1.1 引言

定义 1.1. 随机过程就是一族随机变量 $\{X(t), t\in T\}$ 其中 t 是参数

1.1.1 有限维分布的数字特征

- 过程的一维分布: $F_t(x) = P\{X(t)\le x\}$
- 过程的一维均值函数: $\mu_X(t) = E[X(t)]$
- 过程的方差函数为: $\sigma_X^2(t) = Var[X(t)]$
- 过程在 t_1, t_2 两个不同时刻的联合二维分布: $F_{t_1,t_2}(x_1,x_2) = P\{X(t_1)\le x_1, X(t_2)\le x_2\}$
- 过程的自相关函数: $r_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$
- 过程的协方差函数: $R_X(t_1,t_2) = Cov[X(t_1), X(t_2)] = E[(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))]$

对于随机过程 $\{X(t), t\in T\}$ 其有限维分布族为 $F_{t_1,t_2\ldots t_n}(x_1,x_2\ldots x_n) = P\{X(t_1)\le x_1 \ldots X(t_n)\le x_n\}$

1.1.2 平稳过程和独立增量过程

如果一个随机向量 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 与另一个随机向量 $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$ 有相同的联合分布函数,则称这两个随机向量是同分布的,记为 $X\overset{d}{=}Y$.

定义 1.2. 如果随机过程 $X(t)$ 对任意的 $t_1\ldots t_n\in T$ 和任何 h 有 $(X(t_1+h),\ldots,X(t_n+h)) \overset{d}{=} (X(t_1)\ldots X(t_n))$

则称 $X(t)$ 为严格平稳的

定义 1.3. 如果随机过程 $X(t)$ 的所有二阶矩存在, 并且 $E[X(t)]=m$ 及协方差函数 $R_X(t,s)$ 只与时间差 $t-s$ 有关. 则称 $X(t)$ 为宽平稳的

定义 1.4. 对任意 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ 且 $t_1\ldots t_n\in T$. 如果随机变量 $X(t_2)-X(t_1) \ldots X(t_n)-X(t_{n-1})$ 是相互独立的. 则称 $X(t)$ 为独立增量过程

若对任意 t_1, t_2 $X(t_1+h)-X(t_1) \overset{d}{=} X(t_2+h)-X(t_2)$ 则称 $X(t)$ 为平稳独立增量过程

1.2. 条件期望和矩母函数

1.2.1 条件期望

定义给定 $Y=y$ 时 X 取 x 的条件概率为 $P\{X=x\mid Y=y\} = \dfrac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$

给定 $Y=y$. X 的条件分布函数为 $F(x\mid y) = P\{X\le x\mid Y=y\}$

给定 $Y=y$. X 的条件期望为 $E(X\mid Y=y) = \sum_x x P\{X=x\mid Y=y\}$

对于连续型随机变量 Y. 给定 $Y=y$. X 的条件分布函数为 $F(x\mid y) = \lim_{\Delta y\to 0} P\{X\le x\mid Y\in\Delta y\}$

- $F(x\mid y) = \int_{-\infty}^{x} f(s\mid y)\,ds$
- $E(X\mid Y=y) = \int x f(x\mid y)\,dx$ $E(X\mid Y=y)$ 是一个值. $E(X\mid Y)$ 是一个随机变量.

命题 1.1 ① 若 X 与 Y 相互独立. 则 $E(X\mid Y=y) = E(X)$

② 条件期望的平滑性 $E[E(X\mid Y)] = E(X)$

③ 对随机变量 $X.Y$ 的函数 $\phi(X,Y)$ $E[\phi(X,Y)\mid Y=y] = E[\phi(X,y)\mid Y=y]$

1.2.2 矩母函数. 生成函数

定义 1.5 随机变量 X 的矩母函数 $g(t) = E[e^{tX}]$

性质: ① 当矩母函数存在时它唯一地确定了 X 的分布

② $E[X^n] = g^{(n)}(0)$

③ 对于相互独立的随机变量 $X.Y$. $g_{X+Y}(t) = g_X(t)\, g_Y(t)$

分布名称	概率分布或密度	矩母函数
二项分布 $B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$	$(pe^t+q)^n$
Poisson分布 $\Pi(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$	$e^{\lambda(e^t-1)}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$
指数分布 $P(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$	$(1-\dfrac{t}{\lambda})^{-1}$
均匀分布 $U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$

定义1.6 若X为离散随机变量，则期望$E(S^X)$为其概率生成函数 记作$\phi_X(s)=E[S^X]$

性质：① $E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]=\frac{d^r}{ds^r}\phi_X(s)|_{s=1}$

② 对于相互独立的随机变量X,Y. $\phi_{X+Y}(s)=\phi_X(s)\phi_Y(s)$

③ $P(X=k)=p_k$ 则 $p_k=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\phi_X(s)|_{s=0}$ $k=0,1,2\ldots$

$\phi_X(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$

1.3. 收敛性.

定义1.7. 设$\{X_n,n\geq1\}$为一系列随机变量，若存在随机变量X，使对$\forall\varepsilon>0$，有$\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|\geq\varepsilon)=0$

则称$\{X_n,n\geq1\}$依概率收敛于X 记为$X_n\xrightarrow{P}X$

如果$\{\omega:\lim_{n\to\infty}(X_n(\omega)-X(\omega))=0\}$的概率为1 则称$\{X_n,n\geq1\}$几乎必然收敛于X 记为$X_n\to X$, a.s.

定义1.8 设X和X_n, $n\geq1$, 都有有限二阶矩，如果$\lim_{n\to\infty}E(X_n-X)^2=0$ 则称$\{X_n,n\geq1\}$均方收敛于X

- **三种收敛的关系:**

① 几乎必然收敛 ⟹ 依概率收敛

② 均方收敛 ⟹ 依概率收敛

③ 几乎必然收敛 $\not\leftrightarrow$ 均方收敛