1、构造积分 $\bar{I}(f)=\int_{-h}^{2h}f(x)dx$ 的数值积分公式. $I(f)=a_{-1}f(-h)+a_0f(0)+a_1f(2h)\quad(h>0)$
使其具有尽可能高的代数精度，该公式的精度为多少？

假设可以达到k阶代数精度 即有 $\bar{I}(x^i)=I(x^i)\quad i=0,1\dots k.$

当 $k=2$ 时 系数 a_{-1}, a_0, a_1 可被唯一确定

$i=0\quad \bar{I}(x^0)=\int_{-h}^{2h}dx=3h\qquad I(x^0)=a_{-1}+a_0+a_1$

$i=1\quad \bar{I}(x^1)=\int_{-h}^{2h}x\,dx=\frac{3}{2}h^2\qquad I(x)=-ha_{-1}+2ha_1$

$i=2\quad \bar{I}(x^2)=\int_{-h}^{2h}x^2dx=3h^3\qquad I(x^2)=h^2a_{-1}+4h^2a_1$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_{-1}+a_0+a_1=3h\\-ha_{-1}+2ha_1=\frac{3}{2}h^2\\h^2a_{-1}+4h^2a_1=3h^3\end{cases}\Rightarrow a_{-1}=0\quad a_0=\frac{9}{4}h\quad a_1=\frac{3}{4}h$$

$\therefore I(f)=\frac{9}{4}hf(0)+\frac{3}{4}hf(2h)$

$i=3$ 时 $\bar{I}(x^3)=\int_{-h}^{2h}x^3dx=\frac{15}{4}h^4\qquad I(x^3)=6h^4$

故该公式具有2阶代数精度

2. 分别利用梯形公式和Simpson公式计算如下积分及其积分误差. $\int_0^2(x^3+x^2+3x)dx$

$\int_0^2(x^3+x^2+3x)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_0^2=\frac{38}{3}$

梯形公式: $I_1(f(x))=2\{\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}f(2)\}=18$

误差 $=I(f)-I_1(f(x))=-\frac{16}{3}$

Simpson公式: $S(f(x))=\frac{2}{6}(f(0)+4f(1)+f(2))=\frac{38}{3}$

误差: $I(f)-S(f(x))=0$

3. 记 $I(f)=\int_{-2}^{2}f(x)dx$. 设 $S(f(x))$ 为其数值积分公式. 其中 $I(f)\approx S(f(x))=Af(-\alpha)+Bf(0)+Cf(\alpha)$

(1) 试确定参数 A, B, C, α 使得该数值积分公式具有尽可能高的代数精度. 并求该公式的代数精度

(2) 设 $f(x)$ 足够光滑(可微) 求该数值积分公式的误差

(1) 由代数精度的定义可知. 当具有K阶代数精度时 满足 $I(x^i)=S(x^i)\quad i=0\dots k.\quad I(x^{k+1})\neq S(x^{k+1})$

$i=0$ 时 $I(x^0)=S(x^0)\Rightarrow\quad A+B+C=4.$

$i=1$ 时 $I(x^1)=S(x^1)\Rightarrow\quad -\alpha A+\alpha C=0\quad\Rightarrow A=C$

$i=2$ 时 $I(x^2)=S(x^2)\Rightarrow\quad \alpha^2A+\alpha^2C=\frac{16}{3}\quad\Rightarrow\alpha^2A=\frac{8}{3}$

$i=3$ 时 $I(x^3)=S(x^3)\Rightarrow\quad -\alpha^3A+\alpha^3C=0$

$i=4$ 时 $I(x^4)=S(x^4)\Rightarrow\quad \alpha^4A+\alpha^4C=\frac{64}{5}\quad\Rightarrow\alpha^4A=\frac{32}{5}$

则 $\alpha=\frac{2\sqrt{15}}{5}\quad A=C=\frac{10}{9}\quad B=\frac{16}{9}$

则 $S(f(x))=\frac{10}{9}f(-\frac{2\sqrt{15}}{5})+\frac{16}{9}f(0)+\frac{10}{9}f(-\frac{2\sqrt{15}}{5})$

$\because i=5$ 时 $I(x^5)=S(x^5)$

$i=6$ 时 $I(x^6)=\frac{256}{7}\quad S(x^6)=\frac{768}{25}$

故 $S(f(x))$ 具有5阶代数精度

(2) $I(f)-S(f(x))=\int_{-2}^{2}f(x)dx-\{\frac{10}{9}f(-\frac{2\sqrt{15}}{5})+\frac{16}{9}f(0)+\frac{10}{9}f(-\frac{2\sqrt{15}}{5})\}$