Étude de couvertures de réseaux de métro, application de l'homologie persistante et optimisation.

Elowan ; 10381

May 16, 2025

Trouver les zones les moins biens desservies par un réseau de métro

Les principales étapes :

- *Convertir* les données géographiques en espace métrique ;
- Créer une suite de formes géométriques à partir de cet espace ;
- Trouver les trous de ces formes.

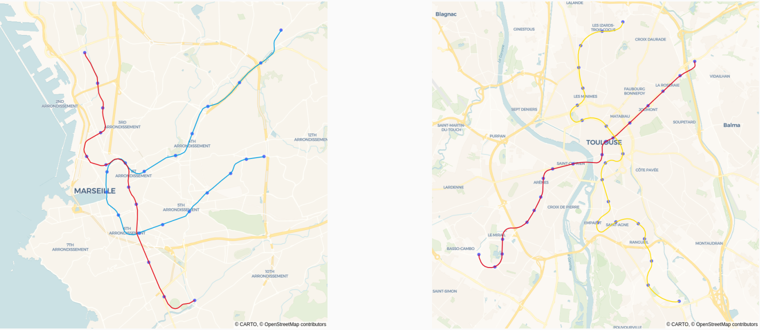


Figure 1: Lignes de métros (Marseille et Toulouse)

Plus en détail, reconnaitre un trou : l'idée du lasso

Chercher à enrouler au lasso, puis reduire ces lassos sans jamais le rompre ou déchirer la forme.

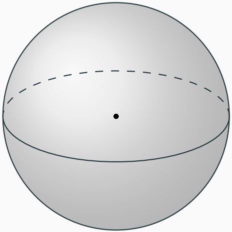


Figure 2: Un tore contenant deux trous et une sphère contenant 0 trou.

Simplexe
Un simplexe σ de dimension k (ou k-simplexe) correspond à l'enveloppe convexe de $k+1$ vecteurs non inclus dans un sous-espace affine de dimension $k-1$.

Face
On dit que σ_i est une face de σ_j si et seulement si $\sigma_i \subset \sigma_j$ et la dimension de σ_i $\dim(\sigma_i)$ est égale à $\dim(\sigma_j) - 1$.

Complexe simplicial
Un ensemble de simplexes.

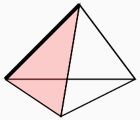


Figure 3: Exemple de complexe simplicial

Définitions

Filtration
Suite croissante pour l'inclusion de complexes simpliciaux.

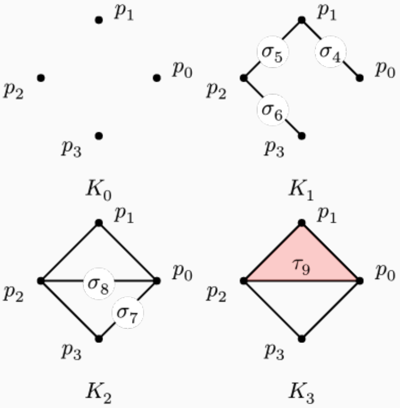


Figure 4: Exemple de filtration.

Classe d'homologie
Elle représente un trou en dimension *n*.

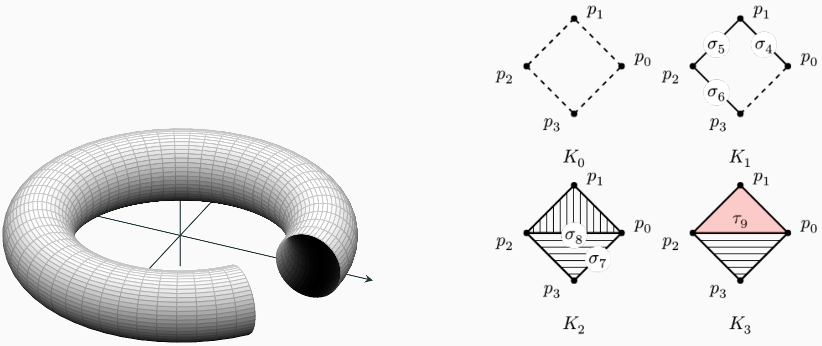


Figure 5: Le tore avec ces deux classes d'homologies et la filtration d'exemple avec en pointillé les classes d'homologies de dimension 0 et en hachuré celles de dimension 1.

La méthode de l'homologie persistante

- Construire une filtration à partir d'un ensemble de points ;
- Application de l'algorithme *standard* ;
- Récupération des classes d'homologies.

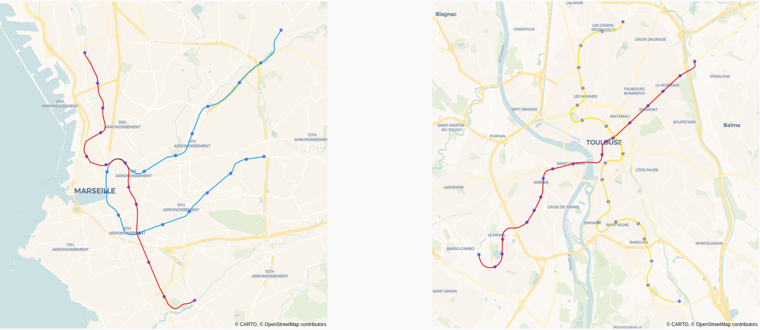


Figure 6: Lignes de métros (Marseille et Toulouse)

Définition de la distance

Distance
On définit la distance d entre deux stations de metro x et y :

$$d(x,y) = \frac{1}{2}(min(t_{pied}(x,y), t_{voit}(x,y)) + min(t_{pied}(y,x), t_{voit}(y,x)))$$

Poids d'une station
La moyenne sur une semaine du temps d'attente en station.

Définition des complexes pondérés de Vietoris-Rips

Complexe Simplicial pondéré de Vietoris-Rips
On le définit au rang r, comme l'ensemble des simplexes $(x_{i_0}, ..., x_{i_k})$ tels que :

$$\begin{cases} \forall j \in [|0, k|], poids_{i_j} < r \\ \forall (j, l) \in [|0, k|]^2, d(x_{i_j}, x_{i_l}) + poids_{i_j} + poids_{i_l} < 2r \end{cases}$$

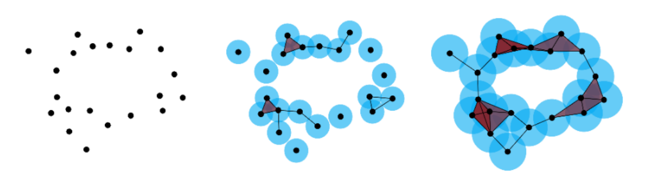


Figure 7: Image repr les vietoris rips, tiré de *Persitent homology for resource coverage: A case study of access to polling sites*

Préparatif de l'algorithme (1/2): Ordre total sur les simplexes

Soient une filtration $K_0 \subset K_1 \subset ... \subset K_p$ et l'ensemble S de tous les simplexes apparaissant dans la filtration. On indice S de sorte que pour tout σ_i et σ_j de S:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } \sigma_i \in K_{k_i} \text{ et } \sigma_j \in K_{k_j} \text{ avec } k_i < k_j \\ \text{Sinon si } \sigma_i \text{ est une face de } \sigma_j\end{array}\right\} \Rightarrow i < j$$

L'ordre total est déduit de cet indiçage.

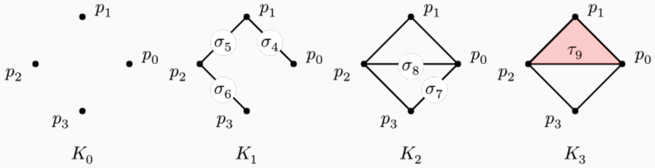
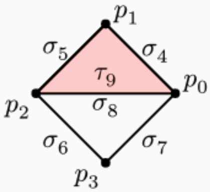


Figure 8: Indiçage de la filtration

Préparatif de l'algorithme (2/2): Matrice de bordure



	4	5	6	7	8	9
0	1			1	1	
1	1	1				
2		1	1		1	
3			1	1		
4						1
5						1
6						
7						
8						1
low	**1**	**2**	**3**	**3**	**2**	**8**

Figure 9: Exemple de matrice de bordure *B* associé à un ordre total

Algorithme Standard($B \in M_n(\{0,1\})$**)**

```
for j allant de 0 a n-1:
    while (il existe i < j avec low[i] = low[j]):
        ajouter colonne i de B a colonne j modulo 2
```

Compréhension du résultat en sortie

	4	5	6	7	8	9
0	1			1	1	
1	1	1				
2		1	1		1	
3			1	1		
4						1
5						1
6						
7						
8						1
low	**1**	**2**	**3**	**3**	**2**	**8**

	4	5	6	7	8	9
0	1					
1	1	1				
2		1	1			
3			1			
4						1
5						1
6						
7						
8						1
low	**1**	**2**	**3**	**-1**	**-1**	**8**

Figure 10: Matrice B et réduite $\overline{B}$

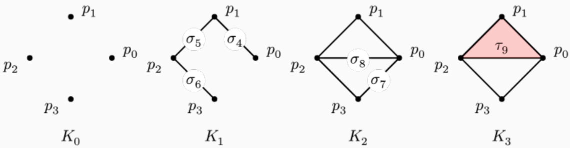


Figure 11: Filtration et utilisée

Optimisation

Remarques à l'initiative de la recherche d'optimisation :

- La matrice est creuse ;
- L'opération de somme de colonnes laisse invariante tous les simplexes de dimension différente.

Modifications apportées :

- Représentation de la matrice en liste d'adjacence (double liste chaînée ordonnée) ;
- Application de l'algorithme sur des matrices extraites et non la totale.

Algorithme Standard optimisé($B \in M_n(\{0,1\})$)

```
dims <- Tableau des simplexes ou dims[i] contient la
    liste des simplexes de dimension i
for toute dimension d a considerer:
    for chaque simplexe j de dims[d]
        while (il existe i dans dims[d] tel que low[j]
            = low[i]):
            ajouter colonne i de B a colonne j modulo
                2
```

Résultats

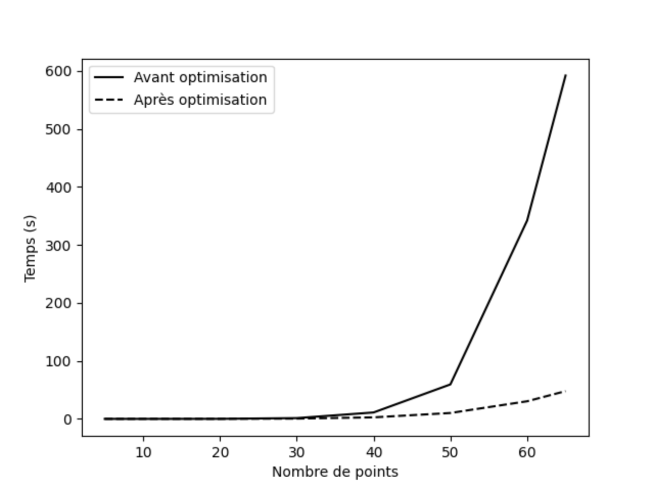


Figure 12: Ordonnée linéaire

Résultats

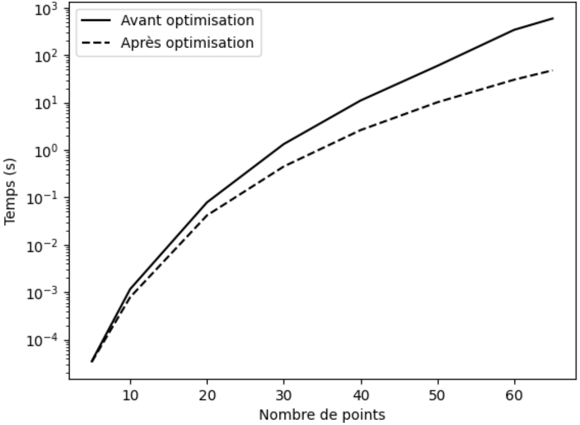


Figure 13: Ordonnée logarithmique

Figure 14: Marseille

Figure 15: Toulouse

Annexe : Définition

Complexe de chaînes
On définit un *complexe de chaînes* comme la donnée d'une suite

$$... \xrightarrow{\delta_{k+2}} C_{k+1} \xrightarrow{\delta_{k+1}} C_k \xrightarrow{\delta_k} C_{k-1} \xrightarrow{\delta_{k-1}} ...$$

Où chaque C_k est un groupe abélien libre qui a pour base les k-simplexes de X et δ_k est une morphisme de groupes tel que $\delta_k \circ \delta_{k+1} = 0$

On appelle δ_k un *opérateur de bords*.

Classes d'homologies H_k
On définit alors les *classes d'homologie de dimension k* comme le groupe de $Ker(\delta_k)$ quotienté par $Im(\delta_{k+1})$:

$$H_k = Ker(\delta_k)/Im(\delta_{k+1})$$

Annexe : Théorème des facteurs invariants

Il existe un unique ensemble $d_1, ..., d_p$ d'éléments de H_k définis à des inversibles près, tel que :

$$H_k(X) \simeq \bigoplus_{i=1}^{p} P_k(X)/d_i P_k(X)$$

en notant $P_k(X)$ l'ensemble des parties à $k+1$ éléments de X, formant donc un complexe simplicial constitué uniquement de k-simplexes. Cet ensemble est appelé *code barre* de H_k.

Annexe : Diagrammes de persistance

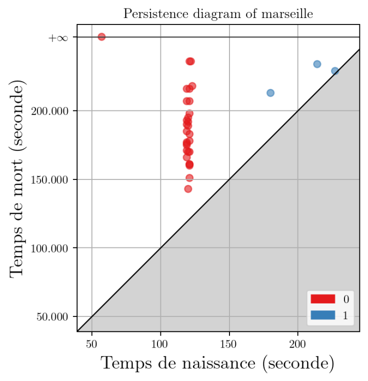


Figure 16: Diagramme de persistance de Marseille

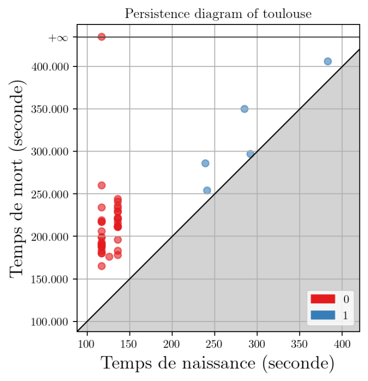


Figure 17: Diagramme de persistance de Toulouse

Annexe : Récupération des données

Pour le calcul des temps de trajet : apidocs.geoapify.com

Pour la récupération des stations et des temps d'attentes moyens : transport.data.gouv.fr