \forall y(x' = y' \rightarrow x = y)$

(P5) $P(0) \wedge \forall x(P(x) \rightarrow P(x')) \rightarrow \forall x P(x)$
P 是任何谓词符号

对所有谓词符号 Q:

$$\exists! x\, Q(x) =_{df} \exists x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \leftrightarrow (y = x)))$$

其中 y 不在 $Q(x)$ 中出现。

思考

- 思考题 3-1：(P5) 是怎样表达了 Peano 第五公设的？
- 上述 “=” 是什么？
  - $x = y$ 指 x 与 y 代表同一语法对象（符号，项，公式，同一个表达式）
  - 所有 “=” 改写为 “$\approx$”，称为 “等词符号”，$x \approx y$ 表示 $I(x) = I(y)$

注：

- K 表示一阶逻辑的形式推理系统（一阶谓词演算）
- $K(Y)$ 表示 K 的全体公式的集合，其中 $Y = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ 为个体变元的集合

Table of Contents

K^+ 定义

- K^+ 的语言比 $K(Y)$ 多一个二元谓词符号 $\approx$，视为非逻辑符号，$\approx$ 称为 K^+ 的常谓词符号
- K^+ 的推理设施增加下列等词公设：

$$
\begin{aligned}
&\text{(E1)}\quad u \approx u \\
&\text{(E2)}\quad u_k \approx u \to \\
&\qquad\quad f_i^n(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \approx f_i^n(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n) \\
&\text{(E3)}\quad u_k \approx u \to \\
&\qquad\quad (P_i^n(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \to P_i^n(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))
\end{aligned}
$$

注：在汪芳庭《数理逻辑》书中，以上三种形式的公式叫做等词公理，所有等词公理组成的集记为 E。

例子 1

等词公设并不是有效式。

- 令 $K^{+}(Y)$ 不含函数和个体常元，谓词只有 $\approx$，考虑 $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \emptyset, \mathbb{P})$，使 $\approx^{\mathcal{M}}$ 是 $>$
- $\mathcal{M} \not\models u \approx u$
- 对所有 K 公理 p，有 $\mathcal{M} \models p$

定理 1

定理

任给一阶结构 $\mathcal{M} = (\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，若 $\approx^{\mathcal{M}}$ 为 $\mathbb{D}$ 上的相等，则所有等词公设是 $\mathcal{M}$ 有效的。

证明.

设 $\mathcal{M}$ 使 $\approx^{\mathcal{M}}$ 为 $\mathbb{D}$ 上相等，考虑 (E1)。
对任何 $I = (\mathcal{M}, V)$ 和项 u，存在 $d \in \mathbb{D}$，使 $I(u) = d$。
于是

$$
\begin{array}{lll}
I(u \approx u) = t & \text{iff} & (\, I(u), I(u)\,) \in \approx^{\mathcal{M}} \\
 & \text{iff} & (\, d, d\,) \in \approx^{\mathcal{M}}\ .
\end{array}
$$

故显然 $I(u \approx u) = t$，由 I 的任意性，得 $\mathcal{M} \models u \approx u$. $\square$

习题 3-1：(E2) 和 (E3) 的证明。

思考

- 在 K^+ 的模型中，$\approx^{\mathcal{M}}$ 是否一定是 $\mathbb{D}$ 上相等？

例子 2

- 取 $K^{+}(Y)$ 同例子 1，考虑 $\mathcal{M}'$ 使 $\approx^{\mathcal{M}'}$ 为 $\mathbb{N}$ 上 “有相同奇偶性”
- 易证，$\mathcal{M}'$ 是 K^{+} 的一个模型
- (E1) 和 (E2) 是 $\mathcal{M}'$ 有效的
- 考虑 (E3)，它在 $K^{+}(Y)$ 表现形式为：

$$u_k \approx u \to (u_1 \approx u_k \to u_1 \approx u)$$

或者

$$u_k \approx u \to (u_k \approx u_n \to u \approx u_n)$$

可以验证：对一切 $I = (\mathcal{M}', V)$，上述两种公式是真的

思考

- 思考题 3-2：
  - L 是否强迫 “$\to$” 解释为实质蕴含？
  - K^{+} 模型将 “$\approx$” 规定到什么程度？

定理（$\approx$ 等价性）

定理 ($\approx$ 等价性)

若 $\mathcal{M}$ 是一个 K^+ 模型，则 $\approx^{\mathcal{M}}$ 是 $\mathbb{D}$ 上等价关系。

证明.

只需证明在语法中有下列的 K^+ 的定理：

1. $\vdash_{K^+} t \approx t$
2. $\vdash_{K^+} t \approx u \to u \approx t$
3. $\vdash_{K^+} t \approx u \to (u \approx v \to t \approx u)$

证 1，由于 (E1)，显然成立

□

定理（$\approx$ 等价性）con't

证明.

...

证 2，不涉及 (UG)，因此只需证 $\{t \approx u\} \vdash_{K^+} u \approx t$.

(1)	$t \approx u \to (t \approx t \to u \approx t)$	(E3)
(2)	$t \approx u$	前提
(3)	$t \approx t \to u \approx t$	MP(1)(2)
(4)	$t \approx t$	(E1)
(5)	$u \approx t$	MP(1)(2)

证 3，利用上述结果

(6)	$t \approx u \to u \approx t$	演绎定理 (2)(5)
(7)	$u \approx t \to (u \approx v \to t \approx v)$	(E3)
(8)	$t \approx u \to (u \approx v \to t \approx v)$	HS(6)(7)

得证。

定理（等项可替换性）

定理 (等项可替换性)

1. $\vdash_{K^+} u \approx v \to t(u) \approx t(v)$，其中项 u 是项 $t(u)$ 的一个子项，项 $t(v)$ 是在 $t(u)$ 中将 u 的某些出现替换为 v 的结果
2. $\vdash_{K^+} u \approx v \to (p(u) \to p(v))$，其中 $p(x)$ 是任意公式，u, v 对 $p(x)$ 中 x 自由

等词公设刻画了“相等”的最重要的性质

正规模型

定义 (正规模型)

设 $\Gamma \subseteq K^{+}(Y)$，$\mathcal{M} = (\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是 Γ 的 K^{+} 模型。若 $\approx^{\mathcal{M}}$ 为 $\mathbb{D}$ 上相等，则称 $\mathcal{M}$ 为 Γ 的正规 K^{+} 模型。

定理：正规模型存在性

定理 (正规模型存在性)

若 Γ 有 K^+ 模型，则 Γ 一定有正规 K^+ 模型。

证明.

(思路) 设 $\mathcal{M} = (\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是 Γ 的一个 K^+ 模型。
考虑 $\mathcal{M}$ 关于 $\approx$ 的商结构 $\mathcal{M}^{\approx} = (\mathbb{D}^{\approx}, \mathbb{F}^{\approx}, \mathbb{P}^{\approx})$，其中 $\mathbb{D}^{\approx}$ 是由 $\mathbb{D}$ 中关于 $\approx^{\mathcal{M}}$ 的等价类为个体形成的集合（论域）

$$\mathbb{D}^{\approx} =_{df} \{[x] \mid x \in \mathbb{D}\}$$

$\mathbb{D}$ 中等价/不等价的元素映射为 $\mathbb{D}^{\approx}$ 中相等/不想等的元素。
$\mathbb{F}$ 中所有函数的定义域和值域也相应地从 $\mathbb{D}$ 改为 $\mathbb{D}^{\approx}$，于是变换为 $\mathbb{D}^{\approx}$ 上的函数。
$\mathbb{P}$ 中所有关系的定义域从 $\mathbb{D}^n$ 变换为 $(\mathbb{D}^{\approx})^n$
由此得到一个一阶结构 $\mathcal{M}^{\approx} = (\mathbb{D}^{\approx}, \mathbb{F}^{\approx}, \mathbb{P}^{\approx})$。

$\square$

定理：正规模型存在性 con't

证明.

...

证明 $\mathcal{M}^{\approx}$ 是 Γ 的一个 K^{+} 模型，从而得到 Γ 的一个正规 K^{+} 模型。

$(u^{\mathcal{M}}) \approx^{\mathcal{M}} (v^{\mathcal{M}})$ 在 $\mathcal{M}$ 中成立 $\Rightarrow u^{\mathcal{M}}$ 与 $v^{\mathcal{M}}$ 等价 $\Rightarrow u^{\mathcal{M}^{\approx}}$ 与 $v^{\mathcal{M}^{\approx}}$ 相等。

验证对所有 $p \in \Gamma$ 和等词公设，有 $\mathcal{M}^{\approx} \models p$。

所以 $\mathcal{M}^{\approx}$ 是一个正规模型。 $\square$

习题 3-2：对任意 $p \in \Gamma$，有 $\mathcal{M} \models p$，证明 $\mathcal{M} \models p \Rightarrow \mathcal{M}^{\approx} \models p$。

定理

定理

设 E^* 为 E 的任何相容扩充（使 $E \subseteq E^*$ 且 E^* 相容），则 E^* 有非正规模型。

习题 3-3：P. 138 练习 1.

1. 设项 t, u 都对公式 $p(x_i)$ 中 x_i 自由，且不含 x_i。求证

$$E \cup \{\exists! x_i\, p(x_i), p(t)\} \vdash p(u) \to u \approx t,$$

这里规定

$$\exists! x_i\, p(x_i) = \exists x_i\, (\, p(x_i) \wedge \forall x_j\, (p(x_j) \to x_i \approx x_j)\,),$$

其中 x_j 不在 $p(x_i)$ 中出现。

Table of Contents