随机过程B

刘 杰

Email: jiel@ustc.edu.cn

第五章 Brown运动与*Ito*积分

1827年，苏格兰植物学家R. Brown发现水中的花粉不停地作不规则的曲线运动，称为Brown运动。1905年，Albert Einstein依据分子运动论的原理提出了Brown运动的理论。就在差不多同时，M. Smoluchowski也作出了同样的成果。他们的理论圆满地回答了Brown运动的本质问题。1923年Wiener首先对布朗运动给出了较简明的数学公式，并且证明了Brown运动样本几乎处处连续。

§5.1 Brown运动概念

假设一个醉汉在一条直线路上从原点O出发作随机游动，每$\triangle t$时间行走一步，步长为$\triangle x$. 用$X^{(\Delta t)}(t)$表示t时刻醉汉所处的位置，则

$$X^{(\Delta t)}(t) = \Delta x \sum_{m=1}^{[t/\Delta t]} Z_m \,,$$

其中$[y]$表示取y整数部分，$Z_1, Z_2, \ldots$相互独立且与Z同分布

Z	-1	1
Pr	0.5	0.5

易知

$$E[X^{(\Delta t)}(t)]=0,\quad Var(X^{(\Delta t)}(t))=(\Delta x)^2\cdot\left[\frac{t}{\Delta t}\right]$$

为了使得：当$\triangle t\downarrow 0$时 $X^{(\Delta t)}(t)$ 有意义，合理的假

设为

$$\Delta x=c\sqrt{\Delta t},\quad (c>0)$$

此时

$$X^{(\Delta t)}(t)=c\sqrt{\Delta t}\sum_{m=1}^{[t/\Delta t]}Z_m\,,\quad (c>0),$$

Z	-1	1
Pr	0.5	0.5

显然，$X^{(\Delta t)}(t)$具有下面三条性质：

(1) $X^{(\Delta t)}(0)=0$；

(2) $X^{(\Delta t)}(t)$具有平稳的独立增量；

(3) 当$\triangle t$充分小时，对任意的$s>0$，有

$$X^{(\Delta t)}(t+s)-X^{(\Delta t)}(t) \sim N(0,c^2 s).$$

定义5.1 随机过程$\{X(t), t\geq 0\}$称为**Brown运动**，如果它满足下面三个条件：

① $X(0)=0$，且$X(t)$是t的连续函数;

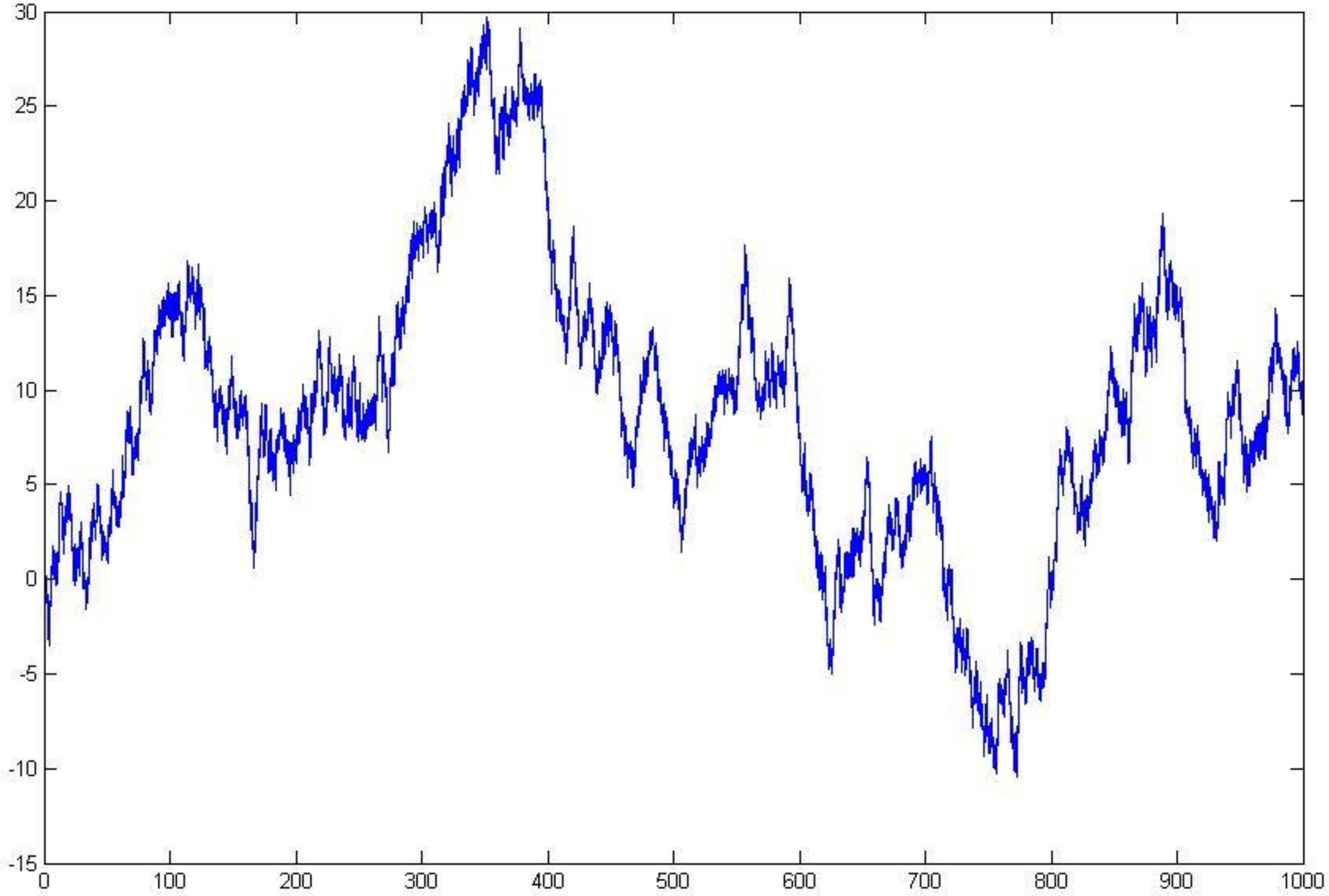
② 具有平稳的独立增量;

③ 对任意的$t\geq 0, s>0$，有

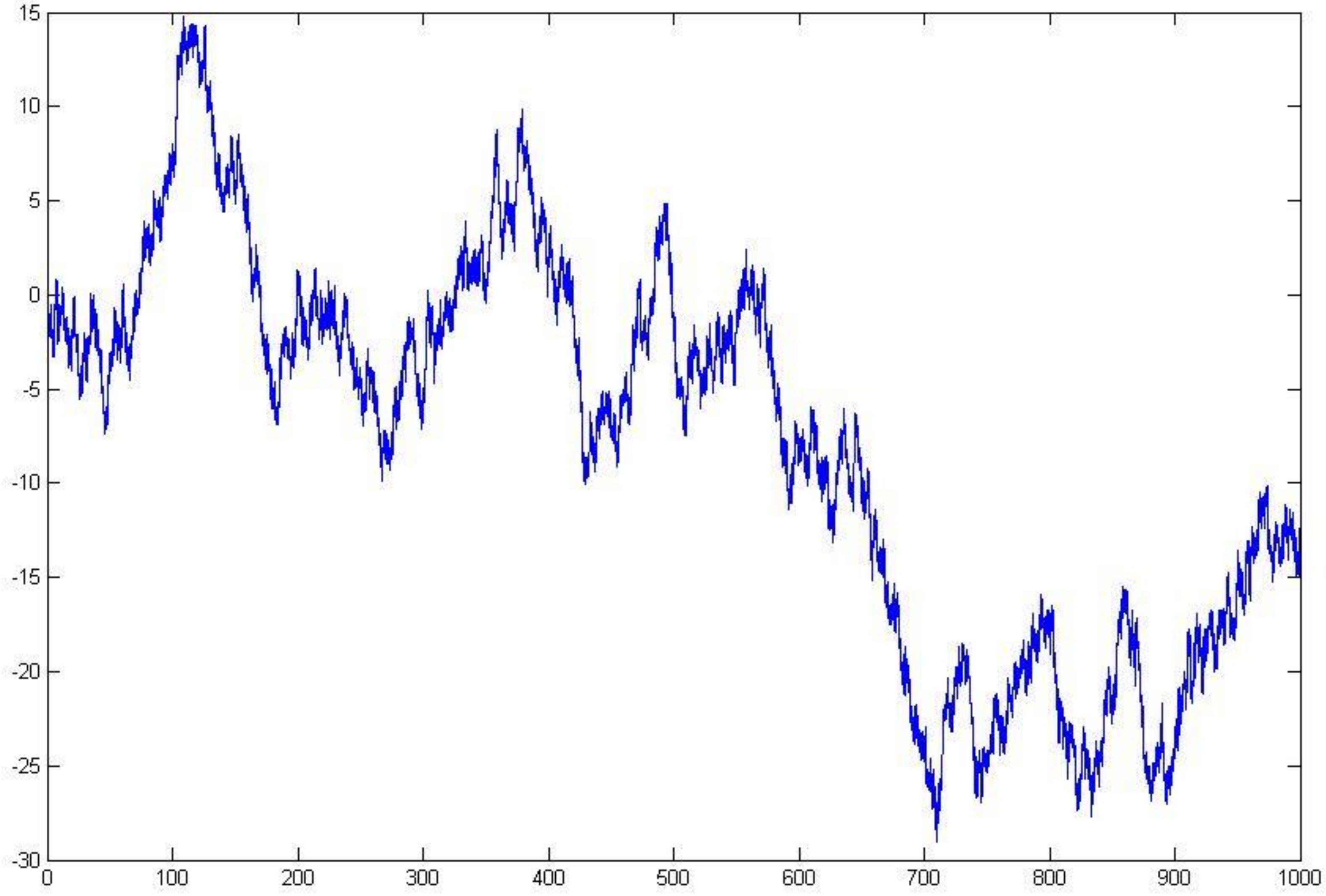
$$X(t+s)-X(t)\sim N(0,c^2 s).$$

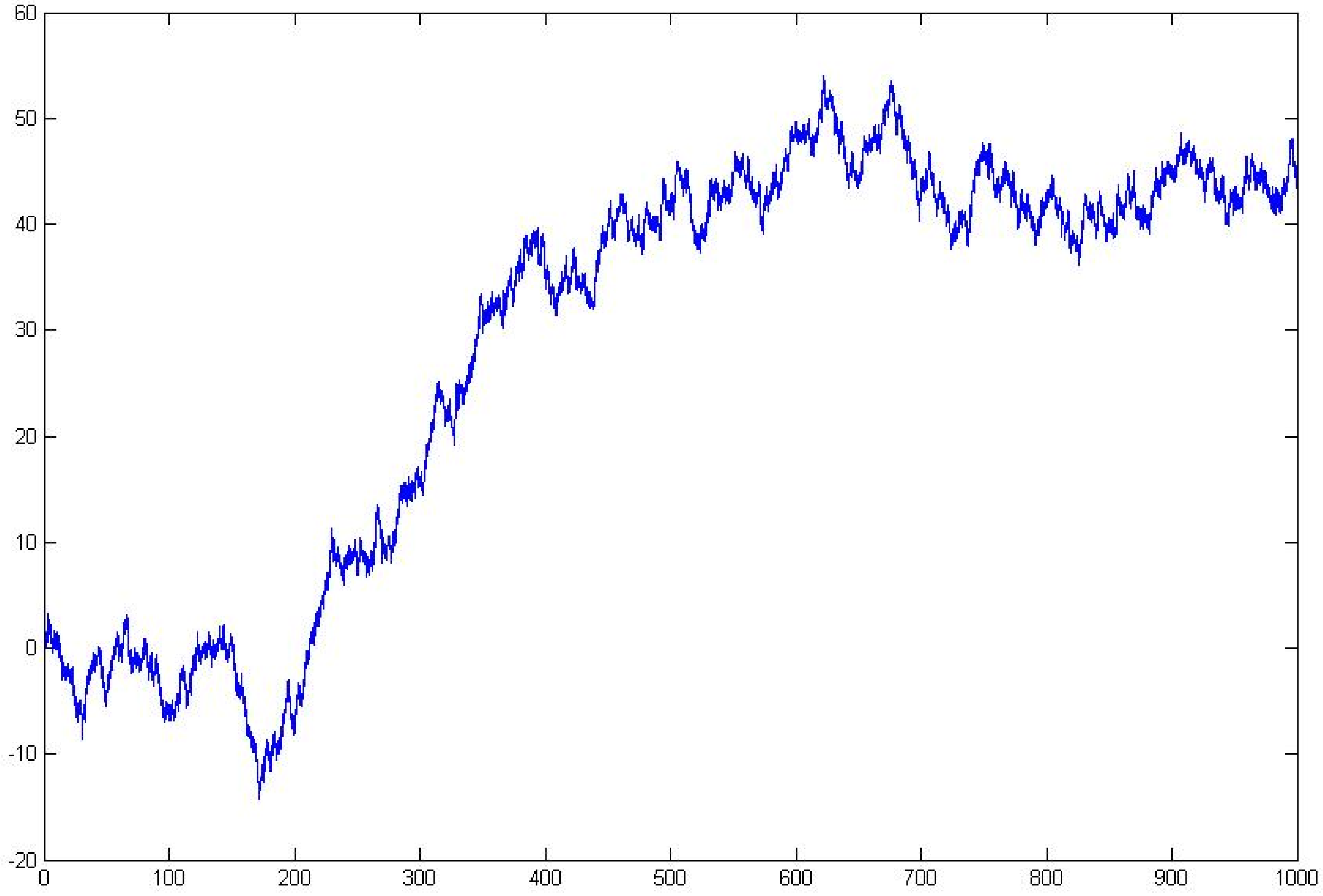
当$c=1$时，我们称其为**标准Brown运动**，记为$\{B_t\}$.

如果$c\neq 1$，则易知$\{X(t)/c, t\geq 0\}$为标准Brown运动.



30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000


15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000



60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

附录：Brown运动轨道MatLab模拟程序：

```
function BrownM
    Num=99999;
    DeltaT=0.01;
    A=randn(Num,1);
    B=zeros(Num+1,1);
    T=zeros(Num+1,1);
    for i=1:Num
        B(i+1)=B(i)+sqrt(DeltaT)*A(i);
        T(i+1)=T(i)+DeltaT;
    end
    plot(T,B)
end
```

命题1. 假设随机过程$\{B_t,\ t\geq 0\}$为标准Brown运动，则对于任意的非零实数a，我们有

(1) $\left\{B_{a+t}-B_a, t\geq 0\right\}$依然是标准Brown运动；

(2) $\left\{\dfrac{1}{a}B_{a^2t}, t\geq 0\right\}$依然是标准Brown运动。

证明： 根据Brown运动的定义易证. 命题1(1)称为Brown运动的平移不变性，命题1(2)称为Brown运动的刻度不变性。

课外作业:

Page 145 Ex 1, 2, 3

§ 5.2 Brown运动性质

容易证明：Brown运动具有下面性质

性质1 Brown运动的轨道是时间t的连续函数.

性质2 Brown运动是独立增量过程.

定义5.2 设$X=\{X_t, \ t \geq 0\}$是一个可积的随机过程. 如果对任意的$t>s\geq 0$均有$E[X_t|F_s]=X_s$, 则称X是一个**鞅**；如果$E[X_t|F_s] \geq X_s$, 则称X是一个**下鞅**；$E[X_t|F_s] \leq X_s$, 则称X是一个**上鞅**.

性质3 Brown运动是鞅.

证明： 设$\{B_t,\ t \geq 0\}$是一个Brown运动, 则对于任意的$t>s\geq 0$， 由性质2得

$$
\begin{aligned}
E[B_t \mid F_s] &= E[B_s + (B_t - B_s) \mid F_s] \\
&= B_s + E[(B_t - B_s) \mid F_s] \\
&= B_s + E[B_t - B_s] \\
&= B_s
\end{aligned}
$$

即：$\{B_t, t \geq 0\}$是一个鞅.

性质4 Brown运动是一个齐次马氏过程.

证明： 设$\{B_t, \ t \geq 0\}$是一个Brown运动, 则对于任意的$t>s\geq 0$， 由性质2得

$$P\{B_t \leq a \mid B_s = x, B_v = x_v, 0 \leq v < s\}$$

$$= P\{B_t - B_s \leq a - x \mid B_s = x, B_v = x_v, 0 \leq v < s\}$$

$$= P\{B_t - B_s \leq a - x\}$$

$$= P\{B_t \leq a \mid B_s = x\}$$

即：$\{B_t, t \geq 0\}$是马氏过程. 齐次性易证，略.

性质5 Brown运动几乎处处不可导.

证明： 设$\{B_t,\ t \geq 0\}$是一个Brown运动，则对于任意的$M \geq 0$，有

$$P\left\{\left|\frac{B_{t+\Delta t}-B_t}{\Delta t}\right| \leq M\right\} = P\left\{\left|\frac{B_{t+\Delta t}-B_t}{\sqrt{\Delta t}}\right| \leq M\sqrt{\Delta t}\right\}$$

$$=\Phi(M\sqrt{\Delta t})-\Phi(-M\sqrt{\Delta t})$$

$$=2\Phi(M\sqrt{\Delta t})-1 \xrightarrow{\Delta t \to 0} 0$$

即：$\{B_t,\ t \geq 0\}$在任意一点t的导数有限的概率为0，故$\{B_t,\ t \geq 0\}$几乎处处不可导.

已知$B_t \sim N(0,t)$, 因此其概率密度函数为

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

任给n个时刻$0<t_1<t_2<\ldots<t_n$，用$f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$表示这$n$个时刻位置$(B_{t_1},\cdots,B_{t_n})$的联合概率密度函数，则有下面定理.

定理5.1

$$f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n) = f_{t_1}(x_1)\prod_{k=2}^{n} f_{t_k - t_{k-1}}(x_k - x_{k-1}).$$

证明利用马氏性和数学归纳法，略.

对于任意的$a \neq 0$, 记

$$\tau_a = \inf\{t : B_t = a\}$$

称为Brown运动首次到达a的时刻，即：**首达时**.

定理5.2 $$P\{\tau_a \leq t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy .$$

证明：先设$a > 0$，由全概率公式得

$$\begin{aligned} P\{B_t \geq a\} &= P\{B_t \geq a | \tau_a \leq t\} P\{\tau_a \leq t\} \\ &\quad + P\{B_t \geq a | \tau_a > t\} P\{\tau_a > t\} \\ &= P\{B_t \geq a | \tau_a \leq t\} P\{\tau_a \leq t\}. \end{aligned}$$

另一方面，构造新的Brown运动

$$\widetilde{B}_t = 2a - B_t, \quad t \geq \tau_a.$$

由对称性知，当$t \geq \tau_a$时，

$$P\{B_t \geq a\} = P\{\widetilde{B}_t \leq a\} = \frac{1}{2},$$

即：

$$P\{B_t \geq a \mid t \geq \tau_a\} = P\{\widetilde{B}_t \leq a \mid t \geq \tau_a\} = \frac{1}{2}.$$

因此，

$$P\{B_t \geq a\} = \frac{1}{2} P\{\tau_a \leq t\}.$$

即：当$a>0$时，

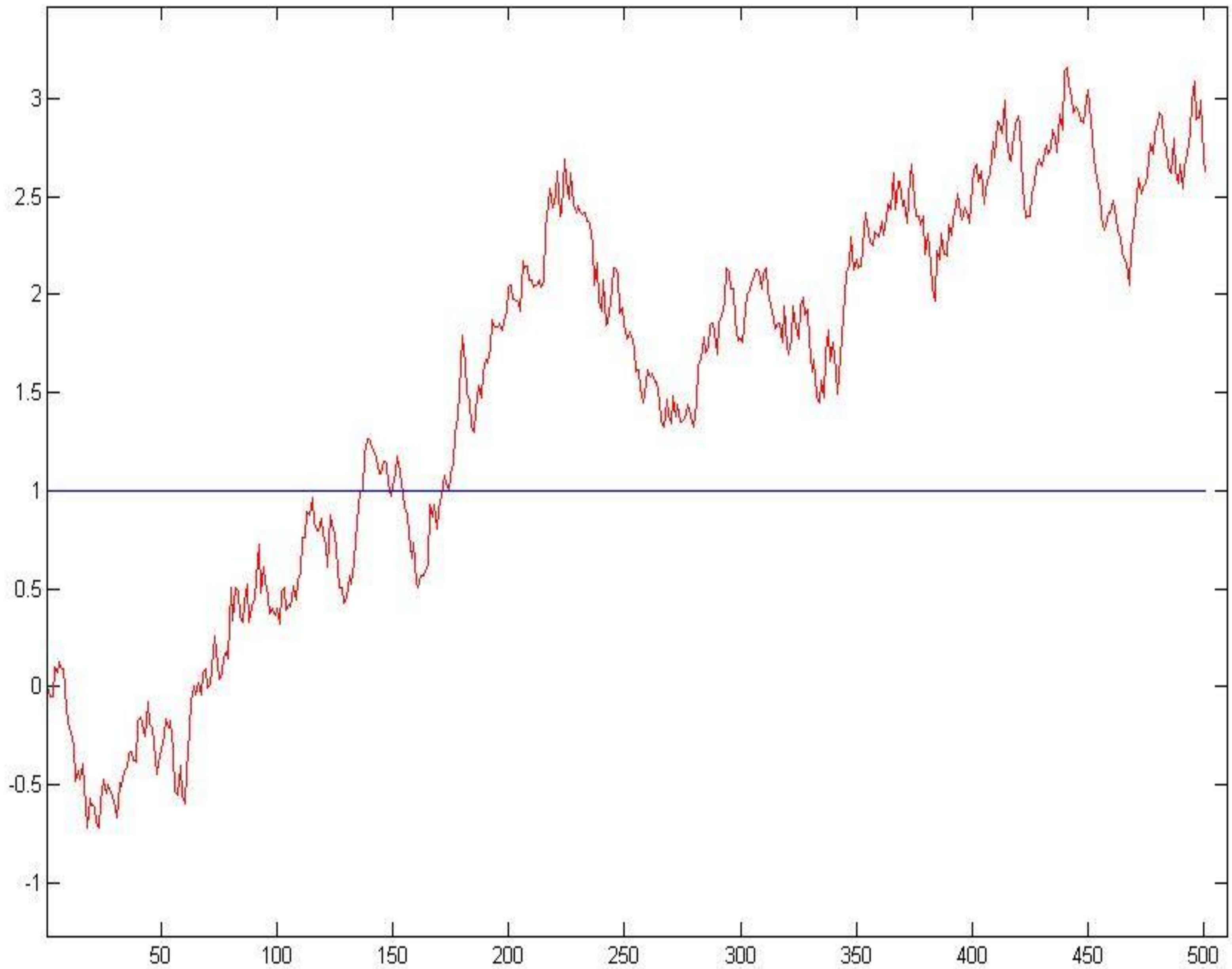
$$P\{\tau_a \le t\} = 2P\{B_t \ge a\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

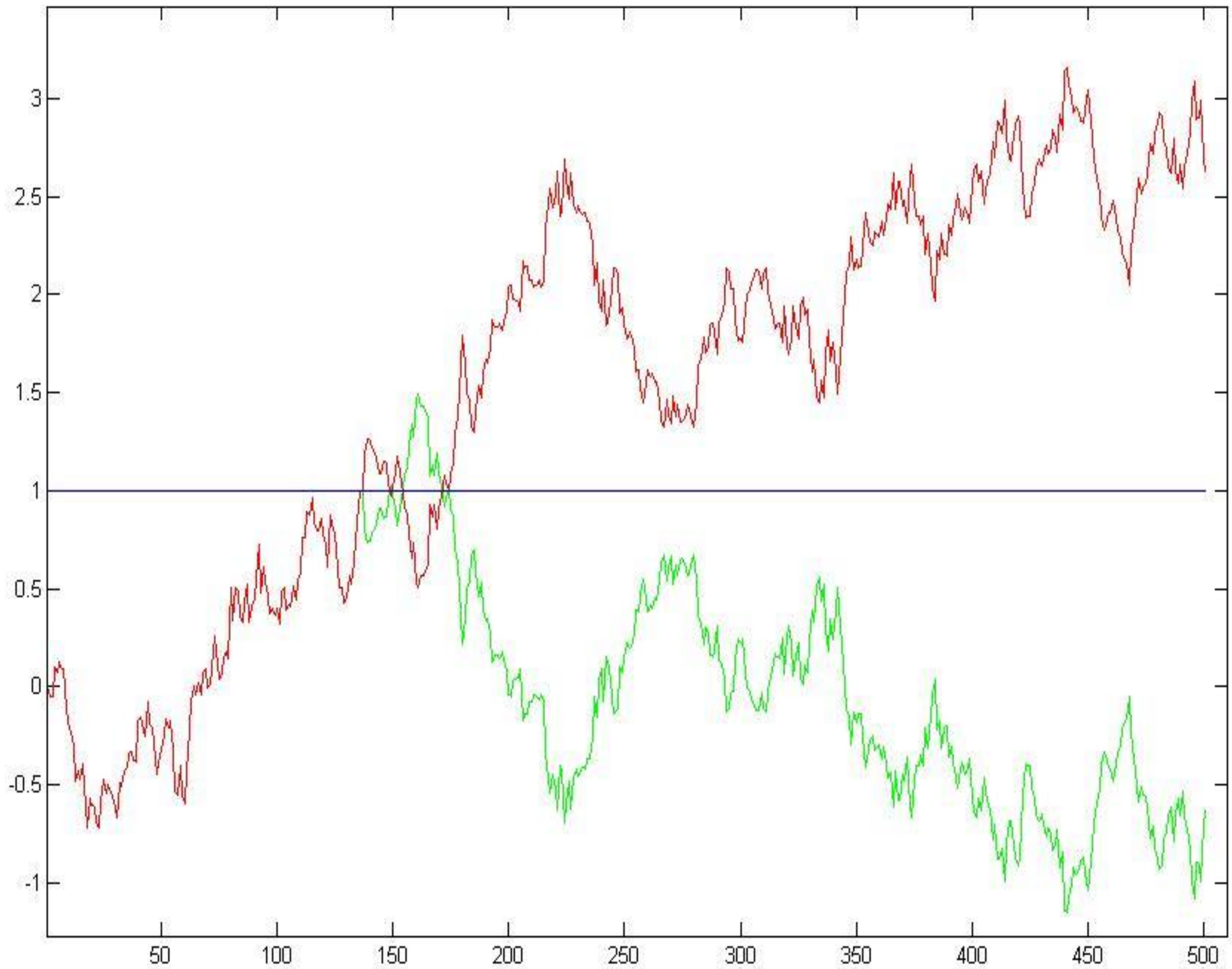
当$a<0$时，根据对称性，τ_a与τ_{-a}同分布，因此

$$P\{\tau_a \le t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-a/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

故对于任意的$a \ne 0$，我们有

$$P\{\tau_a \le t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$$


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500



3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500

推论5.1 $P\{\tau_a < \infty\} = 1.$

推论5.2 $E[\tau_a] = \infty.$

定理5.2 $P\{\max\limits_{0\le s\le t} B_s \ge a\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$

证明：对于任意的a，则

$$\left\{\max_{0\le s\le t} B_s \ge a\right\} \cong \{\tau_a \le t\}.$$

故

$$P\{\max_{0\le s\le t} B_s \ge a\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|a|/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy.$$

定理5.3 $$P\left\{\min_{0\le s\le t} B_s \le a\right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|a|/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy\ .$$

证明： 对于任意的a，则

$$\left\{\min_{0\le s\le t} B_s \le a\right\} = \left\{\max_{0\le s\le t}(-B_s) \ge -a\right\}.$$

注意到，如果$\{B_t\}$为Brown运动，则$\{-B_t\}$也是Brown运动，因此

$$P\left\{\min_{0\le s\le t} B_s \le a\right\} = P\left\{\max_{0\le s\le t}(-B_s) \ge -a\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{|a|/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy.$$

课外作业：

P145　*Ex*7

§ 5.3 随机积分

5.3.1 关于时间t的积分

随机积分是随机微分方程的基础，现已广泛应用于金融工程、物理学、通讯等许多领域。事实上，在介绍连续时间随机过程遍历性时已经接触到随机积分，如$\overline{X}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt$.

定义5.3 设$X=\{X(t),\ t\in T\}$是一随机过程, 若对每个

$t\in T$，都有 $E[X^2(t)] < \infty,$

则称$\{X(t), t\in T\}$为二阶矩过程.

由Schwarz不等式可得，二阶矩过程X的均值函数$m_X(t)$和自协方差函数$R_X(s,t)$都存在. 因此，二阶矩过程是一个很大的过程类。事实上，宽平稳过程、Gauss过程、Brown运动都是二阶矩过程。

关于二阶矩过程$X=\{X(t),\ t\in T\}$，我们还进一步假设：

(i) T是一个区间或一条直线；

(ii) 对每个固定的$\omega\in\Omega$，X的轨道$X(t)$是分段连续的；

(iii) $m_X(t)$和$R_X(s,t)$是区间T上的连续函数.

设$f(t)$是T上的连续函数，对每个$\omega\in\Omega$，我们可以定义二阶矩过程X的如下积分：

$$\int_a^b f(t)X(t)dt,$$

其中$[a, b]\subseteq T$. 易知，上述积分表示一个随机变量.

二阶矩过程X积分的数字特征计算：

(1) $E[\int_a^b f(t)X(t)dt]=\int_a^b f(t)m_X(t)dt$

(2) $E\left(\int_a^b f(t)X(t)dt\int_c^d g(t)X(t)dt\right)$

$$=\int_a^b f(t)\left(\int_c^d g(s)E[X(t)X(s)]ds\right)dt$$

(3) $Var\left(\int_a^b f(t)X(t)dt\right)=\int_a^b f(t)\int_a^b f(s)R_X(s,t)dsdt$

(4) $Cov\left(\int_a^b f(t)X(t)dt,\int_c^d g(t)X(t)dt\right)$

$$=\int_a^b f(t)\left(\int_c^d g(s)R_X(s,t)ds\right)dt$$

例5.1 设$\{W_t, -\infty<t<\infty\}$是方差参数$\sigma^2$为的Brown运动，

$f(t)$和$g(t)$在$(-\infty, \infty)$上连续可微，则

$$E\left(\int_a^b f'(t)(W_t-W_a)dt\int_a^b g'(t)(W_t-W_a)dt\right)$$

$$=\int_a^b f'(t)\left(\int_a^b g'(s)R_W(s,t)ds\right)dt$$

$$=\sigma^2\int_a^b f'(t)\left(\int_a^b g'(s)(t\wedge s-a)ds\right)dt$$

$$=\sigma^2\int_a^b f'(t)\left(\int_a^t g'(s)(s-a)ds\right)dt$$

$$=\sigma^2\int_a^b [f(t)-f(b)][g(t)-g(b)]dt,$$

其中最后一个等式由多次利用分步积分可得.

进一步可得：

$$E\left(\int_0^1 W_t dt\right)^2 = \sigma^2 \int_0^1 (t-1)^2 dt = \sigma^2/3.$$

由于Brown运动是Gauss过程，因此 $\int_0^1 W_t dt$ 是均值为0，方差为 $\sigma^2/3$ 的正态随机变量。

5.3.2 关于Brown运动的积分

设$\{W_t, -\infty<t<\infty\}$是方差参数为$\sigma^2$的Brown运动，$a$和$b$为两个有限数，$f(t)$是$[a,b]$上的连续可微函数，考虑下面定义的和式

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$

的极限，其中$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$，且

$$\lambda \overset{def.}{=} \max_{0\le k\le n-1} \Delta t_k \to 0, \quad (n \to \infty),$$

这里 $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$.

和式变形：

由于W_t微分不存在，但$f(t)$是在$[a,b]$上时连续可微函数，因此，原来和式可以变形为：

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$

$$= f(t_n)W_{t_n} - f(t_1)W_{t_0} - \sum_{k=1}^{n-1} (f(t_{k+1}) - f(t_k))W_{t_k}$$

$$= f(b)W_b - f(t_1)W_a - \sum_{k=1}^{n-1} f'(\xi_k)W_{t_k}\Delta t_k$$

其中 $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$.

当$\lambda \stackrel{def.}{=} \max\limits_{0\le k\le n-1} \Delta t_k \to 0$ 时，我们有

$$f(b)W_b - f(t_1)W_a - \sum_{k=1}^{n-1} f'(\xi_k)W_{t_k}\Delta t_k$$

$$\to f(b)W_b - f(a)W_a - \int_a^b f'(t)W_t dt.$$

因此，

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = f(b)W_b - f(a)W_a - \int_a^b f'(t)W_t dt,$$

故我们可以定义关于**Brown运动的积分**为

$$\boxed{\int_a^b f(t)dW_t = f(b)W_b - f(a)W_a - \int_a^b f'(t)W_t dt.}$$

关于Brown运动积分的性质：

性质1 $E[\int_a^b f(t)dW_t]=0.$

性质2 $E\left(\int_a^b f(t)dW_t\int_a^b g(t)dW_t\right)=\sigma^2\int_a^b f(t)g(t)dt.$

证明： 注意到

$$\int_a^b f(t)dW_t = f(b)(W_b-W_a)-\int_a^b f'(t)(W_t-W_a)dt$$

$$\int_a^b g(t)dW_t = g(b)(W_b-W_a)-\int_a^b g'(t)(W_t-W_a)dt,$$

则

$$E\left(\int_a^b f(t)dW_t \int_a^b g(t)dW_t\right)$$

$$= E\left(f(b)(W_b - W_a) - \int_a^b f'(t)(W_t - W_a)dt\right)$$

$$\cdot\left(g(b)(W_b - W_a) - \int_a^b g'(t)(W_t - W_a)dt\right)$$

$$= E\left(f(b)g(b)(W_b - W_a)^2\right)$$

$$- E\left(f(b)(W_b - W_a)\int_a^b g'(t)(W_t - W_a)dt\right)$$

$$- E\left(g(b)(W_b - W_a)\int_a^b f'(t)(W_t - W_a)dt\right)$$

$$+ E\left(\int_a^b f'(t)(W_t - W_a)dt \int_a^b g'(t)(W_t - W_a)dt\right)$$

$$E\left((W_b - W_a)^2\right) = (b-a)\sigma^2$$

$$E\left((W_b - W_a)\int_a^b g'(t)(W_t - W_a)dt\right)$$

$$= E\left(\int_a^b g'(t)(W_b - W_a)(W_t - W_a)dt\right)$$

$$= \int_a^b g'(t)E\left[(W_b - W_a)(W_t - W_a)\right]dt$$

$$= \sigma^2 \int_a^b g'(t)(t-a)dt$$

$$= \sigma^2\left((b-a)g(b) - \int_a^b g(t)dt\right)$$

$$E\left(\int_a^b f'(t)(W_t - W_a)dt \int_a^b g'(t)(W_t - W_a)dt\right)$$

$$= E\left(\int_a^b f'(t)(W_t - W_a)\int_a^b g'(s)(W_s - W_a)dsdt\right)$$

$$= \int_a^b\int_a^b f'(t)g'(s)E\left[(W_t - W_a)(W_s - W_a)\right]dsdt$$

$$= \sigma^2 \int_a^b\int_a^b f'(t)g'(s)(t \wedge s - a)dsdt$$

$$= \sigma^2 \int_a^b f'(t)\int_a^t g'(s)(s-a)dsdt + \sigma^2 \int_a^b f'(t)\int_t^b g'(s)(t-a)dsdt$$

$$= \sigma^2\left((b-a)f(b)g(b) - f(b)\int_a^b g(t)dt - g(b)\int_a^b f(t)dt\right)$$

$$+ \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)dt$$

因此，

$$E\left(\int_a^b f(t)dW_t \int_a^b g(t)dW_t\right) = \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)dt$$

性质3 $E\left(\int_a^b f(t)dW_t \int_c^d g(t)dW_t\right) = 0, \quad a \le b \le c \le d.$

推论1 $Cov\left(\int_a^b f(t)dW_t, \int_a^b g(t)dW_t\right) = \sigma^2 \int_a^b f(t)g(t)dt.$

推论2 $Var\left(\int_a^b f(t)dW_t\right) = \sigma^2 \int_a^b f^2(t)dt.$

推论3 $E\left(\int_a^b f(t)dW_t \int_a^c g(t)dW_t\right) = \sigma^2 \int_a^{b\wedge c} f(t)g(t)dt.$

例5.2 设$\{X(t), t \geq 0\}$定义为

$$X(t) = \int_0^t \exp\{\alpha(t-u)\} dW_u, \qquad t \geq 0,$$

其中α为实常数，求X的均值和协方差。

解： 由性质1和推论1知，

$$E[X(t)] = 0.$$

由推论1知，对于任意的$t \geq 0, s \geq 0$，我们有

$$Cov(X(t), X(s)) = E[X(t)X(s)]$$

$$= E\left(\int_0^t \exp\{\alpha(t-u)\}dW_u \int_0^s \exp\{\alpha(s-u)\}dW_u\right)$$

$$= \exp\{\alpha(t+s)\}E\left(\int_0^t \exp\{-\alpha u\}dW_u \int_0^s \exp\{-\alpha u\}dW_u\right)$$

$$= \exp\{\alpha(t+s)\}\sigma^2 \int_0^{t\wedge s} \exp\{-2\alpha u\}du$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{\alpha(t+s)} - e^{\alpha|t-s|}\right).$$

5.3.3 Ito微分公式

设$\{B_t, -\infty<t<\infty\}$为标准Brown运动，把$[0, t]$分成$n$份，$0= t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$，　令

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$$

$$\lambda_n \overset{def.}{=} \max_{1\le k\le n} \Delta t_k$$

$$\Delta B_{t_k} = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\Delta B_{t_k})^2.$$

引理5.1 $S_n \overset{L_2}{=} t,$ 即：$\lim\limits_{\lambda_n \to 0} E(S_n - t)^2 = 0.$

证明： 由于Brown运动是独立增量过程，且

$$\Delta B_{t_k} = B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \sim N(0, \Delta t_k),$$

故

$$E(\Delta B_{t_k})^2 = \Delta t_k, \qquad E(\Delta B_{t_k})^4 = 3(\Delta t_k)^2,$$

$$E(S_n - t)^2 = E\left(\sum_{i=1}^{n}[(\Delta B_{t_k})^2 - \Delta t_k]\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}E[(\Delta B_{t_k})^2-\Delta t_k]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{E[(\Delta B_{t_k})^4]-2\Delta t_k E[(\Delta B_{t_k})^2]+(\Delta t_k)^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[3(\Delta t_k)^2-2(\Delta t_k)^2+(\Delta t_k)^2]$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}(\Delta t_k)^2\le 2\lambda_n\sum_{i=1}^{n}\Delta t_k=2t\lambda_n\to 0,\quad \lambda_n\to 0.$$

注. 如果把$(dB_t)^2$理解为 $\sum_{i=1}^{n}(\Delta B_{t_k})^2$，则 $(dB_t)^2\overset{L_2}{=}dt.$

定理5.3 设实函数$f(x,y)$关于x有二阶连续偏导数，关于y有一阶连续偏导数，若$\{B_t, t \geq 0\}$是参数为σ^2的Brown运动，则

$$df(t,B_t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dt+\frac{\partial f}{\partial y}dB_t.$$

证明： 对于$f(x,y)$在(x_0,y_0)处进行Taylor展开，得

$$f(x_0+u,y_0+v)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta u,y_0+\theta v),\quad 0<\theta<1.$$

注意到$(dB_t)^2 \approx dt$, 我们有

$$df(t,B_t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dt+\frac{\partial f}{\partial y}dB_t.$$

例5.3 已知 $f(t,B_t)=e^{\sigma B_t}$; 其中B_t为标准Brown运

动，求$df(t,B_t)$.

解：在定理5.3中取$f(x)=e^x$得

$$\begin{aligned} de^{\sigma B_t} &= \frac{1}{2}\sigma^2 e^{\sigma B_t}dt+\sigma e^{\sigma B_t}dB_t \\ &= e^{\sigma B_t}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 dt+\sigma dB_t\right). \end{aligned}$$

定理5.4 (一般的Ito公式)设实函数$f(x,y)$关于x有二阶连续偏导数，关于y有一阶连续偏导数，若$\{B_t,\ t\geq 0\}$是为标准Brown运动，则

$$df(t,X_t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\mu(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}\sigma^2(t,X_t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dt+\sigma(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial y}dB_t,$$

其中随机过程$X(t)$满足下面随机微分方程

$$dX_t=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dB_t.$$

证明略。

课外作业:

Page 145 Ex 8

Page 146 Ex 11