Radial basis networks

Dra. Ximena Gutierrez Vasques & Mtro. Víctor Mijangos

Facultad de Ingeniería

13-17 de enero, 2020

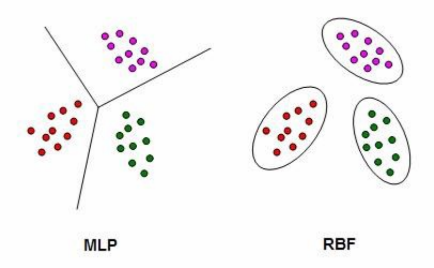
UNAM

Datos no linealmente separables

La limitación del perceptrón es encontrarse con conjuntos de datos no convexos.

Las redes multicapa puede lidiar con este problema proyectando los datos a otro espacio.

Pero si en lugar de buscar fronteras de decisión lineals, buscamos que sean **radiales**.



Interpolación y RBF

Problema de interpolación: Dado un conjunto $\{x : x \in \mathbf{R}^d\}$ y un conjunto finito de reales $\{f_i : f_i \in \mathbf{R}, i = 1, ..., N\}$, el problema de interpolación consiste en escoger una función $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ que cumpla la condición:

$$\psi(x) = f_i$$

El método de **Radial Basis Function** [1]r construye un espacio lineal que depende de la posición relativa de los puntos de acuerdo a una métrica. Así:

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \phi(||x - c_j||)$$

Donde $c_j \in \mathbb{R}^d$ son los centros de la basis function.

Radial Basis Function

La **función radial** depende de la **norma** en el espacio $||\cdot||$ y de **centros radiales** c_j.

- Entre más **cercano** esté un punto del centro c_j **mayor** será el valor de ψ.
- Entre más **lejano** esté un punto del centro c_j **menor** será el valor de ψ.

Así, podemos considerar una clasificación en términos de esta función. En el caso **binario**, podemos definirla como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(x) > b \\ 0 & \text{si } \psi(x) \leq b \end{cases}$$

Radial Basis Function

En la función radial, λ es una serie de parámetros. La función $\phi(||x - c_j))$ puede determinarse como **una función de probabilidad**:

$$p(x \in N(c_j)) = exp\{-\frac{1}{2}||x - c_j||^2\}$$

Esta función describe una especie de distribución **normal**, donnde c_j es la media.

Radial Basis Network

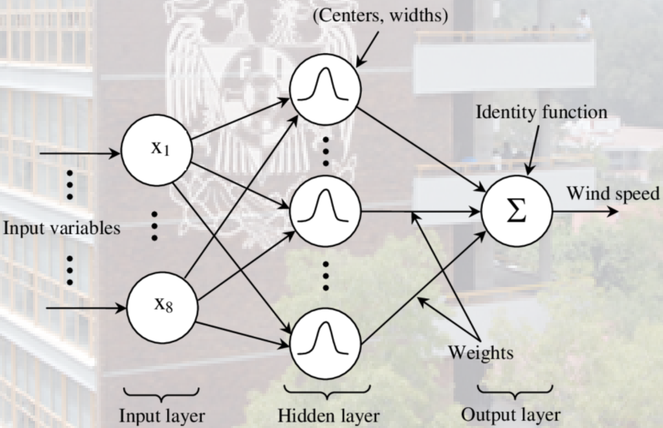
Ahora, bien, bajo esta perspectiva probabilística, la función radial queda determinada como sigue:

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j exp\{-\frac{1}{2}||x - c_j||^2\}$$

Sustituyendo λ_j por w_j y junto con la función de decisión que hemos definido, esta función puede verse como una red con una capa oculta. A este tipo de redes se les conoce como **Radial Basis Networks** (RBN).

Radial Basis Network

La red consta de una capa oculta **probabilística**, mientras que la capa de salida puede verse como un **perceptrón**.



Estimación de parámetros

Las RBN son capaces de solucionar problemas no linealmente separables, como el problema XOR.
Sin embargo, a diferencia de las redes FeedForward, la capa oculta determina k distribuciones de probabilidad.

Entonces, además de estimar los pesos de las conexiones (en la salida) se deben estimar los parámetros de las distribuciones.

Capa oculta

La capa oculta representa el mayor problema. Podemos pensarla **independientemente** de la capa de salida.

Así, el problema se vuelve en estimar los parámetros $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$ que se acoplen a la distribución.
Para esto, es común utilizar un algoritmo de **clustering**. Específicamente k-means.

Función de riesgo en capa oculta

Dado que la función en la capa oculta está definida como una distribución, podemos ver que la función a minimizar está dada por:

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \arg\min_{C} -\frac{1}{N}\sum_{x}\sum_{j=1}^{k} \ln \phi(||x - c_j||) \\ &= \arg\min_{C} -\frac{1}{N}\sum_{x}\sum_{j=1}^{k} \ln exp\{-\frac{1}{2}||x - c_j||^2\} \\ &= \arg\min_{C} \frac{1}{2N}\sum_{x}\sum_{j=1}^{k} ||x - c_j||^2\end{aligned}$$

Estimación de parámetros en la capa oculta

El problema así definido se puede interpretar como **minimización de la varianza** para cada distribución.
Tenemos que:

$$\nabla_{c_j} \frac{1}{2N} \sum_{x} \sum_{j=1}^{k} ||x - c_j||^2 = \frac{1}{N} \sum_{x} x - c_j$$

E iguala nd a cero el gradiennte obtenemos que:

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{x} x$$

Esto es **la media empírica**. Sin embargo, ya que existen varias distribuciones, esta media es únicamente entre los x más cercanos a c_j.

k means

Este problema de minimización puede resolverse por medio del algoritmo de *k*-means.

Si bien *k*-means se ve como un algoritmo de clustering, los centroides de este algoritmmo definen una media de la **distribución de un cluster**.

Algoritmo de k means

Inicialización : Se inicializan los centroides $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ a leatoriamente.

Inducción : Para cada ejemplo x se calcula:

$$d(x, c_j) = ||x - c_j||$$

Se estiman los clusters como:

$$clust(x) = \arg\min_j d(x, c_j)$$

Se mueven los centroides con respecto a la siguiente regla:

$$c_j \leftarrow \frac{1}{N} \sum_{clust(x)=j} x$$

Finalización : Se finaliza cuando no se hagan nuevas asignaciones de los centroides.

Obtención de la capa oculta

La capa oculta de la RBN estará definida por los parámetros $\hat{C} = \{c_1, \ldots, c_k\}$ estimados por el algoritmo de k-means.

La capa oculta en esta red está definida por:

$$h_j = exp\{\frac{1}{2}||x - c_j||^2\}$$

Es decir, depende de c_j y se puede interpretar como una función probabilística.

La probabilidad de un dato dependerá de la cercanía a c_j. Así el radio de c_j define el valor de la unidad oculta.

Cálculo de la capa de sálida

Para obtener los valores de capa de salida se determina la función:

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i h_i$$

donde w_i son pesos en la capa de salida. Así, puede definirse la función de clasificación como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \psi(x) > 0 \\ 0 & \text{si } \psi(x) \leq 0 \end{cases}$$

References

David S Broomhead and David Lowe.
Radial basis functions, multi-variable functional interpolation and adaptive networks.
Technical report, Royal Signals and Radar Establishment Malvern (United Kingdom), 1988.

The End