

2021 年秋季学期算法基础期末考试（样卷）

学号 _____ 姓名 _____

主定理： 令 $a \geq 1$ 和 $b > 1$ 是常数， $f(n)$ 是一个函数， $T(n)$ 是定义在非负整数上的递归式：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

其中我们将 n/b 解释为 $\lfloor n/b \rfloor$ 或 $\lceil n/b \rceil$ 。那么 $T(n)$ 有如下渐进界：

1. 若对某个常数 $\varepsilon > 0$ 有 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ ，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ 。
2. 若对整数 $k \geq 0$ 有 $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ ，则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$ 。
3. 若对某个常数 $\varepsilon > 0$ 有 $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ ，且对某个常数 $c < 1$ 和所有足够大的 n 有 $af(n/b) \leq cf(n)$ ，则 $T(n) = \Theta(f(n))$ 。

Master Theorem: Let $a \geq 1$ and $b > 1$ be constants and $f(n)$ be a function. Let $T(n)$ be defined on the nonnegative integers by the following recurrence

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Notice that here n/b can be interpreted as either $\lfloor n/b \rfloor$ or $\lceil n/b \rceil$. Then $T(n)$ can be bounded asymptotically as follows:

1. If there exists a constant $\varepsilon > 0$ such that $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. If there exists an integer $k \geq 0$ such that $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ then $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.
3. If there exists a constant $\varepsilon > 0$ such that $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, and if $af(n/b) \leq cf(n)$ for some constant $c < 1$, then $T(n) = \Theta(f(n))$.

一、**判断题**（根据表述判断正误，并简要说明理由；每题 6 分，共 30 分）。

1. (T, F) 递归式 $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n \lg n$ 的解为 $T(n) = \Theta(n^{\lg 3})$ 。

2. (T, F) 对于一个无序的数组，可以在 $O(n)$ 的时间内求出，从这数组的第 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 小的数到第 $2\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 小的数的所有数之和。

3. (T, F) 对于一个含有 n 个点以及 m 条边的有向图，其中所有的边的权重都大于 0，那么可以在 $O(mn + n^2 \lg n)$ 的时间内求出所有点对之间的最短路径。

4. (T, F) $2-SAT$ (可满足性) 问题和 $3-SAT$ 问题均属于 NPC 问题, 其中 $3-SAT$ 问题是 $NP-hard$ 难度的, 而 $2-SAT$ 问题可在多项式时间内求解。

5. (T, F) 多项式时间近似模式 (PTAS) 是这样一种近似算法: 它的输入除了该问题的实例外, 还有一个值 $\epsilon > 0$, 使得对于任何固定的 ϵ , 该模式是一个 $(1 + \epsilon)$ 的近似算法并且都以其输入实例规模 n 的多项式时间运行。

二、简答题 (根据题目要求写出解答过程; 每题 10 分, 共 40 分)。

1. 分治策略 (Divide-and-Conquer) 是我们在算法设计中经常用到的方法。同时, 递归式与分治方法紧密相关, 它可以用来刻画分治算法的运行时间。请说明何为分治策略以及你所知道的求解递归式的方法。

2. 数据库中存储了大小为 n , 取值范围在 0 到 750 区间的整数数组, 要求数据库对该数组做某种线性时间的预处理, 使得对于任意的统计某个区间 $[a, b], a, b \in [0, k]$ 元素个数的查询需求, 该数据库可以在 $O(1)$ 时间内返回结果。

3. 对于 n 件物品, 背包容量为 W 的 0/1 背包问题, 其中第 i 件物品的价值为 v_i , 重量为 w_i 。请写出用动态规划求解该问题的时间复杂度, 并解释为什么该算法被称为伪多项式时间算法。

4. 计算 KMP 算法中对应于模式 $P = ababbabbabbababbabb$ 的前缀函数 π .

三、综合题（根据题目要求写出解答过程；每题 15 分，共 30 分）。

1. 给定一排共 n 堆石子，其中第 i 堆石子的个数为 a_i ，现在需要将石子合并为一堆，每次操作只允许合并相邻的两堆石子，代价为被合并的两堆石子的个数之和。

(1) 请使用动态规划（Dynamic Programming）的方法求合并石子的最小代价，列出状态转移方程并分析时间复杂度。

(2) 假设合并操作可以合并任意两堆石子（即不需要相邻），请设计一种渐进时间复杂度为 $O(n \lg n)$ 的算法求解合并石子的最小代价。

2. 给定一个无向图 $G = (V, E)$, 假设其所有边的权重各不相同。我们定义一个第二小生成树: 假设 \mathcal{T} 是图 G 的所有生成树的集合, T 是图 G 的最小生成树, 那么图 G 的第二小生成树 T_2 满足 $w(T_2) = \min_{T' \in \mathcal{T} - T} w(T')$, 其中 $w(T')$ 代表了生成树 T' 的权重之和。

(1) 请给出一个例子, 说明第二小生成树不是唯一的。

(2) 请证明, 存在边 $(u, v) \in T$ 和边 $(x, y) \notin T$ 满足 $T - (u, v) + (x, y)$ 是图 G 的一棵第二小生成树。

四、附加题 (根据题目要求写出解答过程; 每题 10 分, 共 10 分)。

在旅行商问题 (TSP) 中, 给定平面 n 个点作为输入, 希望求出连接所有点的最短巡游路线。这个问题是 $NP-Hard$ 问题。

为了简化 TSP 问题, 我们限制巡游路线为双调巡游 (bitonic tours), 即从最左边的点开始, 严格向右前进直到最右端的点, 然后调头严格向左前进, 直至回到起始点。下图是一个 $n = 7$ 的平面图的两双调巡游的方案。

设计一个 $O(n^2)$ 时间的最优双调巡游路线算法 (路线长度最短)。你可以认为任何两个点的 x 坐标均不同, 且所有实数运算都花费单位时间。