3. 令 Z_1, Z_2 为独立的正态分布随机变量，均值为 0，方差为 σ^2，λ 为实数．定义过程 $X(t) = Z_1 \cos \lambda t + Z_2 \sin \lambda t$．试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数．它是宽平稳的吗？

$\mu_X(t) = E(Z_1)\cos\lambda t + E(Z_2)\sin\lambda t = 0$

$R_X(t,s) = Cov[Z_1\cos\lambda t + Z_2 \sin\lambda t,\ Z_1\cos\lambda s + Z_2\sin\lambda s]$

$= Cov[Z_1,Z_1]\cos\lambda t\cos\lambda s + Cov[Z_1,Z_2]\cos\lambda t\sin\lambda s + Cov[Z_2,Z_1]\sin\lambda t\cos\lambda s + Cov[Z_2,Z_2]\sin\lambda t\sin\lambda s$

$= \sigma^2\cos\lambda t\cos\lambda s + \sigma^2\sin\lambda t\sin\lambda s$

$= \sigma^2\cos[\lambda(t-s)]$

∵ $X(t)$ 的所有二阶矩存在，并且 $EX(t)=0$．$R_X(t,s)$ 只与时间差有关

∴ $X(t)$ 是宽平稳的

4. Poisson 过程 $X(t), t \geqslant 0$ 满足 (i) $X(0) = 0$; (ii) 对 $t > s$, $X(t) - X(s)$ 服从均值为 $\lambda(t-s)$ 的 Poisson 分布; (iii) 过程是有独立增量的．试求其均值函数和协方差函数．它是宽平稳的吗？

均值函数：$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[X(t)-X(0)] = \lambda t$

方差：$Var[X(t)] = Var[X(t)-X(0)] = \lambda t$

对 $0<t<s$ 有

$E[X(t)X(s)] = E\{[X(t)-X(0)][X(s)-X(0)]\}$

$= E\{[X(t)-X(0)][(X(s)-X(t))+(X(t)-X(0))]\}$

$= E\{[X(t)-X(0)][X(s)-X(t)]\} + E\{[X(t)-X(0)]^2\}$

$= E[X(t)-X(0)]E[X(s)-X(t)] + Var[X(t)-X(0)] + \{E[X(t)-X(0)]\}^2$

$= \lambda t\cdot\lambda(s-t) + \lambda t + \lambda^2 t^2$

$= \lambda t(\lambda s+1)$

∴ $R_X(t,s) = E[X(t)X(s)] - E[X(t)]E[X(s)]$

$= \lambda t(\lambda s+1) - \lambda^2 ts$

$= \lambda t$

由于 $\mu_X(t) = \lambda t$ 且 $R_X(t,s) = \lambda t$ 故 $X(t)$ 不是宽平稳的

9. 令 X 和 Y 是从单位圆内的均匀分布中随机选取一点所得的横坐标和纵坐标．试计算条件概率

$$P\left(X^2+Y^2 \geqslant \frac{3}{4} \mid X > Y\right).$$

(X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

$P(X>Y) = \iint\limits_{x>y} f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1,\ x>y} dxdy = \frac{1}{2}$

$P(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4}, X>Y) = \iint\limits_{x^2+y^2\ge\frac{3}{4},\ x>y} f(x,y)\,dxdy = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\frac{3}{4}\le x^2+y^2\le 1,\ x>y} dxdy = \frac{1}{2}(1-\frac{3}{4}) = \frac{1}{8}$

∴ $P(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4} \mid X>Y) = \dfrac{P(X^2+Y^2\ge\frac{3}{4}, X>Y)}{P(X>Y)} = \frac{1}{4}$

14. 设 X_1 和 X_2 为相互独立的均值为 λ_1 和 λ_2 的 Poisson 随机变量．试求 $X_1 + X_2$ 的分布，并计算给定 $X_1 + X_2 = n$ 时 X_1 的条件分布．

若 $X \sim P(\lambda)$ 则 X 的矩母函数为

$g_X(t) = E(e^{tX}) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} e^{it}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum\limits_{i=0}^{+\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!} = e^{\lambda(e^t-1)}$

∴ X_1+X_2 的矩母函数为

$g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$

∴ $X_1+X_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$ 故 $P(X_1+X_2=n) = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$ $n=0,1,2\ldots$

$P(X_1+X_2=n, X_1=m) = P(X_1=m, X_2=n-m) = P(X_1=m)P(X_2=n-m)$

$= \frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\lambda_2}$

∴ $P(X_1=m \mid X_1+X_2=n) = \dfrac{P(X_1+X_2=n, X_1=m)}{P(X_1+X_2=n)} = \dfrac{\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = C_n^m\dfrac{\lambda_1^m\lambda_2^{n-m}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$