第三章 非线性方程求解

中国科学技术大学　数学学院

chenxjin@ustc.edu.cn

非线性方程求解

非线性科学是当今科学发展的一个很重要的研究方向，而非线性方程求根(求解)也成了其不可或缺的重要内容. 与线性方程相比，非线性方程求解问题无论是从理论上还是计算上都要复杂得多.

非线性方程求解

非线性科学是当今科学发展的一个很重要的研究方向，而非线性方程求根(求解)也成了其不可或缺的重要内容. 与线性方程相比，非线性方程求解问题无论是从理论上还是计算上都要复杂得多.

例如：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$ 有无穷多组解；

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases}$$

非线性方程求解

非线性科学是当今科学发展的一个很重要的研究方向，而非线性方程求根(求解)也成了其不可或缺的重要内容. 与线性方程相比，非线性方程求解问题无论是从理论上还是计算上都要复杂得多.

例如：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{有无穷多组解；}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$

$$e^x - 1 = cos(\pi x) \quad \Rightarrow \text{精确解？}$$

非线性方程求解

非线性科学是当今科学发展的一个很重要的研究方向，而非线性方程求根(求解)也成了其不可或缺的重要内容. 与线性方程相比，非线性方程求解问题无论是从理论上还是计算上都要复杂得多.

例如：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$ 有无穷多组解；

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$

$e^x - 1 = cos(\pi x)$ $\Rightarrow$ 精确解？超越方程一般无精确解表达式!

非线性方程求解

非线性科学是当今科学发展的一个很重要的研究方向，而非线性方程求根(求解)也成了其不可或缺的重要内容. 与线性方程相比，非线性方程求解问题无论是从理论上还是计算上都要复杂得多.

例如：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{有无穷多组解；}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$

$e^x - 1 = cos(\pi x)$ $\Rightarrow$ 精确解？超越方程一般无精确解表达式!

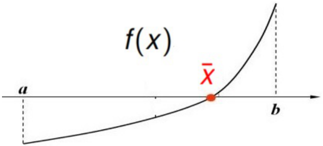
- 通常用迭代法求解非线性方程（组）

实根的对分法

实根的对分法

原理：利用连续函数的介值定理

实根的对分法



原理：利用连续函数的介值定理

$$\boxed{f(a)\cdot f(b)<0 \Longrightarrow \exists \bar{x}\in(a,b), s.t., f(\bar{x})=0}$$

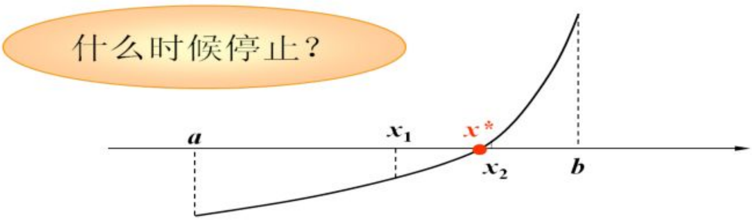
每次将根的搜索范围缩小一半.

实根的对分法

原理：利用连续函数的介值定理

$$\left[f(a)\cdot f(b)<0 \Longrightarrow \exists \bar{x}\in(a,b), s.t., f(\bar{x})=0 \right]$$

每次将根的搜索范围缩小一半.



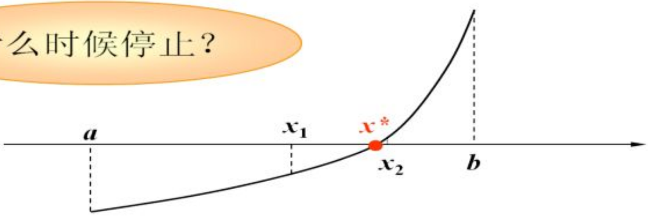
实根的对分法

原理：利用连续函数的介值定理

$$\left[f(a)\cdot f(b) < 0 \Longrightarrow \exists \bar{x} \in (a,b), s.t., f(\bar{x}) = 0 \right]$$

每次将根的搜索范围缩小一半.

什么么时候停止？



$$|x_{k+1} - x_k| < \epsilon_1 \quad \text{or} \quad |f(x_{k+1})| < \epsilon_2$$

对分法的算法描述

输入：单变元函数$f(x)$和区间$[a, b]$（满足$f(a)f(b) < 0$)，精度ε.

输出：f在[a,b]上的一个近似根x^*(若存在).

While $|a - b| > \varepsilon$

$x^* := (a + b)/2$；

计算$f(x^*)$；

若 $|f(x^*)| < \varepsilon$，x^*为解，结束；

若$f(x^*) \cdot f(b) < 0$， $[a, b] := [x^*, b]$；

若$f(a) \cdot f(x^*) < 0$， $[a, b] := [a, x^*]$；

End while

对分法的算法描述

输入：单变元函数$f(x)$和区间$[a,b]$（满足$f(a)f(b)<0$），精度ε.

输出：f在[a,b]上的一个近似根x^*(若存在).

While $|a-b|>\varepsilon$

$x^* := (a+b)/2$；

计算$f(x^*)$；

若 $|f(x^*)|<\varepsilon$，x^*为解，结束；

若$f(x^*)\cdot f(b)<0$， $[a,b]:=[x^*,b]$；

若$f(a)\cdot f(x^*)<0$， $[a,b]:=[a,x^*]$；

End while

- 优点：算法简单，只要求f连续.
- 缺点：使用条件限制较大，收敛速度较慢，且只能求一个根，精度有限.

迭代法

迭代法

基本步骤（三步）：

迭代法

基本步骤（三步）：

1. 构造出原方程的等价形式 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$ (不动点).

迭代法

基本步骤（三步）：

1. 构造出原方程的等价形式 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$ (不动点).
2. 取合适的初值 x_0，构造迭代序列 $x_{k+1} = \phi(x_k)$.

迭代法

基本步骤（三步）：

1. 构造出原方程的等价形式 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \phi(x)$ (不动点).
2. 取合适的初值 x_0，构造迭代序列 $x_{k+1} = \phi(x_k)$.
3. 若极限$x^* = \lim_{k \to +\infty} x_k$存在，则$x^*$为方程的解（若$\phi$连续，则$x^*$必为$\phi$ 的不动点，为什么？）.

迭代法

基本步骤（三步）：

1. 构造出原方程的等价形式 $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\phi(x)$ (不动点).
2. 取合适的初值 x_0，构造迭代序列 $x_{k+1}=\phi(x_k)$.
3. 若极限$x^*=\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$存在，则$x^*$为方程的解（若$\phi$连续，则$x^*$必为$\phi$ 的不动点，为什么？）.

若极限$x^*=\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ 不存在，则迭代失败；此时， 可考虑换其它的初值 x_0或采用其它的迭代格式（即构造新的等价形式或新的 ϕ 函数）.

例

代数方程 $x^3-2x-5=0$的三种等价方程和迭代格式：

1) $x=\sqrt[3]{2x+5}=\phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k+5}=\phi(x_k)$

2) $x=\frac{x^3-5}{2}=\phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1}=\frac{x_k^3-5}{2}=\phi(x_k)$

3) $x=\frac{2x+5}{x^2}=\phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1}=\frac{2x_k+5}{x_k^2}=\phi(x_k)$

例

代数方程 $x^3 - 2x - 5 = 0$的三种等价方程和迭代格式：

1) $x = \sqrt[3]{2x+5} = \phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt[3]{2x_k + 5}$ $=\phi(x_k)$

2) $x = \frac{x^3-5}{2} = \phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1} = \frac{x_k^3-5}{2}$ $=\phi(x_k)$

3) $x = \frac{2x+5}{x^2} = \phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1} = \frac{2x_k+5}{x_k^2}$ $=\phi(x_k)$

两个重要问题：

例

代数方程 $x^3 - 2x - 5 = 0$的三种等价方程和迭代格式：

1) $x = \sqrt[3]{2x+5} = \phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1} = \sqrt[3]{2x_k+5}$ $=\phi(x_k)$

2) $x = \frac{x^3-5}{2} = \phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1} = \frac{x_k^3-5}{2}$ $=\phi(x_k)$

3) $x = \frac{2x+5}{x^2} = \phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1} = \frac{2x_k+5}{x_k^2}$ $=\phi(x_k)$

两个重要问题：

1. 对于非线性方程$f(x) = 0$，该构造何种迭代格式 $x_{k+1} = \phi(x_k)$，使得迭代序列收敛？

例

代数方程 $x^3-2x-5=0$的三种等价方程和迭代格式：

1) $x=\sqrt[3]{2x+5}=\phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt[3]{2x_k+5}=\phi(x_k)$

2) $x=\frac{x^3-5}{2}=\phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1}=\frac{x_k^3-5}{2}=\phi(x_k)$

3) $x=\frac{2x+5}{x^2}=\phi(x)$， 迭代格式 $x_{k+1}=\frac{2x_k+5}{x_k^2}=\phi(x_k)$

两个重要问题：

1. 对于非线性方程$f(x)=0$，该构造何种迭代格式 $x_{k+1}=\phi(x_k)$，使得迭代序列收敛？
2. 迭代序列的收敛是否与初值x_0有关？

压缩映射定理

压缩映射定理

定理：$\phi(x) \in C^1[a,b]$ 满足：

1. $a \leqslant \phi(x) \leqslant b, x \in [a,b]$;
2. $\exists\, 0 < L < 1, s.t$ 对 $\forall x \in [a,b]$ 有 $|\phi'(x)| \leqslant L$ （ϕ称为压缩映射）.

则有：

1. 存在唯一的 x^* 使得 $x^* = \phi(x^*)$ (x^* 称为ϕ的不动点).
2. $\forall x_0 \in [a,b]$，迭代序列$\{x_k\}$收敛，且有误差估计：

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Proof

1). 令$\psi(x)=x-\phi(x)$，则$\psi(a)\leq 0$，$\psi(b)\geq 0$. 由介值定理知

$$\exists x^*, s.t\ \psi(x^*)=0, \Longrightarrow x^*=\phi(x^*)$$

又若$x^{**}=\phi(x^{**})$，则：

$$|x^*-x^{**}|=|\phi(x^*)-\phi(x^{**})|=\left|\phi'(\xi)(x^*-x^{**})\right|\leqslant L\,|x^*-x^{**}|$$

由$L<1$知$x^*=x^{**}$. 故$\phi(x)$的不动点存在且唯一.

Proof

1). 令$\psi(x)=x-\phi(x)$，则$\psi(a)\leq 0$，$\psi(b)\geq 0$. 由介值定理知

$$\exists x^*, s.t\ \psi(x^*)=0, \Longrightarrow x^*=\phi(x^*)$$

又若$x^{**}=\phi(x^{**})$，则：

$$|x^*-x^{**}|=|\phi(x^*)-\phi(x^{**})|=\left|\phi'(\xi)(x^*-x^{**})\right|\leqslant L\,|x^*-x^{**}|$$

由$L<1$知$x^*=x^{**}$. 故$\phi(x)$的不动点存在且唯一.

2). $\forall x_0\in[a,b]$，有$x_{k+1}-x^*=\phi(x_k)-\phi(x^*)=\phi'(\xi)(x_k-x^*)$. 故

$$|x_{k+1}-x^*|\leqslant L\,|x_k-x^*|\leqslant\cdots\leqslant L^{k+1}\,|x_0-x^*|$$

所以，对任意$[a,b]$中的初值x_0，迭代序列$\{x_k\}$都收敛到x^*.

误差估计

误差估计

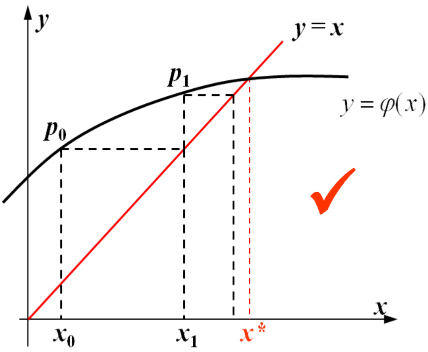
$|x_{k+1} - x_k| = |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| \leqslant L\,|x_k - x_{k-1}| \leqslant \cdots \leqslant L^k\,|x_1 - x_0|$. 故

$$\begin{aligned} |x_{k+p} - x_k| &\leqslant |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leqslant \left(L^{k+p-1} + \cdots + L^k\right)|x_1 - x_0| \\ &= \frac{L^k\,(1 - L^p)}{1 - L}\,|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

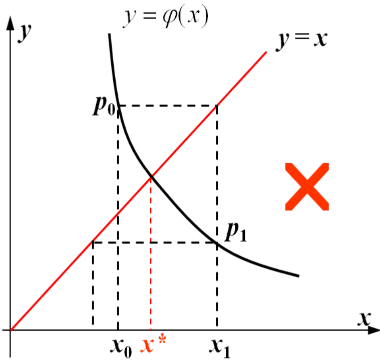
由 p 的任意性，令$p \to +\infty$即得

$$|x^* - x_k| \leqslant \frac{L^k}{1 - L}\,|x_1 - x_0|$$

迭代法图示—迭代格式 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$



1. 迭代成功



2. 迭代失败

Newton 迭代（格式）

对任意的非线性方程$f(x) = 0$，其 Newton迭代格式为

Newton 迭代（格式）

对任意的非线性方程$f(x) = 0$，其 Newton迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton 迭代（格式）

对任意的非线性方程$f(x) = 0$，其 Newton迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

1. How to get such Newton's iteration formula?
2. Does it work or not? Under what condition?
3. Is it fast (i.e., convergent rate)?

Key idea of Newton's Method

Key idea of Newton's Method

假设我们知道$f(x)$在某个点 x_0（可取为初值）附近有一个根 r， 将$f(x)$在 x_0处作Taylor展开：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

Key idea of Newton's Method

假设我们知道$f(x)$在某个点 x_0（可取为初值）附近有一个根 r， 将$f(x)$在 x_0处作Taylor展开：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

取其线性部分 $L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ **来近似原函数** $f(x)$, 同时用$L_0(x)$的根 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 来近似 $f(x)$的根 r .

Key idea of Newton's Method

假设我们知道$f(x)$在某个点 x_0（可取为初值）附近有一个根 r， 将$f(x)$在 x_0处作Taylor展开：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

取其线性部分 $L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ **来近似原函数** $f(x)$, 同时用$L_0(x)$的根 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 来近似 $f(x)$的根 r . 再将$f(x)$在x_1处Taylor展开，取其线性部分 $L_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ 来近似 $f(x)$，用$L_1(x)$的根 $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 近似$f(x)$的根......

Key idea of Newton's Method

假设我们知道$f(x)$在某个点 x_0（可取为初值）附近有一个根 r， 将$f(x)$在 x_0处作Taylor展开：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

取其线性部分 $L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来近似原函数 $f(x)$, 同时用$L_0(x)$的根 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 来近似 $f(x)$的根 r . 再将$f(x)$在x_1处Taylor展开，取其线性部分 $L_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ 来近似 $f(x)$，用$L_1(x)$的根 $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 近似$f(x)$的根......

KEY idea: **将非线性方程 反复线性化, 再用线性方程的解来逼近非线性方程的解.**

Key idea of Newton’s Method

假设我们知道$f(x)$在某个点 x_0（可取为初值）附近有一个根 r， 将$f(x)$在 x_0处作Taylor展开：

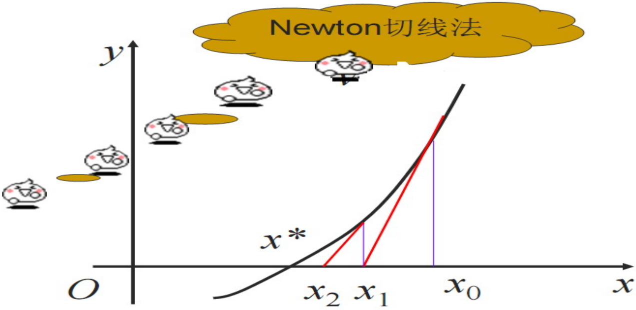
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

取其线性部分 $L_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ **来近似原函数** $f(x)$, 同时用$L_0(x)$的根 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ 来近似 $f(x)$的根 r . 再将$f(x)$在x_1处Taylor展开，取其线性部分 $L_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$ 来近似 $f(x)$，用$L_1(x)$的根 $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ 近似$f(x)$的根......

KEY idea: **将非线性方程 反复线性化, 再用线性方程的解来逼近非线性方程的解.**

注：当x_k越来越靠近真解（根）时，线性函数$L_k(x)$近似f的效果会越好，得出的近似解也越精确.

Newton迭代的几何解释



Newton迭代的收敛性

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Newton迭代的收敛性

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton迭代的收敛性

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

对Newton迭代格式, 有

$$\phi'(x)=\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

Newton迭代的收敛性

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

对Newton迭代格式, 有

$$\phi'(x)=(x-\frac{f(x)}{f'(x)})'=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

- 若x^*为f的单根，则$f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0 \Longrightarrow \phi'(x^*)=0$，故只需 x_0 离 x^* 足够近，则Newton迭代一定收敛（为什么?）.

Newton迭代的收敛性

$$f(x)=0 \Longleftrightarrow x=\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

对Newton迭代格式, 有

$$\phi'(x)=\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'=\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

- 若x^*为f的单根，则$f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0 \Longrightarrow \phi'(x^*)=0$，故只需 x_0 离 x^* 足够近，则Newton迭代一定收敛（为什么?）.
- 若x^*为f的p重根，则可得 $\phi'(x^*)=1-\frac{1}{p}$. 此时只需取 x_0 离 x^* 足够近，仍可保证收敛性（为什么?）.

Example

Example (1)

Find an efficient method for computing square roots using Newton's method.

Example

Example (1)

Find an efficient method for computing square roots using Newton's method.

Consider the equation $x^2 - R = 0$ where $R > 0$.

Example

Example (1)

Find an efficient method for computing square roots using Newton's method.

Consider the equation $x^2 - R = 0$ where $R > 0$. Let $f(x) = x^2 - R$, with the Newton's iteration formula, we have

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{R}{x_n})$$

One can use it to compute $\sqrt{17}$ with initial guess $x_0 = 4$ as follows

Example

Example (1)

Find an efficient method for computing square roots using Newton's method.

Consider the equation $x^2 - R = 0$ where $R > 0$. Let $f(x) = x^2 - R$, with the Newton's iteration formula, we have

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{R}{x_n})$$

One can use it to compute $\sqrt{17}$ with initial guess $x_0 = 4$ as follows

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.125, \quad x_2 = 4.123106 \\ x_3 &= 4.1231056256177 \\ x_4 &= 4.123105625617660549821409856 \end{aligned}$$

Example

Example (1)

Find an efficient method for computing square roots using Newton's method.

Consider the equation $x^2 - R = 0$ where $R > 0$. Let $f(x) = x^2 - R$, with the Newton's iteration formula, we have

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{R}{x_n})$$

One can use it to compute $\sqrt{17}$ with initial guess $x_0 = 4$ as follows

$$\begin{aligned} x_1 &= 4.125, \quad x_2 = 4.123106 \\ x_3 &= 4.1231056256177 \\ x_4 &= 4.123105625617660549821409856 \end{aligned}$$

Found by a Greek engineer and architect Heron about 2000 years ago!

Example (2)

用牛顿法求方程 $xe^x - 1 = 0$ 在0.5附近的根, 误差精度 $\epsilon = 10^{-5}$.

Example (2)

用牛顿法求方程 $xe^x - 1 = 0$ 在0.5附近的根, 误差精度 $\epsilon = 10^{-5}$.

解 *Newton*迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{x_k} - 1}{e^{x_k} + x_k e^{x_k}} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + x_k} \quad , k = 0,1,2,\cdots$$

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1} \rvert$
0	0.5	-0.17563936	
1	0.57102044	0.01074751	0.07102044
2	0.56715557	0.00003393	0.00386487
3	0.56714329	0.0000000003	0.00001228
4	0.56714329	0.0000000003	0.00000000

收敛阶

定义：$\{x_k\} \to x^*$，$\varepsilon_k = \left|x^* - x_k\right|$. 若$\exists p \geq 1$和正常数$c$，s.t $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = c$，则称$\{x_k\}$为$p$阶收敛的，也称相应的迭代格式为$p$阶收敛.

收敛阶

定义：$\{x_k\} \to x^*$，$\varepsilon_k = |x^* - x_k|$. 若$\exists p \geq 1$和正常数$c$，s.t $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = c$，则称$\{x_k\}$为$p$阶收敛的，也称相应的迭代格式为$p$阶收敛.

设迭代格式为$\phi(x)$，x^*为ϕ的不动点$(i.e., x^* = \phi(x^*))$.

- 当$\phi'(x^*) \neq 0$时

$$\varepsilon_{k+1} = |x^* - x_{k+1}| = |\phi(x^*) - \phi(x_k)| = |\phi'(\xi_k)(x^* - x_k)| = |\phi'(\xi_k)|\varepsilon_k$$

令$k \to \infty$得 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = |\phi'(x^*)| \neq 0$

收敛阶

定义：$\{x_k\} \to x^*$，$\varepsilon_k = \left|x^* - x_k\right|$. 若$\exists p \geq 1$和正常数$c$，s.t $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = c$，则称$\{x_k\}$为$p$阶收敛的，也称相应的迭代格式为$p$阶收敛.

设迭代格式为$\phi(x)$，x^*为ϕ的不动点$(i.e., x^* = \phi(x^*))$.

- 当$\phi'(x^*) \neq 0$时

$$\varepsilon_{k+1} = \left|x^* - x_{k+1}\right| = \left|\phi(x^*) - \phi(x_k)\right| = \left|\phi'(\xi_k)(x^* - x_k)\right| = \left|\phi'(\xi_k)\right|\varepsilon_k$$

令$k \to \infty$得 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \left|\phi'(x^*)\right| \neq 0 \implies$ 一阶收敛.

收敛阶

定义：$\{x_k\} \to x^*$，$\varepsilon_k = \left|x^* - x_k\right|$. 若$\exists p \geq 1$和正常数$c$，s.t $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = c$，则称$\{x_k\}$为$p$阶收敛的，也称相应的迭代格式为$p$阶收敛.

设迭代格式为$\phi(x)$，x^*为ϕ的不动点$(i.e., x^* = \phi(x^*))$.

- 当$\phi'(x^*) \neq 0$时

$$\varepsilon_{k+1} = \left|x^* - x_{k+1}\right| = \left|\phi(x^*) - \phi(x_k)\right| = \left|\phi'(\xi_k)(x^* - x_k)\right| = \left|\phi'(\xi_k)\right|\varepsilon_k$$

令$k \to \infty$得$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \left|\phi'(x^*)\right| \neq 0 \implies$ 一阶收敛.

- 当$\phi'(x^*) = 0$且$\phi''(x^*) \neq 0$时，

$$\varepsilon_{k+1} = \left|x^* - x_{k+1}\right| = \left|\phi(x^*) - \phi(x_k)\right| = \left|\frac{\phi''(\xi_k)}{2}(x^* - x_k)^2\right|$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \left|\frac{\phi''(x^*)}{2}\right| \neq 0$

收敛阶

定义：$\{x_k\} \to x^*$，$\varepsilon_k = |x^* - x_k|$. 若$\exists p \geq 1$和正常数$c$，s.t $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^p} = c$，则称$\{x_k\}$为$p$阶收敛的，也称相应的迭代格式为$p$阶收敛.

设迭代格式为$\phi(x)$，x^*为ϕ的不动点$(i.e., x^* = \phi(x^*))$.

- 当$\phi'(x^*) \neq 0$时

$$\varepsilon_{k+1} = |x^* - x_{k+1}| = |\phi(x^*) - \phi(x_k)| = |\phi'(\xi_k)(x^* - x_k)| = |\phi'(\xi_k)|\varepsilon_k$$

令$k \to \infty$得$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = |\phi'(x^*)| \neq 0 \implies$ 一阶收敛.

- 当$\phi'(x^*) = 0$且$\phi''(x^*) \neq 0$时，

$$\varepsilon_{k+1} = |x^* - x_{k+1}| = |\phi(x^*) - \phi(x_k)| = \left|\frac{\phi''(\xi_k)}{2}(x^* - x_k)^2\right|$$

故$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \left|\frac{\phi''(x^*)}{2}\right| \neq 0 \implies$ 二阶收敛.

Newton迭代格式的收敛阶

Newton迭代格式的收敛阶

- Newton迭代格式

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

若 α 为 $f(x) = 0$ 的单根，则Newton迭代二阶收敛；若 α 为重根，此时Newton迭代一般是一阶收敛。

Newton迭代格式的收敛阶

- Newton迭代格式

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

若 α 为 $f(x) = 0$ 的单根，则Newton迭代二阶收敛；若 α 为重根，此时Newton迭代一般是一阶收敛。 提示: (参见课本P66)

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\phi'(\alpha) + \frac{1}{2}(x_k - \alpha)^2\phi''(\xi) - \phi(\alpha)$$

Newton迭代格式的收敛阶

- Newton迭代格式

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

若 α 为 $f(x) = 0$ 的单根，则Newton迭代二阶收敛；若 α 为重根，此时Newton迭代一般是一阶收敛。 提示: (参见课本P66)

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\phi'(\alpha) + \frac{1}{2}(x_k - \alpha)^2\phi''(\xi) - \phi(\alpha)$$

Recall: 在Newton迭代格式中, 有

$$\phi'(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$$

Newton迭代格式的收敛阶

- Newton迭代格式

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

若 α 为 $f(x) = 0$ 的单根，则Newton迭代二阶收敛；若 α 为重根，此时Newton迭代一般是一阶收敛。　提示: (参见课本P66)

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\phi'(\alpha) + \frac{1}{2}(x_k - \alpha)^2\phi''(\xi) - \phi(\alpha)$$

Recall: 在Newton迭代格式中, 有

$$\phi'(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

- 若 α 为 $f(x) = 0$ 的p重根, 则迭代格式

$$x_{k+1} = \phi(x_k) = x_k - p\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

是二阶收敛的 (可令 $f(x) = (x - \alpha)^p h(x)$,参见课本P66)。

Example (3)

验证迭代格式 $x_{k+1} = x_k(x_k^2 + 3a)/(3x_k^2 + a) \ \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是求$\sqrt{a}$ $(a > 0)$的三阶方法.

Example (3)

验证迭代格式 $x_{k+1} = x_k(x_k^2 + 3a)/(3x_k^2 + a)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是求$\sqrt{a}$ $(a > 0)$的三阶方法.

解：设$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha, \Rightarrow \alpha = \alpha(\alpha^2 + 3a)/(3\alpha^2 + a)$

Example (3)

验证迭代格式 $x_{k+1} = x_k(x_k^2 + 3a)/(3x_k^2 + a)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是求$\sqrt{a}$ $(a > 0)$的三阶方法.

解：设$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$, $\Rightarrow \alpha = \alpha(\alpha^2 + 3a)/(3\alpha^2 + a) \Rightarrow a^2 = \alpha$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{a}$$

Example (3)

验证迭代格式 $x_{k+1} = x_k(x_k^2 + 3a)/(3x_k^2 + a)\ \ (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是求$\sqrt{a}\ (a > 0)$的三阶方法.

解：设$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha, \Rightarrow \alpha = \alpha(\alpha^2 + 3a)/(3\alpha^2 + a) \Rightarrow a^2 = \alpha$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{a}$$

$$x_{k+1} - \sqrt{a} = \frac{x_k(x_k^2 + 3a) - \sqrt{a}(3x_k^2 + a)}{3x_k^2 + a}$$

Example (3)

验证迭代格式 $x_{k+1} = x_k(x_k^2 + 3a)/(3x_k^2 + a) \;\; (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是求$\sqrt{a} \;\; (a > 0)$的三阶方法.

解：设$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha, \Rightarrow \alpha = \alpha(\alpha^2 + 3a)/(3\alpha^2 + a) \Rightarrow a^2 = \alpha$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{a}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \sqrt{a} &= \frac{x_k(x_k^2 + 3a) - \sqrt{a}(3x_k^2 + a)}{3x_k^2 + a} \\ &= \frac{x_k^3 + 3ax_k - 3\sqrt{a}x_k^2 - \sqrt{a}^3}{3x_k^2 + a} \\ &= \frac{(x_k - \sqrt{a})^3}{3x_k^2 + a} \end{aligned}$$

Example (3)

验证迭代格式 $x_{k+1} = x_k(x_k^2 + 3a)/(3x_k^2 + a)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是求$\sqrt{a}$ $(a > 0)$的三阶方法.

解：设$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$, $\Rightarrow \alpha = \alpha(\alpha^2 + 3a)/(3\alpha^2 + a) \Rightarrow a^2 = \alpha$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{a}$$

$$\begin{aligned}
x_{k+1} - \sqrt{a} &= \frac{x_k(x_k^2 + 3a) - \sqrt{a}(3x_k^2 + a)}{3x_k^2 + a} \\
&= \frac{x_k^3 + 3ax_k - 3\sqrt{a}x_k^2 - \sqrt{a}^3}{3x_k^2 + a} \\
&= \frac{(x_k - \sqrt{a})^3}{3x_k^2 + a}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1} - \sqrt{a}}{(x_k - \sqrt{a})^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3x_k^2 + a} = \frac{1}{4a} \qquad \square$$

Newton迭代格式的优缺点

Newton迭代格式的优缺点

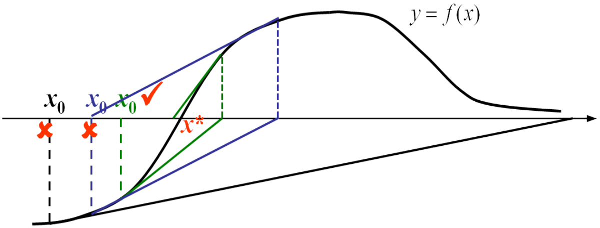
- 优点：格式简单，使用方便，应用广泛，（通常）收敛速度快。

Newton迭代格式的优缺点

- 优点：格式简单，使用方便，应用广泛，（通常）收敛速度快。
- 局限性：与初值密切相关（若初值不好，则可能不收敛。为什么？）

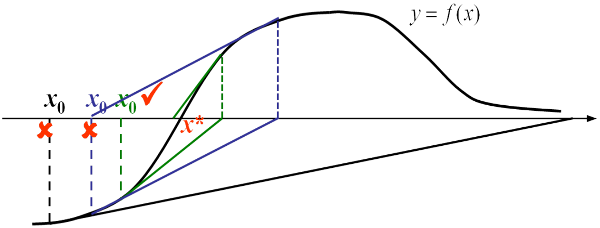
Newton迭代格式的优缺点

- 优点：格式简单，使用方便，应用广泛，（通常）收敛速度快。
- 局限性：与初值密切相关（若初值不好，则可能不收敛。为什么？）



Newton迭代格式的优缺点

- 优点：格式简单，使用方便，应用广泛，（通常）收敛速度快。
- 局限性：与初值密切相关（若初值不好，则可能不收敛。为什么？）



Remark：Newton's method usually assume that its initial guess is sufficiently close to a zero or that the graph of f has a prescribed shape.

弦截法

弦截法

将Newton迭代中的导数用差商$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 代替，得迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

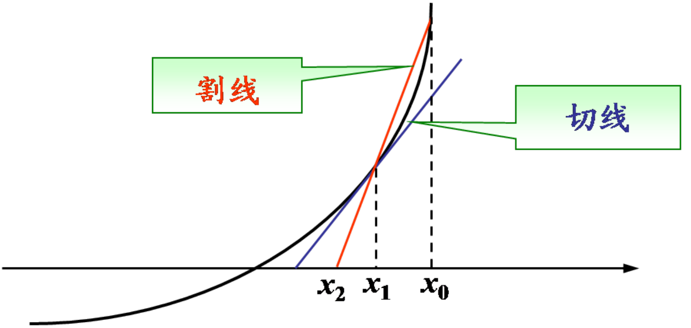
称为弦截法，为二步格式(需两个初始点启动). 单根时，收敛阶约为1.618，比Newton迭代稍慢.

弦截法

将Newton迭代中的导数用差商$f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 代替，得迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

称为弦截法，为二步格式(需两个初始点启动). 单根时，收敛阶约为1.618，比Newton迭代稍慢.



Example (4)

用弦截法求方程 $x^3 - 7.7x^2 + 19.2x - 15.3 = 0$ 根,
取 $x_0 = 1.5, x_1 = 4.0$.

Example (4)

用弦截法求方程 $x^3 - 7.7x^2 + 19.2x - 15.3 = 0$ 根,
取 $x_0 = 1.5, x_1 = 4.0$.

令 $f(x) = x^3 - 7.7x^2 + 19.2x - 15.3$, 代入弦截法迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Example (4)

用弦截法求方程 $x^3 - 7.7x^2 + 19.2x - 15.3 = 0$ 根,
取 $x_0 = 1.5, x_1 = 4.0$.

令 $f(x) = x^3 - 7.7x^2 + 19.2x - 15.3$, 代入弦截法迭代格式

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

k	x_k	$f(x)$
0	1.5	−0.45
1	4	2.3
2	1.90909	0.248835
3	1.65543	−0.0805692
4	1.71748	0.0287456
5	1.70116	0.00195902
6	1.69997	−0.0000539246
7	1.7	9.459×10^{-8}

3.4 非线性方程组的Newton迭代法

3.4 非线性方程组的Newton迭代法

设有二元方程组(x, y为自自变量) $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

写成向量形式： $F(w) = 0$, 其中

$$F(w) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}, \quad w = (x,y)^T$$

3.4 非线性方程组的Newton迭代法

设有二元方程组(x, y为自自变量) $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

写成向量形式： $F(w)=0$, 其中

$$F(w)=\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}, \quad w=(x,y)^T$$

对 f, g 在 (x_0, y_0)作二元Taylor 展开，取其线性部分，得

$$\begin{cases} f(x,y) \approx f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0 \\ g(x,y) \approx g(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}=0 \end{cases}$$

令 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$， 则

$$J(x_0,y_0)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

这里，Jacobi(雅克比)矩阵

$$J(x_0, y_0) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}.$$

这里，Jacobi(雅克比)矩阵

$$J(x_0, y_0) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}\big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial g}{\partial y}\big|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}.$$

若$det(J(x_0, y_0)) \neq 0$, 可解出 $\Delta x, \Delta y$. 令

$$w_1 \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \end{pmatrix}.$$

这里，Jacobi(雅克比)矩阵

$$J(x_0, y_0) \doteq \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \\ \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} & \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} \end{pmatrix}.$$

若$det(J(x_0, y_0)) \neq 0$, 可解出 $\Delta x, \Delta y$. 令

$$w_1 \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + \Delta x \\ y_0 + \Delta y \end{pmatrix}.$$

同理，再对 f, g 在 (x_1, y_1)作二元Taylor 展开，并取其线性部分。 若$det(J(x_1, y_1)) \neq 0$, 可解出 $\Delta x = x - x_1, \Delta y = y - y_1$, 进而得到

$$w_2 \doteq \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \Delta x \\ y_1 + \Delta y \end{pmatrix}.$$

继续做下去...

每次迭代先解一个关于 $\Delta x \doteq x - x_k, \Delta y \doteq y - x_k$ 的二元方程组

$$J(x_k, y_k)\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}.$$

进而得到新的迭代点

$$w_{k+1} \doteq \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k + \Delta x \\ y_k + \Delta y \end{pmatrix}.$$

Example (3.6)

求非线性方程组

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x,y) \doteq 4 - x^2 - y^2 = 0 \\ f_2(x,y) \doteq 1 - e^x - y = 0 \end{array}\right., \quad \text{取初始值} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.7 \end{pmatrix}.$$

解 $J(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-2x & -2y\\ -\mathrm{e}^x & -1\end{pmatrix}$

$$J(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}-2 & 3.4\\ -2.71828 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}f_1(x_0,y_0)\\ f_2(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.11\\ -0.01828\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-2\Delta x+3.4\Delta y=-0.11\\ -2.71828\Delta x-\Delta y=0.01828\end{cases}$$

解方程得

$$\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.004256\\ -0.029849\end{pmatrix}$$

所以

$$w_1=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1.7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.004256\\ -0.029849\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.004256\\ -1.729849\end{pmatrix}$$

继续做下去，直到 $\max(|\Delta x|,|\Delta y|)<10^{-5}$ 时停止.

一般非线性方程组的Newton迭代

设方程组为 $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$ ，写成向量形式为：

$F(X) = 0$, 其中$F = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^T$, $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

一般非线性方程组的Newton迭代

设方程组为$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \end{cases}$，写成向量形式为：

$$F(X)=0,\ \text{其中}F=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^T,\ X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$$

仿照单变量Newton法，取初值$X_0=(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n})^T$，将$\{f_i\}_{i=1}^n$在$X_0$处进行Taylor展开后， 分别取相应的线性部分来近似每一个f_i，得：

$$\begin{cases} f_1(X_0)+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1-x_{01})+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_n-x_{0n})=0 \\ f_2(X_0)+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1-x_{01})+\cdots+\frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_n-x_{0n})=0 \\ \vdots \\ f_n(X_0)+\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_1-x_{01})+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_n-x_{0n})=0 \end{cases}$$

写成向量形式即为

$$F(X_0) + J_F(X_0)(X - X_0) = 0 \qquad (*)$$

其中

$$J_F(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

表示F 的Jacobi矩阵.

方程组$(*)$的解为$X_1 = X_0 - J_F^{-1}(X_0)F(X_0)$，再将$\{f_i\}_{i=1}^n$在$X_1$处Taylor展开.

同理可得推广的Newton迭代格式为：

$$X_{k+1} = X_k - \frac{F(X_k)}{F'(X_k)} = X_k - \Big(J_F(X_k)\Big)^{-1} F(X_k)$$

写成向量形式即为

$$F(X_0)+J_F(X_0)(X-X_0)=0 \qquad (*)$$

其中

$$J_F(X)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

表示F 的Jacobi矩阵.

方程组$(*)$的解为$X_1=X_0-J_F^{-1}(X_0)F(X_0)$，再将$\{f_i\}_{i=1}^n$在$X_1$处Taylor展开.

同理可得推广的Newton迭代格式为：

$$X_{k+1}=X_k-\frac{F(X_k)}{F'(X_k)}=X_k-\Big(J_F(X_k)\Big)^{-1}F(X_k)$$

在实际中，一般通过解以下线性代数方程组

$$J_F(X_k)(X_{k+1}-X_k)=-F(X_k)$$

来求X_{k+1}.