第五章 解线性方程组的迭代法

中国科学技术大学 数学学院

chenxjin@ustc.edu.cn

解线性方程组有两类方法：

- 直接法(消元法)：得到的解是理论上准确的，计算复杂度为$O(n^3)$ 量级，存储量为$O(n^2)$量级，比较合适于n较小的情况.
- 迭代法：占用存储空间少，程序实现简单，尤其用于大型稀疏矩阵(即系数矩阵中含有大量的0元素)时速度快.

解线性方程组有两类方法：

- 直接法(消元法)：得到的解是理论上准确的，计算复杂度为$O(n^3)$ 量级，存储量为$O(n^2)$量级，比较合适于n较小的情况.
- 迭代法：占用存储空间少，程序实现简单，尤其用于大型稀疏矩阵(即系数矩阵中含有大量的0元素)时速度快.

实际中，很多问题通常归结为求解具有大型（$n >> 1$）稀疏矩阵的线性代数方程组. 此时，迭代法更重要！

线性方程(组)的迭代法

线性方程(组)的迭代法

对方程(组)$F(x) = 0$，迭代法 基本步骤：

线性方程(组)的迭代法

对方程(组)$F(x) = 0$，迭代法 基本步骤：

1. 构造原方程组的等价形式 $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \Phi(x)$.

线性方程(组)的迭代法

对方程(组)$F(x)=0$，迭代法 基本步骤：

1. 构造原方程组的等价形式 $F(x)=0 \Leftrightarrow x=\Phi(x)$.
2. 写出迭代格式 $x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)})$，并取合适的初值 $x^{(0)}$.

线性方程(组)的迭代法

对方程(组)$F(x)=0$，迭代法 基本步骤:

1. 构造原方程组的等价形式 $F(x)=0 \Leftrightarrow x=\Phi(x)$.
2. 写出迭代格式 $x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)})$，并取合适的初值 $x^{(0)}$.
3. 若极限$x^*=\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)}$存在，则$x^*$为方程的解. 在计算上，一般迭代至$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|<\varepsilon$时停止.

线性方程(组)的迭代法

对方程(组)$F(x)=0$，迭代法 基本步骤：

1. 构造原方程组的等价形式 $F(x)=0 \Leftrightarrow x=\Phi(x)$.
2. 写出迭代格式 $x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)})$，并取合适的初值 $x^{(0)}$.
3. 若极限$x^*=\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)}$存在，则$x^*$为方程的解. 在计算上，一般迭代至$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|<\varepsilon$时停止.

若极限$x^*=\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)}$不存在，则失败. 需考虑采用另外的迭代格式 Φ 或初值 $x^{(0)}$.

线性方程(组)的迭代法

对方程(组)$F(x)=0$，迭代法 基本步骤：

1. 构造原方程组的等价形式 $F(x)=0 \Leftrightarrow x=\Phi(x)$.
2. 写出迭代格式 $x^{(k+1)}=\Phi(x^{(k)})$，并取合适的初值 $x^{(0)}$.
3. 若极限$x^*=\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)}$存在，则$x^*$为方程的解. 在计算上，一般迭代至$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|<\varepsilon$时停止.

若极限$x^*=\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)}$不存在，则失败. 需考虑采用另外的迭代格式 Φ 或初值 $x^{(0)}$.

- 向量序列 $x^{(k)} \longrightarrow x^* \Longrightarrow x_i^{(k)} \longrightarrow x_i^*$ (即$x^{(k)}$各分量分别收敛到x^*的对应分量);
- 线性方程组作为一种特殊情形，用迭代法求解的基本思想与非线性方程求根的迭代方法完全相同.

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G\, x^{(k)} + g$$

通常称 G为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^*，则：

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g$$

通常称 G为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^*，则：

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g$$

通常称 G为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^*，则：

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故：向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛$\Longleftrightarrow$

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g$$

通常称 G为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^*，则:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故：向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛$\Longleftrightarrow G^k \to 0 \Longleftrightarrow$

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g$$

通常称 G为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^*，则：

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故：向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛$\Longleftrightarrow G^k \to 0 \Longleftrightarrow \rho(G) < 1$ (充要条件)

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g$$

通常称 G为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^*，则：

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故：向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛$\Longleftrightarrow G^k \to 0 \Longleftrightarrow \rho(G) < 1$ (充要条件)
注：收敛与初值(即初始向量) $x^{(0)}$ 的选取无关！

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G\,x^{(k)} + g$$

通常称 G为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^*，则：

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故：向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛$\Longleftrightarrow G^k \to 0 \Longleftrightarrow \rho(G) < 1$ (充要条件)
注：收敛与初值(即初始向量) $x^{(0)}$ 的选取无关!

- 因$\rho(G) \le \|G\|$, 若存在范数$\|G\|_p < 1$, 则迭代收敛；反之不然.

线性方程组的迭代法

设线性方程组 $Ax = b \Longleftrightarrow x = Gx + g$ (等价形式),
构造相应的迭代向量序列

$$x^{(k+1)} = G\, x^{(k)} + g$$

通常称 G为迭代矩阵. 若原方程组的解为 x^*，则：

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} - x^* &= Gx^{(k)} - Gx^* = G(x^{(k)} - x^*) \\ &= G^2(x^{(k-1)} - x^*) = \cdots = G^{k+1}(x^{(0)} - x^*) \end{aligned}$$

故：向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛$\Longleftrightarrow G^k \to 0 \Longleftrightarrow \rho(G) < 1$ (充要条件)
注：收敛与初值(即初始向量) $x^{(0)}$ 的选取无关！

- 因$\rho(G) \leq \|G\|$, 若存在范数$\|G\|_p < 1$, 则迭代收敛；反之不然.
- 通常采用$1, \infty$范数来粗略估计收敛性.

等价方程(形式)

作$Ax = b$的等价方程 $x = Gx + g$时，

等价方程(形式)

作$Ax = b$的等价方程 $x = Gx + g$时，可以这样来做： 将A分成两部分的差$A = Q - P$并使 Q (通常称为分裂矩阵)可逆. 则

等价方程(形式)

作$Ax = b$的等价方程 $x = Gx + g$时，可以这样来做： 将A分成两部分的差$A = Q - P$并使 Q (通常称为分裂矩阵)可逆. 则

$$
\begin{aligned}
& Ax = b \Longleftrightarrow (Q - P)x = b \\
\Longleftrightarrow \quad & Qx = Px + b \Longleftrightarrow x = Q^{-1}Px + Q^{-1}b
\end{aligned}
$$

等价方程(形式)

作$Ax=b$的等价方程 $x=Gx+g$时，可以这样来做： 将A分成两部分的差$A=Q-P$并使 Q (通常称为分裂矩阵)可逆. 则

$$\begin{aligned} Ax=b &\Longleftrightarrow (Q-P)x=b \\ \Longleftrightarrow \quad Qx=Px+b &\Longleftrightarrow x=Q^{-1}Px+Q^{-1}b \end{aligned}$$

取 $G=Q^{-1}P,\ g=Q^{-1}b$ 即可.

等价方程(形式)

作$Ax=b$的等价方程 $x=Gx+g$时，可以这样来做： 将A分成两部分的差$A=Q-P$并使 Q (通常称为分裂矩阵)可逆. 则

$$\begin{aligned} Ax=b &\iff (Q-P)x=b \\ \iff \quad Qx=Px+b &\iff x=Q^{-1}Px+Q^{-1}b \end{aligned}$$

取 $G=Q^{-1}P,\ g=Q^{-1}b$ 即可.

三种最常见、最基本的迭代格式或方法（由易到难，由简到繁）：

Jacobi 迭代 $\Longrightarrow$ Gauss-Seidel 迭代 $\Longrightarrow$ 松弛(SOR)迭代

Jacobi迭代

设待解方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Jacobi迭代

设待解方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

假定A的对角元a_{ii}全不为0，分别由第i个方程解出x_i得：

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) \\ x_2 = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2) \\ \vdots \\ x_n = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1} - b_n) \end{cases}$$

它是原方程的一个等价方程

Jacobi迭代

设待解方程组为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

假定A的对角元a_{ii}全不为0，分别由第i个方程解出x_i得：

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1) \\ x_2 = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2) \\ \vdots \\ x_n = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + \cdots + a_{n\,n-1}x_{n-1} - b_n) \end{cases}$$

它是原方程的一个等价方程 (写成向量形式 $x = Gx + g$).

Jacobi迭代：分量形式

Jacobi迭代格式(**分量形式)**

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

即称为：Jacobi迭代，也称简单迭代.

将A表示为$A = D + L + U$，其中 $D = \mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$，

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

将A表示为$A = D + L + U$，其中 $D = \mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$，

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

则Jacobi迭代格式写成向量形式即为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

将A表示为$A = D + L + U$，其中 $D = \mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$，

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 \\ a_{21} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

则Jacobi迭代格式写成向量形式即为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b, \quad Q = D$$

故Jacobi迭代矩阵为： $G = -D^{-1}(L + U) = I - D^{-1}A$

Jacobi迭代的收敛条件

所有迭代格式收敛的充要条件是迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$.

对于Jacobi迭代，我们有一些保证收敛的充分条件.

Jacobi迭代的收敛条件

所有迭代格式收敛的充要条件是迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$.

对于Jacobi迭代，我们有一些保证收敛的充分条件.

定理：若A满足下列条件之一，则Jacobi迭代收敛.

① $A \equiv (a_{ij})$ 为严格行对角占优阵，即 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

② $A \equiv (a_{ij})$ 为严格列对角占优阵，即 $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$

Jacobi迭代的收敛条件

所有迭代格式收敛的充要条件是迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$.

对于Jacobi迭代，我们有一些保证收敛的充分条件.

定理：若A满足下列条件之一，则Jacobi迭代收敛.

① $A \equiv (a_{ij})$ 为严格行对角占优阵，即 $|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

② $A \equiv (a_{ij})$ 为严格列对角占优阵，即 $|a_{jj}| > \sum_{i=1,i\neq j}^{n} |a_{ij}|$

验证：$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

Jacobi迭代的收敛条件

所有迭代格式收敛的充要条件是迭代矩阵 G 的谱半径 $\rho(G) < 1$.

对于Jacobi迭代，我们有一些保证收敛的充分条件.

定理：若A满足下列条件之一，则Jacobi迭代收敛.

① $A \equiv (a_{ij})$ 为严格行对角占优阵，即 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$

② $A \equiv (a_{ij})$ 为严格列对角占优阵，即 $|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$

验证：
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

【注】：严格行或列对角占优，统称为**严格对角占优**。

Pf: ①. Jacobi迭代矩阵为$G = -D^{-1}(L+U) \doteq (g_{ij})$，其中

$$g_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i; \\ 0, & j = i. \end{cases}$$

故 $\rho(G) \leq \|G\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |g_{ij}| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \dfrac{\sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$，$\Longrightarrow$Jacobi迭代收敛.

Pf: ①. Jacobi迭代矩阵为$G = -D^{-1}(L+U) \doteq (g_{ij})$，其中

$$g_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i; \\ 0, & j = i. \end{cases}$$

故 $\rho(G) \leq \|G\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |g_{ij}| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \frac{\sum\limits_{j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$，$\Longrightarrow$Jacobi迭代收敛.

②. A严格列对角占优时A^T严格行对角占优. 且

$$I - D^{-1}A^T \sim D(I - D^{-1}A^T)D^{-1} = (I - D^{-1}A)^T \sim I - D^{-1}A$$

$$\Longrightarrow \quad \rho(I - D^{-1}A^T) = \rho(I - D^{-1}A)$$

由①知Jacobi迭代收敛.

例： 用Jacobi方法解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

例： 用Jacobi方法解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

解：方程对应的Jacobi迭代格式分量形式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \quad\quad\quad\quad 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 2.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} + \quad\quad\quad 0.2x_3^{(k)} + 1.6 \\ x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} \quad\quad\quad + 1.1 \end{cases}$$

例： 用Jacobi方法解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

解：方程对应的Jacobi迭代格式分量形式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \phantom{-0.2x_1^{(k)} +} 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 2.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.2x_1^{(k)} + \phantom{0.5x_2^{(k)} +} 0.2x_3^{(k)} + 1.6 \\ x_3^{(k+1)} = -0.1x_1^{(k)} - 0.1x_2^{(k)} \phantom{+ 0.5x_3^{(k)}} + 1.1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \\ -0.1 & -0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.5 \\ 1.6 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

由$\|G\|_1 = 0.7 \Rightarrow \rho(G) \le \|G\|_1 = 0.7 < 1$，知Jacobi迭代收敛. 取初始值$x^{(0)} = (1,1,1)^T$，计算结果由下表所示.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_\infty$
0	1	1	1	
1	-1.5	1.6	0.9	0.6
2	-1.25	2.08	1.09	0.48
3	-0.915	2.068	1.017	0.355
4	-0.9575	1.9864	0.9847	0.0425
5	-1.01445	1.98844	0.99711	0.05695
6	-1.00722	2.00231	1.0026	0.00723
7	-0.997543	2.00197	1.00049	0.009677

由$\|G\|_1 = 0.7 \Rightarrow \rho(G) \leq \|G\|_1 = 0.7 < 1$，知Jacobi迭代收敛. 取初始值$x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$，计算结果由下表所示.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_\infty$
0	1	1	1	
1	-1.5	1.6	0.9	0.6
2	-1.25	2.08	1.09	0.48
3	-0.915	2.068	1.017	0.355
4	-0.9575	1.9864	0.9847	0.0425
5	-1.01445	1.98844	0.99711	0.05695
6	-1.00722	2.00231	1.0026	0.00723
7	-0.997543	2.00197	1.00049	0.009677

原方程组的精确解是$x = (-1, 2, 1)^T$.

Gauss – Seidel迭代

Gauss − Seidel迭代

回顾：Jacobi迭代格式(分量形式)：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

Gauss − Seidel迭代

$\mathbf{Gauss-Seidel}$迭代

在Jacobi迭代中，使用最新算出的分量值

Gauss − Seidel迭代

在Jacobi迭代中，使用最新算出的分量值

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)} - b_1) \\
x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)} - b_2) \\
x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n^{(k)} - b_3) \\
\vdots \\
x_n^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} - b_n)
\end{cases}
$$

即：Gauss−Seidel迭代. 仍记 $A = D + L + U$.

Gauss – Seidel迭代矩阵

Gauss − Seidel迭代矩阵

Gauss−Seidel迭代写成向量形式为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b)$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b, \quad Q = D + L$$

Gauss－Seidel迭代矩阵

Gauss－Seidel迭代写成向量形式为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b)$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b, \quad Q = D + L$$

$$\Longleftrightarrow Qx^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b, \quad Q = D + L$$

Gauss − Seidel迭代矩阵

Gauss－Seidel迭代写成向量形式为：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b)$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b, \quad Q = D + L$$

$$\Longleftrightarrow Qx^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b, \quad Q = D + L$$

故Gauss－Seidel迭代矩阵为

$$G = -(D+L)^{-1}U = I - Q^{-1}A$$

【回顾】：严格行或列对角占优，统称为**严格对角占优**。

定理 5.1：若矩阵 M 严格对角占优，则 M 可逆. (参见课本101页)

【回顾】：严格行或列对角占优，统称为严格对角占优。

定理 5.1：若矩阵 M 严格对角占优，则 M 可逆. (参见课本101页)

Proof.

反证法。当 M 为严格行对角占优时，假设 M 不可逆，则存在非零向量$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$ 使得 $MX=0$. 不妨设 $0\neq|x_i|=\max_{1\leq j\leq n}|x_j|$, 则有

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j=0\Rightarrow|m_{ii}x_i|=|\sum_{j\neq i} m_{ij}x_j|\leq\sum_{j\neq i}|m_{ij}||x_j|<|m_{ii}||x_i|$$

矛盾！同理，当 M 为严格列对角占优时，则 M^T 为严格行对角占优. 由前知，M^T 可逆。综上，M 均可逆。 □

$\mathbf{Gauss-Seidel}$迭代收敛条件

Gauss-Seidel迭代格式收敛的充要条件是G的谱半径$\rho(G) < 1$，下面是一些Gauss-Seidel迭代收敛的充分条件.

Gauss − Seidel迭代收敛条件

Gauss-Seidel迭代格式收敛的充要条件是G的谱半径$\rho(G) < 1$，下面是一些Gauss-Seidel迭代收敛的充分条件.

定理：若矩阵A满足下列条件之一，则Gauss-Seidel迭代收敛.

① A为严格(行或列)对角占优阵. (参见第3版定理5.3)

② A为实对称正定阵．(参见第3版104页，定理5.4)

①.

任取Gauss-Seidel迭代矩阵 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的非零特征值λ， 设$v \neq 0$为相应的特征向量，i.e., $Gv = \lambda v$.
由$(D+L-A)v = \lambda(D+L)v$

①.

任取Gauss-Seidel迭代矩阵 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的非零特征值λ， 设$v \neq 0$为相应的特征向量，i.e., $Gv = \lambda v$.
由$(D+L-A)v = \lambda(D+L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D+L)v \Rightarrow$
$(D+L+\lambda^{-1}U)v = 0.$

①.

任取Gauss-Seidel迭代矩阵 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的非零特征值λ， 设$v \neq 0$为相应的特征向量，i.e., $Gv = \lambda v$.
由$(D+L-A)v = \lambda(D+L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D+L)v \Rightarrow$ $(D+L+\lambda^{-1}U)v = 0$. 若 $|\lambda| \geq 1$, 则 $D+L+\lambda^{-1}U$ 必严格对角占优， 由定理5.1知其可逆。矛盾！ 故有$|\lambda| < 1$

①.

任取Gauss-Seidel迭代矩阵 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的非零特征值λ， 设$v \neq 0$为相应的特征向量，i.e., $Gv = \lambda v$.
由$(D+L-A)v = \lambda(D+L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D+L)v \Rightarrow$ $(D+L+\lambda^{-1}U)v = 0$. 若 $|\lambda| \geq 1$, 则 $D+L+\lambda^{-1}U$ 必严格对角占优， 由定理5.1知其可逆。矛盾！ 故
有$|\lambda| < 1 \Rightarrow \rho(I-(D+L)^{-1}A) < 1$. 故迭代收敛！

□

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的， 故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$.

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$. 因 A 实对称且正定,

故 $\bar{v}^T A v > 0 \Longrightarrow p + a + \bar{a} > 0$.

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.
记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$. 因 A 实对称且正定,
故 $\bar{v}^T A v > 0 \Longrightarrow p + a + \bar{a} > 0$. 由①知，
$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v$

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T Dv > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T Uv$. 因 A 实对称且正定,

故 $\bar{v}^T Av > 0 \Longrightarrow p + a + \bar{a} > 0$. 由①知,

$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v$

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$. 因 A 实对称且正定,

故 $\bar{v}^T A v > 0 \Longrightarrow p + a + \bar{a} > 0$. 由①知，

$(D + L - A)v = \lambda(D+L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D+L)v$ or

$-L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda}\bar{v}^T(D+U)$

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T Dv > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T Uv$. 因 A 实对称且正定,

故 $\bar{v}^T Av > 0 \Longrightarrow p + a + \bar{a} > 0$. 由①知,

$(D + L - A)v = \lambda(D+L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D+L)v$ or

$-L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda}\bar{v}^T(D+U) \Rightarrow$

$$\lambda = \frac{-\bar{v}^T Uv}{\bar{v}^T(D+L)v} = -\frac{a}{p+\bar{a}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{v}^T Lv}{\bar{v}^T(D+U)v} = -\frac{\bar{a}}{p+a}$$

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.
记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$. 因 A 实对称且正定,
故 $\bar{v}^T A v > 0 \Longrightarrow p + a + \bar{a} > 0$. 由①知,
$(D + L - A)v = \lambda(D+L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D+L)v$ or
$-L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda}\bar{v}^T(D+U) \Rightarrow$

$$\lambda = \frac{-\bar{v}^T U v}{\bar{v}^T (D+L) v} = -\frac{a}{p+\bar{a}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{v}^T L v}{\bar{v}^T (D+U) v} = -\frac{\bar{a}}{p+a}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{|a|^2}{p(p+a+\bar{a}) + |a|^2}$$

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D + L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$. 因 A 实对称且正定,

故 $\bar{v}^T A v > 0 \Longrightarrow p + a + \bar{a} > 0$. 由①知,

$(D + L - A)v = \lambda(D + L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D + L)v$ or

$-L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda}\bar{v}^T(D + U) \Rightarrow$

$$\lambda = \frac{-\bar{v}^T U v}{\bar{v}^T (D + L) v} = -\frac{a}{p + \bar{a}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{v}^T L v}{\bar{v}^T (D + U) v} = -\frac{\bar{a}}{p + a}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{|a|^2}{p(p + a + \bar{a}) + |a|^2} < 1 \Rightarrow |\lambda| < 1$$

Proof.

② 同上， 任取 $G = I - (D+L)^{-1}A$ 的特征值$\lambda \neq 0$， 设$v \neq 0$为相应的特征向量, i.e., $Gv = \lambda v$, 其中, $A = D + L + U$。因 A 是实对称且正定的，故 D 也是实对称且正定的, 且 $U = L^T$.

记 $p \triangleq \bar{v}^T D v > 0$, $a \triangleq \bar{v}^T U v$. 因 A 实对称且正定,

故 $\bar{v}^T A v > 0 \Longrightarrow p + a + \bar{a} > 0$. 由①知,

$(D + L - A)v = \lambda(D+L)v \Rightarrow -Uv = \lambda(D+L)v$ or

$-L^T v = \lambda(D + U^T)v \Leftrightarrow -\bar{v}^T L = \bar{\lambda}\bar{v}^T(D+U) \Rightarrow$

$$\lambda = \frac{-\bar{v}^T U v}{\bar{v}^T(D+L)v} = -\frac{a}{p+\bar{a}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{-\bar{v}^T L v}{\bar{v}^T(D+U)v} = -\frac{\bar{a}}{p+a}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{|a|^2}{p(p+a+\bar{a}) + |a|^2} < 1 \Rightarrow |\lambda| < 1 \Rightarrow \rho(G) < 1$$

故Gauss-Seidel迭代收敛！

□

例：用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $Ax=b$,其中

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.\ \text{取初值}x^{(0)}=(0,0,0)^T$$

例：用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $Ax=b$,其中

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$ 取初值$x^{(0)}=(0,0,0)^T$

解：A的对角元 $a_{22}=0$，需做一下预处理（作2次行交换）：

$$(A,b)\longrightarrow\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 8 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix},\quad \text{i.e.,}\ \begin{cases} 9x_1-x_2-x_3=7 \\ -x_1+8x_2=7 \\ -x_1+9x_3=8 \end{cases}$$

例：用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $Ax=b$,其中

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.\ \text{取初值}x^{(0)}=(0,0,0)^T$$

解：A的对角元 $a_{22}=0$，需做一下预处理（作2次行交换）：

$$(A,b)\longrightarrow\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 8 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix},\quad \text{i.e.,}\ \begin{cases} 9x_1-x_2-x_3=7 \\ -x_1+8x_2=7 \\ -x_1+9x_3=8 \end{cases}$$

先求Jacobi迭代格式，由

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{9}(x_2+x_3+7) \\ x_2=\frac{1}{8}(x_1+7) \\ x_3=\frac{1}{9}(x_1+8) \end{cases}$$

例：用Gauss-Seidel迭代法解方程组 $Ax=b$,其中

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 9 \\ 9 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.\ \text{取初值} x^{(0)}=(0,0,0)^T$$

解：A的对角元 $a_{22}=0$，需做一下预处理（作2次行交换）：

$$(A,b)\longrightarrow\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 8 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 9 & 8 \end{pmatrix},\qquad \text{i.e.,}\ \begin{cases} 9x_1-x_2-x_3=7 \\ -x_1+8x_2=7 \\ -x_1+9x_3=8 \end{cases}$$

先求Jacobi迭代格式，由

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{9}(x_2+x_3+7) \\ x_2=\frac{1}{8}(x_1+7) \\ x_3=\frac{1}{9}(x_1+8) \end{cases}\Longrightarrow\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{9}(x_2^{(k)}+x_3^{(k)}+7) \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{8}(x_1^{(k)}+7) \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{9}(x_1^{(k)}+8) \end{cases}$$

故Gauss-Seidel迭代格式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(x_1^{(k+1)} + 7) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_1^{(k+1)} + 8) \end{cases}$$

迭代$k = 4$步后即得到解：

$$x^{(1)} = (0.7778, 0.9722, 0.9753)'$$
$$x^{(2)} = (0.9942, 0.9993, 0.9994)'$$
$$x^{(3)} = (0.9999, 0.9999, 0.9999)'$$
$$x^{(4)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)'$$

故Gauss-Seidel迭代格式为：

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 7) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}(x_1^{(k+1)} + 7) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{9}(x_1^{(k+1)} + 8) \end{array}\right.$$

迭代$k = 4$步后即得到解：

$$x^{(1)} = (0.7778, 0.9722, 0.9753)'$$
$$x^{(2)} = (0.9942, 0.9993, 0.9994)'$$
$$x^{(3)} = (0.9999, 0.9999, 0.9999)'$$
$$x^{(4)} = (1.0000, 1.0000, 1.0000)'$$

精确解?

例：分别使用Jacobi迭代与Gauss-seidel迭代法求解$Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

讨论两种迭代的收敛性.

例：分别使用Jacobi迭代与Gauss-seidel迭代法求解$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

讨论两种迭代的收敛性.

解：Jacobi迭代矩阵为：

$$G=I-D^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为$|\lambda I-G|=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda=0 \Longrightarrow \lambda_1=0, \lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$
由于$\rho(G)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$,

例：分别使用Jacobi迭代与Gauss-seidel迭代法求解$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

讨论两种迭代的收敛性.

解：Jacobi迭代矩阵为：

$$G=I-D^{-1}A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为$|\lambda I-G|=\lambda^3+\frac{5}{4}\lambda=0 \Longrightarrow \lambda_1=0, \lambda_{2,3}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$

由于$\rho(G)=\frac{\sqrt{5}}{2}>1$，知Jacobi迭代不收敛.

若使用Gauss－Siedel迭代法，则迭代矩阵为：

$$G = -(D + L)^{-1}U$$

若使用Gauss－Siedel迭代法，则迭代矩阵为：

$$G = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

可得其特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$$

由 $\rho(G) = \frac{1}{2} < 1$，

若使用Gauss－Siedel迭代法，则迭代矩阵为：

$$G = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

可得其特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$$

由 $\rho(G) = \frac{1}{2} < 1$，故Gauss-Seidel 迭代收敛.

Remark

1. Jacobi和Gauss-Seidel迭代法的收敛性比较

前面例子表明：Gauss-Seidel法收敛时，Jacobi法可能不收敛；

Remark

1. Jacobi和Gauss-Seidel迭代法的收敛性比较
前面例子表明：Gauss-Seidel法收敛时，Jacobi法可能不收敛；而Jacobi法收敛时， Gauss-Seidel法也可能不收敛.

2. 大多数情形下Gauss-Seidel迭代比Jacobi迭代要快，但也不绝对. 迭代收敛的快慢最终还是由 $\rho(G)$的大小唯一确定，G 为迭代矩阵.

松弛(SOR)迭代

松弛(SOR)迭代

Gauss-seidel迭代格式为

$$
\begin{cases}
x_1{}^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2{}^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n{}^{(k)} - b_1) \\
x_2{}^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1{}^{(k+1)} + a_{23}x_3{}^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n{}^{(k)} - b_2) \\
x_3{}^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1{}^{(k+1)} + a_{32}x_2{}^{(k+1)} + a_{34}x_4{}^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n{}^{(k)} - b_3) \\
\vdots \\
x_n{}^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1{}^{(k+1)} + a_{n2}x_2{}^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}{}^{(k+1)} - b_n)
\end{cases}
$$

松弛(SOR)迭代

Gauss-seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2{}^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n{}^{(k)} - b_1) \\ x_2{}^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1{}^{(k+1)} + a_{23}x_3{}^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n{}^{(k)} - b_2) \\ x_3{}^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1{}^{(k+1)} + a_{32}x_2{}^{(k+1)} + a_{34}x_4{}^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n{}^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n{}^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1{}^{(k+1)} + a_{n2}x_2{}^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}{}^{(k+1)} - b_n) \end{cases}$$

可以写成

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2{}^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n{}^{(k)} - b_1) \\ x_2{}^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1{}^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3{}^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n{}^{(k)} - b_2) \\ x_3{}^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{a_{33}}(a_{31}x_1{}^{(k+1)} + a_{32}x_2{}^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n{}^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n{}^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1{}^{(k+1)} + a_{n2}x_2{}^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}{}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

令$r_i^{(k)} = a_{i1}x_1{}^{(k+1)} + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}{}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} + \cdots + a_{i,n}x_n{}^{(k)} - b_i$

则Gauss-Seidel迭代法可写成：

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = x_1{}^{(k)} - \dfrac{1}{a_{11}} r_1^{(k)} \\ x_2{}^{(k+1)} = x_2{}^{(k)} - \dfrac{1}{a_{22}} r_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(k+1)} = x_n{}^{(k)} - \dfrac{1}{a_{nn}} r_n^{(k)} \end{cases}$$

令$r_i^{(k)} = a_{i1}x_1{}^{(k+1)} + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1}{}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} + \cdots + a_{i,n}x_n{}^{(k)} - b_i$

则Gauss-Seidel迭代法可写成：

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = x_1{}^{(k)} - \frac{1}{a_{11}} r_1^{(k)} \\ x_2{}^{(k+1)} = x_2{}^{(k)} - \frac{1}{a_{22}} r_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n{}^{(k+1)} = x_n{}^{(k)} - \frac{1}{a_{nn}} r_n^{(k)} \end{cases}$$

设 $r^{(k)} = (r_1^{(k)}, \cdots, r_n^{(k)})$。 由$x^{(k)}$得到$x^{(k+1)}$的过程， 可以认为是 将$x^{(k)}$加上修正量$-D^{-1}\, r^{(k)}$而得到$x^{(k+1)}$, i.e.,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}\, r^{(k)}.$$

令$r_i^{(k)} = a_{i1}{x_1}^{(k+1)} + \cdots + a_{i,i-1}{x_{i-1}}^{(k+1)} + a_{ii}x_i^{(k)} + \cdots + a_{i,n}{x_n}^{(k)} - b_i$

则Gauss-Seidel迭代法可写成：

$$\begin{cases} {x_1}^{(k+1)} = {x_1}^{(k)} - \frac{1}{a_{11}} r_1^{(k)} \\ {x_2}^{(k+1)} = {x_2}^{(k)} - \frac{1}{a_{22}} r_2^{(k)} \\ \vdots \\ {x_n}^{(k+1)} = {x_n}^{(k)} - \frac{1}{a_{nn}} r_n^{(k)} \end{cases}$$

设 $r^{(k)} = (r_1^{(k)}, \cdots, r_n^{(k)})$。 由$x^{(k)}$得到$x^{(k+1)}$的过程， 可以认为是 将$x^{(k)}$加上修正量$-D^{-1}\, r^{(k)}$而得到$x^{(k+1)}$, i.e.,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}\, r^{(k)}.$$

猜想：更改修正量的大小（可通过一个参数，即松弛因子ω，来调节），算法或许能收敛更快！

故，在 Gauss-Seidel 迭代的基础上，引进松弛因子 ω ，即得到松弛(SOR)迭代：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega D^{-1} r^{(k)}$$

故，在 Gauss-Seidel 迭代的基础上，引进松弛因子 ω ，即得到松弛(SOR)迭代：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega D^{-1} r^{(k)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\omega}{a_{11}}(a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2{}^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n{}^{(k)} - b_1) \\ x_2{}^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\omega}{a_{22}}(a_{21}x_1{}^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3{}^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n{}^{(k)} - b_2) \\ x_3{}^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{\omega}{a_{33}}(a_{31}x_1{}^{(k+1)} + a_{32}x_2{}^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n{}^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n{}^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{\omega}{a_{nn}}(a_{n1}x_1{}^{(k+1)} + a_{n2}x_2{}^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}{}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

故，在 Gauss-Seidel 迭代的基础上，引进松弛因子 ω ，即得到松弛(SOR)迭代：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega D^{-1} r^{(k)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1{}^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\omega}{a_{11}}(a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2{}^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n{}^{(k)} - b_1) \\ x_2{}^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\omega}{a_{22}}(a_{21}x_1{}^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3{}^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n{}^{(k)} - b_2) \\ x_3{}^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{\omega}{a_{33}}(a_{31}x_1{}^{(k+1)} + a_{32}x_2{}^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k)} + \cdots + a_{3,n}x_n{}^{(k)} - b_3) \\ \vdots \\ x_n{}^{(k+1)} = x_n^{(k)} - \frac{\omega}{a_{nn}}(a_{n1}x_1{}^{(k+1)} + a_{n2}x_2{}^{(k+1)} \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}{}^{(k+1)} + a_{nn}x_n^{(k)} - b_n) \end{cases}$$

称为因子为ω的松弛(SOR)迭代，$\omega = 1$时的松弛迭代即为Gauss-Seidel迭代.

松弛(SOR)迭代的迭代矩阵

将松弛迭代格式写成向量形式, 可得:

$$(D+\omega L)x^{(k+1)} = \Big[(1-\omega)D - \omega U\Big]x^{(k)} + \omega b$$

松弛(SOR)迭代的迭代矩阵

将松弛迭代格式写成向量形式, 可得:

$$
\begin{aligned}
(D+\omega L)x^{(k+1)} &= \Big[(1-\omega)D-\omega U\Big]x^{(k)}+\omega b \quad \Longleftrightarrow \\
x^{(k+1)} &= (D+\omega L)^{-1}\Big((1-\omega)D-\omega U\Big)x^{(k)}+\omega(D+\omega L)^{-1}b \\
&\triangleq S_\omega x^{(k)}+f=(I-Q^{-1}A)x^{(k)}+Q^{-1}b
\end{aligned}
$$

松弛(SOR)迭代的迭代矩阵

将松弛迭代格式写成向量形式, 可得:

$$
\begin{aligned}
(D+\omega L)x^{(k+1)} &= \Big[(1-\omega)D-\omega U\Big]x^{(k)}+\omega b \quad \Longleftrightarrow \\
x^{(k+1)} &= (D+\omega L)^{-1}\Big((1-\omega)D-\omega U\Big)x^{(k)}+\omega(D+\omega L)^{-1}b \\
&\triangleq S_\omega x^{(k)}+f=(I-Q^{-1}A)x^{(k)}+Q^{-1}b
\end{aligned}
$$

故松弛因子为ω的松弛迭代矩阵为 (这里 $Q=\frac{1}{\omega}D+L$ 即分裂矩阵)

$$
S_\omega=(D+\omega L)^{-1}\Big((1-\omega)D-\omega U\Big)=I-Q^{-1}A
$$

例： 用松弛(SOR)方法解下列方程组 (设ω为松弛因子)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

例： 用松弛(SOR)方法解下列方程组 (设ω为松弛因子)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

回顾：与该方程组对应的Jacobi迭代格式（分量形式）为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 11) \end{cases}$$

例： 用松弛(SOR)方法解下列方程组 (设ω为松弛因子)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

回顾：与该方程组对应的Jacobi迭代格式（分量形式）为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 11) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Gauss-Seidel 格式：
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2}(x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 5) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} + 8) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 11) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{2}(2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{5}(x_1^{(k+1)} + 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 8) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{10}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 10x_3^{(k)} - 11) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{1}{2}(2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{1}{5}(x_1^{(k+1)} + 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 8) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{1}{10}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 10x_3^{(k)} - 11) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 松弛迭代格式: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \frac{\omega}{2}(2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 5) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \frac{\omega}{5}(x_1^{(k+1)} + 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)} - 8) \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} - \frac{\omega}{10}(x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 10x_3^{(k)} - 11) \end{cases}$

定理： 1. 松弛(SOR)迭代收敛$\Longrightarrow 0 < \omega < 2$.

2. 若A为对称正定矩阵，则$0 < \omega < 2$时松弛迭代收敛.

定理： 1. 松弛(SOR)迭代收敛$\Longrightarrow 0<\omega<2$.

2. 若A为对称正定矩阵，则$0<\omega<2$时松弛迭代收敛.

Pf 1): 设松弛迭代收敛, 则 $\rho(S_\omega)<1$. 设迭代矩阵S_ω的所有特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，则： $\left|\det(S_\omega)\right| = \left|\lambda_1\cdots\lambda_n\right| < 1$.

$$\begin{aligned}
\text{而}\ \det(S_\omega) &= \det\Big((D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]\Big)\\
&= \det(D+\omega L)^{-1}\cdot\det((1-\omega)D-\omega U)\\
&= \frac{1}{a_{11}\cdots a_{nn}}\cdot[(1-\omega)a_{11}]\cdots[(1-\omega)a_{nn}]\\
&= (1-\omega)^n
\end{aligned}$$

故 $\left|(1-\omega)^n\right|<1 \Longrightarrow |1-\omega|<1 \Longrightarrow 0<\omega<2$.

2). 略

Remark

1. 通常，把$0 < \omega < 1$的迭代称为亚松弛迭代，$1 < \omega < 2$的迭代称为超松弛迭代，$\omega = 1$的迭代为Gauss-Seidel迭代.

2. 松弛迭代方法收敛的快慢与松弛因子ω的选择有密切关系. 但是如何选取最佳松弛因子ω使得$\rho(S_\omega)$ 达到最小，是 一个尚未解决的问题. 实际上可采用试算的方法来确定较好的松弛因子. 经验上可取$1.4 < \omega < 1.6$.

迭代方法小结

迭代方法小结

- 等价形式（假设分裂矩阵Q非奇异，即 $|Q| \neq 0$)

$$Ax = b \Longleftrightarrow Qx = (Q - A)x + b \Longleftrightarrow x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

迭代方法小结

- 等价形式（假设分裂矩阵Q非奇异，即 $|Q| \neq 0$）

$$Ax = b \Longleftrightarrow Qx = (Q - A)x + b \Longleftrightarrow x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

- 迭代公式

$$Qx^{(k+1)} = (Q - A)x^{(k)} + b \Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b$$

迭代方法小结

- 等价形式（假设分裂矩阵Q非奇异，即 $|Q| \neq 0$)

$$Ax = b \Longleftrightarrow Qx = (Q - A)x + b \Longleftrightarrow x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

- 迭代公式

$$Qx^{(k+1)} = (Q - A)x^{(k)} + b \Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b$$

Let $A = D + L + U$ and assume $0 < \omega < 2$.

迭代方法	分裂矩阵 Q	迭代矩阵 $G = I - Q^{-1}A$
Jacobi	D	$I - D^{-1}A$
Gauss-Seidel	$D + L$	$-(D + L)^{-1}U$
SOR(松弛迭代)	$\frac{1}{\omega}D + L$	$(D + \omega L)^{-1}\Big((1 - \omega)D - \omega U\Big)$

迭代方法小结

- 等价形式（假设分裂矩阵Q非奇异，即 $|Q| \neq 0$）

$$Ax = b \Longleftrightarrow Qx = (Q - A)x + b \Longleftrightarrow x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

- 迭代公式

$$Qx^{(k+1)} = (Q - A)x^{(k)} + b \Longleftrightarrow x^{(k+1)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k)} + Q^{-1}b$$

Let $A = D + L + U$ and assume $0 < \omega < 2$.

迭代方法	分裂矩阵 Q	迭代矩阵 $G = I - Q^{-1}A$
Jacobi	D	$I - D^{-1}A$
Gauss-Seidel	$D + L$	$-(D + L)^{-1}U$
SOR(松弛迭代)	$\frac{1}{\omega}D + L$	$(D + \omega L)^{-1}\Big((1 - \omega)D - \omega U\Big)$

. Jacobi迭代 $\xrightarrow{\text{使用最新分量}}$ Gauss-Seidel迭代 $\xrightarrow{\text{引进松弛因子 } \omega}$ 松弛迭代