1、设有线性代数方程组 $Ax=b$ 其中

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}2\\0\\2\\1\end{bmatrix}$$

(a) 求Jacobi迭代的迭代矩阵及相应的迭代格式

(b) 讨论此时Jacobi迭代(方法)的收敛性

(a) 由题可得 $D=diag\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}\}=diag\{2,2,2,2\}$

则Jacobi迭代的迭代矩阵为

$$G=I-D^{-1}A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0.5&0&0\\0.5&0&0.5&0\\0&0.5&0&0.5\\0&0&0.5&0\end{bmatrix}$$

方程对应的Jacabi迭代格式为

$$\begin{bmatrix}x_1^{(k+1)}\\x_2^{(k+1)}\\x_3^{(k+1)}\\x_4^{(k+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0.5&0&0\\0.5&0&0.5&0\\0&0.5&0&0.5\\0&0&0.5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\\x_4^{(k)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0.5\end{bmatrix}$$

(b) Jacobi迭代矩阵的特征多项式为 $|\lambda I-G|=\lambda^4-0.75\lambda^2+0.0625=0$

则 $\lambda_1=0.809017$ $\lambda_2=0.309017$ $\lambda_3=-0.309017$ $\lambda_4=-0.809017$

则 $\rho(G)=0.809017<1$ 故Jacobi迭代收敛

2. 设有线性代数方程组.

$$\begin{cases}5x_1-3x_2+2x_3=5\\-3x_1+5x_2+2x_3=5\\2x_1+2x_2+5x_3=5\end{cases}$$

(a) 写出Gauss-Seidel迭代和SOR迭代的分量形式

(b) 求Gauss-Seidel迭代的分裂矩阵以及迭代矩阵

(c) 讨论Gauss-Seidel迭代的收敛性(请给出理由或证明)

(a) 先求Jacobi迭代格式

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{5}(3x_2-2x_3+5)\\x_2=\frac{1}{5}(3x_1-2x_3+5)\\x_3=\frac{1}{5}(-2x_1-2x_2+5)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{5}(3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+5)\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{5}(3x_1^{(k)}-2x_3^{(k)}+5)\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{5}(-2x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}+5)\end{cases}$$

故Gauss-Seidel迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{5}(3x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+5)\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{5}(3x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}+5)\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{5}(-2x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}+5)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\frac{1}{5}(5x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}-5)\\x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}-\frac{1}{5}(-3x_1^{(k+1)}+5x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}-5)\\x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}-\frac{1}{5}(2x_1^{(k+1)}+2x_2^{(k+1)}+5x_3^{(k)}-5)\end{cases}$$

故SOR迭代格式为

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=x_1^{(k)}-\frac{\omega}{5}(5x_1^{(k)}-3x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}-5)\\x_2^{(k+1)}=x_2^{(k)}-\frac{\omega}{5}(-3x_1^{(k+1)}+5x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}-5)\\x_3^{(k+1)}=x_3^{(k)}-\frac{\omega}{5}(2x_1^{(k+1)}+2x_2^{(k+1)}+5x_3^{(k)}-5)\end{cases}$$

(b) $A=\begin{bmatrix}5&-3&2\\-3&5&2\\2&2&5\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ $L=\begin{bmatrix}0&0&0\\-3&0&0\\2&2&0\end{bmatrix}$

故分裂矩阵 $Q=D+L=\begin{bmatrix}5&0&0\\-3&5&0\\2&2&5\end{bmatrix}$

迭代矩阵 $G=-(D+L)^{-1}U=-\begin{bmatrix}5&0&0\\-3&5&0\\2&2&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0&-3&2\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{3}{5}&-\frac{2}{5}\\0&\frac{9}{25}&-\frac{16}{25}\\0&-\frac{48}{125}&\frac{52}{125}\end{bmatrix}$

(c) Gauss - Seidel 迭代收敛

Gauss - Seidel 迭代矩阵的特征多项式为 $|\lambda I-G|=0$

解得 $\lambda_1=0$ $\lambda_2=-0.10853$ $\lambda_3=0.88453$

则 $\rho(G)=0.88453<1$ 故 Gauss - Seidel 迭代收敛