

Minimisation de machines de Turing, application au problème 2Color

Elowan Harnisch

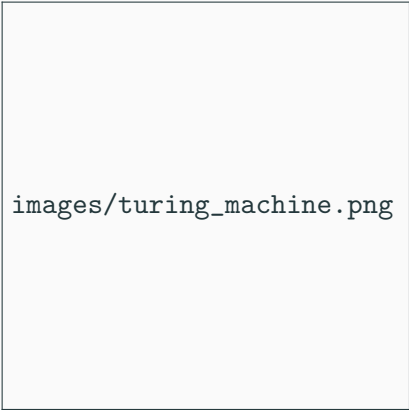
August 24, 2024

Machine de Turing

Définition Une machine de Turing est un sixtuplet $(Q, \Sigma, S, q_0, F, \delta)$ où:

- Q est un ensemble fini d'états
- Σ est un ensemble fini de symboles
- $S \notin \Sigma$ est le symbole blanc
- $q_0 \in Q$ est l'état initial
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états acceptants
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{L, R\}$ est la fonction de transition

Elle possède de plus une bande infinie sur laquelle elle peut lire et écrire les symboles de $\Sigma \cup S$. Elle sert de modèle théorique de l'ordinateur.



`images/turing_machine.png`

Schema d'execution de machine
de Turing

Automate fini déterministe (DFA)

Définition Un automate fini déterministe (DFA) est un quintuplet $(Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ où:

- Q est un ensemble fini d'états
- Σ est un ensemble fini de symboles
- $q_0 \in Q$ est l'état initial
- $F \subseteq Q$ est l'ensemble des états finaux
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ est la fonction de transition

C'est un modèle qui permet grâce à une construction en graphe de reconnaître l'appartenance de mots à un langage.

Automate fini déterministe (DFA)



`images/turing_machine.png`

Schema d'un automate
reconnaissant le langage des mots de longueur paire

Définition La minimisation d'un automate fini déterministe est le processus qui consiste à réduire le nombre d'états de l'automate tout en conservant le langage reconnu.

Théorème

L'algorithme de Hopcroft permet depuis un automate fini déterministe d'obtenir un automate minimal reconnaissant le même langage.

Code de l'algorithme de Hopcroft

Minimisation d'une machine de Turing

Transformation d'une machine de Turing en DFA On en déduit son inverse trivialement. Celle ci ne forme en revanche pas une bijection.

Théorème

La composition de la transformation d'une machine de Turing en DFA, de l'algorithme de minimisation de Hopcroft et de la transformation inverse permet d'obtenir une machine de Turing de taille au plus égale à celle de départ.

Définition Le problème 2Color est un problème de décision qui consiste à déterminer si un graphe est coloriable avec 2 couleurs.

Théorème

Le problème 2Color est décidable, donc il existe une machine de turing qui le calcule.

Problème 2Color



Machine de Turing créée pour
résoudre le problème 2Color

Pour la suite j'aimerais :

- Bien comprendre la preuve de l'algorithme de Hopcroft et mieux l'adapter aux machines de Turing plutôt que mon bricolage actuel (même si je pense que ce n'est pas possible, dans ce cas démontrer que ce problème n'est pas décidable mais qu'on peut essayer de s'en approcher par cette méthode)
- Finir de créer la machine de Turing pour le problème 2Color