第三章一阶理论

吉建民

USTC
jianmin@ustc.edu.cn

2021 年 5 月 17 日

Used Materials

Disclaimer: 本课件采用了陈小平老师讲义内容和汪芳庭《数理逻辑》教材中内容。

Table of Contents

1. Peano Postulates (1889)

1. 0 是自然数；
2. 对任何自然数 x，存在唯一的自然数 x'，称为 x 的后继；
3. 0 不是任何自然数 x 的后继；
4. 任何两个不同的自然数的后继也不同；
5. 任何集合，若它包含 0 和它的每一个元素的后继，则它包含所有自然数。

2. Gottlob Frege (1884)

1. 0 是不等于自身的事物的集合;
2. 1 是仅由 0 组成的集合;
3. 2 是仅由 0 和 1 组成的集合;
4. $\cdots$

3. Von Neumann 表述 (1922, 19 岁)

1. $0 =_{df} \{\ \}$, the empty set;
2. $x' =_{df} x \cup \{x\}$.

It follows that each natural number is equal to the set of all natural numbers less than it:

$$
\begin{aligned}
0 &= \{\ \},\\
1 &= 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\{\ \}\},\\
2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\{\ \}, \{\{\ \}\}\},\\
3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\{\ \}, \{\{\ \}\}, \{\{\ \}, \{\{\ \}\}\}\},\\
n &= n - 1 \cup \{n - 1\} = \{0, 1, \ldots, n - 1\}
\end{aligned}
$$

4. Peano 公设的形式化

- 引入一阶公式集 Γ_N，表示 Peano 公设，为此取 K(Y)，包含个体常元 0，一元函数符号 $'$，一元谓词符号 N。
- Γ_N 的每一个模型中，$0, ', N$ 必须分别解释为自然数 0，后继函数 $(+1)$ 和 "是自然数"

(P1) $N(0)$

(P2) $\forall x(N(x) \to \exists! y(y = x' \wedge N(y)))$

(P3) $\forall x \neg(0 = x')$

(P4) $\forall x \forall y(x' = y' \to x = y)$

(P5) $P(0) \wedge \forall x(P(x) \to P(x')) \to \forall x P(x)$
P 是任何谓词符号

对所有谓词符号 Q:

$$\exists! x\, Q(x) =_{df} \exists x(Q(x) \wedge \forall y(Q(y) \leftrightarrow (y = x)))$$

其中 y 不在 $Q(x)$ 中出现。

思考

- 思考题 3-1：(P5) 是怎样表达了 Peano 第五公设的？
- 上述 “=” 是什么？
  - $x = y$ 指 x 与 y 代表同一语法对象（符号，项，公式，同一个表达式）
  - 所有 “=” 改写为 “$\approx$”，称为 “等词符号”，$x \approx y$ 表示 $I(x) = I(y)$

注：

- K 表示一阶逻辑的形式推理系统（一阶谓词演算）
- $K(Y)$ 表示 K 的全体公式的集合，其中 $Y = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ 为个体变元的集合

Table of Contents

K^+ 定义

- K^+ 的语言比 $K(Y)$ 多一个二元谓词符号 $\approx$，视为非逻辑符号，$\approx$ 称为 K^+ 的常谓词符号
- K^+ 的推理设施增加下列等词公设：

(E1) $u \approx u$

(E2) $u_k \approx u \to$
$f_i^n(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \approx f_i^n(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n)$

(E3) $u_k \approx u \to$
$(P_i^n(u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \to P_i^n(u_1, \ldots, u, \ldots, u_n))$

注：在汪芳庭《数理逻辑》书中，以上三种形式的公式叫做等词公理，所有等词公理组成的集记为 E。

例子 1

等词公设并不是有效式。

- 令 $K^+(Y)$ 不含函数和个体常元，谓词只有 $\approx$，考虑 $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \emptyset, \mathbb{P})$，使 $\approx^{\mathcal{M}}$ 是 $>$
- $\mathcal{M} \not\models u \approx u$
- 对所有 K 公理 p，有 $\mathcal{M} \models p$

定理 1

定理

任给一阶结构 $\mathcal{M} = (\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，若 $\approx^{\mathcal{M}}$ 为 $\mathbb{D}$ 上的相等，则所有等词公设是 $\mathcal{M}$ 有效的。

证明.

设 $\mathcal{M}$ 使 $\approx^{\mathcal{M}}$ 为 $\mathbb{D}$ 上相等，考虑 (E1)。
对任何 $I = (\mathcal{M}, V)$ 和项 u，存在 $d \in \mathbb{D}$，使 $I(u) = d$。
于是

$$
\begin{array}{lll}
I(u \approx u) = t & \text{iff} & (\, I(u), I(u)\,) \in \approx^{\mathcal{M}} \\
 & \text{iff} & (\, d, d\,) \in \approx^{\mathcal{M}} .
\end{array}
$$

故显然 $I(u \approx u) = t$，由 I 的任意性，得 $\mathcal{M} \models u \approx u$. $\square$

习题 3-1：(E2) 和 (E3) 的证明。

思考

- 在 K^{+} 的模型中，$\approx^{\mathcal{M}}$ 是否一定是 $\mathbb{D}$ 上相等？

例子 2

- 取 $K^{+}(Y)$ 同例子 1，考虑 $\mathcal{M}'$ 使 $\approx^{\mathcal{M}'}$ 为 $\mathbb{N}$ 上 "有相同奇偶性"
- 易证，$\mathcal{M}'$ 是 K^{+} 的一个模型
- (E1) 和 (E2) 是 $\mathcal{M}'$ 有效的
- 考虑 (E3)，它在 $K^{+}(Y)$ 表现形式为：

$$u_k \approx u \to (u_1 \approx u_k \to u_1 \approx u)$$

或者

$$u_k \approx u \to (u_k \approx u_n \to u \approx u_n)$$

可以验证：对一切 $I = (\mathcal{M}', V)$，上述两种公式是真的

思考

- 思考题 3-2：
  - L 是否强迫 “$\rightarrow$” 解释为实质蕴含？
  - K^{+} 模型将 “$\approx$” 规定到什么程度？

定理（$\approx$ 等价性）

定理 ($\approx$ 等价性)

若 $\mathcal{M}$ 是一个 K^+ 模型，则 $\approx^{\mathcal{M}}$ 是 $\mathbb{D}$ 上等价关系。

证明.

只需证明在语法中有下列的 K^+ 的定理：

1. $\vdash_{K^+} t \approx t$
2. $\vdash_{K^+} t \approx u \to u \approx t$
3. $\vdash_{K^+} t \approx u \to (u \approx v \to t \approx v)$

证 1，由于 (E1)，显然成立

$\square$

定理（$\approx$ 等价性）con't

证明.

...

证 2，不涉及 (UG)，因此只需证 $\{t \approx u\} \vdash_{K^+} u \approx t$.

(1)	$t \approx u \to (t \approx t \to u \approx t)$	(E3)
(2)	$t \approx u$	前提
(3)	$t \approx t \to u \approx t$	MP(1)(2)
(4)	$t \approx t$	(E1)
(5)	$u \approx t$	MP(1)(2)

证 3，利用上述结果

(6)	$t \approx u \to u \approx t$	演绎定理 (2)(5)
(7)	$u \approx t \to (u \approx v \to t \approx v)$	(E3)
(8)	$t \approx u \to (u \approx v \to t \approx v)$	HS(6)(7)

得证。

定理（等项可替换性）

定理 (等项可替换性)

1. $\vdash_{K^+} u \approx v \to t(u) \approx t(v)$，其中项 u 是项 $t(u)$ 的一个子项，项 $t(v)$ 是在 $t(u)$ 中将 u 的某些出现替换为 v 的结果
2. $\vdash_{K^+} u \approx v \to (p(u) \to p(v))$，其中 $p(x)$ 是任意公式，u, v 对 $p(x)$ 中 x 自由

等词公设刻画了“相等”的最重要的性质

正规模型

定义 (正规模型)

设 $\Gamma \subseteq K^+(Y)$，$\mathcal{M} = (\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是 Γ 的 K^+ 模型。若 $\approx^{\mathcal{M}}$ 为 $\mathbb{D}$ 上相等，则称 $\mathcal{M}$ 为 Γ 的正规 K^+ 模型。

定理：正规模型存在性

定理 (正规模型存在性)

若 Γ 有 K^+ 模型，则 Γ 一定有正规 K^+ 模型。

证明.

（思路）设 $\mathcal{M} = (\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是 Γ 的一个 K^+ 模型。
考虑 $\mathcal{M}$ 关于 $\approx$ 的商结构 $\mathcal{M}^{\approx} = (\mathbb{D}^{\approx}, \mathbb{F}^{\approx}, \mathbb{P}^{\approx})$，其中 $\mathbb{D}^{\approx}$ 是由 $\mathbb{D}$ 中关于 $\approx^{\mathcal{M}}$ 的等价类为个体形成的集合（论域）

$$\mathbb{D}^{\approx} =_{df} \{[x] \mid x \in \mathbb{D}\}$$

$\mathbb{D}$ 中等价/不等价的元素映射为 $\mathbb{D}^{\approx}$ 中相等/不想等的元素。
$\mathbb{F}$ 中所有函数的定义域和值域也相应地从 $\mathbb{D}$ 改为 $\mathbb{D}^{\approx}$，于是变换为 $\mathbb{D}^{\approx}$ 上的函数。
$\mathbb{P}$ 中所有关系的定义域从 $\mathbb{D}^n$ 变换为 $(\mathbb{D}^{\approx})^n$
由此得到一个一阶结构 $\mathcal{M}^{\approx} = (\mathbb{D}^{\approx}, \mathbb{F}^{\approx}, \mathbb{P}^{\approx})$。

□

定理：正规模型存在性 con't

证明.

...

证明 $\mathcal{M}^{\approx}$ 是 Γ 的一个 K^{+} 模型，从而得到 Γ 的一个正规 K^{+} 模型。

$(u^{\mathcal{M}}) \approx^{\mathcal{M}} (v^{\mathcal{M}})$ 在 $\mathcal{M}$ 中成立 $\Rightarrow u^{\mathcal{M}}$ 与 $v^{\mathcal{M}}$ 等价 $\Rightarrow u^{\mathcal{M}^{\approx}}$ 与 $v^{\mathcal{M}^{\approx}}$ 相等。

验证对所有 $p \in \Gamma$ 和等词公设，有 $\mathcal{M}^{\approx} \models p$。

所以 $\mathcal{M}^{\approx}$ 是一个正规模型。 $\square$

习题 3-2：对任意 $p \in \Gamma$，有 $\mathcal{M} \models p$，证明 $\mathcal{M} \models p \Rightarrow \mathcal{M}^{\approx} \models p$。

定理

定理

设 E^* 为 E 的任何相容扩充（使 $E \subseteq E^*$ 且 E^* 相容），则 E^* 有非正规模型。

证明.

(思路) 设 $E' \supseteq E$，$\mathcal{M} = (\mathbb{D}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ 是 E' 的正规模型。
给 $\mathbb{D}$ 增加一个新元素 u^*，记 $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \cup \{u^*\}$。
任取 $u_0 \in \mathbb{D}$，把 $\mathbb{F}$ 和 $\mathbb{P}$ 扩张成 $\mathbb{F}^*$ 和 $\mathbb{P}^*$，扩张时，u^* 用 u_0 作为替身。准确地说，规定

$$\overline{f_i^{n*}}(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*) = \overline{f_i^n}(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*) \in \overline{R_i^{n*}} \Leftrightarrow (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \overline{R_i^n},$$

其中 $u_i^* = \begin{cases} u_i, \text{if } u_i^* \neq u^*, \\ u_0, \text{if } u_i^* = u^*. \end{cases}$
可以验证，这样构造的模型 $\mathcal{M}^* = (\mathbb{D}^*, \mathbb{F}^*, \mathbb{P}^*)$ 是 E' 的非正规模型。 $\square$

习题

习题 3-3：P. 138 练习 1.

1. 设项 t, u 都对公式 $p(x_i)$ 中 x_i 自由，且不含 x_i。求证

$$E \cup \{\exists! x_i\, p(x_i), p(t)\} \vdash p(u) \to u \approx t,$$

这里规定

$$\exists! x_i\, p(x_i) = \exists x_i\,(\,p(x_i) \wedge \forall x_j\,(p(x_j) \to x_i \approx x_j)\,),$$

其中 x_j 不在 $p(x_i)$ 中出现。

Table of Contents

形式算术 K_N

形式算术在 K^+ 增加初等数论的基础知识，形成 K_N，称为形式算术，又称为初等数论的形式（公理）系统。

K_N 构成

(1) 形式语言 $K_N(Y)$

- 逻辑符号：同 K^+/K
- 非逻辑符号：
  - 个体常元：$\ulcorner 0 \urcorner$
  - 一元函数符号：$'$
  - 二元函数符号：$\mathbf{+}, \mathbf{\times}$
  - 等词符号：$\approx$
- 形成规则：同 K^+/K

K_N 构成

(2) 推理设施

- 逻辑公理：同 K
- 非逻辑公理：
  - 等词公设：同 K^+，(E1)～(E3)
  - 算术公设：(N1)～(N7)

$$
\begin{array}{lll}
\text{(N1)} & \neg(u' \approx \overset{\sqcap}{0}) & \text{(P3)} \\
\text{(N2)} & u' \approx v' \to (u \approx v) & \text{(P4)} \\
\text{(N3)} & u + \overset{\sqcap}{0} \approx u & \left.\right\} \text{加法递归定义} \\
\text{(N4)} & u + v' \approx (u + v)' & \\
\text{(N5)} & u \times \overset{\sqcap}{0} \approx \overset{\sqcap}{0} & \left.\right\} \text{乘法递归定义} \\
\text{(N6)} & u \times v' \approx u \times v + u & \\
\text{(N7)} & P(\overset{\sqcap}{0}) \to (\forall x(p(x) \to p(x')) \to \forall x\, p(x)) & \text{(P5) 归纳公设}
\end{array}
$$

(3) 定义 同 K

思考

- 思考题 3-3： 为什么没有 (P1) 和 (P2)？

K_N 的标准模型 $\mathcal{N}$

K_N 的预期模型是一个 K^+ 正规模型 $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$，$\mathbb{N}$ 为自然数集，$\mathbb{F}$ 包含自然数集上的 0、后继函数、加法和乘法，$\mathbb{P}$ 包含自然数集上的相等关系 $=$，满足：

$$\ulcorner 0 \urcorner^{\mathcal{N}} \text{是} 0; \quad \mathbf{+}^{\mathcal{N}} \text{是} +; \quad \mathbf{\times}^{\mathcal{N}} \text{是} \times; \quad {}'^{N} \text{是} + 1\text{。}$$

定理

上述 $\mathcal{N}$ 是 K_N 的正规模型。

- 约定，$\ulcorner 0 \urcorner, \ulcorner 0 \urcorner', \ulcorner 0 \urcorner'', \ldots, \ulcorner 0 \urcorner'^{\ldots'}$ 简写为 $\ulcorner 1 \urcorner, \ulcorner 2 \urcorner, \ulcorner 3 \urcorner, , \ulcorner n \urcorner$，称为 K_N 的数字；$\neg(u \approx v)$ 简写为 $u \not\approx v$。
- $\ulcorner n + m \urcorner$ 中 $+$ 为 $\mathbb{N}$ 中加法，$\ulcorner n \urcorner \mathbf{+} \ulcorner m \urcorner$ 则是 $\mathbf{+}$（K_N 中二元函数符号）。需证明：$\ulcorner n + m \urcorner$ 成立，iff $\ulcorner n \urcorner \mathbf{+} \ulcorner m \urcorner$。
- 思考题 3-4：上述二种“运算”有何区别？

定理 1

定理

1° $\vdash_{K_N} \ulcorner m \urcorner + \ulcorner n \urcorner \approx \ulcorner m+n \urcorner$

2° $\vdash_{K_N} \ulcorner m \urcorner \times \ulcorner n \urcorner \approx \ulcorner m\times n \urcorner$

3° $\vdash_{K_N} \ulcorner 0 \urcorner + u \approx u$ (N3) 对称的情况

4° $\vdash_{K_N} u' + v \approx (u+v)'$ (N4) 对称的情况

5° $\vdash_{K_N} u + v \approx v + u$

6° $\vdash_{K_N} (u+v)+r \approx u+(v+r)$

定理 1 (cont'd)

证明 1° $\vdash_{K_N} \overline{m} \mathbf{+} \overline{n} \approx \overline{m+n}$.

归纳于 n。

(i) $n=0$，待证公式为：$\vdash_{K_N} \overline{m} \mathbf{+} \overline{0} \approx \overline{m}$，它就是 (N3)，结论成立；

(ii) $n>0$，假设对 $N-1$ 结论成立，K_N 中的一个形式推导：

(1)	$\overline{m} \mathbf{+} \overline{n-1}' \approx (\overline{m} \mathbf{+} \overline{n-1})'$	(N4)
(2)	$\overline{m} \mathbf{+} \overline{n-1} \approx \overline{m+n-1}$	归纳假设
(3)	$\overline{m} \mathbf{+} \overline{n-1} \approx \overline{m+n-1} \to (\overline{m} \mathbf{+} \overline{n-1})' \approx \overline{m+n-1}'$	(E2)
(4)	$(\overline{m} \mathbf{+} \overline{n-1})' \approx \overline{m+n-1}'$	MP(2)(3)
(5)	$\overline{m} \mathbf{+} \overline{n-1}' \approx \overline{m+n-1}'$	$\approx$ 传递性 (1)(4)
(6)	$\overline{m} \mathbf{+} \overline{n} \approx \overline{m+n}$	简写规定

依归纳法原理，结论对一切 n 成立。 □

定理 1 (cont'd)

证明 3° $\vdash_{K_N} \overset{\sqcap}{0} + u \approx u.$

(1) $\overset{\sqcap}{0} + \overset{\sqcap}{0} = \overset{\sqcap}{0}$ (N3)

(2) $(\overset{\sqcap}{0} + x)' \approx \overset{\sqcap}{0} + x'$ (N4), $\approx$ 对称性

(3) $\overset{\sqcap}{0} + x \approx x \to (\overset{\sqcap}{0} + x)' \approx x'$ (E2)

(4) $(\overset{\sqcap}{0} + x)' \approx (\overset{\sqcap}{0} + x') \to (((\overset{\sqcap}{0} + x) \approx x \to (\overset{\sqcap}{0} + x)' \approx x') \to$
$((\overset{\sqcap}{0} + x) \approx x \to (\overset{\sqcap}{0} + x') \approx x')$ 等项替换定理

(5) $(\overset{\sqcap}{0} + x) \approx x \to (\overset{\sqcap}{0} + x') \approx x'$ MP(3)(MP(2)(4))

(6) $\forall x((\overset{\sqcap}{0} + x) \approx x \to (\overset{\sqcap}{0} + x') \approx x')$ UG(5)

(7) $(\overset{\sqcap}{0} + \overset{\sqcap}{0}) \approx \overset{\sqcap}{0} \to (\forall x((\overset{\sqcap}{0} + x) \approx x \to (\overset{\sqcap}{0} + x') \approx x') \to$
$\forall x((\overset{\sqcap}{0} + x) \approx x))$ (N7)

(8) $\forall x((\overset{\sqcap}{0} + x) \approx x)$ MP(6)(MP(1)(7))

(9) $\overset{\sqcap}{0} + x \approx x$ MP(8)(K4)

$\square$

定理 2

定理

若 $m = n$，则 $\vdash_{K_N} \ulcorner m \urcorner \approx \ulcorner n \urcorner$；若 $m \neq n$，则 $\vdash_{K_N} \ulcorner m \urcorner \not\approx \ulcorner n \urcorner$。

- 思考题 3-5：$\mathbb{N}$ 中相等在 K_N 中被完全规定了？

习题

习题 3-4：p157：1；4。

1. 证明当 $n = 2k$ 时，$\vdash_{K_N} \exists x_i((x_i \times \ulcorner 2 \urcorner) \approx \ulcorner n \urcorner)$.
2. 证明 $\vdash_{K_N} t_1' + t_2 \not\approx t_1$.

Table of Contents

k 元函数、k 元关系

k 元函数指 f: $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
k 元关系: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}^k$

定义 1 （可表示函数）

k 元函数 f 在 K_N 中可表示，如果存在 $k+1$ 个自由变元的公式 $p(x_1,\dots,x_k,x_{k+1})$ 使对任意对 $p(x_1,\dots,x_{k+1})$ 中 x_{k+1} 自由的项 u 及 $n_1,\dots,n_{k+1}\in\mathbb{N}$ 有，

$$1^\circ\quad f(n_1,\dots,n_k)=n_{k+1}\quad\Rightarrow\ \vdash_{K_N} p(\overline{n_1},\dots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})$$

$$2^\circ\quad f(n_1,\dots,n_k)\neq n_{k+1}\quad\Rightarrow\ \vdash_{K_N} \neg p(\overline{n_1},\dots,\overline{n_k},\overline{n_{k+1}})$$

$$3^\circ\quad \vdash_{K_N} p(\overline{n_1},\dots,\overline{n_k},u)\to u\approx\overline{f(n_1,\dots,n_k)}$$

定义（基本函数）

以下三种，

1° 一元零函数 z, $z(n) = 0$;

2° 一元后继函数 s, $s(n) = n + 1$;

3° k 元投影函数 p_i^k, $p_i^k(n_1, \ldots, n_k) = n_i$.

定义

- （复合规则）一个 i 元函数 g 和 i 个 k 元函数 $f_1, \ldots, f_i$ 的复合是一个 k 元函数，

$$l(n_1, \ldots, n_k) = g(f_1(n_1, \ldots, n_k), \ldots, f_i(n_1, \ldots, n_k))$$

- （递归规则）由 k 元函数 g 和 $k+2$ 元函数 f，使用递归规则生成的 $k+1$ 元函数 l 的定义如下：

$$\begin{cases} l(n_1, \ldots, n_k, 0) = g(n_1, \ldots, n_k), \\ l(n_1, \ldots, n_k, n+1) = f(n_1, \ldots, n_k, n, l(n_1, \ldots, n_k, n)). \end{cases}$$

定义（μ 算子）

设 $k+1$ 元函数 g 满足根存在条件：任给 $n_1, \ldots, n_k$ 存在 x 使 $g(n_1, ..., n_k, x) = 0$，应用 μ 算子于 g 生成的函数 f 为

$$f(n_1, \ldots, n_k) = \min\{x \mid g(n_1, \ldots, n_k, x) = 0\}$$

定义（递归函数）

三个基本函数以及由它们经过有限次应用三个规则生成的函数称为（一般）递归函数，不使用 μ 算子生成的称为原始递归函数，不要求根存在条件地应用 μ 算子生成的为部分递归函数。

可以证明：

- $+$，$\times$ 为递归函数
- $sg(n) = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ 0, & n = 0. \end{cases}$ 为递归函数
- $n_1 \dot{-} n_2 = \begin{cases} n_1 - n_2, & n_1 > n_2, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$ 为递归函数
- 余数函数也为递归函数

$$rem(n_1, n_2) = \begin{cases} n_1 \text{ 除 } n_2 \text{ 所得余数}, & n_1 > 0, \\ 0, & n_1 = 0. \end{cases}$$

例子

例如 $+$

$$\begin{cases} n_1 + 0 = p_1^1(n_1) \\ n_1 + (n+1) = s(p_3^3(n_1, n, n_1 + n)) \end{cases}$$

定义（递归关系/集合）

若 k 元关系 R 的特征函数

$$C_R(n_1, \ldots, n_k) = \begin{cases} 1, & \textit{if } (n_1, \ldots, n_k) \in R, \\ 0, & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

是递归函数，称 R 为递归关系，一元递归关系称为递归集。

1. 定理：所有递归函数（关系，集）是 K_N 可表示的，
2. 定理：所有 K_N 可表示的函数（关系，集）是递归的。

能行可计算 $\Leftrightarrow$ 递归 $\Leftrightarrow$ K_N 可表示

定义 (丘奇-图灵论题)

一个自然数上的函数 $f\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ 是能行可计算的（effectively computable），当且仅当它是图灵可计算的（Turing computable）。

Table of Contents

Gödel 编码

目标：把所有公式，公式序列唯一地映射为自然数。

1° K_N 符号 u，*Gödel* 数 $g(u)$：

u	$'$	$+$	$\times$	$\neg$	$\rightarrow$	$\forall$	$\approx$	$\overline{0}$	$x_i\ (i=1,\ldots)$
$g(u)$	1	3	5	7	9	11	13	15	$15+2i$

2° 符号串的 *Gödel* 数，$g(u_0, u_1, \ldots, u_k) = 2^{g(u_0)}3^{g(u_1)}\ldots p_{k+1}^{g(u_k)}$.
p_k 是第 k 个素数。

3° 字母串序列 *Gödel* 数，$g(s_0, s_1, \ldots, s_n) = 2^{g(s_0)}3^{g(s_1)}\ldots p_{n+1}^{g(s_n)}$.

命题

下列集合是递归的

1° $\{\, g(u) \mid u$ 是K_N 项 $\}$;

2° $\{\, g(p) \mid p$ 是K_N 公式 $\}$;

3° $\{\, g(s) \mid s$ 是K_N 中公式序列 $\}$.

例

- $g(\overline{0} \approx \overline{0}) = 2^{15}3^{13}5^{15} = n$
- $g(\overline{3}) = g('''\overline{0}) = 2^{1}3^{1}5^{1}7^{15} = n$
- $15 = 2^{0}3^{1}5^{1}$，不是符号串，15 代表 $\overline{0}$
- $14 = 2^{1}3^{0}5^{0}7^{1}$，不是符号，代表 $'$, $\neg$ 不是项/公式
- K_N 公式 $\Rightarrow$ 自然数 $\Rightarrow$ 数字