随机过程B

刘 杰

Email: jiel@ustc.edu.cn

几个问题

- 十字路口交通灯设置问题——需要考虑两条路上的车流量。
- 某银行/邮政局营业厅营业窗口数量问题——需要考虑不同时间顾客数量。
- 某奢侈品牌店面选址问题——需要考虑潜在客户的客流量。
- 某金融产品的最优卖出时刻问题——需要考虑金融产品的价格过程。

第一章　　引　论

§1.1 引言

定义1.1 **随机过程**就是一族随机变量

$$\{X(t), t \in T\}$$

其中t是参数,它属于某个指标集T,

T 称为**参数集**.

一般地, t表示时间. 当$T=\{0,1,2,\ldots\}$时称随机过程为**随机序列**.

对$X(t)$可以这样看:

随机变量是定义在空间Ω上的,所以是随 t与$\omega\in\Omega$而变化的.于是可以记为$X(t,\omega)$.

当固定一次随机试验,即取定$\omega_0\in\Omega$时,$X(t,\omega_0)$就是一条样本路径.它是t的函数; 另一方面,固定时间$t = t_0$, $X(t_0,\omega)$就是一个随机变量, 其取值随着随机试验的结果而变化, 变化有一定的规律, 用概率分布来描述.

随机过程在t时刻的值称为过程所处的状态,状态的全体称为状态空间.

依照状态空间不同可分为连续状态和离散状态;依照参数集T,当T为有限集或可数集则称为离散参数过程,否则称为连续参数过程.当T是高维向量时称$X(t)$为随机场.

例1.1 英国植物学家Brown注意到漂浮在液面上的微小粒子不断进行不规则的运动,这种运动叫做**Brown运动**.它是一个随机过程.

Brown运动是分子大量随机碰撞的结果. 若记(x_t,y_t)为粒子在平面坐标上的位置,则它是平面上的Brown运动.

例1.2 若某人在一个直线格子点上, 从原点出发进行行走, 规则如下: 掷一枚硬币, 若正面向上则前进一个格子; 若反面向上则后退一个格子. 以$X(t)$表示他在t时刻所在的位置, 则$X(t)$就是一种直线上的**随机游动**.

例1.3 到达总机交换台的呼叫次数为Poisson过程.每次呼叫是相互独立的,而间隔时间服从指数分布.交换台在同一时间只能接通K个呼叫.人们常要了解在某一时刻的排队长度以及呼叫的平均等待时间.这是一种**排队模型**.

该模型可以应用于对超市、公交车站的管理或服务研究。

例1.4 流行病学的研究中有如下模型：在时刻0时易感人群大小为$X(0)$，$Y(0)$是已受传染的人数.假定易感人群被传染的概率为p，则经过一段传染周期后(记为单位时间)$X(0)$中有$X(1)$没有染上病而$Y(1)$却受到传染.传染过程一直蔓延到再没有人会染上这种流行病时停止.于是

$$X(t+1)=X(t)-Y(t+1)$$

且当时 $j\le i$ 有

$$P\{Y(t+1)=j\,|\,X(t)=i\}=C_i^{i-j}p^{i-j}(1-p)^j$$

{X(t), t=1,2,…}就是以上式为状态转移概率的**Markov过程**.

例1.5 记$X(t)$为时刻t的商品价格.若$X(t)$适合线性模型

$$X(t)+\alpha_1 X(t-1)+\alpha_2 X(t-2)+\cdots+\alpha_p X(t-p)$$
$$=Z(t)+\beta_1 Z(t-1)+\cdots+\beta_q Z(t-q)$$

其中 α_k, β_k 为实参数, $Z(t)$为独立同分布的不可观测的随机变量,则$X(t)$服从ARMA模型——**自回归滑动平均模型**. 这是在经济预测中十分有用的时间序列模型.

- **有限维分布和数字特征**

对于随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，

过程的**一维分布**为

$$F_t(x) = P\{X(t) \le x\}$$

过程的一维**均值函数**为

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

过程的**方差函数**为

$$\sigma_X^2(t) = \mathrm{Var}[X(t)]$$

对于随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 其中随机变量$X(t_1)$与$X(t_2)$的关系有$X(t_1)$与$X(t_2)$的联合分布为

$$F_{t_1,t_2}(x_1, x_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

即过程在t_1, t_2两个不同时刻值的**联合二维分布**.

过程的**自相关函数**为

$$r_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

过程的**协方差函数**为

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) &\equiv Cov(X(t_1), X(t_2)) \\ &= E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))] \end{aligned}$$

自相关函数和协方差函数性质:

1. **对称性**, 即对任何s, t有

$$r_X(s,t) = r_X(t,s)$$

$$R_X(s,t) = R_X(t,s)$$

2. **非负定性**, 即对任何$t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$及任意系数 $b_1, b_2, \ldots, b_n$有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j r_X(t_i, t_j) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j R_X(t_i, t_j) \geq 0$$

对于随机过程$\{X(t), t\in T\}$, 其有限维分布族为

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$= P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2,\cdots, X(t_n)\le x_n\}$$

有限维分布的性质:

1. 对称性

$$F_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}}(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n}) = F_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

2. 相容性

$$F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty) = F_{t_1,t_2,\cdots,t_m}(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$

例1.6 记X_n为第n次独立地扔一枚骰子的结果,则$\{X_n, n\geq 1\}$为一随机过程.参数集T为{1,2,…},而状态空间为{1,2,3,4,5,6}.

均值函数为: $E[X_n]=E[X_1]=3.5$

协方差函数为: $R_X(m,n)=\begin{cases}\dfrac{35}{12}, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$

任何有限维分布:

$$F_{n_1,n_2,\cdots,n_k}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_k)$$

其中$F(x)$为X_1的分布函数.

- **平稳过程和独立增量过程**

如果一个随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 与另一个随机向量 $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 有相同的联合分布函数,则称这两个随机向量是**同分布**的,记为 $X\overset{d}{=}Y$.

定义1.2 如果随机过程$X(t)$对任意的$t_1,\ldots,t_n\in T$和任何h 有

$$(X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h))\overset{d}{=}(X(t_1),\cdots,X(t_n))$$

则称$X(t)$为**严格平稳的**.

定义1.3 如果随机过程$X(t)$的所有二阶矩存在,并且 $E[X(t)]=m$及协方差函数$R_X(t,s)$只与时间差$t-s$有关,则称$X(t)$为**宽平稳的**或**二阶矩平稳的**.

对于宽平稳过程,由于对$-\infty<s, t<+\infty$,

$$R_X(t,s)=R_X(0,t-s)$$

所以可以记之为$R_X(t-s)$.

显然对所有t, $R_X(t)=R_X(-t)$, 即为偶函数.

定义1.4 对任意的$t_1<t_2<\ldots<t_n$且$t_1,\ldots,t_n\in T$,如果随机变量$X(t_2)$-$X(t_1)$, $X(t_3)$-$X(t_2)$, …, $X(t_n)$-$X(t_{n-1})$, 是相互独立的,则称$X(t)$为**独立增量过程**.

如果进一步有对任意的t_1, t_2,

$$X(t_1+h)-X(t_1)\overset{d}{=}X(t_2+h)-X(t_2)$$

则称$X(t)$为**平稳独立增量过程**.

例1.7 设Z_i, i=0,1,2,…, 是一串独立同分布的随机变量, 定义

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} Z_i$$

则$\{X_n,\ n\geq 0\}$就是独立增量过程.一般称X_n为**独立和**.

练习: 证明平稳独立增量过程的均值函数一定是t的线性函数.

证明提示: 首先不妨设$E[X(0)]=0$，则

1. $E[X(n)] = nE[X(1)]$

2. $E[X(\frac{1}{m})] = \frac{1}{m}E[X(1)]$

3. $E[X(\frac{n}{m})] = \frac{n}{m}E[X(1)]$

4. $E[X(t)] = tE[X(1)]$

§1.2 条件期望和矩母函数

对于离散型随机变量X和Y.一般,对所有使$P\{Y=y\}>0$的y,定义给定$Y=y$时X取x的条件概率为

$$P\{X=x \mid Y=y\}=\frac{P\{X=x, Y=y\}}{P\{Y=y\}}$$

而给定$Y=y$, X的条件分布函数为

$$F(x \mid y)=P\{X \leq x \mid Y=y\}$$

给定$Y=y$, X的条件期望为

$$E(x \mid Y=y)=\sum_{x} x P\{X=x \mid Y=y\}$$

对于一般的连续型随机变量Y.由于$P\{Y=y\}$往往为0,则给定$Y=y$时X的条件概率定义为:

①若对任何包含y的小区间Δy总有$\mathrm{P}(Y\in\Delta y)=0$,则定义为

$$P(X\in A|Y=y)=0;$$

②若$P(Y\in\Delta y)>0$,则定义为

$$P\{X \in A \mid Y = y\} = \lim_{\Delta y\downarrow 0} P\{X \in A \mid Y \in \Delta y\}$$

这里$\Delta y\downarrow 0$的意思是使包含y的小区间的长度缩小为0.除了个别例外的y值这一极限总是存在的.

而给定$Y=y$, X的条件分布函数为

$$F(x \mid y) = P(X \le x \mid Y = y)$$

$$\overset{d}{=} \lim_{\Delta y \downarrow 0} P\{X \le x \mid Y \in \Delta y\}$$

如果存在一非负函数$f(x|y)$使得对任何集合A恒有

$$P(X \in A \mid Y = y) = \int_A f(x \mid y)dx \quad 且 \quad \int f(x \mid y)dx = 1$$

则$f(x|y)$称为在给定$Y=y$时X的条件密度.

显然有

$$F(x \mid y) = \int_{-\infty}^{x} f(s \mid y)ds$$

$$E(X \mid Y = y) = \int x\, f(x \mid y)dx$$

条件期望通常统一记为

$$E(X \mid Y=y)=\int x\,dF(x \mid y)$$

注: E(X|Y=y) 表示一个数值;

E(X|Y) 表示随机变量.

例1.8 袋子中有3个相同的球,分别标号为1, 2, 3. 现从中随机地取出一个球，记下标号(假设标号为k)后放回，同时从袋子中去掉标号为1,…, k-1的球. 然后再随机地取一球记下标号. 分别用X和Y表示两次取球记下的标号,则

Y \ X	1	2	3	$p_{\cdot j}$
1	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{18}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{18}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$$E(Y \mid X = 1) = 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{1}{3} = 2$$

$$E(Y \mid X = 2) = 2\times\frac{1}{2} + 3\times\frac{1}{2} = 2.5$$

$$E(Y \mid X = 3) = 3\times 1 = 3$$

$$P(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 2 \mid X = 1) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 3 \mid X = 1) = \frac{1}{3}$$

E(Y|X)	2	2.5	3
Pr	1/3	1/3	1/3

例1.9 扔一硬币出现正面的概率为p,独立地做投币试验．记S为n次试验中出现正面的次数,并设首次出现正面是在第T次试验.求给定n次试验中仅出现了一次正面时变量T的条件概率分布,也即$P(T=k|S=1)$.

解:

$$P(S=1,T=k)=p(1-p)^{n-1}$$

$$P(S=1)=C_n^1 p(1-p)^{n-1}$$

所以 $$P(T=k\mid S=1)=\frac{P\{S=1,T=k\}}{P(S=1)}=\frac{1}{n}$$

命题1.1 ① 若X与Y独立,则 $E(X|Y=y)=E(X)$;

② 条件期望的平滑性

$$E[E(X\mid Y)]=\int E(X\mid Y=y)dF_Y(y)=E(X)$$

③ 对随机变量X, Y的函数$\phi(X,Y)$, 有

$$E[\phi(X,Y)\mid Y=y]=E[\phi(X,y)\mid Y=y]$$

证明: ③假设(X,Y)为离散型随机变量,则

$$\begin{aligned}E[\phi(X,Y)\mid Y=y]&=\sum_i\sum_j\phi(x_i,y_j)P(X=x_i,Y=y_j\mid Y=y)\\&=\sum_i\phi(x_i,y)P(X=x_i,Y=y\mid Y=y)\\&=\sum_i\phi(x_i,y)P(X=x_i\mid Y=y)\\&=E[\phi(X,y)\mid Y=y]\end{aligned}$$

- 矩母函数及生成函数

定义1.5 随机变量X的矩母函数定义为随机变量$\exp\{tX\}$的期望,记作$g(t)$, 即:

$$g(t) = E[e^{tX}]$$

- **矩母函数的性质:**

① 当矩母函数存在时它唯一地确定了X的分布;

② $E[X^n] = g^{(n)}(0)$, $\quad n \geq 1$;

③ 对于相互独立的随机变量X与Y, 则

$$g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t).$$

注： 由于随机变量的矩母函数不一定存在，因此现在常用特征函数$E[e^{itX}]$代替矩母函数.

关于特征函数内容以及性质1，可以参阅安徽师范大学数学系主编的教材:

[1] 丁万鼎等, 概率论与数理统计, 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

- **常见分布的矩母函数:**

分布名称	概率分布或密度	矩母函数
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$	$(pe^t+q)^n$
Poisson分布 $\Pi(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\omega^2}}$	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
指数分布 $P(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$(1-\dfrac{t}{\lambda})^{-1}$
均匀分布 $U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$

例1.10 (随机和的矩母函数) 记$X_1, X_2, \ldots$为一串独立同分布的随机变量, N为取值为非负整数的随机变量, 且N与X序列相互独立.

$$Y=\sum_{k=1}^{N} X_k$$

求Y的矩母函数.

解: 先算条件期望

$$E[e^{tY} \mid N=n]=E[\exp\left\{t\sum_{k=1}^{N} X_k\right\}\Big| N=n]$$

$$=E[\exp\left\{t\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}\Big| N=n]$$

$$=E[\exp\left\{t\sum_{k=1}^{n} X_k\right\}]=[g_X(t)]^n$$

于是有

$$g_Y(t) = E[e^{tY}] = E\{E[e^{tY} \mid N]\} = E[(g_X(t))^N]$$

进一步,

$$g_Y^{'}(t) = E[N(g_X(t))^{N-1} g_X^{'}(t)]$$

$$g_Y^{''}(t) = E[N(N-1)(g_X(t))^{N-2}(g_X^{'}(t))^2 + N(g_X(t))^{N-1} g_X^{''}(t)]$$

因此,

$$EY = g_Y^{'}(0) = E[Ng_X^{'}(0)] = E[NE(X)] = EN \cdot EX$$

$$EY^2 = g_Y^{''}(0) = EN \cdot Var(X) + EN^2 \cdot E^2 X$$

注意: g(0)=1

定义1.5 若X为离散随机变量, 则期望$E(s^X)$为其概率生成函数, 记作$\phi_X(s)$, 即:

$$\phi_X(s) = E[s^X]$$

- **生成函数的性质:**

① 生成函数与离散随机变量是一一对应的;

② $E[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = \dfrac{d^r}{ds^r}\phi_X(s)\Big|_{s=1}$

③ 对于相互独立的随机变量X与Y, 则

$$\phi_{X+Y}(s) = \phi_X(s)\phi_Y(s).$$

性质: 若离散随机变量分布为

$$P(X=k)=p_k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

则

$$p_k=\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k}{ds^k}\phi_X(s)\Big|_{s=0},\qquad k=0,1,2,\cdots$$

证明: 事实上,

$$\phi_X(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}p_k s^k.$$

§ 1.3 收敛性

定义1.7 设$\{X_n, n\geq 1\}$是一列随机变量,若存在随机变量X,使对$\forall\varepsilon>0$,有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

则称随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$**依概率收敛**于X,记为 $X_n \xrightarrow{p} X$

如果 $\{\omega: \lim_{n\to\infty}(X_n(\omega) - X(\omega)) = 0\}$ 的概率为1, 即:

$$P(\lim_{n\to\infty}(X_n - X) = 0) = 1$$

则称随机变量序列$\{X_n, n\geq 1\}$**几乎必然收敛**于X,记为 $X_n \to X,\ a.s.$

定义1.8 设随机变量X和X_n, $n \geq 1$, 都有有限的二阶矩,如果

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

则称随机变量序列$\{X_n, n \geq 1\}$**均方收敛**于X, 记为 $X_n \xrightarrow{L_2} X$

- **三种收敛的关系:**

① 几乎必然收敛 $\Longrightarrow$ 依概率收敛

② 均方收敛 $\Longrightarrow$ 依概率收敛

③ 几乎必然收敛 $\not\longleftrightarrow$ 均方收敛

例1.11 在Bernoulli试验中, 设每次试验成功的概率为p, 若以S_n表示n次试验中成功的次数, 则

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$$

证: 由于$S_n \sim B(n,p)$, 由Chebyshev不等式,$\forall \varepsilon>0$有

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right| \geq \varepsilon\right)=P(|S_n-np| \geq n\varepsilon) \leq \frac{E(S_n-np)^2}{n^2\varepsilon^2}$$

$$=\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{证毕.}$$

进一步,

$$E\left(\frac{S_n}{n}-p\right)^2=\frac{p(1-p)}{n}, \qquad \text{故 } X_n \xrightarrow{L_2} X.$$

Thanks!

课外作业:

Page 12,	Ex 3
Page 13,	Ex 17

注：作业页码均按照“方兆本, 缪柏其, 随机过程(第二版), 北京: 科学出版社, 2008.”