中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

概率论与数理统计
第四章

温灿红

wench@ustc.edu.cn

63607553

创寰宇学府 育天下英才
严济慈 一九八八年五月 题

大纲

1. 双边置信区间
2. 单边置信区间
3. 样本估计

区间估计/置信区间

- 未知参数θ;
- 样本$X_1, \ldots, X_n$;
- 我们称区间$[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$为关于$\theta$的区间估计/置信区间（Confidence Interval)，如果$\underline{\theta}$和$\overline{\theta}$是样本$X_1, \ldots, X_n$的统计量，且有$\underline{\theta} < \overline{\theta}$。

对区间的要求

- 区间$[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$以很大的概率包含$\theta$在内，即概率

$$P_\theta\left(\underline{\theta} \leq \theta \leq \overline{\theta}\right) = 1 - \alpha$$

尽可能大，也就是要求估计尽量可靠。

- 估计的精度尽可能高，即要求区间$[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$尽可能地短。

矛盾

- 例子：估计一个人的年龄

定义

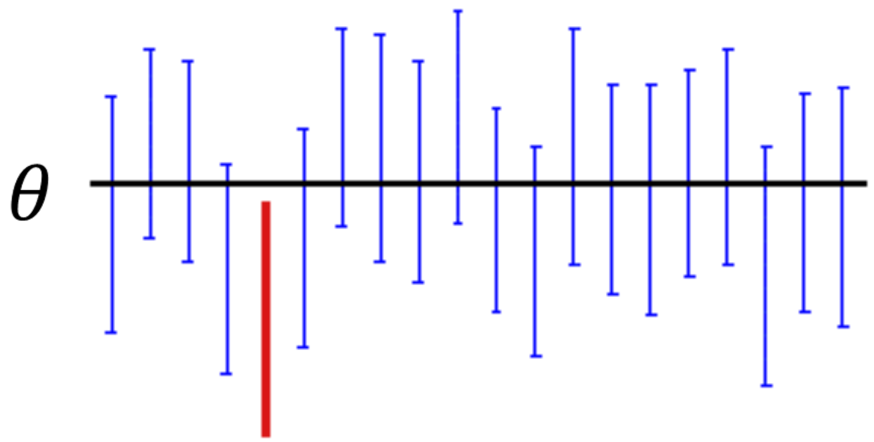
- 准则：在保证可靠性的前提下尽可能地提高精度。

- 定义：设总体分布$F(x;\theta)$含有一个或多个未知参数$\theta, \theta \in \Theta$，对给定的值$\alpha, (0 < \alpha < 1)$，若由样本$X_1, \dots, X_n$确定的两个统计量$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$和$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$满足

$$P_\theta\left(\underline{\theta} \le \theta \le \overline{\theta}\right) = 1 - \alpha, \qquad \forall \theta \in \Theta$$

称$1 - \alpha$为置信水平，而称$[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$为$\theta$的置信水平为$1 - \alpha$的置信区间。

频率解释



A 95% confidence interval indicates that 19 out of 20 samples (95%) from the same population will produce confidence intervals that contain the population parameter.

如何构造置信区间?

- 先找到未知参数的一个点估计，然后基于此估计构造置信区间。

- 两种方法：
  - 枢轴变量法；
  - 大样本法。

枢轴变量法

1. 找一个与待估参数θ有关的统计量T，一般是良好的点估计；
2. 设法找出T和θ的某一个函数$\mathrm{S}(\mathrm{T},\theta)$的分布，其分布F要与参数$\theta$无关，称$\mathrm{S}(\mathrm{T},\theta)$为枢轴变量；
3. 根据分布F的分位数确定上下界，即$\mathrm{F}(d)-\mathrm{F}(c)=1-\alpha$。因此
$$\mathrm{P}(c \le \mathrm{S}(\mathrm{T},\theta) \le d)=1-\alpha.$$
4. 将$c \le \mathrm{S}(\mathrm{T},\theta) \le d$等价变换为$\underline{\theta} \le \theta \le \overline{\theta}$.

如何选择上下界?

- c和d的选择应尽量使得区间长度最短，即使得$\overline{\theta}-\underline{\theta}$最短.

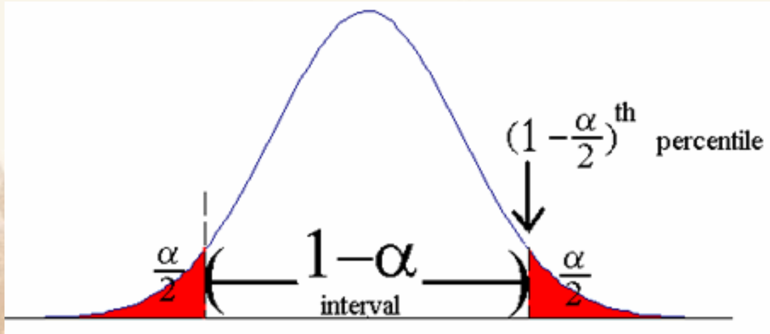
- 简单起见，可选择等尾置信区间，即$d=\omega_{\alpha/2}, c=\omega_{1-\alpha/2}$。

例子

- 设$X_1, \ldots, X_n$是来自均匀分布总体$U(0, \theta)$的一个样本，试求出θ的$1-\alpha$置信区间。

单个正态总体的置信区间

- 设$X_1, \dots, X_n$为从正态分布总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的样本，求参数μ和σ^2的$1-\alpha$置信区间。



University of Science and Technology of China

两个匹配正态总体的置信区间

- 设$X_1, \ldots, X_n$为从正态分布总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$中抽取的样本，$Y_1, \ldots, Y_n$为从正态分布总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$中抽取的样本，且X_i与Y_i一一匹配，求参数$\mu_1 - \mu_2$的$1-\alpha$置信区间。

创寰宇学府 育天下英才 严济慈 一九八八年五月 题

两个正态总体的置信区间

- 设$X_1,\dots,X_m$为从正态分布总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$中抽取的样本，$Y_1,\dots,Y_n$为从正态分布总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中抽取的样本，且两个样本相互独立，求参数$\mu_1-\mu_2$和σ_1^2/σ_2^2的$1-\alpha$置信区间。

例子

- 用天平称量某物体的质量9次，得到平均值为$\bar{x} = 15.4$ (g)，其标准差为0.1g，已知天平称量结果为正态分布，试求该物体质量的95%的置信区间。

创寰宇学府
育天下英才
严济慈题
一九八八年五月

例子

- 为了检验某种体育锻炼对减肥的效果，随机抽取了10名减肥者进行测试。在进行体育锻炼前后这些减肥者的体重（单位：千克）数据列表如下，请给出锻炼前后体重差的置信区间（假设人的体重服从正态分布，取显著性水平$\alpha = 0.05$）？

锻炼前体重	70	65	67	58	69	72	74	61	63	67
锻炼后体重	68	60	68	58	67	70	70	60	60	65

例子

- 某车间有两台自动机床加工套筒，假设套筒的直径服从正态分布。现在从两个班次的产品中分别检查了5个和6个套筒，得到其直径数据如下（单位：cm）：
- 甲班：5.06　5.08　5.03　5.00　5.07
- 乙班：4.98　5.03　4.97　4.99　5.02　4.95
- 试求两班加工套筒直径的方差比和均值差的95%的置信区间。

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

大样本法

- 利用中心极限定理来构造枢轴变量。

创寰宇学府
育天下英才
严济慈
一九八八年五月题

例子

- 事件A在每次实验中发生的概率为p,做n次独立试验，以X_n记A发生的次数，求p的$1-\alpha$置信区间。

- $X_n \sim B(n,p)$，难以构造枢轴变量使其分布与p无关

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

大纲

1. 双边置信区间
2. 单边置信区间
3. 样本估计

创寰宇学府
育天下英才
严济慈 一九八八年五月题

引例

- 对手机的平均寿命而言，我们希望它越大越好，因此我们关心的是置信下限。
- 对某种药品的毒性，我们希望它越小越好，因此我们关心的置信上限。

单边置信区间

- 定义：设总体分布$F(x;\theta)$含有一个或多个未知参数$\theta, \theta \in \Theta$，对给定的值$\alpha, (0 < \alpha < 1)$，有样本$X_1, \dots, X_n$确定的两个统计量$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$和$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, \dots, X_n)$，
  - 若

$$P_\theta\left(\theta \le \overline{\theta}\right) = 1 - \alpha, \qquad \forall \theta \in \Theta$$

  - 则称$\overline{\theta}$为θ的一个置信水平为$1 - \alpha$的置信上界。
  - 若

$$P_\theta\left(\theta \ge \underline{\theta}\right) = 1 - \alpha, \qquad \forall \theta \in \Theta$$

  - 称$\underline{\theta}$为θ的一个置信水平为$1 - \alpha$的置信下界。
  - 而$(-\infty, \bar{\theta}]$和$[\underline{\theta}, \infty)$都成为单边的置信区间。

创寰宇学府
育天下英才
严济慈
一九八八年五月题

单个正态总体的置信区间

- 设$X_1, \ldots, X_n$为从正态分布总体$N(\mu, \sigma^2)$中抽取的样本，求参数μ和σ^2的$1-\alpha$置信上（下）界。

两个匹配正态总体的置信区间

- 设$X_1,\dots,X_n$为从正态分布总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$中抽取的样本，$Y_1,\dots,Y_n$为从正态分布总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中抽取的样本，且X_i与Y_i一一匹配，求参数$\mu_1-\mu_2$的$1-\alpha$置信上（下）界。

两个正态总体的置信区间

- 设$X_1, \ldots, X_m$为从正态分布总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$中抽取的样本，$Y_1, \ldots, Y_n$为从正态分布总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$中抽取的样本，且两个样本相互独立，求参数$\mu_1 - \mu_2$和σ_1^2/σ_2^2的$1-\alpha$置信上（下）界。

大纲

1. 双边置信区间
2. 单边置信区间
3. 样本估计

- 假设某种成分的含量$X \sim N(\mu, 1)$。要求平均含量μ的 置信水平 为0.95的置信区间的长度不能长于 1.2，则请问需要测量的样本应至少为多少？

創寰宇學府
育天下英才
嚴濟慈 一九八八年五月 題