随机过程B

刘 杰

Email: jiel@ustc.edu.cn

第2章 Poisson过程

§ 2.1 Poisson过程

定义2.1 一个整数值随机过程$\{N(t), t\geq 0\}$满足下述三个条件就称为强度为$\lambda > 0$的**Poisson过程**.

① $N(0) = 0$;

② $N(t)$是独立增量过程;

③ 对任何$t > 0$, $s\geq 0$, 增量$N(s+t)$-$N(s)$服从参数为λt的Poisson分布, 即:

$$P\{N(s+t)-N(s)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

注:若$\{N(t), t\geq 0\}$服从强度为λ的Poisson过程, 则

① $N(s+t)-N(s)$表示在时间区间$(s, s+t]$中发生的随机事件数;

② 对于任一固定的t, $N(t)$服从参数为λt的Poisson分布, 故$E[N(t)] = Var[N(t)] = \lambda t$;

③ 这里定义的Poisson过程,确切地说应叫**时齐Poisson过程**, 它是平稳独立增量过程;

④ 强度λ有时也称为**速率**, 它描绘随机事件发生的频繁程度.

例2.1 顾客依Poisson过程到达某商店，速率为$\lambda=4$人/小时. 已知商店上午9:00开门.

① 求到9:30时为一位顾客, 到11:30时5位顾客的概率;

② 已知到9:30时仅为一位顾客, 求到11:30时为5位顾客的概率.

解: 令t的计时单位为小时, 并以9:00为起始时刻. 则

① “到9:30时为一位顾客，到11:30时5位顾客”事件可表示为 $\{N(0.5)=1, N(2.5)=5\}$，其概率为

$$
\begin{aligned}
P\{N(0.5)=1, N(2.5)=5\} \\
&= P\{N(0.5)=1, N(2.5)-N(0.5)=4\} \\
&= P\{N(0.5)=1\}P\{N(2.5)-N(0.5)=4\} \\
&= \frac{2\times e^{-2}}{1!}\times\frac{8^4\times e^{-8}}{4!} \\
&= 0.0155
\end{aligned}
$$

② "已知到9:30时仅为一位顾客, 而到11:30时为5位顾客" 事件可表示为$\{N(2.5)=5 \mid N(0.5)=1\}$, 其概率为

$$
\begin{aligned}
&P\{N(2.5)=5 \mid N(0.5)=1\} \\
&\quad = \frac{P\{N(0.5)=1, N(2.5)=5\}}{P\{N(0.5)=1\}} \\
&\quad = \frac{P\{N(0.5)=1, N(2.5)-N(0.5)=4\}}{P\{N(0.5)=1\}} \\
&\quad = P\{N(2.5)-N(0.5)=4\} \\
&\quad = \frac{8^4 \times e^{-8}}{4!} \\
&\quad = 0.057252
\end{aligned}
$$

记$[0,+\infty)$为某个观察过程的时间轴, 0代表起始时刻, $N(b) - N(a)$表示时间区间$(a, b]$上发生的事件数, 满足:

①在不相交区间中事件发生的数目相互独立, 即: 对任何整数n, 若$0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n$, 则增量$N(t_1)-N(t_0)$, $N(t_2)-N(t_1)$, …, $N(t_n)-N(t_{n-1})$相互独立;

②对任何时刻t和正数h,增量$N(t+h)-N(t)$的分布只依赖于区间长度h, 而不依赖时刻t ;

③存在正常数,当$h\downarrow 0$时,

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 1\} = \lambda h + o(h);$$

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\} = o(h).$$

从直观意义上看,

①表示试验是独立的, 即前后的独立性;

②表示时齐性, 即每个长度相同的小区间上事件发生的概率相同;

③的第一个等式表示事件是稀有的，即在区间长度很小的情况下事件发生的概率也很小，近似地为λh；第二个等式表示相继性,即事件是一件一件地发生的，在同一瞬间同时发生多个事件的可能性很小很小.

命题2.1 满足第六页中假定①~③的随机过程$N(t)$为Poisson过程.

证明: 由假定①和②, $N(s+t)$-$N(s)$和$N(t)$具有相同的分布. 为了验证$N(t)$是Poisson过程, 我们只需求出$N(t)$的概率分布. 记$P_m(t)=P\{N(t)=m\}$, 并记

$$p(h)=P\{N(h)\geq 1\}=P_1(h)+P_2(h)+\ldots=1-P_0(h),$$

则$p(h)$是在$(0, h]$上发生一个及一个以上事件的概率. 由独立性得:

$$P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)=P_0(t)\cdot[1-p(h)]$$

因此,

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-P_0(t)\,\frac{p(h)}{h}$$

令h↓0得:

$$P_0^{'}(t)=-\lambda P_0(t)$$

由$P_0(0)$=1及令h↓0得:

$$\begin{cases} P_0^{'}(t)=-\lambda P_0(t) \\ P_0(0)=1 \end{cases}$$

解得:

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}.$$

对任一m≥1, 由独立增量得

$$P_m(t+h)=P\{N(t+h)=m\}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}P\{N(t)=k, N(t+h)-N(t)=m-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}P\{N(t)=k\}P\{N(h)=m-k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}P_k(t)P_{m-k}(h)$$

因此,

$$P_m(t+h)=P_m(t)P_0(h)+P_{m-1}(t)P_1(h)+\sum_{k=0}^{m-2}P_k(t)P_{m-k}(h)$$

此处约定:当i<0时, $\sum_{k=0}^{i}P_k(t)P_{m-k}(h)=0$.

由假设③的第二个等式知:

$$\left|\sum_{k=0}^{m-2} P_k(t)P_{m-k}(h)\right| \le \sum_{k=0}^{m-2} P_{m-k}(h) = o(h)$$

令$h\downarrow 0$得:

$$P_m'(t) = -\lambda P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t), \qquad m = 1, 2, \cdots$$

由初始条件$P_m(0)=0$, $m=1, 2, \ldots$及 $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ 解得:

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \qquad m = 1, 2, \cdots$$

故

$$P_m(t) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

练习:

设$N(t)$是一速率为λ的Poisson过程, 若s<t, 求条件概率

$$P\{N(s)=k \mid N(t)=n\}$$

答案:

$$P\{N(s)=k \mid N(t)=n\} = \begin{cases} 0, & k>n \\ C_n^k \cdot \left(\dfrac{s}{t}\right)^k \cdot \left(1-\dfrac{s}{t}\right)^{n-k}, & k \le n \end{cases}$$

课外作业:

Page 26, Ex 2, 4, 6

§2.2 与Poisson过程相联系的若干分布

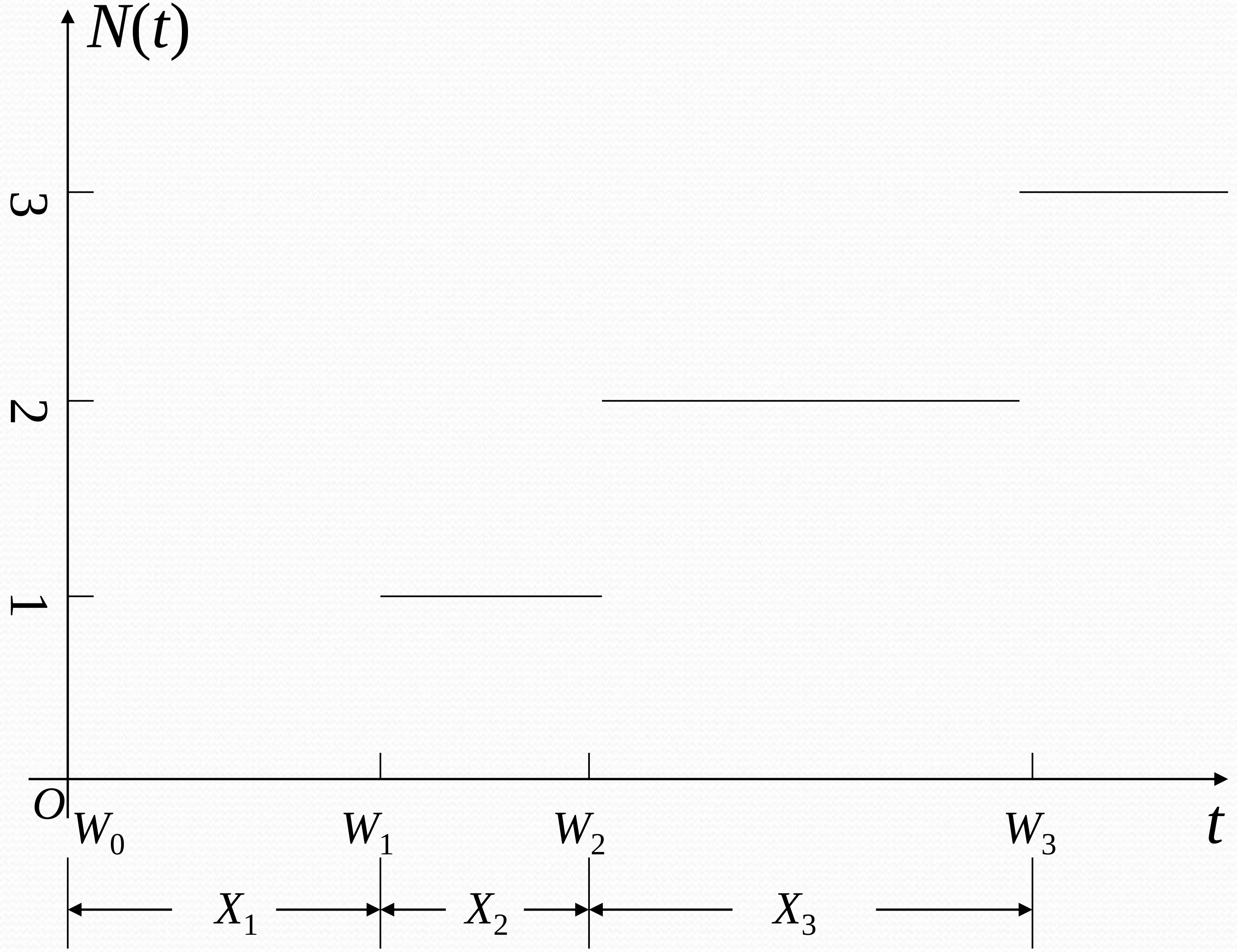
定义2.2 设$N(t)$是一个强度为λ的Poisson过程, 我们称

$$W_n = \inf\{t \ge 0: N(t) = n\}, \qquad n \ge 1$$

为**第n个跳跃时刻**. 为了方便起见, 记$W_0=0$. 我们又称

$$X_n = W_n - W_{n-1}, \qquad n \ge 1$$

为**第n个等待时间**.



$N(t)$
3
2
1
O
W_0
W_1
W_2
W_3
t
X_1
X_2
X_3

简单性质:

① $$W_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

② $$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{W_k \le t\}}, \quad t \ge 0$$

或

$$N(t) = \begin{cases} 0, & t < W_1 \\ k, & W_k \le t < W_{k+1},\ k \ge 1 \end{cases} \qquad t \ge 0$$

③ $\{W_n \le t\}$ 与 $\{N(t) \ge n\}$ 等价.

命题2.2

① $X_n, n = 1, 2, \ldots$是均值为$\frac{1}{\lambda}$的独立同分布的指数随机变量;

② W_n服从参数为n和λ的Γ分布.

证: 事件$\{X_1>t\}$表示第一次事件发生在时刻t之后, 其发生当且仅当在时间区间$(0, t]$中Poisson过程不曾有事件发生过,所以

$$P\{X_1 > t\} = P\{N(t) = 0\}$$

$$= P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

对任意的$m \geq 0$, 则

$$P\{X_{m+1} > t | W_m = s\} = P\{(s, s+t]\text{中事件不发生} | W_m = s\}$$

$$= P\{(s, s+t]\text{中事件不发生}\}$$

$$= P\{(0, t]\text{中事件不发生}\}$$

$$= e^{-\lambda t}$$

因此,

$$P\{X_{m+1} > t\} = \int P(X_{m+1} > t | W_m = s) f_{W_m}(s) ds$$

$$= \int e^{-\lambda t} f_{W_m}(s) ds$$

$$= e^{-\lambda t} \int f_{W_m}(s) ds = e^{-\lambda t}$$

故命题2.2的①成立.

因为$\{W_n \le t\}$与$\{N(t) \ge n\}$等价, 所以

$$P\{W_n \le t\} = P\{N(t) \ge n\} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

对上式关于t求导, 得:

$$f_{W_n}(t) = -\sum_{k=n}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

即命题2.2的②成立.

定理2.1 若$N(t)$, $t\geq 0$为Poisson过程，则给定$N(t)=n$下等待时间$W_1, \ldots, W_n$的联合密度为

$$f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)=n}(w_1,\cdots,w_n|n)=\frac{n!}{t^n},\quad 0<w_1<\cdots<w_n\leq t.$$

证: 给定N(t) = n, 不防设n个等待时间$W_k = w_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 对充分小的增量Δw_k, 事件“$N(t)=n$, $W_k=w_k$, $k=1,2,\ldots, n$”与事件“在$[w_k, w_k+\Delta w_k)$中事件恰好发生一次,而在$[0, w_1)$, $[w_1+\Delta w_1, w_2)$, …, $[w_{n-1}+\Delta w_{n-1}, w_n)$, $[w_n+\Delta w_n, t]$中事件没有发生”等价,于是

$$f_{W_1,\cdots,W_n|N(t)=n}(w_1,\cdots,w_n|n)\Delta w_1\cdots\Delta w_n$$

$$= P\{w_k \le W_k < w_k + \Delta w_k, k=1,\cdots,n | N(t)=n\} + o(\prod_{k=1}^{n}\Delta w_k)$$

$$= \frac{P\{w_k \le W_k < w_k + \Delta w_k, k=1,\cdots,n; N(t)=n\}}{P\{N(t)=n\}} + o(\prod_{k=1}^{n}\Delta w_k)$$

由独立增量性及Poisson过程的定义知:

$$P\{w_k \le W_k < w_k + \Delta w_k, k=1,\cdots,n; N(t)=n\}$$

$$= P\{N(w_k+\Delta w_k) - N(w_k) = 1, k=1,\cdots,n;$$

$$N(w_1)=0, N(w_2)-N(w_1+\Delta w_1)=0,\cdots,$$

$$N(w_n)-N(w_{n-1}+\Delta w_{n-1})=0, N(t)-N(w_n+\Delta w_n)=0\}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} [\lambda \Delta w_k + o(\Delta w_k)] \cdot e^{-\lambda w_1} \cdot e^{-\lambda(w_2 - w_1 - \Delta w_1)} \cdots \cdot$$

$$\cdot e^{-\lambda(w_n - w_{n-1} - \Delta w_{n-1})} \cdot e^{-\lambda(t - w_n - \Delta w_n)}$$

$$= \lambda^n e^{-\lambda t} \cdot \prod_{k=1}^{n} \Delta w_k \cdot e^{\lambda \sum_{k=1}^{n} \Delta w_k} + o(\prod_{k=1}^{n} \Delta w_k)$$

而

$$P\{N(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

因此,

$$f_{W_1,\cdots,W_n | N(t)=n}(w_1, \cdots, w_n | n) \Delta w_1 \cdots \Delta w_n = \frac{n!}{t^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \Delta w_k + o(\prod_{k=1}^{n} \Delta w_k)$$

两边除以$\prod_{k=1}^{n} \Delta w_k$, 并令 $\Delta w_k \to 0, k = 1, \cdots, n$ 即可.

例2.2 顾客依速率为λ的Poisson过程到达车站. 若火车在时刻t离站, 问在(0, t]区间里顾客的平均总等待时间是多少?

解: 第k位顾客的等待时间为t-W_k. 在(0, t]区间段总共来了$N(t)$为顾客, 故总等待时间为 $\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)$

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)}(t-W_k)\middle|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n}(t-W_k)\middle|N(t)=n\right]$$

$$=nt-E\left[\sum_{k=1}^{n}W_k\middle|N(t)=n\right]$$

由定理2.1知, 给定$N(t)=n$时, W_k, $k=1, \ldots, n$的联合密度与$(0, t]$上均匀分布中随机样本U_k, $k=1, \ldots, n$的次序统计量$U_{(k)}$, $k=1, \ldots, n$的联合密度相同, 于是

$$E\left[\sum_{k=1}^{n} W_k \middle| N(t)=n\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n} U_{(k)}\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n} U_k\right]=\frac{nt}{2}$$

因此,

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t-W_k) \middle| N(t)=n\right]=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

故

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t-W_k)\right]=\frac{t}{2}E[N(t)]=\frac{\lambda t^2}{2}$$

练习: 一个有线电视台向其用户每单位时间收取\$10. 假设用户按速率为λ的Poisson过程与电视台签约使用. 问该电视台在(0, t]时间区间里总收益的期望是多少?

解: 设T_k表示第k位客户开始有偿使用该电视台的时间. 该客户在(0, t]区间段为电视台带来的收益是$10(t-T_k)$, 又设$N(t)$表示在(0, t]区间段内开始有偿使用该电视台的客户总数, 则电视台在(0, t]区间段的总收益为:

$$R(t)=10\sum_{k=1}^{N(t)}(t-T_k)$$

$$E[R(t)] = 10E[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - T_k)]$$

$$= 10\sum_{n=1}^{+\infty} E[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - T_k) \mid N(t) = n] \cdot P\{N(t) = n\}$$

$$= 10\sum_{n=1}^{+\infty} [nt - E(\sum_{k=1}^{n} T_k \mid N(t) = n)] \cdot P\{N(t) = n\}$$

$$= 10\sum_{n=1}^{+\infty} [nt - E(\sum_{k=1}^{n} U_{(k)})] \cdot P\{N(t) = n\}$$

$$= 10\sum_{n=1}^{+\infty} [nt - E(\sum_{k=1}^{n} U_k)] \cdot P\{N(t) = n\}$$

$$= 10\sum_{n=1}^{+\infty} (nt - \frac{nt}{2}) \cdot P\{N(t) = n\}$$

$$= 5t\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot P\{N(t) = n\}$$

$$= 5tE[N(t)]$$

$$= 5\lambda t^2$$

课外作业:

Page 26, Ex 7, 8

§ 2.3 Poisson过程的推广

- **非齐次Poisson过程**

定义2.3 一个整数值随机过程$\{N(t), t\geq 0\}$满足下述条件就称为参数为λ(t)的**非齐次Poisson过程**.

① $N(0) = 0$;

② $N(t)$是独立增量过程;

③ 对任何$t > 0$, $s\geq 0$, 有

$$P\{N(s+t)-N(s)=k\}=\frac{\left(\int_s^{s+t}\lambda(u)du\right)^k}{k!}e^{-\int_s^{s+t}\lambda(u)du}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

例2.3 设$X_1, X_2, \ldots$是一串独立同分布连续随机变量，代表元件的寿命，分布为$F(t)$，密度函数为$f(t)$. 定义

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}$$

为**失效率**.

直观上看，$\lambda(t)$近似地等于$P(X_1=t|X_1\geq t)$，即元件在时刻t仍在工作而在下一瞬间t失效的条件概率密度.

定义

$$T_0 = 0$$

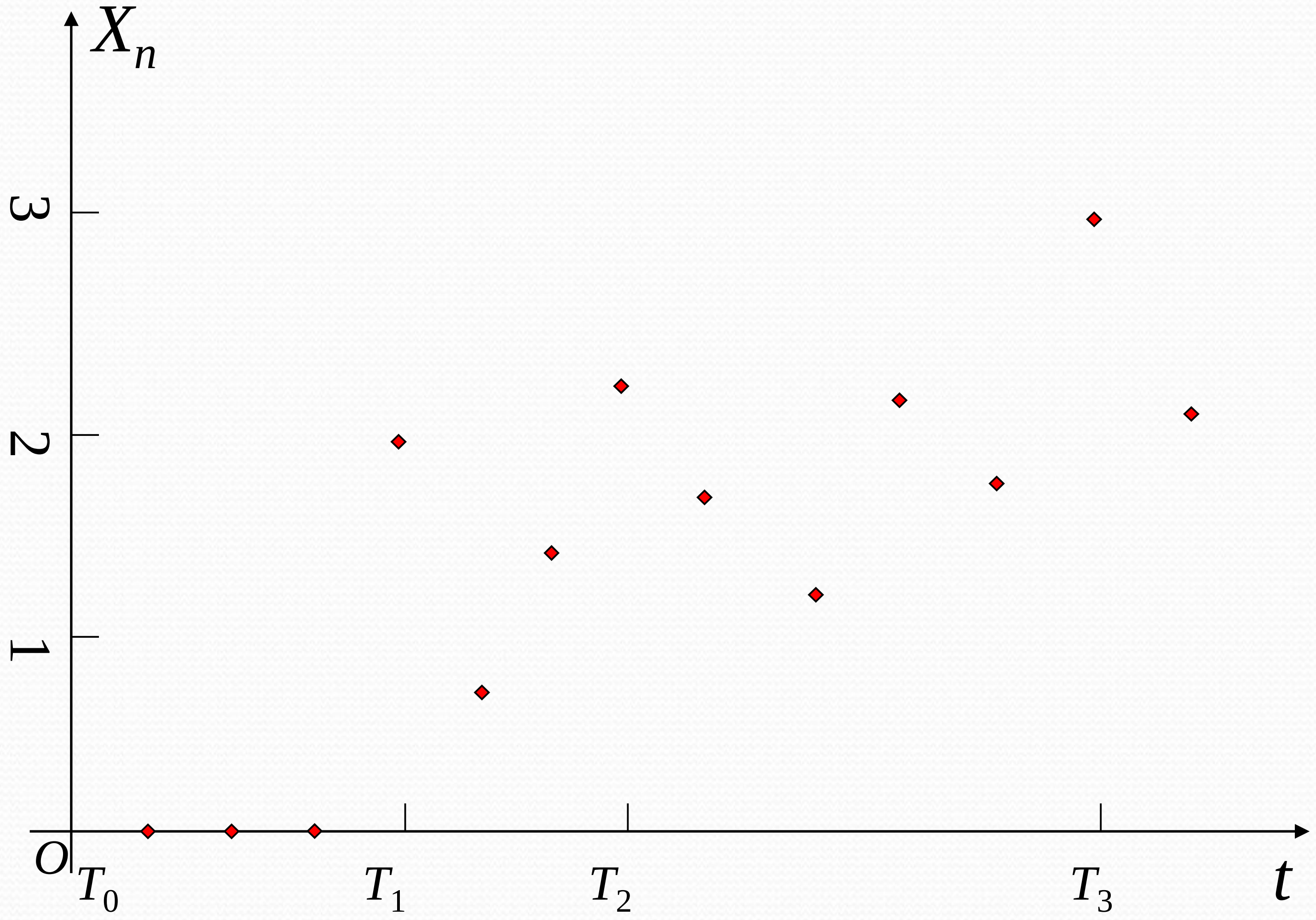
$$T_n = \inf\left\{m > T_{n-1} \,\middle|\, X_m > \max\{X_1, \cdots, X_{m-1}\}\right\}$$

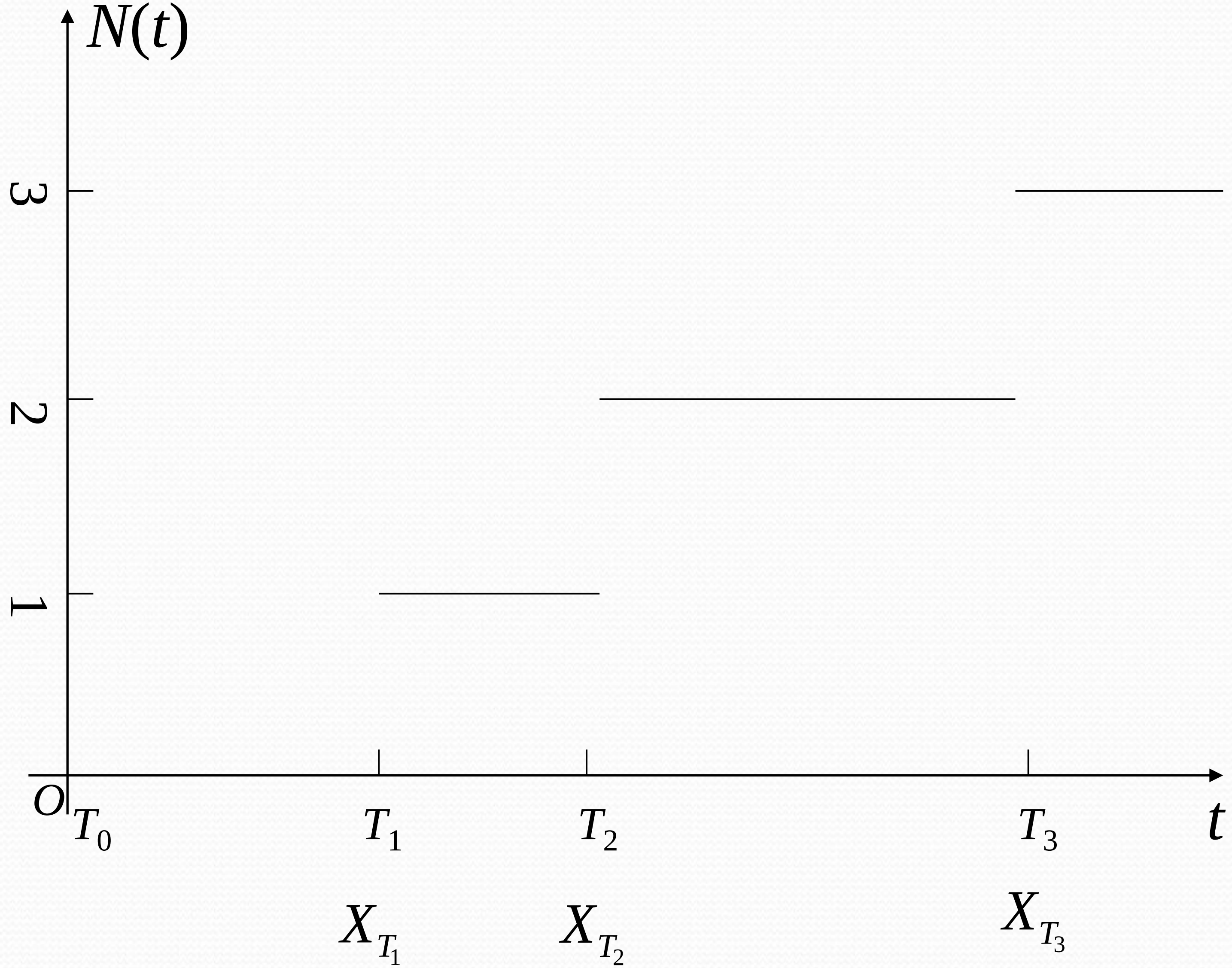
称为**创记录时刻**. 则 $Y_n = X_{T_n}$ 为**第*n*次所创的记录**.

则

$$N(t) = \sum_{k \geq 1} 1_{\{T_k < t\}}$$

表示在时间t之前创记录的次数. 过程$\{N(t),\ t \geq 0\}$为一非齐次Poisson过程, 并且其强度恰好为$\lambda(t)$.


X_n
3
2
1
O
T_0
T_1
T_2
T_3
t



N(t)
3
2
1
O
T0
T1
T2
T3
t
XT1
XT2
XT3

- **复合Poisson过程**

定义2.4 设$\{N(t), t\geq 0\}$是一个强度为λ的Poisson过程. 又设Y_k为独立同分布的随机变量,它们有分布函数$G(y)$, 均值$EY=\mu$, 方差$Var(Y)=\sigma^2$. 则

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

称为**复合Poisson过程**.

- 简单性质:

$$E[X(t)]=\lambda\mu t,\quad Var[X(t)]=\lambda(\mu^2+\sigma^2)t$$

证:

$$
\begin{aligned}
E[X^2(t)] &= E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k\right)^2 = E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k^2 + \sum_{i\neq j} Y_i Y_j\right) \\
&= E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k^2\right) + E\left(\sum_{i\neq j} Y_i Y_j\right) \\
&= E[N(t)]\cdot E(Y_1^2) + E[N^2(t) - N(t)]\cdot E[Y_1 Y_2] \\
&= \lambda t\cdot(\mu^2+\sigma^2) + [(\lambda t + \lambda^2 t^2) - \lambda t]\cdot \mu^2 \\
&= \lambda t\cdot(\mu^2+\sigma^2) + \lambda^2 t^2\cdot \mu^2
\end{aligned}
$$

所以,

$$Var[X(t)] = \lambda(\mu^2+\sigma^2)t$$

例2.4 设发生火灾的累计次数是强度为λ的Poisson过程$\{N(t),\ t\geq 0\}$，第k次火灾后保险公司支付的赔偿金为Y_k.假设$\{Y_k,\ k=1,2,\ldots\}$独立同分布,且与$\{N(t),\ t\geq 0\}$相互独立,则到时刻t累计的赔偿金总额为

$$X(t)=\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

就是一个复合Poisson过程.

- 更新过程

定义2.5 如果W_k, k=1,2,…为一串非负的随机变量, 它们独立同分布, 分布函数为$F(w)$. 记

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} W_k, \quad n \geq 1$$

$$N(t) = \sup\{n : S_n \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}$$

则$\{N(t), t\geq 0\}$称为**更新过程**, W_n称为第n 个**更新间隔**或第n次更新的等待时间, S_n称为第n次**更新时刻**.

更新过程中事件平均发生的次数称为**更新函数**，记作$m(t)$，即：$m(t)=E[N(t)]$.

更新理论的主体是研究更新函数的性质.

命题2.4 设在更新过程中更新间隔W_1的分布函数为$F(t)$，则更新过程$N(t)$的分布为：

$$P\{N(t)=n\}=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)$$

更新函数为：

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{(n)}(t)$$

其中$F^{(n)}(t)$为$F(t)$的n重卷积

证明: 首先不难看出,

$$\{N(t)\geq n\}\Leftrightarrow\{S_n\leq t\}$$

于是,

$$P\{N(t)=n\}=P\{N(t)\geq n\}-P\{N(t)\geq n+1\}$$

$$=P\{S_n\leq t\}-P\{S_{n+1}\leq t\}$$

$$=F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)$$

其中,

$$F^{(n)}(t)=\int\cdots\int_{x_1+x_2+\cdots+x_n\leq t} dF_1(x_1)dF_2(x_2)\cdots dF_n(x_n)$$

为了求出更新函数, 引入示性函数:

$$I_n(t)=\begin{cases}1, & 若第n次更新发生在[0,t]中\\ 0, & 若不然\end{cases}$$

显然, $N(t)=\sum_{n=1}^{\infty} I_n(t)$, 于是

$$E[N(t)]=E\left[\sum_{n=1}^{\infty} I_n(t)\right]=\sum_{n=1}^{\infty} E[I_n(t)]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} P\{I_n(t)=1\}=\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n\le t\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t)$$

练习 设在更新过程中更新间隔$W_1, W_2, \ldots$为独立同指数分布(参数为$\lambda>0$), 则更新过程$N(t)$的分布为:

$$P\{N(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},$$

更新函数为: $m(t)=\lambda t$.

答案: 由命题2.2 (2)知,

$$F^{(n)}(t)=P\{W_n \le t\}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}.$$

课外作业:

Page 27, Ex 10, 14