Chap4

以下如果没有指明变量 t 的取值范围，一般视为 $t\in\mathbf{R}$，平稳过程是指宽平稳过程.

1. 设 $X(t)=\sin Ut$，这里 U 为 $(0,2\pi)$ 上的均匀分布.

(a) 若 $t=1,2,\cdots$，证明 $\{X(t),t=1,2,\cdots\}$ 是宽平稳但不是严平稳过程，

(b) 设 $t\in[0,\infty)$，证明 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 既不是严平稳也不是宽平稳过程.

(a) $E[X(t)] = E\sin Ut = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\sin Ut\,dU = 0 \quad t=0,1,2\dots$

$$\begin{aligned}Cov(X(t),X(s)) &= E(\sin Ut\cdot\sin Us)\\ &= \frac{1}{2}E[\cos(t-s)U-\cos(t+s)U]\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t-s)U\,dU-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t+s)U\,dU\right\}\\ &= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{t-s}\sin(t-s)U\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{t+s}\sin(t+s)U\Big|_0^{2\pi}\right\}=0. \quad t\neq s\end{aligned}$$

当 $t=s$ 时. $Cov(X(t),X(s)) = E\sin^2 Ut = \frac{1}{2}$

故 $\{X(t),t=1,2\dots\}$ 是宽平稳的

由于 $F_t(x)=P(\sin Ut\le x)$ $\quad F_{t+h}=P(\sin U(t+h)\le x)$ 与 F_t 不一定相同

故 $\{X(t),t=1,2\dots\}$ 不是严格平稳的

(b) $E[X(t)] = \frac{1}{2\pi t}(1-\cos 2\pi t)$

$Var(X(t)) = E[\sin Ut-\frac{1}{2\pi t}(1-\cos 2\pi t)]^2 = \frac{1}{2}-\frac{\sin 4\pi t}{8\pi t}-(\frac{1-\cos 2\pi t}{2\pi t})^2$

$E[X(t)]$ 与 $Var(X(t))$ 都是与 t 相关的 所以不是宽平稳过程.

假设是严格平稳过程. 则二阶矩存在. 所以过程是宽平稳过程. 矛盾

故不是严格平稳的

3. 设 $X_n=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_kn-U_k)$，这里 σ_k 和 a_k 为正常数，$k=1,\cdots,N;U_1,\cdots,U_n$ 是 $(0,2\pi)$ 上独立均匀分布随机变量，证明 $\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 是平稳过程.

证明：
$$\begin{aligned}E[X_n] &= E[\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_kn-U_k)]\\ &= E[\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}(\cos a_kn\cos U_k+\sin a_kn\sin U_k)]\\ &= \sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}(\cos a_kn\,E[\cos U_k]+\sin a_kn\,E[\sin U_k])\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cov(X_n,X_m) &= E[X_n\cdot X_m]\\ &= E[\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(a_kn-U_k)\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\sqrt{2}\cos(a_jm-U_j)]\\ &= \sum_{k=1}^{N}2\sigma_k^2E[\cos(a_kn-U_k)\cos(a_km-U_k)]\\ &= \sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2E[\cos a_k(n-m)+\cos(a_kn+a_km-2U_k)]\\ &= \sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2\cos a_k(n-m)\end{aligned}$$

只与 $n-m$ 有关. 故为宽平稳过程

4. 设 $A_k,k=1,2,\cdots,n$ 是 n 个实随机变量; $\omega_k,k=1,2,\cdots,n$, 是 n 个实数. 试问 A_k 以及 A_k 之间应满足怎样的条件才能使

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k\mathrm{e}^{j\omega_kt}$$

是一个复的平稳过程.

由题 要使 $Z(t)=\sum_{k=1}^{n}A_ke^{jw_kt}$ 是一个复的平稳过程

则
$$\begin{aligned}E[Z(t)] &= E[\sum_{k=1}^{n}A_ke^{jw_kt}]\\ &= \sum_{k=1}^{n}E[A_ke^{jw_kt}] = const\end{aligned}$$

$\therefore EA_k=0$

$$\begin{aligned}Cov(Z(t),Z(s)) &= E[Z(t)\overline{Z(s)}] = E[\sum_{k=1}^{n}A_ke^{jw_kt}\cdot\sum_{l=1}^{n}A_le^{jw_ls}]\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}E(A_kA_l)e^{jw_kt-jw_ls}\end{aligned}$$

要使 $Cov(Z(t),Z(s))$ 只与 $t-s$ 有关.

则 $E(A_kA_l)=0 \quad k\neq l$

5. 设 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一列独立同分布随机变量序列, $P(X_n=1)=p$, $P(X_n=-1)=1-p, n=1,2,\cdots$. 令 $S_0=0$, $S_n=(X_1+\cdots+X_n)/\sqrt{n}$, $n=1,2,\cdots$, 求随机序列 $\{S_n, n=1,2,\cdots\}$ 的协方差函数和自相关函数. p 取何值时此序列为平稳序列?

由题可知、$E(X_n) = 1\cdot P(X_n=1)+(-1)\cdot P(X_n=-1) = 2p-1$

$E(X_n^2) = 1^2\cdot P(X_n=1)+(-1)^2\cdot P(X_n=-1) = p+1-p = 1$

$Var(X_n) = E(X_n^2)-[E(X_n)]^2 = 1-(2p-1)^2 = 4p(1-p)$

$\therefore m_S(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sqrt{n}(2p-1)$

$R_S(m,n) = Cov\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{k=1}^{m} E(X_k), \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{n} E(X_l)\right) = \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} Cov(X_k, X_l)$ 由$\{X_n\}$独立同分布.

$= \frac{1}{\sqrt{mn}}\sum_{k=1}^{\min(m,n)} Var(X_k)$

$= \frac{\min(m,n)}{\sqrt{mn}} 4p(1-p)$

故无论p取何值. $R_S(m,n)$都不可能只与$m-n$有关. 所以$\{S_n\}$不平稳

6. 设 $\{X(t)\}$ 是一个平稳过程, 对每个 $t\in\mathbf{R}$, $X'(t)$ 存在. 证明对每个给定的 t, $X(t)$ 与 $X'(t)$ 不相关, 其中 $X'(t)=\frac{dX(t)}{dt}$.

证明: 设 $E(X(t)) = m \quad Var(X(t)) = \sigma^2$

$\therefore E(X(t+\Delta t)) = m$

$\because X'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$

$\therefore E(X'(t)) = 0.$

$\therefore Cov(X(t), X'(t)) = E(X(t)X'(t)) = \frac{1}{2}E[(X^2(t))']$

假设求导和求期望可以交换

$\therefore Cov(X(t), X'(t)) = \frac{1}{2}(EX^2(t))' = \frac{1}{2}(\sigma^2+m^2)' = 0$

$\therefore$ $X(t)$与$X'(t)$不相关

12. 设 $\{X(t)\}$ 为连续宽平稳过程, 均值 m 未知, 协方差函数为 $R(\tau)=ae^{-b|\tau|}$, $\tau\in R$, $a>0, b>0$. 对固定的 $T>0$, 令 $\overline{X}=t^{-1}\int_0^T X(s)ds$. 证明 $E\overline{X}=m$ (即 $\overline{X}$ 是 m 的无偏估计) 以及

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = 2a[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}(1-e^{-bT})].$$

提示: 在上述条件下, 期望号与积分号可以交换.

证明: $E\overline{X} = E[\frac{1}{T}\int_0^T X(s)ds]$

$= \frac{1}{T}\int_0^T EX(s)ds$

$= \frac{1}{T}\cdot mT = m$

$Var(\overline{X}) = E[\frac{1}{T^2}(\int_0^T X(t)dt - m)(\int_0^T X(s)ds - m)]$

$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E[(X(t)-m)(X(s)-m)]dsdt$

$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T R(t-s)dsdt$

$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T ae^{-b|t-s|}dsdt$

$= \frac{2a}{T^2}\int_0^T dt\int_0^T e^{-b(t-s)}ds$

$= \frac{2a}{T^2}\int_0^T \frac{1}{b}(1-e^{-bt})dt$

$= 2a[(bT)^{-1}-(bT)^{-2}(1-e^{-bT})]$

16. 设 X_0 为随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

设 X_{n+1} 在给定 $X_0, X_1, \cdots X_n$ 下是 $(1-X_n, 1]$ 上的均匀分布, $n=0,1,2,\cdots$, 证明 $\{X_n, n=0,1,\cdots\}$ 的均值有遍历性.

由题可知: $EX_0 = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}$

$EX_0^2 = \int_0^1 2x^3dx = \frac{1}{2}$

$EX_{n+1} = E[E(X_{n+1}|X_n)] = E[\int_{1-X_n}^1 \frac{X_{n+1}}{X_n}dX_{n+1}]$

$= E(1-\frac{1}{2}X_n)$

$= 1-\frac{1}{2}EX_n.$

$\because EX_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow EX_n = \frac{2}{3}$

$EX_{n+1}^2 = E[E(X_{n+1}^2|X_n)] = E[\int_{1-X_n}^1 \frac{X_{n+1}^2}{X_n}dX_{n+1}]$

$= 1-EX_n+\frac{1}{3}EX_n^2$

$\because EX_0^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow EX_n^2 = \frac{1}{2}$

$$\because E(X_n X_{n+m}) = E[E(X_n X_{n+m} \mid X_n)]$$
$$= E[X_n E(X_{n+m} \mid X_n)]$$
$$= E[X_n(1 - \frac{1}{2}E(X_{n+m-1} \mid X_n))]$$
$$= EX_n - \frac{1}{2}E[E(X_n X_{n+m-1} \mid X_n)]$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2}E(X_n X_{n+m-1})$$

$$\therefore E(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9} = -\frac{1}{2}(E(X_n X_{n+m-1}) - \frac{4}{9}) = \cdots = (-\frac{1}{2})^m (EX_n^2 - \frac{4}{9}) = \frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^m$$

$$\therefore R_X(n, n+m) = E(X_n - \frac{2}{3})(X_{n+m} - \frac{2}{3}) = E(X_n X_{n+m}) - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^m - \frac{4}{9} = R(m)$$

$\therefore$ $\{X_n\}$是平稳序列

又$\because \lim_{m\to\infty} R(m) = 0$ 则$\{X_n\}$具有均值遍历性.

17. 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为白噪声序列, 令

$$X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad |\alpha| < 1, \quad n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots,$$

则 $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}$, 从而证明 $\{X_n, n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$ 为平稳序列. 求出该序列的协方差函数. 此序列是否具有遍历性?

$$EX_n = E[\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k}] = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k E\varepsilon_{n-k} = 0$$

$$R_X(n, n+m) = Cov(X_n, X_{n+m})$$
$$= E(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \varepsilon_{n-k})(\sum_{l=0}^{+\infty} \alpha^l \varepsilon_{m+n-l})$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} \alpha^{k+l} E\varepsilon_{n-k}\varepsilon_{m+n-l}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k+m} E\varepsilon_{n-k}^2$$
$$= \alpha^m \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} = R(m)$$

$\therefore$ $\{X_n\}$为平稳序列

$\because \lim_{m\to+\infty} R(m) = 0$ 故$\{X_n\}$是均值遍历的