

2021计算方法B作业 #12

1. 试推导如下Runge-Kutta公式的局部截断误差及其误差主项，判断该公式/格式的(精度)阶数。提示：利用二元函数的Taylor展开。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(3k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + 2h, y_n + 2hk_1) \end{cases}$$

2. 讨论梯形格式 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ 的绝对稳定性($h > 0$)。
3. 用幂法估算下面矩阵的按模最大的特征值和相应的特征向量(取初始向量 $(1, 1)^T$ ，迭代6次即可)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. 分别写出规范运算的幂迭代和反幂迭代的迭代公式；若分别用这两种公式去求一个以 $2, -3, 3, -4, 4, -5, 5, -6, 6$ 为特征值的9阶实矩阵 A 的特征值，所能计算的特征值分别是多少？可取初始向量 $X^{(0)} = (2, 2, \dots, 2)^T$ 。

5. 考虑用Jacobi方法计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ 的全部特征值。

求对 A 作第一次Givens相似变换时的Givens变换矩阵(要求相应的计算效率最高)。