随机过程应考复习

一， Poisson 过程 给时间 ⇒ 概率.

2016-2017 秋

(1) 设$\{N(t),t\geq 0\}$是一个强度为$\lambda>0$的Poisson过程，则 $\mathrm{Cov}(N(t),N(s))=$ ________.

(3) 设某路口白、红、灰三种颜色的汽车的到达数量分别为强度为λ_1, λ_2, λ_3 的Piosson过程到达，且相互独立。若不论颜色，第一辆汽车平均到达时间为________；第一辆红色汽车的平均到达时间为________。

(4) 设$[0,t]$内到达某商店门口的顾客数$\{N(t),t\geq 0\}$是一个强度为$\lambda>0$的Poisson过程，每个达到的顾客依概率p 进入店内，以概率$1-p$ 不进店即离开，且顾客是否进店是相互独立的；进店的每个顾客又独立地以概率q 进行消费，以概率$1-q$不消费。则进店的顾客数的均值和方差为________和________；消费的顾客数的均值和方差为________和________。

二、(16分) 设某人甲负责订阅杂志，前来订阅的顾客数是日均到达率为6 的泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$。若每个顾客的订阅季数$Y\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.且各人的选择相互独立。设 $N_i(t)$ 为订阅 i 季杂志的顾客人数，$i=1,2,3$. 并以 $\{X(t)\}$ 表示到时刻 t 为止甲所得全部手续费（假设每订出一季杂志，甲可得手续费 1 元），

(1) 问 $N_i(t)$，$i=1,2,3$ 分别是什么过程？它们是否相互独立？

(2) 试求：$E[X(t)]$，$Var(X(t))$, 及$X(t)$ 的矩母函数$g_{X(t)}(u)=E[e^{uX(t)}]$.

2016-2017 春

2. 设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是一个强度为 λ 的Poisson过程，则 $\mathrm{E}[N(1)N(2)]=$ ________; $\mathrm{E}[N(10)|N(5)]=$ ________; 若又已知$N(3)=1$, 则 $\mathrm{P}(N(2)-N(1)=1)=$ ________.

3. 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程，据以往资料统计为每小时平均观测到 3 颗流星. 则在晚上 8 点到 10 点期间，该天文台没有观察到流星的概率是 ________. 凌晨 0 点后该天文台观察到第一颗流星的时间的分布是 ________.

8. 关于平稳过程，下列说法正确的是(　).
(A) 宽平稳过程具有平稳增量性
(B) Possion过程是宽平稳过程
(C) 初始状态服从平稳分布的Markov过程为严平稳过程
(D) 严平稳过程一定是宽平稳过程

二. (12分) 假设一个电子管内到达阳极的电子数目 $N(t)$ 服从参数为 λ 的 Poisson 过程，每个电子携带能量相互独立且与电子数目 $N(t)$相互独立，并均服从区间 $[1,2]$ 上的均匀分布，设到 t 时刻的阳极接受的能量为 $S(t)$. 求$S(t)$ 的均值 $\mathrm{E}[S(t)]$ 和 方差$\mathrm{Var}[S(t)]$.

三. (20分) 现有红色、黄色、蓝色三种汽车，分别按强度为 λ_1, λ_2 和λ_3 且相互独立的 Poisson 过程通过公路上的某观察站，

(1) 若不论颜色，求第一辆车通过该观察站所需的时间的概率密度函数与期望；

(2) 在已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下,

(a) 下一辆仍是红车的概率是多少？ (b) 下一辆是黄车的概率是多少？

(3) 已知时刻 t_0 观察到一辆红车的条件下，接下来通过的 k 辆全是红车，而后是非红车的概率是多少？ （$k \geq 0$）

(4) 在相继两辆红车之间通过该观察站的蓝车恰有n 辆的概率, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

2019 期末

(3) 设有复合泊松过程$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$，其中$N(t)$是强度为$\lambda$的泊松过程，$Y_i \sim Exp\{\mu\}$. 则:

$EX(t) =$ __________, $E[X^2(t)] =$ __________, $g_{X(t)}(s) = E\exp\{sX(t)\} =$ __________.

二、 (8分)保险公司的理赔次数$N(t)$是强度为λ的泊松过程，诸次理赔额$C_i (i \geqslant 1)$为独立同分布，且与$N(t)$独立，$EC_i = \mu$. 又设W_i 为第i次理赔发生的时间$(i \geqslant 1)$，则到时刻t为止的理赔总额的折现值为：

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} C_i e^{-\alpha W_i}$$

其中$\alpha > 0$为折现率，试求$C(t)$的期望值.

(1)设X与Y相互独立，分别服从指数分布$Exp\{\lambda\}$与$Exp\{\mu\}$，则：

(a) $X + Y \sim Exp\{\lambda + \mu\}$. ( )

(b) $\min\{X, Y\} \sim Exp\{\lambda + \mu\}$. ( )

(c) $\max\{X, Y\} \sim Exp\{\lambda + \mu\}$. ( )

(d) $P\{X > h\} = 1 - \lambda h + o(h)$, $h \downarrow 0$. ( )

(e) $P\{X \leq s + t \mid X > s\} = P\{X \leq t\}$, $s, t > 0$. ( )

2019.1.10

（3）（**填空**）设 X_1, X_2, X_3 相互独立，且 $X_i \sim Exp(\lambda_i), i = 1,2,3$（指数分布），则 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$的分布为（ ），概率 $P\{X_1 = X_{(1)}\}$等于（ ）。

（4）（**填空**）设$\{N(t), t \geq 0\}$是一强度为λ的 Poisson 过程，W_k为其第k个事件发生的时间，并设$1 \leq k \leq n, t > 0$，则$E\{W_k \mid N(t) = n\} =$( )，$E(W_k) =$( )。

2020.1.6

（4）设$\{X(t), t \geq 0\}$是强度为λ的泊松过程，命$X_T = \frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt$，则：

$E(X_T) =$( )，$Var(X_T) =$( )。

（3）到达某邮箱的正常电子邮件和垃圾邮件数分别是强度为 9 和 3 的泊松过程，且相互独立。则第一封邮件的平均到达时间为（　　），第一封垃圾邮件到达之前恰好到达了 k 封正常邮件的概率为（　　）。

（5）到达某商店的顾客数 $N(t)$ 是一强度为 $\lambda(t)=2+t/2$ 的非齐次泊松过程，若该商店早上 8:00 开门，则午时段(11:00-13:00)没有顾客到达的概率为(　　)，午时段到达商店的平均人数为(　　)。

二、**（15 分）**设某种健康险投保者中的出险人数 $N(t)$ 为一强度为 5 的泊松过程，若以 Y_i 表示第 i 个出险者应获赔偿，并假定 $Y_i \sim U(1,3)$（均匀分布，单位：万元），且 $\{Y, i \geq 1\}$ 为 i.i.d.，试求到时刻 t 为止保险公司应付全部赔偿 $X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 的期望 $EX(t)$、方差 $Var[X(t)]$ 及矩母函数 $g_{X(t)}(s)$。(均匀分布矩母函数：$g(s)=\frac{e^{bs}-e^{as}}{(b-a)s}$)

二、平稳过程

2016-2017 秋

(5) 设$X(t) = A\sin(2\pi\Theta_1 t+\Theta_2)$，A 为常数，$\Theta_1$，$\Theta_2$ 为相互独立的随机变量，Θ_1的密度函数为一个偶函数，而Θ_2 服从区间$[-\pi,\pi]$上的均匀分布，则其均值函数为________，协方差函数为________，从而该过程为________。

五、(16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty<t<\infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega)=\frac{\omega^2+5}{\omega^4+11\omega^2+24},\quad -\infty<\omega<\infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

2017 年春

五. (8分) 设$X(t) = Y\cos(\omega t+\Theta)$，其中 ω 为常数，Y 服从均值为μ，方差为 σ^2 正态分布，Θ 服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布，且 Y 与Θ 相互独立. 试判断$X(t)$ 是否为宽平稳过程。如是，请给出证明；否则，请说明原因。

六. (16分) 已知平稳过程 $\{X(t), -\infty<t<\infty\}$ 的均值函数为 0,谱密度函数为

$$S(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4+10\omega^2+21},\quad -\infty<\omega<\infty.$$

(1) 求$X(t)$ 的协方差函数 $R(\tau)$;

(2) $X(t)$是否有均值遍历性？为什么？

2019 年期末

(2) 关于平稳过程，下列说法是否正确

(a) 宽平稳过程具有平稳增量性. ( )

(b) Poisson过程是平稳过程. ( )

(c) 二阶矩存在的严平稳一定是宽平稳过程. ( )

(d) 初始状态分布为平稳分布的Markov过程一定是严平稳的. ( )

五、(15 分)设 A 与 Θ 独立且分别服从均匀分布 $U(0,1)$ 与 $U(0,2\pi)$，定义过程：

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta) \quad （t \in R，\ \omega_0 \text{ 为非零常数}）$$

（1）证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、（12 分）设平稳过程 $X = \{X(t),\ t \in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

（1）试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

2019.1.10

五、(15 分)设 A 与 Θ 独立且分别服从均匀分布 $U(0,1)$ 与 $U(0,2\pi)$，定义过程：

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta) \quad （t \in R，\ \omega_0 \text{ 为非零常数}）$$

（1）证明 $\{X(t),\ t \in R\}$ 为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数 $S(\omega)$。

六、（12 分）设平稳过程 $X = \{X(t),\ t \in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega) = \frac{\omega^2 + 3}{\omega^4 + 11\omega^2 + 28}$$

（1）试求 X 的协方差函数 $R(\tau)$；

（2）问 X 的均值是否有遍历性？为什么？

2019 期末

五、 (15分)考察下列函数$S_i(\omega),(\omega\in R)$:

$$S_1(\omega)=\frac{\omega^2+9}{(\omega^2+4)(\omega+1)^2},\qquad S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6},\qquad S_3(\omega)=\frac{\omega^2+4}{\omega^4-4\omega^2+3},$$

$$S_4(\omega)=\frac{\omega^2-4}{\omega^4+4\omega^2+3},\qquad S_5(\omega)=\frac{e^{-i\omega^2}}{\omega^2+2}(i=\sqrt{-1}),\qquad S_6(\omega)=\frac{4a\cos\omega}{\omega^2+a^2}(a>0).$$

(1) 问哪些可以作为平稳过程的谱密度函数? 并进而求出其对应的协方差函数$R(\tau)$.

(2) 问相应的平稳过程的均值是否有遍历性? 为什么?

六、 (7分) 设

$$X_t=S_t+\varepsilon_t=b\cos(\omega t+U)+\varepsilon_t,\quad t\in\mathbb{Z}$$

其中$U\sim \mathrm{U}(0,2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, 方差为σ^2的白噪声序列, U与$\{\varepsilon_t\}$独立. 作矩形窗滤波, $M>0$:

$$Y_t=\frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M}X_{t-j}$$

1)试问Y_t是平稳过程吗? 为什么?

2)求出Y_t的方差.

2020 年 1 月

（2）下列函数是否为平稳过程的谱密度函数：

$a.\ S_1(\omega)=\frac{\omega^2-16}{\omega^4+11\omega^2+18}$ （　　）； $b.\ S_2(\omega)=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+5\omega^2+6}$ （　　）；

$c.\ S_3(\omega)=\frac{\omega^2\cos\omega}{\omega^4+1}$ （　　）； $d.\ S_4(\omega)=\frac{e^{-i|\omega|}}{\omega^2+a^2},(i=\sqrt{-1})$ （　　）

五、**(15 分)**设A与Θ独立，$A\sim Exp(1/3)$(指数分布)，$\Theta\sim U(0,2\pi)$(均匀分布)，定义随机过程：

$$X(t)=A\cos(t+\Theta),\quad (t\in R)$$

（1）证明$\{X(t),\ t\in R\}$为宽平稳过程；

（2）试求其功率谱密度函数$S(\omega)$。

六、（**10 分**）设平稳过程$X=\{X(t),\ t\in R\}$（均值为 0）的功率谱密度函数为：

$$S(\omega)=\frac{\omega^2+3}{\omega^4+11\omega^2+28}$$

（1）试求X的协方差函数$R(\tau)$；

（2）问X的均值是否有遍历性？为什么？

三、马氏过程

2016-2017 秋

(2) （判断是非）设有 $m \geq 1$ 使得对于马氏链的所有状态 i，有 $P_{i,j}^{(m)} > 0$，则：

A $d(j)|m$, 其中 $d(j)$ 为 j 的周期;　　( )

B $d(j) = m$;　　( )

C j 是非周期的;　　( )

D j 的周期为无穷;　　( )

(6) 设马氏链的状态 i 是周期为 d 的常返状态，μ_i 为状态 i 的平均常返时，则$\lim_{n\to\infty} P_{ii}^{(nd)} =$ ________。

三、 (20分) 设有夏普、大金两个品牌的空气净化器在某地市场占有率开始时（$n=0$）均为1/3(其他品牌总的市场占有率为1/3). 而每过一个月（单位时间）顾客消费倾向的改变可以用一个三状态的马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 来描述,其一步转移概率(状态1、2、3分别表示购买夏普、大金、其他品牌的空气净化器)如下图所示.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.35 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明该链为不可约、遍历的;

(2) 问两个月后各品牌的市场占有率将变成多少?

(3) 各品牌对市场的占有率最终会稳定于什么样的比例?

四、 (16分) 逐个随机地把球放入到 a个盒子中去（可重复放），以 X_n 表示放了 n个球之后的空盒数，则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为马氏链，

(1) 写出该马氏链的转移概率矩阵P，并进行状态分类;

(2) 试求放满 a个盒子的平均时间（次数）。

2017 秋

4. 设$\{X_n, n \geq 0\}$是一个Markov 链, 且一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

若X_0 的分布律为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, 则$X_2$的分布律为____________; 且该Markov 链的平稳分布为__________.

5. 在离散时间Markov 链中, 关于常返性下列说法正确的是(　).

(A) 若状态 i 常返且 $j \to i$, 则状态 j 也是常返的

(B) 若状态 i 常返且 $i \to j$, 则状态 j 不一定是常返的

(C) 若状态 i 零常返, 则极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在

(D) 若状态 i 正常返, 则极限 $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ 一定存在

6. 关于离散时间Markov 链的平稳分布和极限分布, 下列说法正确的是(　).

(A) 只要有正常返类, 则必有平稳分布

(B) 平稳分布和极限分布都存在, 则它们必相等

(C) 极限分布若存在则与X_0 的取值无关

(D) 平稳分布若存在则必唯一

7. 关于直线上的简单对称随机游动$\{X_n, n \geq 0\}$, 下列说法错误的是(　).

(A) 所有状态的周期均为2

(B) $\{X_n, n \geq 0\}$为一个Markov 链且无平稳分布

(C) 若$X_0 = 0$, 则对任意整数n, 其最终能到达它的概率为1

(D) 若$X_0 = 0$, 则其首次返回原点所需平均时间是有限的

四. (15分) 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$（全体非负整数），转移概率为

$$P_{i,i+1} = P_{i,0} = \frac{1}{2}, \quad i \geq 0.$$

(1) 证明该马氏链为不可约遍历的;

(2) 试求该马氏链的极限分布 $\pi = \{\pi_i,\ i \geq 0\}$。

2019．1.10

（1）**（是非）**若马氏链 $X = \{X_n,\ n \geq 0\}$的初始分布 $\pi = \{\pi_j,\ j \geq 0\}$为其平稳分布，则:

(a) $\sum_{i\geq 0} \pi_i p_{i,j}^{(n)} = \pi_j, (j \geq 0, n \in N)$ （　　）； (b) X 为严格平稳过程（　　）

(c) $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}, (i, j \geq 0)$ （　　）； (d) X 必有正常返状态（　　）。

三、**（15 分）** 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$的转移概率为:

$$p_{0,j} = a_j > 0,\ (j \geq 0) \quad p_{i,i-1} = 1,\ (i \geq 1)$$

（1）证明该马氏链为不可约常返的，且为非周期;

（2）试求过程由0出发后首次返回到0的平均时间 μ_0，并据以回答：过程何时为正常返？何时为零常返？

（3）在正常返时，试求该马氏链的极限分布：$\pi = \{\pi_i,\ j \geq 0\}$。

四、（20 分）设马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（1） 试讨论该马氏链的状态分类（即：分为几个等价类、各类的周期性如何、是否为常返、是否为正常返？）。

（2） 试求过程由状态k出发而被状态j吸收的概率$f_{k,j}$，（$k=1,2$；$j=3,4$）。

2019 期末

(4) 现有对于一个三状态的马氏链$\{X_n, n \geqslant 0\}$的25个连续观察数据:

-1, 0, 0, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -1,
-1, -1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, -1, 1, 1, 1,

则据此可估计出该马氏链的转移概率矩阵P为______________________.

三、 (20分)质点在一正N边形($N \geq 3$)的周边上作随机游动(顶点$1, 2, ..., N$按顺时针方向排列)，质点以概率p顺时针游动一格，以概率$q = 1 - p$ 逆时针游动一格，试用一马氏链$\{X_n, n \geqslant 0\}$描述该模型，并(1)写出该马氏链的转移概率矩阵P，并作状态分类;

四、 (20分)设马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的转移概率矩阵为:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1)试对该马氏链作状态分类(分为几类、各类的周期性、常返性、正常返性等);

(2)试求过程从状态k出发而被状态4吸收的概率$f_{k,4}$及$f_{k,5}$, ($k = 1, 2, 3$).

2020.1.6

三、（18 分）圆周上有 1,2,3,4 四个位置按顺时针方向排列，一个粒子在这四个位置上(沿圆周)作随机游动。它从任何一个位置各以概率 0.5 顺时针方向或逆时针方向游动至其相邻位置，若以$X_n = j$表示时刻n粒子处于位置j ($j = 1,2,3,4$)，则$\{X_n, n \geq 0\}$为一马氏链，

（1）求该马氏链的转移概率矩阵P及$P^{(2)}$，并求$P\{X_{n+3} = 3, X_{n+1} = 1 \mid X_n = 2\} = ?$

（2）讨论该马氏链状态分类并求其平稳分布$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$；

（3）极限$\lim\limits_{n \to \infty} P^{(n)}$是否存在？为什么？

四、（**12 分**）设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为区间 $[0,3]$ 上的随机游动，其转移概率矩阵为：

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

试求粒子由 k 出发而被 0 吸收的概率 p_k 及它被吸收的平均步数 v_k，（$k = 1,2,3$）。