

Homework09 2021.12.15

1

我们怎样才能使用 *Floyd – Warshall* 算法的输出来检测权重为负值的环路?

在运行完 *Floyd – Warshall* 算法之后, 得到结果矩阵, 对结果矩阵再进行一轮迭代计算。如果结果不变, 说明没有权重为负值的环路; 否则, 就说明图中含有权重为负值的环路。

因为如果图中有权重为负值的环路, 在进行一次迭代计算之后, 会有路径的 *cost* 减小, 反映在矩阵上就是值发生改变。

2

假定在一个权重函数为 W 的有向图 G 上运行 *Johnson* 算法。证明: 如果图 G 包含一条权重为0的环路 c , 那么对于环路 c 上的每条边 (u, v) , $\hat{w}(u, v) = 0$

\because 有权重为0的环路 c , 且 $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$

设环路 c 上的点为 $u_i, i = 1, 2, \dots, n$

$\therefore \hat{w}(u_1, u_2) + \hat{w}(u_2, u_3) + \dots + \hat{w}(u_n, u_1) = 0$

$\because \hat{w}(u, v) \geq 0$

$\therefore \hat{w}(u, v) = 0$

3

(最大流的更新) 设 $G = (V, E)$ 是一个源结点为 s 汇结点为 t 的流网络, 其容量全部为整数值。假定我们已经给定 G 的一个最大流。

a. 如果将单条边 $(u, v) \in E$ 的容量增加1个单位, 请给出一个 $O(V + E)$ 时间的算法来对最大流进行更新。

b. 如果将单条边 $(u, v) \in E$ 的容量减少1个单位, 请给出一个 $O(V + E)$ 时间的算法来对最大流进行更新。

a. 假设 (S, S') 是最小割, 当 $u \in S, v \in S'$ 或 $u \in S', v \in S$ 时, 最大流将会增加1。

对于已经给定的 G 的一个最大流, 再进行一次 *Ford Fulkerson* 算法计算, 利用 *BFS* 寻找增广路径, 如果找到则最大流会被更新。由于容量都是整数值, 且流量的增量是1, 所以一次 *Ford Fulkerson* 算法计算就可以确定结果。时间复杂度就是 *BFS* 的复杂度 $O(V + E)$

b. 首先利用 *BFS* 在 $O(V + E)$ 的时间内找到一条从 s 到 t 并且包含 (u, v) 的路径, 将该路径上所有边的流都减小1。再进行一次 *Ford Fulkerson* 算法计算, 利用 *BFS* 寻找增广路径, 如果找到则最大流会被更新。