

# **Analyse de couverture urbaine par homologie persistante : cas du développement des transports publics**

---

Harnisch Elowan ; 14002

November 1, 2024

L'homologie persistante est une méthode pour calculer des caractéristiques topologique d'un espace. En l'occurrence ici pour déterminer des "trous" dans une couverture par les transports publics

# Définitions

## Simplexe

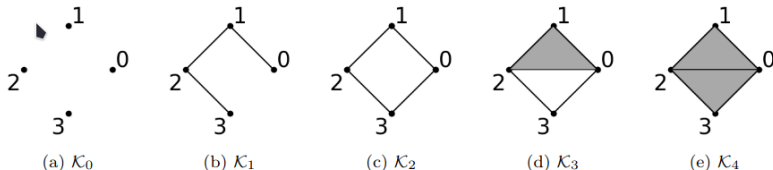
Généralisation d'un triangle en dimension  $n$

## Complexe simplicial

Un ensemble de simplexes de dimension non forcément égales

## Filtration

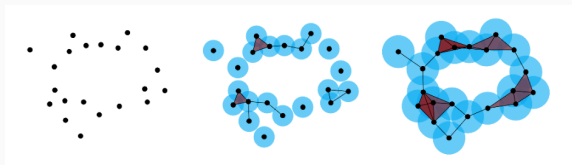
Suite croissante pour l'inclusion de complexes simpliciaux



**Figure 1:** Exemple de filtration

# Méthode

- Construction d'une filtration de complexes simpliciaux via les complexes pondérés de Vietoris-Rips
- Construction de la matrice de bordure
- Réduction de cette matrice par l'algorithme standard
- Construction du diagramme de persistance



**Figure 2:** Construction de Vietoris-Rips

# Illustration

(a) A filtered simplicial complex:



(b) We put a total order on the simplices that is compatible with the filtration:



where  $\sigma_i$  denotes the  $i$ th simplex in this order.

(c) (Left) The boundary matrix  $B$  for the filtered simplicial complex in (a) with respect to order on simplices in (b), and (right) its reduction  $\overline{B}$  given by applying Algorithm 1 (one first adds column 5 to column 6, and then column 4 to column 6):

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) We read off the following intervals from the matrix  $\overline{B}$  in (c):

- $\sigma_1$  is positive, unpaired; this gives the interval  $[1, \infty)$  in  $H_0$ .
- $\sigma_2$  is positive, paired with  $\sigma_4$ ; this gives no interval, because  $\sigma_2$  and  $\sigma_4$  enter at the same time in the filtration.
- $\sigma_3$  is positive, paired with  $\sigma_5$ ; this gives the interval  $[2, 3)$  in  $H_0$ .
- $\sigma_6$  is positive, paired with  $\sigma_7$ ; this gives the interval  $[3, 4)$  in  $H_1$ .

### Distance

On définit la distance  $d$  entre deux stations de metro  $x$  et  $y$  :

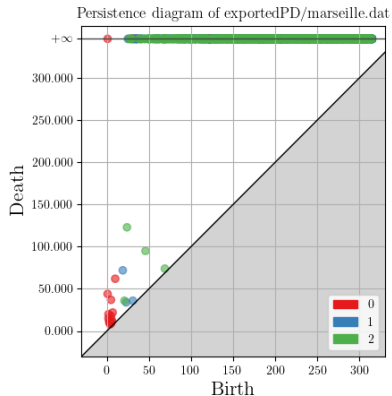
$$d(x, y) = \min(t_{\text{pied}}(x, y), t_{\text{voiture}}(x, y))$$

Pour le calcul des temps de trajet : [apidocs.geoapify.com](https://apidocs.geoapify.com)

Pour la récupération des stations et des temps d'attentes moyens :  
[transport.data.gouv.fr](https://transport.data.gouv.fr)

# Résultats so far so good

Pour marseille



**Figure 4:** Diagramme de persistance



Restant :

- Compréhension des résultats précédents + correction du programme si nécessaire
- PreTraitement des informations sur Paris/Toulouse/Rennes
- Conclure