Homework07 2021.11.27

1

如果将输入的图用邻接矩阵来表示，并修改算法来应对此种形式的输入，请问 BFS 的运行时间将是多少?

每个结点出队入队一次，出队入队的时间均为$O(1)$，因此，对队列进行操作的总时间为$O(V)$。

扫描邻接矩阵所需要的时间为$O(V^2)$

所以广度优先搜索的运行时间为$O(V+V^2)$

2

对于有向图 $G=(V,E)$ 来说，如果 $u \rightarrow v$意味着图 G 至多包含一条从u 到 v 的简单路径，则图 G 是单连通图。请给出一个有效算法来判断一个有向图是否是单连通图。

算法思想：对于有向图$G=(V,E)$中的每一个点做一次DFS，如果得到一棵DFS树且没有出现DFS树内横向边或前向边，则此图为单连通图。一次DFS的时间复杂度为$O(V+E)$，需要对每一个结点做一次DFS，则整体的时间复杂度为$O(V*(V+E))$

正确性证明：假设图G不是单连通图，即存在两个结点u,v，从u到v至少有两条简单路径，不妨设两条路径分别为$u,x_1,x_2,...,x_m,v$和$u,y_1,y_2,...,y_n,v$。其中m和n中的一个可能为0。从u开始做DFS，这两条路径上的结点都是u的后代。假设$m>0,n>0$，x_m,y_n,v都是u的后代，所以(x_m,v)和(y_n,v)中必有一个是DFS树中的横向边。当$m=0,n>0$时，(y_n,v)在树中时，(u,v)为前向边；(u,v)在树中时，(y_n,v)为横向边。

3

假定图中的边权重全部为整数，且在范围 $1 \sim |V|$内，在此情况下，$Kruskal$ 算法最快能多快？如果变得权重取值范围在1到某个常数W 之间呢?

根据书上给出的$Kruskal$算法

```
MST-KRUSKAL(G,w)
1.A = ∅
2.for each vertex v∈G.v
3.  MAKE-SET(v)
4.sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
5.for each edge (u,v) ∈ G.E, taken in nondecreasing order by weight
6.  if FIND-SET(u)≠FIND-SET(v)
7.      A = A ∪ {(u,v)}
8.      UNION(u,v)
9.return
```

第一行的时间复杂度为$O(1)$；第二、三行的时间复杂度为$O(V)$；如果采用**计数排序**对边的权值进行排序，在线性时间内完成排序，则第四行的时间复杂度为$O(V+E)$；第五到八行的时间复杂度为$O((V+E)\alpha(V))$，则最终的时间复杂度可以在$O(E+V)$

若权值的范围在在1到某个常数W之间，W较大时，计数排序的性能可能劣与快速排序等基于比较的排序算法。所以第三行的时间复杂度为$O(E\lg E)$，则最终的时间复杂度为$O(E\lg E)$

4

假定图中的边权重全部为整数，且在范围 $1\sim|V|$内，在此情况下，$Prim$算法最快能多快？如果变得权重取值范围在 1到某个常数 W之间呢？

若权值的范围在在1到$|V|$之间，采用$van\ Emde\ Boas$树实现最小优先队列，$EXTRACT-MIN$和$DECREASE-KEY$的时间复杂度为$O(\lg(\lg(V)))$，分别执行$|V|$次和$|E|$次，则时间复杂度为$O((|V|+|E|)\lg(\lg(V)))$

若权值的范围在在1到某个常数W之间，采用$van\ Emde\ Boas$树实现最小优先队列，$EXTRACT-MIN$和$DECREASE-KEY$的时间复杂度为$O(\lg(\lg(W)))$，分别执行$|V|$次和$|E|$次，则时间复杂度为$O((|V|+|E|)\lg(\lg(W)))$