第七章 常微分方程数值解

中国科学技术大学　数学学院

chenxjin@ustc.edu.cn

前言

前言

- 微分方程作为方程的基本类型之一，在自然界与工程界有很广泛的应用，很多问题的数学模型都是微分方程.

前言

- 微分方程作为方程的基本类型之一，在自然界与工程界有很广泛的应用，很多问题的数学模型都是微分方程.
- 绝大多数微分方程是没有解析解表达式的（没有表达式，当然也无法获得其精确解），此时其数值近似解显得尤其重要，它甚至能帮助人们研究其精确解的一些性质.

本章我们将讨论常微分方程的数值解法.

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha\beta_1(t)\cdot\eta(t)\cdot I\cdot\frac{S}{S+E+R+\eta(t)\cdot I} - \alpha\beta_2(t)\cdot E\cdot\frac{S}{S+E+R+\eta(t)\cdot I}$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha\beta_1(t)\cdot\eta(t)\cdot I\cdot\frac{S}{S+E+R+\eta(t)\cdot I} + \alpha\beta_2(t)\cdot E\cdot\frac{S}{S+E+R+\eta(t)\cdot I} - \delta\cdot E - \varepsilon\cdot E$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta\cdot E - \gamma_1\cdot I - \gamma_2\cdot I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma_1\cdot I + \varepsilon\cdot E$$

$$\frac{dD}{dt} = \gamma_2\cdot I$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} + \frac{dD}{dt} = 0$$

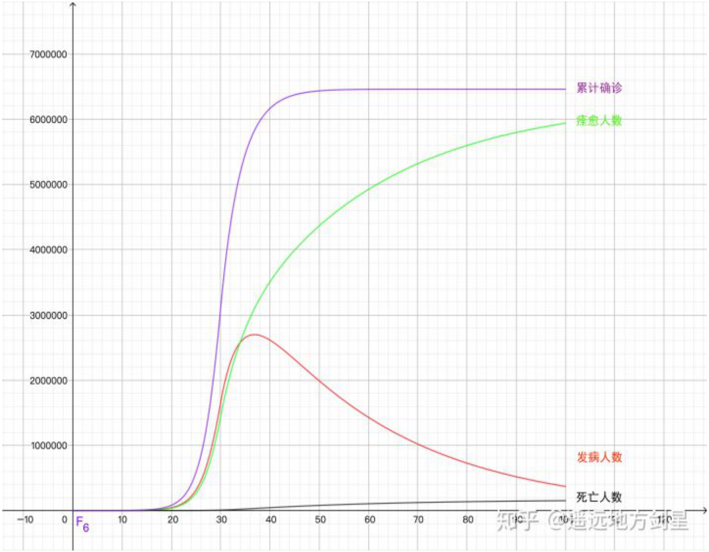
总人群数守恒

S —— 代表易感人群的数量。对于本次新冠病毒来说，我们已经知道了，除已经生病痊愈的人以外，其余“上至九十九、下至不会走”的全体人群都是易感人群。

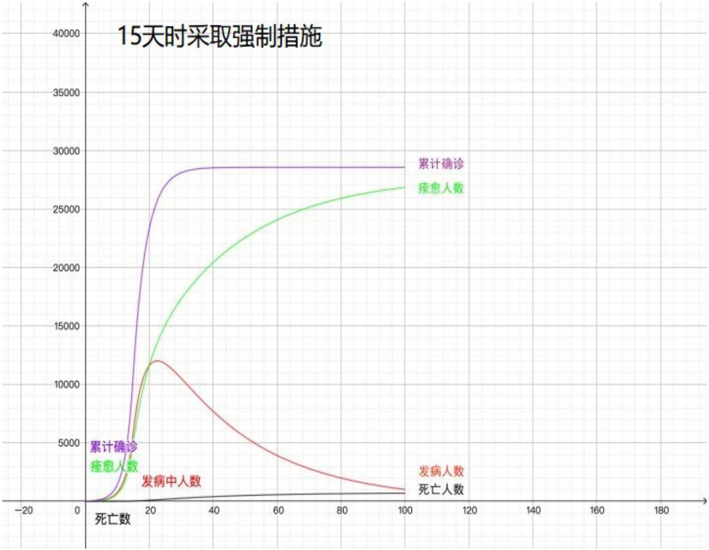
E —— 代表被感染后且处于潜伏期的人群数量。处于潜伏期的人因为没有任何症状，自己也不知道已经被病毒感染。我们现在大概知道，新冠病毒的平均潜伏期约为7天。

I —— 代表被感染后经过潜伏期已经发病的人群数量。已经发病意味着已经出现了症状，自己和他人也基本知道了已经被感染。

R —— 生病后痊愈的人群数量（在SEIR模型中，R也包括因病去世的人）。对病毒这种传染病来说，这部分人已经拥有了抵抗病毒的能力，一般不会再次被感染。本文的模型中将 R 具体分拆为 R 和 D ，分别表示痊愈人群和去世人群。



7000000
6000000
5000000
4000000
3000000
2000000
1000000
-10
0
10
20
30
40
50
60
70
80
F6
累计确诊
痊愈人数
发病人数
死亡人数
知乎 @遥远地方的星



15天时采取强制措施
累计确诊
痊愈人数
发病人数
死亡人数
累计确诊
痊愈人数
发病中人数
死亡数
40000
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
−20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180

本章的重点是初值问题$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ （$a \le x \le b$）的解.

本章的重点是初值问题$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ （$a \le x \le b$）的解.

为了使解存在唯一，一般要求 f 对 y 满足Lipschitz条件：

$$\exists \text{正常数 L}, s.t. \left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L \left| y_1 - y_2 \right|, \forall y_1, y_2$$

本章的重点是初值问题$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ （$a \le x \le b$）的解.

为了使解存在唯一，一般要求 f 对 y 满足Lipschitz条件：

$$\exists \text{正常数 L}, s.t. \left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|, \forall y_1, \ y_2$$

微分方程的解函数一般不能或不易直接写出. 微分方程的数值解，是求解函数在某些节点的近似值. 通过解函数在这些点上的近似值，能帮助我们对它有一些基本和重要的理解.

微分方程数值解

求微分方程数值解的基本步骤如下：

微分方程数值解

求微分方程数值解的基本步骤如下：

① 对区间作分割： $\Delta_I : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，
记$y(x_i)$的近似值(即**数值解**)为y_i（$0 \leq i \leq n$）.
$\{y_i\}$称为Δ_I 上的格点函数，我们的目的就是求这个**格点函数**.

微分方程数值解

求微分方程数值解的基本步骤如下：

① 对区间作分割： $\Delta_I : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，记$y(x_i)$的近似值(即**数值解**)为$y_i$（$0 \le i \le n$）. $\{y_i\}$称为Δ_I 上的格点函数，我们的目的就是求这个**格点函数**.

② 由微分方程建立求格点函数的**差分方程或差分格式**（i.e., 递推关系式）. 这个方程应该满足：
A、解存在唯一；B、稳定，收敛；C、相容

微分方程数值解

求微分方程数值解的基本步骤如下：

① 对区间作分割： $\Delta_I : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
记$y(x_i)$的近似值(即**数值解**)为y_i（$0 \le i \le n$）.
$\{y_i\}$称为Δ_I 上的格点函数，我们的目的就是求这个**格点函数**.

② 由微分方程建立求格点函数的**差分方程或差分格式**（i.e., 递推关系式）. 这个方程应该满足：
A、解存在唯一；B、稳定，收敛；C、相容

③ 解差分方程，求出格点函数.

微分方程数值解

求微分方程数值解的基本步骤如下：

① 对区间作分割： $\Delta_I : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,
记$y(x_i)$的近似值(即**数值解**)为y_i（$0 \le i \le n$）.
$\{y_i\}$称为Δ_I 上的格点函数，我们的目的就是求这个**格点函数**.

② 由微分方程建立求格点函数的**差分方程或差分格式**（i.e., 递推关系式）. 这个方程应该满足：
A、解存在唯一；B、稳定，收敛；C、相容

③ 解差分方程，求出格点函数.

数值方法主要研究步骤②，即如何建立差分方程，并研究差分方程的性质.

为了考察数值方法提供的数值解是否实用，还需要讨论：

① 收敛性：步长充分小时，所得到的数值解能否逼近问题的真解.

② **误差推导(主要是局部截断误差及误差主项的推导，进而判断出差分方程的精度阶数)**

③ 稳定性：产生的舍入误差在以后各步计算中，是否会无限制扩大.

下面我们考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (a \le x \le b)$$

关于等距分割(即节点均匀,i.e,
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 这里, $x_k = a + kh$,
$h = \frac{b-a}{n}$为步长)的数值解.

下面我们考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (a \le x \le b)$$

关于**等距分割**(即节点均匀,i.e, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 这里, $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$为步长)的数值解.

建立差分格式主要有三种方法:

- 基于数值微分, i.e., **向前，向后Euler公式**

下面我们考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (a \le x \le b)$$

关于等距分割(即节点均匀,i.e, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 这里, $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$为步长)的数值解.

建立差分格式主要有三种方法:

- 基于数值微分, i.e., **向前，向后Euler公式**
- 基于数值积分, i.e., **向前、向后Euler公式, 梯形公式, 线性多步法**

下面我们考虑初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (a \leq x \leq b)$$

关于等距分割(即节点均匀,i.e,
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 这里, $x_k = a + kh$,
$h = \frac{b-a}{n}$为步长)的数值解.

建立差分格式主要有三种方法:

- 基于数值微分, i.e., **向前, 向后Euler公式**
- 基于数值积分, i.e., **向前、向后Euler公式, 梯形公式, 线性多步法**
- 基于Taylor展开, i.e., **Runge-Kutta方法**

Euler公式

基于数值微分建立差分格式的典型例子为Euler公式.

Euler公式

基于数值微分建立差分格式的典型例子为Euler公式.

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用向前差商公式近似导数得：

Euler公式

基于数值微分建立差分格式的典型例子为Euler公式.

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用向前差商公式近似导数得：

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \approx f(x_n, y_n), \quad y(x_n) \approx y_n$$

Euler公式

基于数值微分建立差分格式的典型例子为Euler公式.

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用向前差商公式近似导数得：

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \approx f(x_n, y_n), \quad y(x_n) \approx y_n$$

可得**向前Euler公式**：$y(x_{n+1}) \approx \underline{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$.

它为一步显式格式.

Euler公式

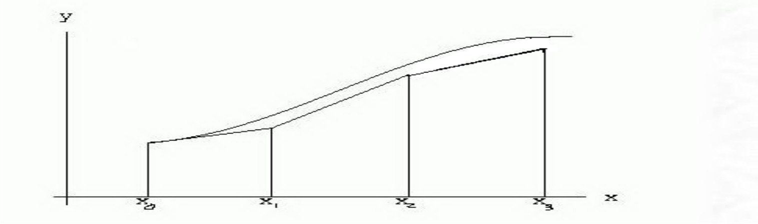
基于数值微分建立差分格式的典型例子为Euler公式.

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用向前差商公式近似导数得：

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \approx f(x_n, y_n), \quad y(x_n) \approx y_n$$

可得**向前Euler公式**：$y(x_{n+1}) \approx \underline{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$.

它为一步显式格式. 几何意义为：**用折线近似解函数**.



向前Euler法的几何意义

1. y(x)过点$P_0(x_0,y_0)$且在任意点(x,y)的切线斜率为f(x,y),

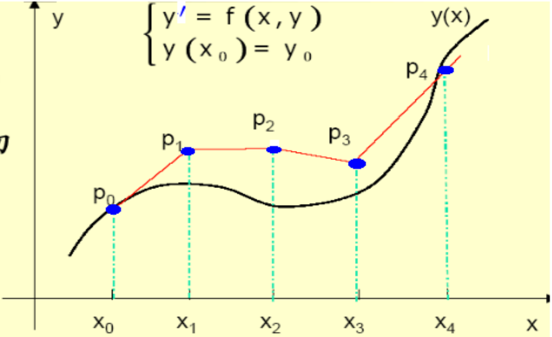
2. y(x)在点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为:

$$y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$$

在切线上取点$P_1\ (x_1,y_1)$

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$$

y_1正是Euler公式所求。



3. 类似2，过P_1以$f(x_1,y_1)$为斜率作y(x)的切线，在其上取点$P_2(x_2,y_2)$，依此类推...

4.折线$P_0\ P_1\ P_2 \ldots P_n \ldots$作为曲线y(x)的近似

——欧拉折线法

向后Euler公式

在等式 $y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$中，用向后差商近似导数，则：

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \approx f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

向后Euler公式

在等式 $y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$中，用向后差商近似导数，则：

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \approx f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

可得**向后(隐式)Euler公式**：$\underline{y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}$

$$y(x_{n+1}) \approx \underline{y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})}$$

它为一步隐式格式，需用迭代法求解 y_{n+1}.

向后Euler公式

在等式 $y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$中，用向后差商近似导数，则：

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \approx f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

可得**向后(隐式)Euler公式**：$\underline{y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}$

$$y(x_{n+1}) \approx \underline{y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})}$$

它为一步隐式格式，需用迭代法求解 y_{n+1}. 例如：最简单的迭代方法是**Picard格式**：

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) \end{cases}$$

可证明：当h充分小时，Picard迭代一定收敛.

例. 用向前欧拉公式求解

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad 取 h = 0.1$$

例. 用向前欧拉公式求解

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取 $h = 0.1$

解： 显然 $f(x,y) = y - \dfrac{2x}{y}$ $x_0 = 0, y_0 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$= y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n})$$

例. 用向前欧拉公式求解

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

取$h = 0.1$

解： 显然 $f(x,y) = y - \dfrac{2x}{y}$ $x_0 = 0, y_0 = 1$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

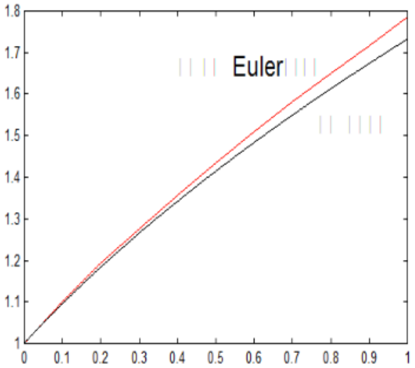
$$= y_n + h(y_n - \frac{2x_n}{y_n})$$

得 $y_1 = y_0 + h(y_0 - \dfrac{2x_0}{y_0}) = 1 + 0.1(1 - \dfrac{2\times 0}{1}) = 1.1$

$$y_2 = y_1 + h(y_1 - \frac{2x_1}{y_1})$$

依此类推，有

x_n	y_n	$y(x_n)$
0	1.0000	1.0000
0.1000	1.1000	1.0954
0.2000	1.1918	1.1832
0.3000	1.2774	1.2649
0.4000	1.3582	1.3416
0.5000	1.4351	1.4142
0.6000	1.5090	1.4832
0.7000	1.5803	1.5492
0.8000	1.6498	1.6125
0.9000	1.7178	1.6733
1.0000	1.7848	1.7321



解析解 $y = \sqrt{1 + 2x}$

局部截断误差

局部截断误差

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用中心差商近似导数，则得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

是二步二阶格式，因为该格式不稳定，一般不会采用.

局部截断误差

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用中心差商近似导数，则得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

是二步二阶格式，因为该格式不稳定，一般不会采用.

在计算y_{n+1}的局部截断误差(i.e., $R \doteq y(x_{n+1}) - y_{n+1}$)时, 通常**假定前面的计算都是精确的**, 即 $y_n = y(x_n)$, $y_{n-1} = y(x_{n-1}) \ldots$

定义：若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,我们称它具有p阶精度.

局部截断误差

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用中心差商近似导数，则得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

是二步二阶格式，因为该格式不稳定，一般不会采用.

在计算y_{n+1}的局部截断误差(i.e., $R \doteq y(x_{n+1}) - y_{n+1}$)时, 通常**假定前面的计算都是精确的**, 即 $y_n = y(x_n)$, $y_{n-1} = y(x_{n-1}) \ldots$

定义：若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,我们称它具有p阶精度.

局部截断误差

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用中心差商近似导数，则得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

是二步二阶格式，因为该格式不稳定，一般不会采用.

在计算y_{n+1}的**局部截断误差**(i.e., $R \doteq y(x_{n+1}) - y_{n+1}$)时, 通常**假定前面的计算都是精确的**, 即 $y_n = y(x_n)$, $y_{n-1} = y(x_{n-1}) \dots$

定义：若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,我们称它具有p阶精度.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \textbf{(向前Euler)} \\ \\ \end{cases}$$

局部截断误差

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用中心差商近似导数，则得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

是二步二阶格式，因为该格式不稳定，一般不会采用.

在计算y_{n+1}的局部截断误差(i.e., $R \doteq y(x_{n+1}) - y_{n+1}$)时, 通常**假定前面的计算都是精确的**, 即 $y_n = y(x_n)$, $y_{n-1} = y(x_{n-1}) \ldots$

定义：若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,我们称它具有p阶精度.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) & \textbf{(向前Euler)} \\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi) \Rightarrow & \\ & \end{cases}$$

局部截断误差

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用中心差商近似导数，则得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

是二步二阶格式，因为该格式不稳定，一般不会采用.

在计算y_{n+1}的**局部截断误差**(i.e., $R \doteq y(x_{n+1}) - y_{n+1}$)时, 通常**假定前面的计算都是精确的**, 即 $y_n = y(x_n)$, $y_{n-1} = y(x_{n-1}) \ldots$

定义：若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,我们称它具有p阶精度.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \textbf{(向前Euler)} \\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \mathbf{\frac{h^2}{2} y''(\xi)} \ \Rightarrow \\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \underline{\frac{h^2}{2} y''(x_n)} + O(h^3) \end{cases}$$

局部截断误差

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用中心差商近似导数，则得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

是二步二阶格式，因为该格式不稳定，一般不会采用.

在计算y_{n+1}的局部截断误差(i.e., $R \doteq y(x_{n+1}) - y_{n+1}$)时, 通常**假定前面的计算都是精确的**, 即 $y_n = y(x_n)$, $y_{n-1} = y(x_{n-1}) \ldots$

定义：若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,我们称它具有p阶精度.

$$\left\{\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (\textbf{向前Euler}) \\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi) \\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \underline{\frac{h^2}{2}y''(x_n)} + O(h^3) \end{array}\right. \Rightarrow \quad y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2) \Rightarrow \text{？阶}$$

局部截断误差

在等式$y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$中，用中心差商近似导数，则得

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

是二步二阶格式，因为该格式不稳定，一般不会采用.

在计算y_{n+1}的**局部截断误差**(i.e., $R \doteq y(x_{n+1}) - y_{n+1}$)时, 通常**假定前面的计算都是精确的**, 即 $y_n = y(x_n)$, $y_{n-1} = y(x_{n-1}) \ldots$

定义：若某方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,我们称它具有p阶精度.

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \textbf{(向前Euler)} \\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) \;\Rightarrow \\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(x_n)}_{\boxed{\text{误差主项}}} + O(h^3) \end{cases} \qquad y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2) \Rightarrow \ ?\ \text{阶}$$

向后Euler的局部截断误差

向后Euler公式： $y(x_{n+1}) \approx \underline{y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})}$

向后Euler的局部截断误差

向后Euler公式： $y(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

- 隐式欧拉法的局部截断误差：

由微分中值定理，得

$f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f_y'(x_{n+1}, \eta)[y_{n+1} - y(x_{n+1})]$,

η在y_{n+1}，$y(x_{n+1})$之间；

向后Euler的局部截断误差

向后Euler公式： $y(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$

☐ 隐式欧拉法的局部截断误差：

由微分中值定理，得

1 $f(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f_y'(x_{n+1}, \eta)[y_{n+1} - y(x_{n+1})]$，

η在y_{n+1}，$y(x_{n+1})$之间；

2 又 $f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) = y'(x_{n+1}) = y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2}y'''(x_n) + \cdots$

$$\therefore \quad y_{n+1} = hf_y'(x_{n+1}, \eta)[y_{n+1} - y(x_{n+1})] + y(x_n)$$

$$+ hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + \frac{h^3}{2}y'''(x_n) + \cdots$$

3 而 $y(x_{n+1}) = \overset{y_n}{y(x_n)} + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + \cdots$

从而

$$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=hf_y'(x_{n+1},\eta)\left[y(x_{n+1})-y_{n+1}\right]$$

$$-\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{3}y'''(x_n)+\cdots$$

即

$$\left[1-hf_y'(x_{n+1},\eta)\right]R_{n+1}=-\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{3}y'''(x_n)+\cdots$$

$$\frac{1}{1-hf_y'(x_{n+1},\eta)}=1+hf_y'(x_{n+1},\eta)+h^2\left(f_y'(x_{n+1},\eta)\right)^2+\cdots$$

$0<h\ll 1$

$$\left(\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\right)$$

$|x|<1$

$$\therefore\quad R_{n+1}=\left[1+hf_y'(x_{n+1},\eta)+h^2\left(f_y'(x_{n+1},\eta)\right)^2+\cdots\right]\left[-\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{3}y'''(x_n)+\cdots\right]$$

$$=-\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{6}\left[3f_y'(x_{n+1},\eta)y''(x_n)+2y''(x_n)\right]-\cdots$$

$$\therefore\quad R_{n+1}\approx-\frac{h^2}{2}y''(x_n)=O(h^2)$$

误差主项

$$\therefore\ R_{n+1} = \left[1 + hf_y'(x_{n+1},\eta) + h^2\left(f_y'(x_{n+1},\eta)\right)^2 + \cdots\right]\left[-\frac{h^2}{2}y''(x_n) - \frac{h^3}{3}y'''(x_n) + \cdots\right]$$

$$= -\frac{h^2}{2}y''(x_n) - \frac{h^3}{6}\left[3f_y'(x_{n+1},\eta)y''(x_n) + 2y''(x_n)\right] - \cdots \quad = O(h^2)$$

$$\therefore\ R_{n+1} \approx -\frac{h^2}{2}y''(x_n) = O(h^2)$$

误差主项

隐式欧拉法的局部截断误差：

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$$

即隐式欧拉公式具有 1 阶精度。

显式、隐式欧拉的局部截断误差比较

比较欧拉显式公式和隐式公式及其局部截断误差

显式公式

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n)} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

隐式公式

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h\,f(x_{n+1}, y_{n+1})}$$

$O(h^3)$

$$R_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

梯形公式 / 梯式

梯形公式–显式、隐式欧拉的平均

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

梯形公式

梯形公式–显式、隐式欧拉的平均 $O(h^?)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

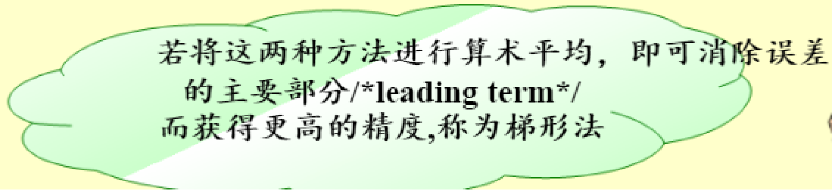
Question: 梯形公式是隐式的，还是显式格式？跟显式或隐式欧拉比，梯形公式的局部截断误差是变小还是变大了？

梯形公式

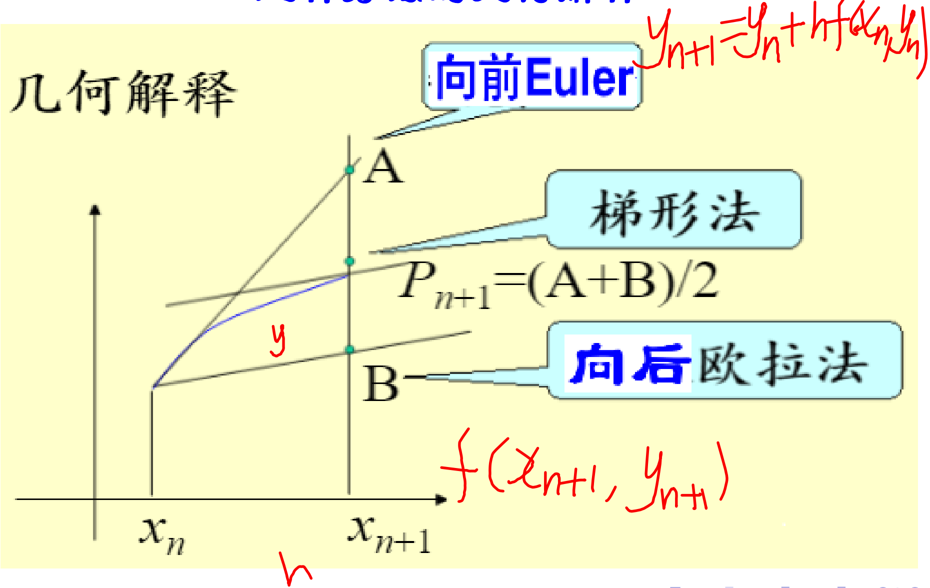
梯形公式–显式、隐式欧拉的平均

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

Question: 梯形公式是隐式的，还是显式格式？跟显式或隐式欧拉比，梯形公式的局部截断误差是变小还是变大了？



三种方法的几何解释


几何解释
向前Euler
$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$
A
梯形法
$P_{n+1}=(A+B)/2$
y
向后欧拉法
B
$f(x_{n+1},y_{n+1})$
x_n
x_{n+1}
h

整体截断误差和收敛性

整体截断误差和收敛性

在实际计算中, 从计算y_1开始，每个$y_k(1 \le k \le n)$都会有截断误差，累计后考虑它对y_{n+1}的影响，称为计算y_{n+1} 的**整体截断误差**.

整体截断误差和收敛性

在实际计算中, 从计算y_1开始，每个$y_k(1 \le k \le n)$都会有截断误差，累计后考虑它对y_{n+1}的影响，称为计算y_{n+1} 的**整体截断误差**.

例：考察**向前欧拉法** $\underline{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$ 的整体截断误差及其收敛性。

整体截断误差和收敛性

在实际计算中，从计算y_1开始，每个$y_k(1 \le k \le n)$都会有截断误差，累计后考虑它对y_{n+1}的影响，称为计算y_{n+1} 的**整体截断误差**.

例：考察**向前欧拉法** $\underline{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)}$ 的整体截断误差及其收敛性。

定理：设 $e_k = y(x_k) - y_k$， $T_{k+1} \doteq \frac{h^2}{2} y''(\xi_k)$，记$T = \max\limits_{1 \le k \le n+1} T_{n+1}$，$L$ 为 f 的Lipschitz常数. 则：

$$|e_{n+1}| \leqslant e^{L(b-a)} \left(|e_0| + \frac{T}{Lh} \right)$$

其中，$e_0 = y(x_0) - y_0$为**初始（原始）误差**. 当初始值精确(即 $e_0 = 0$)时，当$h \to 0$，则$|e_{n+1}| \to 0$. 第二项 $e^{L(b-a)} \frac{T}{Lh}$ 即是向前欧拉的**整体截断误差** (i.e., $O(h)$)。

即：当$e_0 = 0$时，向前Euler公式是收敛的.

向前欧拉的收敛性

考察局部误差的传播和积累

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$ 向前欧拉

记为 T_{n+1}

$$
\begin{aligned}
|e_{n+1}| &= |y(x_{n+1}) - y_{n+1}| \\
&\le |y(x_n) - y_n| + h|f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)| + \quad |T_{n+1}| \\
&\le |e_n| + hL|y(x_n) - y_n| + \quad |T_{n+1}| \\
&\le (1+hL)|e_n| + \quad T \quad , \quad T = \max_j |T_j| \\
&\le (1+hL)\big((1+hL)|e_{n-1}| + hT\big) + T \\
&= (1+hL)^2|e_{n-1}| + \big((1+hL)+1\big)\, T \\
&\le (1+hL)^2\big((1+hL)|e_{n-2}| + \quad T\big) + \big((1+hL)+1\big) T \\
&= (1+hL)^3|e_{n-2}| + \big((1+hL)^2 + (1+hL)+1\big)\ T \\
&\le \cdots
\end{aligned}
$$

$$\le (1+hL)^{n+1}|e_0| + \left((1+hL)^n + \cdots + (1+hL) + 1\right)\ T$$

$$= (1+hL)^{n+1}|e_0| + \frac{1-(1+hL)^{n+1}}{1-(1+hL)} T$$

$$\le (1+hL)^{n+1}|e_0| + \frac{(1+hL)^{n+1}}{hL}\ T$$

$$\le (1+hL)^{n+1}\left(|e_0| + \frac{T}{hL}\right)$$

$$\le e^{(n+1)hL}\left(\frac{T}{hL}\right)$$

$$e_0 = 0$$

$$(1+x)^n < e^{nx}$$

$$T = O(h)$$

$$\therefore \quad e_{n+1} = O(h)$$

称为整体截断误差

Remark

根据微分方程构造差分方程的一类方法是基于数值微分. 数值微分还可用插值型数值微分近似，但是通常它不能建立高阶的收敛且稳定的差分格式，故通常不会采用数值微分的方法来构造差分格式.

基于数值积分的公式

基于数值积分的公式

方程$y'(x) = f(x, y)$两边在$[x_n, x_{n+1}]$上 (记$h = x_{n+1} - x_n$)对x积分得:

基于数值积分的公式

方程$y'(x) = f(x, y)$两边在$[x_n, x_{n+1}]$上 (记$h = x_{n+1} - x_n$)对x积分得:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx \Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

基于数值积分的公式

方程$y'(x) = f(x,y)$两边在$[x_n, x_{n+1}]$上 (记$h = x_{n+1} - x_n$)对x积分得:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

若用左矩形积分公式, 即 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \approx hf(x_n, y(x_n))$,

基于数值积分的公式

方程$y'(x) = f(x, y)$两边在$[x_n, x_{n+1}]$上 (记$h = x_{n+1} - x_n$)对x积分得:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx \Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

若用左矩形积分公式, 即 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx \approx hf(x_n, y(x_n))$,
得向前Euler公式:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

基于数值积分的公式

方程$y'(x)=f(x,y)$两边在$[x_n,x_{n+1}]$上 (记$h=x_{n+1}-x_n$)对x积分得:

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

若用左矩形积分公式, 即 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \approx hf(x_n,y(x_n))$,
得向前Euler公式:

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

若用右矩形积分公式, 即 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \approx hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))$,
得向后Euler公式:

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

在等式

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

中，

在等式

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

中， 若用**梯形面积公式**来近似积分 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx \approx \frac{h}{2}\left[f\left(x_n, y(x_n)\right) + f\left(x_{n+1}, y(x_{n+1})\right)\right]$$

在等式

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

中， 若用**梯形面积公式**来近似积分 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx \approx \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\Big]$$

则得梯形公/格式(隐式格式)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

在等式

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

中， 若用**梯形面积公式**来近似积分 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx \approx \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))\Big]$$

则得**梯形公/格式(隐式格式)**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

一般先用其它比较粗糙的显式公式预估初始值，再用隐式公式 迭代一次进行修正，称为**预估-校正过程**.

例如，下面是用显式的Euler公式和隐式的梯形公式给出的**预估-校正公式**:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right] \end{cases}$$

也称为改进的Euler公式,

例如，下面是用显式的Euler公式和隐式的梯形公式给出的**预估-校正公式**：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})\right] \end{cases}$$

也称为改进的Euler公式， 它可写成

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f\left(x_n + h, y_n + hk_1\right) \end{cases}$$

例. 改进欧拉法 $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 取 $h = 0.1$

解:

例. 改进欧拉法 $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 取 $h = 0.1$

解:

$$\boxed{y_p = y_n + h f(x_n, y_n) \quad y_c = y_n + h f(x_{n+1}, y_p) \quad y_{n+1} = \frac{y_p + y_c}{2}}$$

$$y_p = y_0 + h(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}) = 1 + 0.1(1 - \frac{2 \times 0}{1}) = 1.1$$

$$y_c = y_0 + h(y_p - \frac{2x_1}{y_p}) = 1 + 0.1(1.1 - \frac{2 \times 0.1}{1.1}) = 1.0918$$

例. 改进欧拉法 $\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 取 $h = 0.1$

解:

$$\boxed{y_p = y_n + h f(x_n, y_n) \quad y_c = y_n + h f(x_{n+1}, y_p) \quad y_{n+1} = \frac{y_p + y_c}{2}}$$

$$y_p = y_0 + h(y_0 - \frac{2x_0}{y_0}) = 1 + 0.1(1 - \frac{2\times 0}{1}) = 1.1$$

$$y_c = y_0 + h(y_p - \frac{2x_1}{y_p}) = 1 + 0.1(1.1 - \frac{2\times 0.1}{1.1}) = 1.0918$$

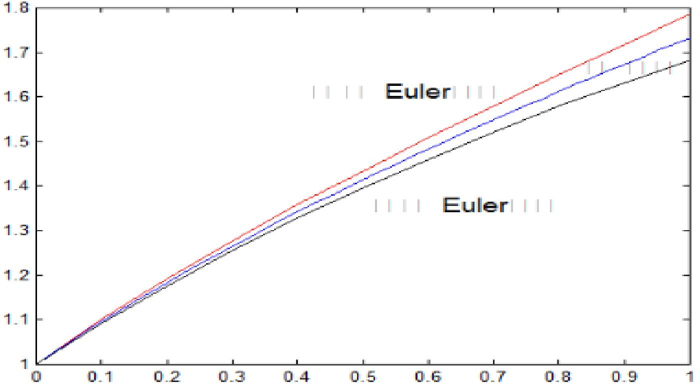
$$y_1 = \frac{y_p + y_c}{2} = 1.0959$$

$$y_p = y_1 + h(y_1 - \frac{2x_1}{y_1}) = 1.0959 + 0.1(1.0959 - \frac{2\times 0.1}{1.0959}) = 1.1872$$

$$y_c = y_1 + h(y_p - \frac{2x_2}{y_p}) = 1.0959 + 0.1(1.1872 - \frac{2\times 0.2}{1.1872}) = 1.1809$$

$$y_2 = \frac{y_p + y_c}{2} = 1.1841$$

xn	yn(改进)	yn(欧拉)	$y(x_n)$
0	1.0000	1.0000	1.0000
0.1000	1.0959	1.1000	1.0954
0.2000	1.1841	1.1918	1.1832
0.3000	1.2662	1.2774	1.2649
0.4000	1.3434	1.3582	1.3416
0.5000	1.4164	1.4351	1.4142
0.6000	1.4860	1.5090	1.4832
0.7000	1.5225	1.5803	1.5492
0.8000	1.6165	1.6498	1.6125
0.9000	1.6782	1.7178	1.6733
1.0000	1.7379	1.7848	1.7321


1.8
1.7
1.6
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
Euler
Euler

例： 解初值问题$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1.0 \end{cases}$， $0 \leq x \leq 0.4$

例： 解初值问题$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1.0 \end{cases}$， $0 \le x \le 0.4$

n	x_n
1	0.1
2	0.2
3	0.3
4	0.4

解：$h = 0.1$; $y_0 = 1.0$. 用下面的迭代公式，对每个点迭代5次.

$x_0 = 0$

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + h y_n^2 \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[y_n^2 + {y_{n+1}^{(k)}}^2 \right] \end{cases}$$

其中$k = 0, 1, 2, 3, 4$; $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

例： 解初值问题$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = 1.0 \end{cases}$， $0 \le x \le 0.4$

解：$h = 0.1$; $y_0 = 1.0$. 用下面的迭代公式，对每个点迭代5次.

$$x_0 = 0 \qquad \begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hy_n^2 \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[y_n^2 + {y_{n+1}^{(k)}}^2\right] \end{cases}$$

其中$k = 0, 1, 2, 3, 4$; $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

该方程的精确解是 $y = \dfrac{1}{1-x}$，计算结果如下表所示.

n	x_n	y_n	$y(x_n)$	$\|y_n - y(x_n)\|$
1	0.1	1.1118	1.1111	0.0007
2	0.2	1.2520	1.2500	0.0020
3	0.3	1.4331	1.4236	0.0095
4	0.4	1.6763	1.6667	0.0096

线性多步法

线性多步法

$$y' = f(x, y) \Longleftrightarrow y(\overline{x}) - y(x^*) = \int_{x^*}^{\overline{x}} f(x, y(x))dx$$

线性多步法

$$y' = f(x,y) \Longleftrightarrow y(\overline{x}) - y(x^*) = \int_{x^*}^{\overline{x}} f(x, y(x))dx$$

在前面我们用一些简单的数值积分公式建立了Euler和梯形公式等差分格式，下面给出一些更一般的基于数值积分公式构造差分方程来求解常微分方程 初值问题的方法.

线性多步法

$$y' = f(x, y) \Longleftrightarrow y(\overline{x}) - y(x^*) = \int_{x^*}^{\overline{x}} f(x, y(x))dx$$

在前面我们用一些简单的数值积分公式建立了Euler和梯形公式等差分格式，下面给出一些更一般的基于数值积分公式构造差分方程来求解常微分方程 初值问题的方法.

取 $\overline{x} = x_{n+1}, x^* = x_{n-p}$ 得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$$

右边的积分采用不同的数值积分公式，可得不同的差分方程.

若$\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$的数值积分

若$\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$的数值积分

① 以 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}$为积分节点(一般假设节点均匀)，则：

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \sum_{j=0}^{q} \alpha_j f\left(x_{n-j}, y(x_{n-j})\right) + T_{n+1}$$

若$\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$的数值积分

① 以 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}$为积分节点(一般假设节点均匀)，则：

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \sum_{j=0}^{q} \alpha_j f\big(x_{n-j}, y(x_{n-j})\big) + T_{n+1}$$

积分系数 $\alpha_j = \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} l_j(x)dx$. $l_j(x)$, T_{n+1}?

若$\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$的数值积分

① 以 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-q}$为积分节点(一般假设节点均匀)，则：

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-p}) + \sum_{j=0}^{q} \alpha_j f\big(x_{n-j}, y(x_{n-j})\big) + T_{n+1}$$

积分系数 $\alpha_j = \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} l_j(x)dx$. $l_j(x)$, T_{n+1}?

令 $r = \max\{p, q\}$，则可构造$q+1$阶$r+1$步的显式格式

$$y_{n+1} = y_{n-p} + \sum_{j=0}^{q} \alpha_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

若$\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$的数值积分

② 以$x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n-q+1}$为积分节点(一般假设节点均匀), 则同理可构造 $q+1$阶$r+1$步的隐式格式

$$y_{n+1} = y_{n-p} + \sum_{j=?}^{?} \alpha_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

若$\int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$的数值积分

② 以$x_{n+1}, x_n, \cdots, x_{n-q+1}$为积分节点(一般假设节点均匀), 则同理可构造 $q+1$阶$r+1$步的隐式格式

$$y_{n+1} = y_{n-p} + \sum_{j=?}^{?} \alpha_j f(x_{n-j}, y_{n-j})$$

- 两个控制参数p，q：
  p 控制积分区间，即$[x_{n-p}, x_{n+1}]$；q 控制积分节点个数，节点数为$q+1$，其中，**显示格式从节点x_n开始(倒着数$q+1$个)，隐式格式从节点x_{n+1} 开始(倒着数$q+1$ 个)**.
- $p=0$时，称为Adam's公式.

例：构造线性多步法$p = 1, q = 2$的显式差分格式.

例：构造线性多步法$p=1,q=2$的显式差分格式.
解：先确定积分区间以及积分节点。

例：构造线性多步法$p = 1, q = 2$的显式差分格式.
解：先确定积分区间以及积分节点。 积分区间为$[x_{n-1}, x_{n+1}]$，$q + 1 = 3$个均匀积分节点为: $\{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}\}$, 记步长$h = x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}$ $(0 < h \ll 1)$, 故有差分格式：

例：构造线性多步法$p = 1, q = 2$的显式差分格式.

解：先确定积分区间以及积分节点。 积分区间为$[x_{n-1}, x_{n+1}]$，
$q + 1 = 3$个均匀积分节点为： $\{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}\}$, 记步
长$h = x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2}$ $(0 < h \ll 1)$, 故有差分格式：

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \left[\alpha_0 f(x_n, y_n) + \alpha_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \alpha_2 f(x_{n-2}, y_{n-2})\right]$$

它为三步？阶显式格式,

例：构造线性多步法$p=1, q=2$的显式差分格式.
解：先确定积分区间以及积分节点。 积分区间为$[x_{n-1}, x_{n+1}]$，$q+1=3$个均匀积分节点为: $\{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}\}$, 记步长$h=x_n-x_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}$ $(0<h\ll 1)$, 故有差分格式：

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\left[\alpha_0 f(x_n, y_n)+\alpha_1 f(x_{n-1}, y_{n-1})+\alpha_2 f(x_{n-2}, y_{n-2})\right]$$

它为三步？阶显式格式, 其中

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})}{(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})}dx=\frac{7}{3}h \\
\alpha_1 &= \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_n)(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}-x_{n-2})}dx=-\frac{2}{3}h \\
\alpha_2 &= \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{(x_{n-2}-x_n)(x_{n-2}-x_{n-1})}dx=\frac{1}{3}h
\end{aligned}$$

故差分格式为：

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\Big[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\Big]$$

故差分格式为：

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\Big[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\Big]$$

其局部截断误差T_{n+1} (待验证，假设步长$h = x_n - x_{n-1}$ $(0 < h \ll 1)$， 参见第3版教材152 页)：

$$T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{3}h^4 y^{(4)}(x_{n-1}) + O(h^5)$$

故,该三步显式格式是三阶的。

故差分格式为：

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\Big[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\Big]$$

其局部截断误差T_{n+1} (待验证，假设步长$h = x_n - x_{n-1}$ $(0 < h \ll 1)$， 参见第3版教材152 页)：

$$T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{1}{3}h^4 y^{(4)}(x_{n-1}) + O(h^5)$$

故,该三步显式格式是**三阶**的。除了已知的y_0， 还需要知道 y_1, y_2；比如，可先用某种二阶格式(如改进的Euler公式) 去计算 y_1, y_2 (这个过程称为**起步计算**； 为了不影响格式的整体截断误差，一般起步计算的格式精度至多可低一阶).

例： 构造线性多步法$p = 2, q = 2$的隐式差分格式.

例： 构造线性多步法$p = 2, q = 2$的隐式差分格式.

解：先确定积分区间以及积分节点(均匀)。

例： 构造线性多步法$p = 2, q = 2$的隐式差分格式.

解：先确定积分区间以及积分节点(均匀)。 积分区间为 $[x_{n-2}, x_{n+1}]$， $q + 1 = 3$个积分节点分别为 $\{x_{n+1}, x_n, x_{n-1}\}$, 记步长$h = x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n$ $(0 < h \ll 1)$, 故差分格式为：

例： 构造线性多步法$p=2, q=2$的隐式差分格式.

解：先确定积分区间以及积分节点(均匀)。 积分区间为 $[x_{n-2}, x_{n+1}]$， $q+1=3$个积分节点分别为 $\{x_{n+1}, x_n, x_{n-1}\}$, 记步长$h = x_n - x_{n-1} = x_{n+1} - x_n \ (0 < h \ll 1)$, 故差分格式为：

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \left[\beta_0 f(x_{n+1}, y_{n+1}) + \beta_1 f(x_n, y_n) + \beta_2 f(x_{n-1}, y_{n-1})\right]$$

例： 构造线性多步法$p=2, q=2$的隐式差分格式.

解：先确定积分区间以及积分节点(均匀)。 积分区间为 $[x_{n-2}, x_{n+1}]$， $q+1=3$个积分节点分别为 $\{x_{n+1}, x_n, x_{n-1}\}$, 记步长$h=x_n-x_{n-1}=x_{n+1}-x_n$ $(0<h\ll 1)$, 故差分格式为：

$$y_{n+1}=y_{n-2}+\left[\beta_0 f(x_{n+1}, y_{n+1})+\beta_1 f(x_n, y_n)+\beta_2 f(x_{n-1}, y_{n-1})\right]$$

这是一个三步？阶隐式格式,其中

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \int_{x_{n-2}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n-1})}dx=\frac{3}{4}h \\
\beta_1 &= \int_{x_{n-2}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_{n+1})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n+1})(x_n-x_{n-1})}dx=0 \\
\beta_2 &= \int_{x_{n-2}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_{n+1})(x-x_n)}{(x_{n-1}-x_{n+1})(x_{n-1}-x_n)}dx=\frac{9}{4}h
\end{aligned}$$

故差分格式为：

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

故差分格式为：

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

局部截断误差T_{n+1} (推导见后)

$$T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

故差分格式为：

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

局部截断误差 T_{n+1} (推导见后)

$$T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

为了避免迭代，可用前面的三步三阶显示格式来预估 y_{n+1}，故得**预估-校正公式**：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right] \\ \\ \end{cases}$$

故差分格式为：

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

局部截断误差 T_{n+1} (推导见后)

$$T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

为了避免迭代，可用前面的三步三阶显示格式来预估 y_{n+1}，
故得**预估-校正公式**：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} & = y_{n-1} + \dfrac{h}{3}\left[7f(x_n, y_n) - 2f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_{n-2}, y_{n-2})\right] \\ \\ y_{n+1} & = y_{n-2} + \dfrac{h}{4}\left[3f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})\right] \end{cases}$$

假设解函数 $y(x)$充分光滑, 下面我们来推导该三步三阶隐式格式的**局部截断误差** $T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ **及其精度阶数**.

假设解函数 $y(x)$充分光滑, 下面我们来推导该三步三阶隐式格式的**局部截断误差** $T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ **及其精度阶数**. 首先将$f(x_{n+1}, y_{n+1})$在 $y(x_{n+1})$处对 y 变量**作Taylor展开**，得

$$\begin{cases} f(x_{n+1}, y_{n+1}) & = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f_y(x_{n+1}, \xi)(y_{n+1} - y(x_{n+1})) \\ & \end{cases}$$

假设解函数 $y(x)$充分光滑, 下面我们来推导该三步三阶隐式格式的**局部截断误差** $T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ **及其精度阶数**. 首先将$f(x_{n+1}, y_{n+1})$在 $y(x_{n+1})$处对 y 变量**作Taylor展开**，得

$$
\begin{cases}
f(x_{n+1}, y_{n+1}) & = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f_y(x_{n+1}, \xi)(y_{n+1} - y(x_{n+1})) \\
& = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi)(y(x_{n+1}) - y_{n+1}) \\
& = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi) T_{n+1}
\end{cases}
$$

接着，分别将 $y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 在 x_{n+1} 处**作Taylor展开**，得

假设解函数 $y(x)$充分光滑, 下面我们来推导该三步三阶隐式格式的**局部截断误差** $T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ **及其精度阶数**. 首先将$f(x_{n+1}, y_{n+1})$在 $y(x_{n+1})$处对 y 变量**作Taylor展开**，得

$$\begin{cases} f(x_{n+1}, y_{n+1}) & = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f_y(x_{n+1}, \xi)(y_{n+1} - y(x_{n+1})) \\ & = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi)(y(x_{n+1}) - y_{n+1}) \\ & = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi) T_{n+1} \end{cases}$$

接着，分别将 $y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 在 x_{n+1} 处**作Taylor展开**，得

$$y_{n-2} = y(x_{n-2})$$

假设解函数 $y(x)$充分光滑, 下面我们来推导该三步三阶隐式格式的**局部截断误差** $T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ **及其精度阶数**. 首先将$f(x_{n+1}, y_{n+1})$在 $y(x_{n+1})$处对 y 变量**作Taylor展开**，得

$$\begin{cases} f(x_{n+1}, y_{n+1}) & = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f_y(x_{n+1}, \xi)(y_{n+1} - y(x_{n+1})) \\ & = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi)(y(x_{n+1}) - y_{n+1}) \\ & = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi) T_{n+1} \end{cases}$$

接着，分别将 $y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 在 x_{n+1} 处**作Taylor展开**，得

$$y_{n-2} = y(x_{n-2})$$

$$= y(x_{n+1}) - (3h)y'(x_{n+1}) + \frac{(3h)^2}{2!}y''(x_{n+1}) - \frac{(3h)^3}{3!}y'''(x_{n+1}) + \frac{(3h)^4}{4!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

假设解函数 $y(x)$充分光滑, 下面我们来推导该三步三阶隐式格式的**局部截断误差** $T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ **及其精度阶数**. 首先将$f(x_{n+1}, y_{n+1})$在 $y(x_{n+1})$处对 y 变量**作Taylor展开**，得

$$\begin{cases} f(x_{n+1}, y_{n+1}) & = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f_y(x_{n+1}, \xi)(y_{n+1} - y(x_{n+1})) \\ & = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi)(y(x_{n+1}) - y_{n+1}) \\ & = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi) T_{n+1} \end{cases}$$

接着，分别将 $y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 在 x_{n+1} 处**作Taylor展开**，得

$$\begin{aligned} & y_{n-2} = y(x_{n-2}) \\ = & \ y(x_{n+1}) - (3h)y'(x_{n+1}) + \frac{(3h)^2}{2!}y''(x_{n+1}) - \frac{(3h)^3}{3!}y'''(x_{n+1}) + \frac{(3h)^4}{4!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5) \end{aligned}$$

$$f(x_{n-1}, y_{n-1}) = f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) = y'(x_{n-1})$$

假设解函数 $y(x)$充分光滑，下面我们来推导该三步三阶隐式格式的**局部截断误差** $T_{n+1} \equiv y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ **及其精度阶数**. 首先将$f(x_{n+1}, y_{n+1})$在 $y(x_{n+1})$处对 y 变量**作Taylor展开**，得

$$\begin{cases} f(x_{n+1}, y_{n+1}) & = f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) + f_y(x_{n+1}, \xi)(y_{n+1} - y(x_{n+1})) \\ & = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi)(y(x_{n+1}) - y_{n+1}) \\ & = y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi) T_{n+1} \end{cases}$$

接着，分别将 $y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 在 x_{n+1} 处**作Taylor展开**，得

$$y_{n-2} = y(x_{n-2})$$

$$= y(x_{n+1}) - (3h)y'(x_{n+1}) + \frac{(3h)^2}{2!}y''(x_{n+1}) - \frac{(3h)^3}{3!}y'''(x_{n+1}) + \frac{(3h)^4}{4!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$f(x_{n-1}, y_{n-1}) = f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) = y'(x_{n-1})$$

$$= y'(x_{n+1}) - (2h)y''(x_{n+1}) + \frac{(2h)^2}{2!}y'''(x_{n+1}) - \frac{(2h)^3}{3!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^4)$$

将前面关于 $f(x_{n+1}, y_{n+1}), y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 的三个等式一起代入差分格式(*)，即

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

经计算，整理(合并同类项)得

将前面关于 $f(x_{n+1}, y_{n+1}), y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 的三个等式一起代入差分格式(*)，即

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

经计算，整理(合并同类项)得

$y_{n+1} =$

将前面关于 $f(x_{n+1}, y_{n+1}), y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 的三个等式一起代入差分格式(*)，即

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

经计算，整理(合并同类项)得

$$y_{n+1} =$$

$$y(x_{n+1}) - (3h)y'(x_{n+1}) + \frac{(3h)^2}{2!}y''(x_{n+1}) - \frac{(3h)^3}{3!}y'''(x_{n+1}) + \frac{(3h)^4}{4!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

将前面关于 $f(x_{n+1}, y_{n+1}), y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 的三个等式一起代入差分格式(*)，即

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

经计算，整理(合并同类项)得

$$y_{n+1} =$$

$$y(x_{n+1}) - (3h)y'(x_{n+1}) + \frac{(3h)^2}{2!}y''(x_{n+1}) - \frac{(3h)^3}{3!}y'''(x_{n+1}) + \frac{(3h)^4}{4!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$+ \frac{3}{4}h(y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi)T_{n+1})$$

$$+ \frac{9}{4}h\left[y'(x_{n+1}) - (2h)y''(x_{n+1}) + \frac{(2h)^2}{2!}y'''(x_{n+1}) - \frac{(2h)^3}{3!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^4)\right]$$

将前面关于 $f(x_{n+1}, y_{n+1}), y_{n-2}, f(x_{n-1}, y_{n-1})$ 的三个等式一起代入差分格式(*)，即

$$y_{n+1} = y_{n-2} + \frac{h}{4}[3f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 9f(x_{n-1}, y_{n-1})] \quad (*)$$

经计算，整理(合并同类项)得

$$y_{n+1} =$$

$$y(x_{n+1}) - (3h)y'(x_{n+1}) + \frac{(3h)^2}{2!}y''(x_{n+1}) - \frac{(3h)^3}{3!}y'''(x_{n+1}) + \frac{(3h)^4}{4!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$+ \frac{3}{4}h(y'(x_{n+1}) - f_y(x_{n+1}, \xi)T_{n+1})$$

$$+ \frac{9}{4}h\left[y'(x_{n+1}) - (2h)y''(x_{n+1}) + \frac{(2h)^2}{2!}y'''(x_{n+1}) - \frac{(2h)^3}{3!}y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^4)\right]$$

$$\Longrightarrow$$

$$0 = T_{n+1} + (\tfrac{27}{8} - 3)h^4y^{(4)}(x_{n+1}) - \tfrac{3}{4}f_y(x_{n+1}, \xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1}, \xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1 - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h\right)T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{1}{(1-\frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h)}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1 - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h\right)T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{1}{(1-\frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h)}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5) \qquad (0 < h \ll 1)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\left\{1 + \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h + O(h^2)\right\}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1 - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h\right)T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{1}{(1-\frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h)}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5) \qquad (0 < h \ll 1)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\left\{1 + \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h + O(h^2)\right\}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1 - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h\right)T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{1}{(1-\frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h)}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5) \qquad (0 < h \ll 1)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\left\{1 + \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h + O(h^2)\right\}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow y(x_{n+1}) - y_{n+1} \quad = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1 - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h\right)T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{1}{\left(1 - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h\right)}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5) \qquad (0 < h \ll 1)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\left\{1 + \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h + O(h^2)\right\}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

误差主项

$$\Leftrightarrow 0 = T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1 - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h\right)T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{1}{(1-\frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h)}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5) \qquad (0 < h \ll 1)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\left\{1 + \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h + O(h^2)\right\}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5) \qquad \boxed{\text{误差主项}}$$

故，该三阶隐式格式的**局部截断误差**为$T_{n+1} \approx -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1})$, 精度阶数为

$$\Leftrightarrow 0 = T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)hT_{n+1} + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \left(1 - \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h\right)T_{n+1} + \frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{1}{(1-\frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h)}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5) \qquad (0 < h \ll 1)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\left\{1 + \frac{3}{4}f_y(x_{n+1},\xi)h + O(h^2)\right\}\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

$$\Leftrightarrow y(x_{n+1}) - y_{n+1} = -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1}) + O(h^5)$$

误差主项

故，该三阶隐式格式的**局部截断误差**
为 $T_{n+1} \approx -\frac{3}{8}h^4 y^{(4)}(x_{n+1})$, 精度阶数为 $4 - 1 = 3$.