数理逻辑 2020 春期末试卷参考答案

Made by TA in 2021SP

1.判断题

- (1) 正确，因为已知任两条 L 中的公理都无法推出第三条.
- (2) 正确，由相容的定义可知.
- (3) 正确，可以归纳证明.
- (4) 错误，E 的任何相容扩充（包括 K_N）仍然有非正规模型
- (5) 错误， 取解释域 $M=\{\mathbb{N},\emptyset,\overline{R}\}$.其中，$\mathbb{N}$ 为自然数集，$(\overline{x},\overline{y})\in\overline{R}$ 当且仅当 $\overline{x}>1$ 且 $\overline{y}>1$. 显然 M 不是原公式的模型.
- (6) 正确
- (7) 正确，定理证明中构造的 p 为 “ p 在 K_N 中不可证”.最后得出 p 是真命题.

2. 简答题

开放性问答，没有标准答案，大家想到什么就写什么吧.

3. 直接证明

$\vdash(\neg p\to p)\to(q\to p)$

思路:
如果是间接证明，可以用 `否定肯定律` 和 `L1` ，经过 `HS` 规则得到结果，即

$$\begin{array}{lll} 1. & (\neg p\to p)\to p & \text{否定肯定律} \\ 2. & p\to(q\to p) & \text{L1} \\ 3. & (\neg p\to p)\to(q\to p) & \text{1,2,HS} \end{array}$$

但是这里要求的是直接证明，所以只好老老实实推了.

借用2020春季学期的助教写的否定肯定律的19步直接证明，有

(1) ¬p → (¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) (L1)
(2) (¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p))) (L3)
(3) ((¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p)))) → (¬p → ((¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p))))) (L1)
(4) ¬p → ((¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p)))) (2) (3) MP
(5) (¬p → ((¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p) → (p → ¬ (p → (¬p → p))))) → ((¬p → (¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p)) → (¬p → (p → ¬ (p → (¬p → p))))) (L2)
(6) (¬p → (¬¬ (p → (¬p → p)) → ¬p)) → (¬p → (p → ¬ (p → (¬p → p)))) (4) (5) MP
(7) ¬p → (p → ¬ (p → (¬p → p))) (1) (6) MP
(8) (¬p → (p → ¬ (p → (¬p → p)))) → ((¬p → p) → (¬p → ¬ (p → (¬p → p)))) (L2)

(9) $(\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg (p \to (\neg p \to p)))$ (7) (8) MP

(10) $(\neg p \to \neg (p \to (\neg p \to p))) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p)$ (L3)

(11) $((\neg p \to \neg (p \to (\neg p \to p))) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p)) \to ((\neg p \to p) \to ((\neg p \to \neg (p \to (\neg p \to p))) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p)))$ (L1)

(12) $(\neg p \to p) \to ((\neg p \to \neg (p \to (\neg p \to p))) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p))$ (10) (11) MP

(13) $((\neg p \to p) \to ((\neg p \to \neg (p \to (\neg p \to p))) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p))) \to (((\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg (p \to (\neg p \to p)))) \to ((\neg p \to p) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p)))$(L2)

(14) $((\neg p \to p) \to (\neg p \to \neg (p \to (\neg p \to p)))) \to ((\neg p \to p) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p))$ (12) (13) MP

(15) $(\neg p \to p) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p)$ (9) (14) MP

(16) $((\neg p \to p) \to ((p \to (\neg p \to p)) \to p)) \to (((\neg p \to p) \to (p \to (\neg p \to p))) \to ((\neg p \to p) \to p))$ (L2)

(17) $((\neg p \to p) \to (p \to (\neg p \to p))) \to ((\neg p \to p) \to p)$ (15) (16) MP

(18) $(\neg p \to p) \to (p \to (\neg p \to p))$ (L1)

(19) $(\neg p \to p) \to p$ (17) (18) MP □

然后根据 `HS` 规则的直接证明:

1.	$p \to q$	已知
2.	$q \to r$	已知
3.	$(q \to r) \to (p \to (q \to r))$	L1
4.	$p \to (q \to r)$	2,3,MP
5.	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	L2
6.	$(p \to q) \to (p \to r)$	4,5,MP
7.	$p \to r$	1,6,MP

只要把上述 `HS` 直接证明中的 p 换成 $\neg p \to p$, q 换成 p, r 换成 $q \to p$ 即可.

4. 推理题

设原子命题 X_1, X_2, X_3 分别代表第一个、第二个、第三个箱子里有金子.

由于只有一个箱子中有金子，则有约束条件

$$X_1 \to \neg X_2 \wedge \neg X_3 = 1 \tag{1}$$

$$X_2 \to \neg X_1 \wedge \neg X_3 = 1 \tag{2}$$

$$X_3 \to \neg X_1 \wedge \neg X_2 = 1 \tag{3}$$

又因为三句画中只有一句是真话，因此有约束条件

$$\neg X_2 \to \neg X_2 \wedge \neg\neg X_1 = 1 \tag{4}$$

$$X_2 \to \neg\neg X_2 \wedge \neg\neg X_1 = 1 \tag{5}$$

$$\neg X_1 \to \neg\neg X_2 \wedge \neg X_2 = 1 \tag{6}$$

逐个尝试，得到仅有 $(X_1, X_2, X_3) = (1, 0, 0)$ 时，满足约束.即第一个箱子里有金子.

5. K 中证明

$\vdash \forall x_1 \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2)) \to (\exists x_1 R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1))$

这里的题干中应该加一个条件: 关系 `R_1` 为一元关系.

以下可以从 $\{\forall x_1 \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2)\}$ 中可证:

$1.\quad \forall x_1 \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2))$ 已知

$2.\quad \forall x_1 \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2)) \to \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2))$ K4

$3.\quad \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2))$ 1,2,MP

$4.\quad \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2)) \to (R_1(x_1) \to \forall x_2 R_1(x_2))$ 课本P76命题1的 1°
(由于关系 `R_1` 为一元关系，因此 x_2 不在 $R_1(x_1)$ 中自由出现.)

$5.\quad R_1(x_1) \to \forall x_2 R_1(x_2)$ 3,4,MP

$6.\quad \forall x_2 R_1(x_2) \to \forall x_1 R_1(x_1)$ 课本P77命题2的 1°
(由于关系 `R_1` 为一元关系，因此 x_1 不在 $R_1(x_2)$ 中出现.)

$7.\quad R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1)$ 5,6,MP

$8.\quad \forall x_1 (R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1))$ 7,Gen

$9.\quad \forall x_1 (R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1)) \to (\exists x_1 R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1))$ 课本P77命题2的 3°
(x_1 不在 $\forall x_1 R_1(x_2)$ 中自由出现.)

$10.\quad \exists x_1 R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1)$ 8,9,MP

即有 $\{\forall x_1 \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2))\} \vdash \exists x_1 R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1)$.

又因为上述证明中所用的 `Gen` 变元 x_1, x_2 不在 $\forall x_1 \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2))$ 中自由出现，因此由演绎定理，$\vdash \forall x_1 \forall x_2 (R_1(x_1) \to R_1(x_2)) \to (\exists x_1 R_1(x_1) \to \forall x_1 R_1(x_1))$

6. K_N 中证明

$K_N \vdash \overline{0} \times x \approx \overline{0}$

证明序列如下:

$1.\quad \overline{0} \times \overline{0} \approx \overline{0}$ N5

$2.\quad \overline{0} \times x' \approx \overline{0} \times x + \overline{0}$ N6

3. $\overline{0} \times x + \overline{0} \approx \overline{0} \times x$ N3

4. $\overline{0} \times x' \approx \overline{0} \times x + \overline{0} \to (\overline{0} \times x + \overline{0} \approx \overline{0} \times x \to \overline{0} \times x' \approx \overline{0} \times x)$

课本P107命题2的3°（传递性）

5. $\overline{0} \times x + \overline{0} \approx \overline{0} \times x \to \overline{0} \times x' \approx \overline{0} \times x$ 2,4,MP

6. $\overline{0} \times x' \approx \overline{0} \times x$ 3,5,MP

7. $\overline{0} \times x' \approx \overline{0} \times x \to (\overline{0} \times x \approx \overline{0} \to \overline{0} \times x' \approx \overline{0})$

课本P107命题2的3°（传递性）

8. $\overline{0} \times x \approx \overline{0} \to \overline{0} \times x' \approx \overline{0}$ 6,7,MP

9. $\forall x(\overline{0} \times x \approx \overline{0} \to \overline{0} \times x' \approx \overline{0})$ 8,Gen

10. $\overline{0} \times \overline{0} \approx \overline{0} \to (\forall x(\overline{0} \times x \approx \overline{0} \to \overline{0} \times x' \approx \overline{0}) \to \forall x(\overline{0} \times x \approx \overline{0}))$

N7

11. $\forall x(\overline{0} \times x \approx \overline{0} \to \overline{0} \times x' \approx \overline{0}) \to \forall x(\overline{0} \times x \approx \overline{0})$ 1,10,MP

12. $\forall x(\overline{0} \times x \approx \overline{0})$ 9,11,MP

13. $\forall x(\overline{0} \times x \approx \overline{0}) \to \overline{0} \times x \approx \overline{0}$ K4

14. $\overline{0} \times x \approx \overline{0}$ 12,13,MP