## 一. 实根对分法

原理：利用连续函数的介值定理　$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow \exists \bar{x}\in(a,b).\ s.t.\ f(\bar{x})=0$

**输入**：单变元函数$f(x)$和区间$[a,b]$（满足$f(a)f(b)<0$），精度$\varepsilon$.

**输出**：$f$在[a,b]上的一个近似根$x^*$(若存在).

While　$|a-b|>\varepsilon$

　$x^* := (a+b)/2$；

　计算$f(x^*)$；

　若 $|f(x^*)|<\varepsilon$，$x^*$为解，结束；

　若$f(x^*)\cdot f(b)<0$，　$[a,b]:=[x^*,b]$；

　若$f(a)\cdot f(x^*)<0$，　$[a,b]:=[a,x^*]$；

End while

- **优点**：算法简单，只要求$f$连续.
- **缺点**：使用条件限制较大，收敛速度较慢，且只能求一个根，精度有限.

## 二. 迭代法

步骤：1. 构造原方程的等价形式　$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\phi(x)$

2. 取合适的初值 $x_0$. 构造迭代序列　$x_{k+1}=\phi(x_k)$

3. 若极限 $x^*=\lim\limits_{k\to+\infty}x_k$ 存在. 则 $x^*$ 为方程的解.

若极限 $x^*=\lim\limits_{k\to+\infty}x_k$ 不存在. 则迭代失败. 此时. 可考虑换其它的初值$x_0$.或采用其它迭代格式

压缩映射定理：$\phi(x)\in C^1[a,b]$ 满足

1. $a\le\phi(x)\le b$　$x\in[a,b]$

2. $\exists\ 0<L<1$, s.t 对 $\forall x\in[a,b]$ 有 $|\phi'(x)|\le L$

则有 1. 存在唯一的 $x^*$ 使 $x^*=\phi(x^*)$

2. $\forall x_0\in[a,b]$. 迭代 $\{x_k\}$ 收敛. 且有误差估计 $|x^*-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$

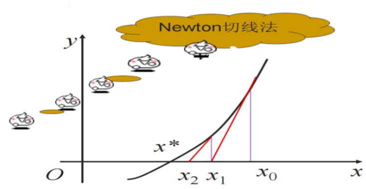
## 三. Newton 迭代

对任意的非线性方程 $f(x)=0$. 其 Newton 迭代格式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

假设我们知道$f(x)$在某个点 $x_0$（可取为初值）附近有一个根 $r$， 将$f(x)$在 $x_0$处作Taylor展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

取其线性部分 $L_0(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ **来近似原函数 $f(x)$**, 同时用$L_0(x)$的根 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 来近似 $f(x)$的根 $r$ . 再将$f(x)$在$x_1$处Taylor展开，取其线性部分 $L_1(x)=f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$ 来近似 $f(x)$，用$L_1(x)$的根 $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 近似$f(x)$的根......




KEY idea: **将非线性方程 反复线性化, 再用线性方程的解来逼近非线性方程的解.**

注：当$x_k$越来越靠近真解（根）时，线性函数$L_k(x)$近似$f$的效果会越好，得出的近似解也越精确.

收敛阶：

定义：$\{x_k\}\to x^*$　$\varepsilon_k=|x^*-x_k|$ 若 $\exists p\ge1$ 和正常数 $c$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p}=c$ 则称 $\{x_k\}$ 为 p 阶收敛的

设迭代格式为$\phi(x)$，$x^*$为$\phi$的不动点($i.e., x^*=\phi(x^*)$).

- 当$\phi'(x^*)\neq 0$时

$$\varepsilon_{k+1}=|x^*-x_{k+1}|=|\phi(x^*)-\phi(x_k)|=|\phi'(\xi_k)(x^*-x_k)|=|\phi'(\xi_k)|\varepsilon_k$$

令$k\to\infty$得 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k}=|\phi'(x^*)|\neq 0 \Longrightarrow$ 一阶收敛.

- 当$\phi'(x^*)=0$且$\phi''(x^*)\neq 0$时，

$$\varepsilon_{k+1}=|x^*-x_{k+1}|=|\phi(x^*)-\phi(x_k)|=\left|\frac{\phi''(\xi_k)}{2}(x^*-x_k)^2\right|$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2}=\left|\frac{\phi''(x^*)}{2}\right|\neq 0 \Longrightarrow$ 二阶收敛.

Newton 迭代格式　$x_{k+1}=\phi(x_k)=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

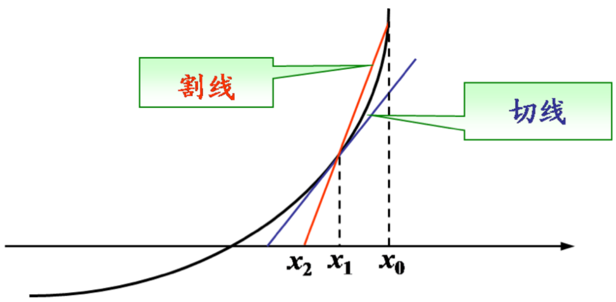
若 $\alpha$ 为 $f(x)=0$ 的单根. 则 Newton 迭代二阶收敛；若 $\alpha$ 为重根. 则 Newton 迭代一阶收敛

四、弦截法.

将 Newton 迭代中的导数用差商 $f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 代替. 得到迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

需两个初始点启动




**Example (4)**

用弦截法求方程 $x^3 - 7.7x^2 + 19.2x - 15.3 = 0$ 根,
取 $x_0 = 1.5, x_1 = 4.0$.

令 $f(x) = x^3 - 7.7x^2 + 19.2x - 15.3$, 代入弦截法迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

| $k$ | $x_k$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 1.5 | −0.45 |
| 1 | 4 | 2.3 |
| 2 | 1.90909 | 0.248835 |
| 3 | 1.65543 | −0.0805692 |
| 4 | 1.71748 | 0.0287456 |
| 5 | 1.70116 | 0.00195902 |
| 6 | 1.69997 | −0.0000539246 |
| 7 | 1.7 | $9.459 \times 10^{-8}$ |

五. 非线性方程组的 Newton 迭代法

设有二元方程组($x, y$为自变量) $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

写成向量形式: $F(w) = 0$, 其中

$$F(w) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}, \quad w = (x,y)^T$$

对 $f, g$ 在 $(x_0, y_0)$作二元Taylor 展开，取其线性部分，得

$$\begin{cases} f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) \approx g(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

令 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$， 则

$$J(x_0,y_0)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

这里，Jacobi(雅克比)矩阵

$$J(x_0,y_0) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial g}{\partial y}\big|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}.$$

若$det(J(x_0,y_0)) \neq 0$, 可解出 $\Delta x, \Delta y$. 令

$$w_1 \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \end{pmatrix}.$$

同理，再对 $f, g$ 在 $(x_1, y_1)$作二元Taylor 展开，并取其线性部分。 若$det(J(x_1,y_1)) \neq 0$, 可解出 $\Delta x = x - x_1, \Delta y = y - y_1$, 进而得到

$$w_2 \doteq \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x \\ y_1 + \Delta y \end{pmatrix}.$$

继续做下去...
每次迭代先解一个关于 $\Delta x \doteq x - x_k, \Delta y \doteq y - x_k$ 的二元方程组

$$J(x_k,y_k)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k,y_k) \\ -g(x_k,y_k) \end{pmatrix}.$$

进而得到新的迭代点

$$w_{k+1} \doteq \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k + \Delta x \\ y_k + \Delta y \end{pmatrix}.$$

**Example (3.6)**

求非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x,y) \doteq 4 - x^2 - y^2 = 0 \\ f_2(x,y) \doteq 1 - e^x - y = 0 \end{cases}, \quad 取初始值 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.7 \end{pmatrix}.$$

**解** $J(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-2x & -2y\\ -\mathrm{e}^x & -1\end{pmatrix}$

$$J\left(x_0,y_0\right)=\begin{pmatrix}-2 & 3.4\\ -2.71828 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}f_1(x_0,y_0)\\ f_2(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.11\\ -0.01828\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2\Delta x+3.4\Delta y=-0.11\\ -2.71828\Delta x-\Delta y=0.01828\end{cases}$$

解方程得

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.004256\\ -0.029849\end{pmatrix}$$

所以

$$w_1=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1.7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.004256\\ -0.029849\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.004256\\ -1.729849\end{pmatrix}$$

继续做下去, 直到 $\max(|\Delta x|,|\Delta y|)<10^{-5}$ 时停止.