Chap3

15. 考虑一有限状态的 Markov 链. 试证明

(a) 至少有一个状态是常返的,

(b) 任何常返状态必定是正常返的.

(a) 假设该Markov链的所有状态均为瞬过或零常返 则对 $\forall i\in S$ 有 $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(n)}=0$

由 $P_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)}$

则 $\sum_{k=1}^{l} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} \le P_{ij}^{(n)} \le \sum_{k=1}^{l} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{(n-k)} + \sum_{k=l}^{+\infty} f_{ij}^{(k)}$

固定 l. 令 $n\to+\infty$ 则有 $0\le \lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)} \le 0+\sum_{k=l}^{+\infty} f_{ij}^{(k)}$

在上式中. 令 $l\to+\infty$ 由于 $\sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)}\le 1$ 收敛 故 $\lim_{n\to+\infty} P_{ij}^{(n)}=0$

若此有限状态的Markov链有 N 个状态. 则 $\sum_{j=1}^{N} P_{ij}^{(n)}=1$

上式令 $N\to+\infty$ 得 $0=1$ 矛盾

故至少有一个状态是(正)常返的

(b) 若存在零常返状态 i. 可构造 $C(i)=\{j\mid i\leftrightarrow j\}$

则 $C(i)$ 为原Markov链的一不可约子Markov链

于是 $C(i)$ 中所有状态均为零常返

与有限状态Markov链至少有一个正常返状态矛盾.

故任何常返状态都是正常返

17. 试计算转移概率阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

的极限分布.

设 π 为该Markov链的平稳分布 $\pi=(\pi_0, \pi_1, \pi_2)$

则有 $\begin{cases} \pi\ge 0 \\ \sum_{i=0}^{2}\pi_i=1 \\ \pi P=\pi \end{cases}$

解得 $\pi=(\frac{5}{14}, \frac{3}{7}, \frac{3}{14})$

易知该Markov链不可约且遍历

故极限分布为 $\begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$

18. 假定在逐日的天气变化模型中, 每天的阴晴与前两天的状况关系很大. 于是可考虑 4 状态的 Markov 链: 接连两晴天, 一晴一阴, 一阴一晴, 以及接连两阴天, 分别记为 $(S,S),(S,C),(C,S)$和(C,C). 该链的转移概率阵为

$$\begin{array}{c} \\ (S,S) \\ (S,C) \\ (C,S) \\ (C,C) \end{array} \begin{array}{c} \text{(S,S)(S,C)(C,S)(C,C)} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

试求这一 Markov 链的平稳分布. 并求出长期平均的晴朗天数.

设该Markov链的平稳分布为 $\pi=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$

则有 $\begin{cases} \pi\ge 0 \\ \sum_{i=0}^{3}\pi_i=1 \\ \pi P=\pi \end{cases}$

解得 $\pi=(\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}, \frac{6}{11})$

则一年中晴天数为 $365\times(\frac{3}{11}+\frac{1}{11}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{11}\times\frac{1}{2})=132.7$ (天)

20. 血液培养在时刻 0 从一个红细胞开始, 一分钟之后红细胞死亡可能出现下面几种情况: 以 1/4 再生 2 个红细胞, 以 $\frac{1}{2}$ 的概率再生 1 个红细胞和一个白细胞, 也有 $\frac{1}{4}$ 的概率产生 2 个白细胞. 再过一分钟后每个红细胞以同样的规律再生下一代而白细胞则不再生, 并假定每个细胞的行为是独立的.

(a) 从培养开始 $n+1$ 分钟不出现白细胞的概率是多少?

(b) 整个培养过程停止的概率是多少?

(a) 设 X_n 为 n 分钟时红细胞的数量. 显然,在 X_n 给定后. X_{n+1} 只与 X_n 有关

则 $\{X_n\}$ 为 Markov 链

故 $P\{$从开始 $n+1$ 分钟不出现白细胞$\} = P(X_{n+1} = 2^{n+1} \mid X_0 = 1) = (\frac{1}{4})^{n+1}$

(b) 由于白细胞不再产生新的细胞. 故有 $P(Z_{ni} = 0) = \frac{1}{4}$ $P(Z_{ni} = 1) = \frac{1}{2}$. $P(Z_{ni} = 2) = \frac{1}{4}$

则第一代总数 X_1 的生成函数为

$\phi_1(s) = \sum_{k=0}^{2} s^k P(Z_{01} = k) = \frac{1}{4}(1 + 2s + s^2)$

因此过程停止的概率 π 满足 $\frac{1}{4}(1 + 2\pi + \pi^2) = \pi$ 解得 $\pi = 1$

21. 分支过程中一个体产生后代的分布为 $p_0 = q$, $p_1 = p$ $(p + q = 1)$, 试求第 n 代总体的均值和方差及群体消亡的概率. 如产生后代的分布为 $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ 及 $p_0 = \frac{1}{8}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{8}$, 试回答同样的问题.

当 $p_0 = \frac{1}{4}$. $p_1 = \frac{1}{2}$. $p_2 = \frac{1}{4}$ 时.

第一代总数 X_1 的生成函数为

$\phi_1(s) = E(s^{Z_{01}}) = \sum_{k=0}^{2} s^k P(Z_{01} = k) = \frac{1}{4}(1 + 2s + s^2)$ $s \in (-\infty, +\infty)$

因而群体消亡的概率 π 满足 $\frac{1}{4}(1 + 2\pi + \pi^2) = \pi$ 解得 $\pi = 1$

$\mu = E(Z_{01}) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$

$E(Z_{01}^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$\sigma^2 = Var(Z_{01}) = E(Z_{01}^2) - (EZ_{01})^2 = \frac{1}{2}$

因此 X_n 的均值为 $\mu_X(n) = E(X_n) = \mu^n = 1$

方差为 $R_X(n, n) = Var(X_n) = (n+1)\sigma^2 = \frac{1}{2}(n+1)$ $n = 0, 1, 2 \dots$

当 $p_0 = \frac{1}{8}$. $p_1 = \frac{1}{2}$ $p_2 = \frac{1}{4}$. $p_3 = \frac{1}{8}$ 时

第一代总数 X_1 的生成函数为

$\phi_1(s) = E(s^{Z_{01}}) = \sum_{k=0}^{3} s^k P(Z_{01} = k) = \frac{1}{8}(1 + 4s + 2s^2 + s^3)$ $s \in (-\infty, +\infty)$

因而群体消亡的概率 π 满足 $\frac{1}{8}(1 + 4\pi + 2\pi^2 + \pi^3) = \pi$ 解得 $\pi = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$

则 $\mu = E(Z_{01}) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$

$E(Z_{01}^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{21}{8}$

$\therefore \sigma^2 = Var(Z_{01}) = E(Z_{01}^2) - (EZ_{01})^2 = \frac{47}{64}$

因而 X_n 的均值为 $\mu_X(n) = \mu^n = (\frac{11}{8})^n$

方差为 $R_X(n, n) = Var(X_n) = \sigma^2 \mu^{n-1} \frac{1 - \mu^n}{1 - \mu} = \frac{47}{24}[(\frac{11}{8})^{2n-1} - (\frac{11}{8})^{n-1}]$ $n = 0, 1, 2 \dots$

22. 若单一个体产生后代的分布为 $p_0 = q$, $p_1 = p$ $(p + q = 1)$, 并假定过程开始时的祖先数为 1, 试求分支过程第 3 代总数的分布.

由题可知第 1 代总数 X_1 的生成函数为

$\phi_1(s) = E(s^{Z_{01}}) = s^0 P(Z_{01} = 0) + s^1 P(Z_{01} = 1) = q + ps$ $s \in (-\infty, +\infty)$

第二代总数 X_2 的生成函数为

$\phi_2(s) = \phi_1(\phi_1(s)) = q + p(q + ps) = 1 - p^2 + p^2 s$ $s \in (-\infty, +\infty)$

第三代总数 X_3 的生成函数为

$\phi_3(s) = \phi_2(\phi_1(s)) = 1 - p^2 + p^2(q + ps) = 1 - p^3 + p^3 s$ $s \in (-\infty, +\infty)$

则 $P(X_3 = 0) = 1 - p^3$ $P(X_3 = 1) = p^3$