1. 求满足下表数据以及边界条件 $S''(-2)=S''(2)=0\ (n=3)$ 的三次样条插值函数 $S(x)$ 并计算 $S(0)$ 的值 （n 为小区间个数）

x	-2.00	-1.00	1.00	2.00
$f(x)$	-4.00	2.00	5.00	8.00

记 $x_0=-2.\quad x_1=-1.\quad x_2=1\quad x_3=2$

则 $h_0=x_1-x_0=1\quad h_1=x_2-x_1=2\quad h_2=x_3-x_2=1$

故 $\lambda_1=\frac{h_1}{h_0+h_1}=\frac{2}{3}\qquad \mu_1=\frac{h_0}{h_0+h_1}=\frac{1}{3}$

$\lambda_2=\frac{h_2}{h_1+h_2}=\frac{1}{3}\qquad \mu_2=\frac{h_1}{h_1+h_2}=\frac{2}{3}$

又由 $f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=6\qquad f[x_1,x_2]=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{3}{2}\qquad f[x_2,x_3]=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=3$

可知 $f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=-\frac{1}{2}\qquad f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_3]}{x_1-x_3}=\frac{1}{4}$

$\therefore d_1=6f[x_0,x_1,x_2]=-3\qquad d_2=6f[x_1,x_2,x_3]=\frac{3}{2}$

由边界条件 $M_0=M_3=0.$ 得

$$\begin{bmatrix}2&1&&\\ \frac{1}{3}&2&\frac{2}{3}&\\ &\frac{2}{3}&2&\frac{1}{3}\\ &&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\M_1\\M_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_0\\-3\\\frac{3}{2}\\d_3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\M_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{aligned}M_1&=-1.96875\\M_2&=1.40625\end{aligned}$$

由 $S_i(x)=\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}M_i+\frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1}+C(x_{i+1}-x)+d(x-x_i)\qquad c=\frac{y_i}{h_i}-\frac{h_iM_i}{6}\qquad d=\frac{y_{i+1}}{h_i}-\frac{h_iM_{i+1}}{6}$

$\therefore S_0(x)=\frac{(-1-x)^3}{6}\cdot M_0+\frac{(x+2)^3}{6}\cdot M_1+(-4-\frac{1}{6}M_0)(-1-x)+(2-\frac{1}{6}M_1)(x+2)$

$=-0.328125(x+2)^3+4(x+1)+2.328125(x+2)$

$S_1(x)=\frac{(1-x)^3}{12}\cdot M_1+\frac{(x+1)^3}{12}M_2+(1-\frac{1}{3}M_1)(1-x)+(\frac{5}{2}-\frac{1}{3}M_2)(x+1)$

$=0.1640625(x-1)^3+0.1171875(x+1)^3-1.65625(x-1)+2.03125(x+1)$

$S_2(x)=\frac{(2-x)^3}{6}M_2+\frac{(x-1)^3}{6}M_3+(5-\frac{1}{6}M_2)(2-x)+(8-\frac{1}{6}M_3)(x-1)$

$=-0.234375(x-2)^3-4.765625(x-2)+8(x-1)$

综上三次样条插值为

$$S(x)=\begin{cases}-0.328125(x+2)^3+4(x+1)+2.328125(x+2) & x\in[-2,-1]\\ 0.1640625(x-1)^3+0.1171875(x+1)^3-1.65625(x-1)+2.03125(x+1) & x\in[-1,1]\\ -0.234375(x-2)^3-4.765625(x-2)+8(x-1) & x\in[1,2]\end{cases}$$

$\therefore S(0)=3.640625$

2. 利用最小二乘法构造二次多项式 $y=p(x)$ 去拟合下列数据，并计算 $y(2015)$ 结果精确到小数点后一位.

x	2010	2011	2012	2013	2014
y	134091	134735	135404	136072	136782

设二次拟合函数 $y=a_2(x-2010)^2+a_1(x-2010)+a_0$

则 $\sum_{i=1}^{5}(x_i-2010)=10\qquad \sum_{i=1}^{5}(x_i-2010)^2=30\qquad \sum_{i=1}^{5}(x_i-2010)^3=100\qquad \sum_{i=1}^{5}(x_i-2010)^4=354$

$\sum_{i=1}^{5}y_i=677084\qquad \sum_{i=1}^{5}(x_i-2010)y_i=1360887\qquad \sum_{i=1}^{5}(x_i-2010)^2y_i=4089511$

由法方程.

$$\begin{bmatrix}m&\Sigma(x_i-2010)&\Sigma(x_i-2010)^2\\\Sigma(x_i-2010)&\Sigma(x_i-2010)^2&\Sigma(x_i-2010)^3\\\Sigma(x_i-2010)^2&\Sigma(x_i-2010)^3&\Sigma(x_i-2010)^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma y_i\\\Sigma(x_i-2010)y_i\\\Sigma(x_i-2010)^2y_i\end{bmatrix}\quad 即\quad\begin{bmatrix}5&10&30\\10&30&100\\30&100&354\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}677084\\1360887\\4089511\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow a_0=134091.7143\qquad a_1=634.4714\qquad a_1=9.3571$

$\therefore p(x)=9.3571(x-2010)^2+634.4714(x-2010)+134091.7143$

$\therefore y(2015)\approx p(2015)=137498.0$