

Étude de couvertures de réseaux de métros, application de l'homologie persistante et optimisation.

Elowan ; 10381

May 14, 2025

Trouver les zones les moins bien desservies par un réseau de métros

Les principales étapes :

- *Convertir* les données géographiques en espace métrique
- Créer une suite de formes géométriques à partir de cet espace
- Trouver les trous de ces formes

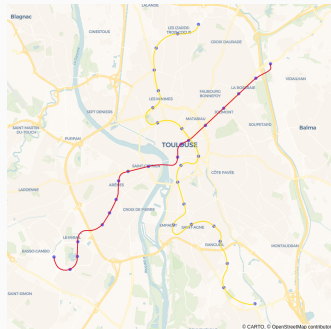
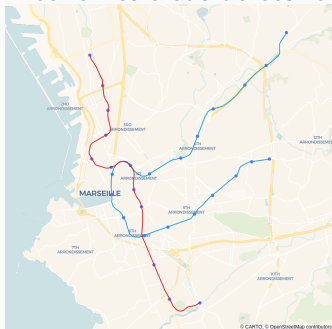


Figure 1: Lignes de métros (Marseille et Toulouse)

Plus en détail, reconnaître un trou : l'idée du lasso

Chercher à enrouter au lasso, puis réduire ces lassos sans jamais le rompre ou déchirer la forme.

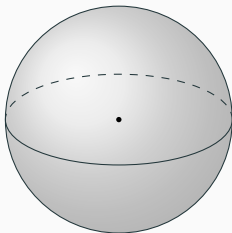


Figure 2: Un tore contenant deux trous et une sphère contenant 0 trou.

Définitions

Simplexe

Un simplexe σ de dimension k (ou k -simplexe) correspond à l'enveloppe convexe de $k + 1$ vecteurs non inclus dans un sous-espace affine de dimension $k - 1$.

Face

On dit que σ_i est une face de σ_j si et seulement si $\sigma_i \subset \sigma_j$ et la dimension de σ_i $\dim(\sigma_i)$ est égale à $\dim(\sigma_j) - 1$.

Complexe simplicial

Un ensemble de simplexes.

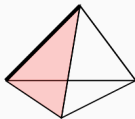


Figure 3: Exemple de complexe simplicial

Définitions

Filtration

Suite croissante pour l'inclusion de complexes simpliciaux.

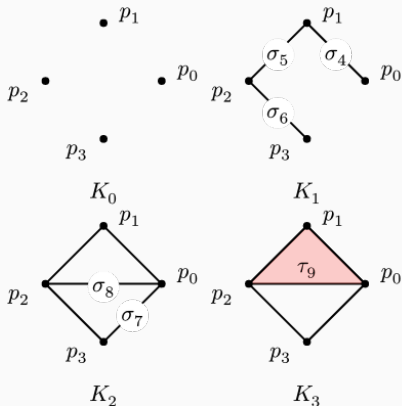


Figure 4: Exemple de filtration.

Classe d'homologie

Elle représente un trou en dimension n .

Figure 5: Le tore possède deux classes d'homologies, celle du trou au centre et celle formée par le cylindre.

Définition de la distance

Distance

On définit la distance d entre deux stations de metro x et y :

$$d(x, y) = \frac{1}{2}(\min(t_{\text{pied}}(x, y), t_{\text{voit}}(x, y)) + \min(t_{\text{pied}}(y, x), t_{\text{voit}}(y, x)))$$

Poids d'une station

La moyenne sur une semaine du temps d'attente en station.

Définition des complexes pondérés de Vietoris-Rips

Complexe Simplicial pondéré de Vietoris-Rips

On le définit au rang r , comme l'ensemble des simplexes

$(x_{i_0}, \dots, x_{i_k})$ tels que :

$$\begin{cases} \forall j \in [0, k], \text{poids}_{i_j} < r \\ \forall (j, l) \in [0, k]^2, d(x_{i_j}, x_{i_l}) + \text{poids}_{i_j} + \text{poids}_{i_l} < 2r \end{cases}$$

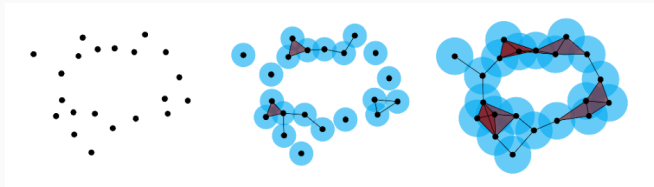


Figure 7: Image repr les vietoris rips, tiré de *Persitent homology for resource coverage: A case study of access to polling sites*

Préparatif de l'algorithme (1/2): Ordre total sur les simplexes

Soient une filtration $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_p$ et l'ensemble S de tous les simplexes apparaissant dans la filtration. On indice S de sorte que pour tout σ_i et σ_j de S :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } \sigma_i \in K_{k_i} \text{ et } \sigma_j \in K_{k_j} \text{ avec } k_i < k_j \\ \text{Sinon si } \sigma_i \text{ est une face de } \sigma_j \end{array} \right\} \Rightarrow i < j$$

L'ordre total est déduit de cet indiçage.

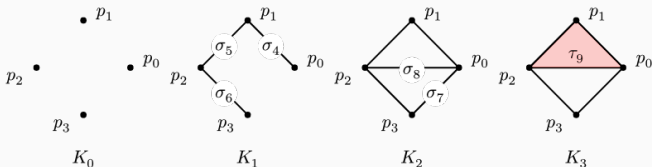
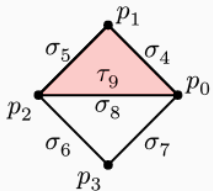


Figure 8: Indiçage de la filtration

Préparatif de l'algorithme (2/2): Matrice de brodure



	4	5	6	7	8	9
0	1			1	1	
1	1	1				
2		1	1		1	
3			1	1		
4						1
5						1
6						
7						
8						1
low	1	2	3	3	2	8

Figure 9: Exemple de matrice de bordure B associé à un ordre total

Algorithme Standard($B \in M_n(\{0, 1\})$)

```
for j allant de 0 a n-1:  
    while (il existe i < j avec low[i] = low[j]):  
        ajouter colonne i de B a colonne j modulo 2
```

Compréhension du résultat en sortie

	4	5	6	7	8	9
0	1			1	1	
1	1	1				
2		1	1		1	
3			1	1		
4						1
5						1
6						
7						
8						1
low	1	2	3	3	2	8

	4	5	6	7	8	9
0	1					
1	1	1				
2		1	1			
3			1			
4						1
5						1
6						
7						
8						1
low	1	2	3	-1	-1	8

Figure 10: Matrice B et réduite \bar{B}

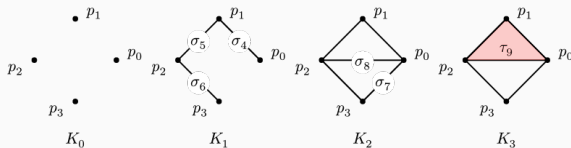


Figure 11: Filtration et utilisée

Remarques à l'initiative de la recherche d'optimisation :

- La matrice est creuse ;
- L'opération de somme de colonnes laisse invariante tous les simplexes de dimension différente.

Modifications apportées :

- Représentation de la matrice en liste d'adjacence (double liste chaînée ordonnée) ;
- Application de l'algorithme sur des matrices extraites et non la totale.

Algorithme Standard optimisé($B \in M_n(\{0,1\})$)

```
dims <- Tableau des simplexes ou dims[i] contient la
    liste des simplexes de dimension i
for toute dimension d a considerer:
    for chaque simplexe j de dims[d]
        while (il existe i dans dims[d] tel que low[j]
            = low[i]):
            ajouter colonne i de B a colonne j modulo
                2
```

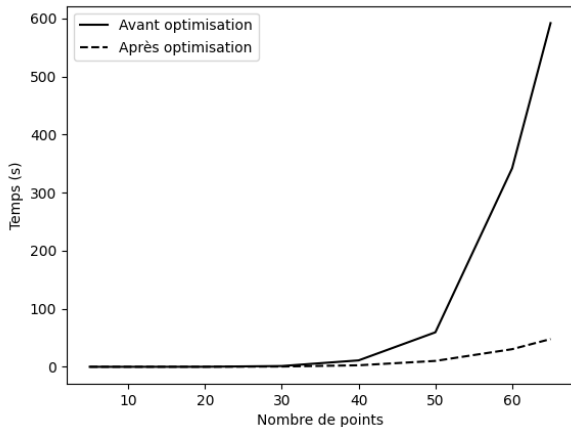


Figure 12: Ordonnée linéaire

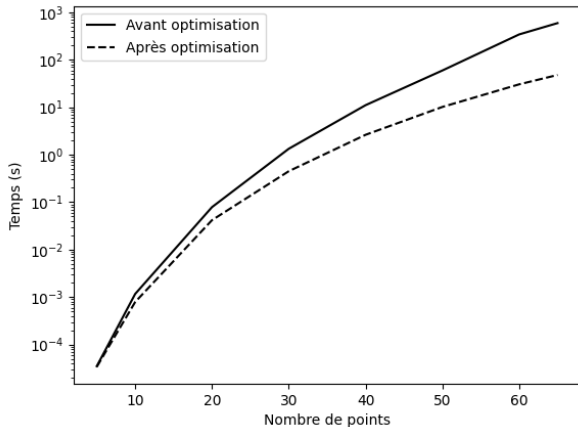


Figure 13: Ordonnée logarithmique

Résultats

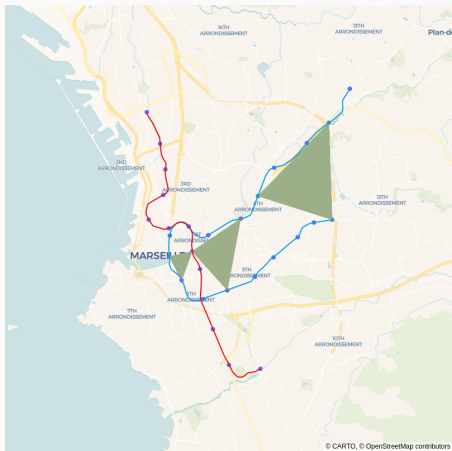


Figure 14: Marseille



Figure 15: Toulouse

Définition d'un cycle

Un cycle est une sous-variété fermée.

Définition d'une limite

Une limite est un cycle qui est également la limite d'une sous-variété

Définition d'une classe d'homologie

Une classe d'homologie est une classe d'équivalence de cycles modulo une limite : elle est donc représentée par un cycle qui n'est la limite d'aucune sous-variété, il représente donc un trou, une variété dont la limite serait ce cycle, mais qui n'est pas là

Annexe : Diagrammes de persistance

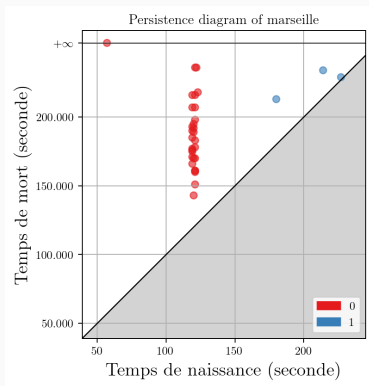


Figure 16: Diagramme de persistance de Marseille

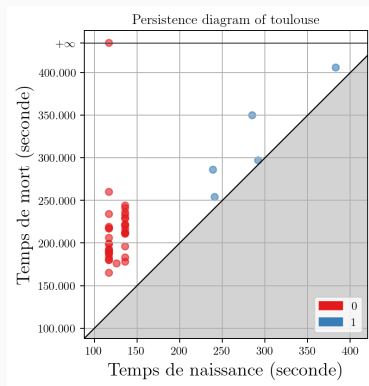


Figure 17: Diagramme de persistance de Toulouse

Annexe : Récupération des données

Pour le calcul des temps de trajet : apidocs.geoapify.com

Pour la récupération des stations et des temps d'attentes moyens :
transport.data.gouv.fr