

Étude de système de laboratoire

Sciences

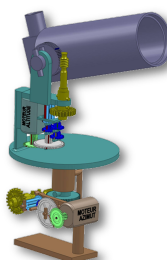
Industrielles de
l'Ingénieur

Doc. TP

Étude du télescope TP SET

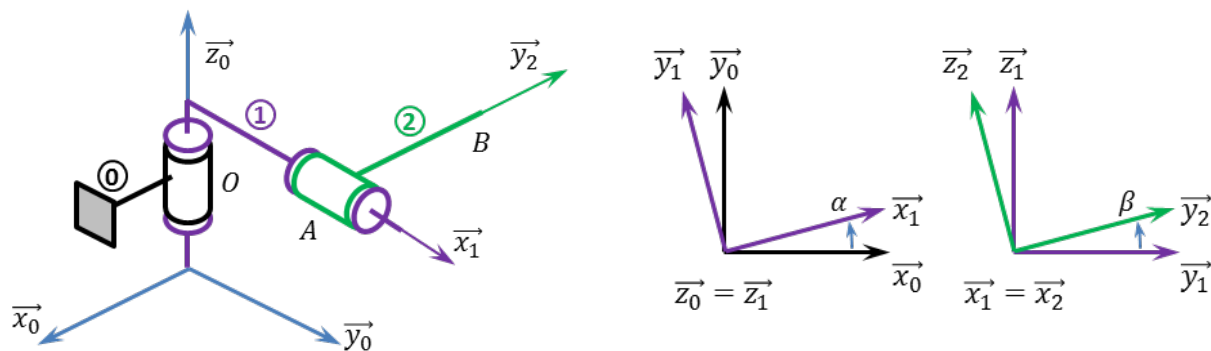
Savoirs et compétences :

- *Mod-C11 : Modélisation géométrique et cinématique des mouvements entre solides indéformables*
- *Mod-C11.2 : Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide*



1	Modélisation et paramétrage	2
2	Cinématique	2
2.1	Trajectoire du point B	2
3	Lois de commande des moteurs	2
3.1	Transformée géométrique inverse	2
3.2	Équation paramétrique de la trajectoire	3

1 Modélisation et paramétrage



2 Cinématique

2.1 Trajectoire du point B

On a : $\vec{OB} = a\vec{z}_1 + R\vec{x}_1 + L\vec{y}_2$. En exprimant \vec{OB} dans le repère \mathcal{R}_0 , on a :

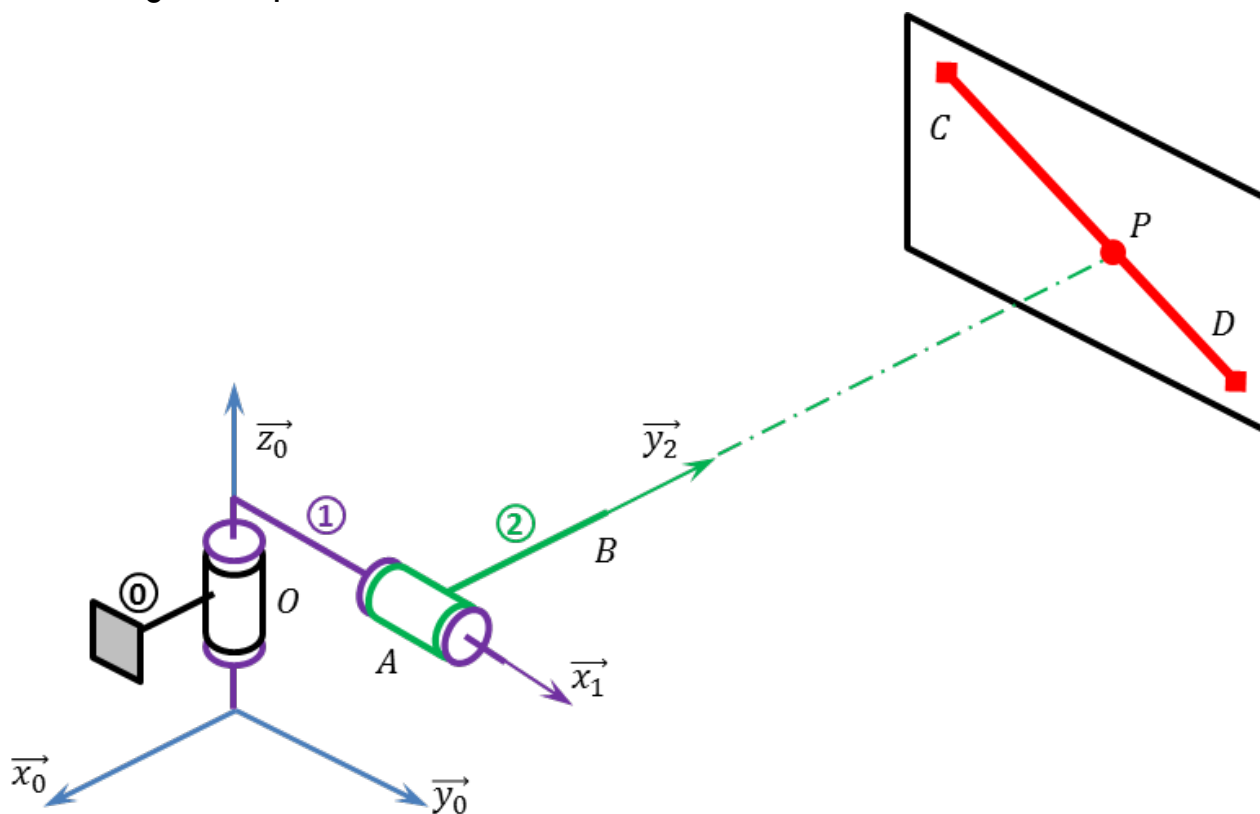
$$\begin{aligned}\vec{OB} &= a\vec{z}_0 + R(\cos\alpha\vec{x}_0 + \sin\alpha\vec{y}_0) + L(\cos\beta\vec{y}_1 + \sin\beta\vec{z}_1) \\ &= a\vec{z}_0 + R(\cos\alpha\vec{x}_0 + \sin\alpha\vec{y}_0) + L(\cos\beta(\cos\alpha\vec{y}_0 - \sin\alpha\vec{x}_0) + \sin\beta\vec{z}_0)\end{aligned}$$

Au final,

$$\vec{OB} = \begin{bmatrix} R\cos\alpha - L\cos\beta\sin\alpha \\ R\sin\alpha + L\cos\beta\cos\alpha \\ a + L\sin\beta \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

3 Lois de commande des moteurs

3.1 Transformée géométrique inverse



Soit P le point à suivre sur le segment $[CD]$. En considérant que les points A , B et P sont alignés. On peut écrire la fermeture géométrique suivante :

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{OA} + \vec{AP} + \vec{PO} \\ \vec{0} &= a\vec{z}_1 + R\vec{x}_1 + \lambda(t)\vec{y}_2 - x(t)\vec{x}_0 - y(t)\vec{y}_0 - z(t)\vec{z}_0 \\ \vec{0} &= a\vec{z}_0 + R(\cos\alpha\vec{x}_0 + \sin\alpha\vec{y}_0) + \lambda(t)(\cos\beta(\cos\alpha\vec{y}_0 - \sin\alpha\vec{x}_0) + \sin\beta\vec{z}_0) - x(t)\vec{x}_0 - y(t)\vec{y}_0 - z(t)\vec{z}_0\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\alpha(t) - \lambda(t)\cos\beta\sin\alpha - x(t) \\ R\sin\alpha(t) + \lambda(t)\cos\beta\cos\alpha - y(t) \\ a + \lambda(t)\sin\beta(t) - z(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda(t)\cos\beta\sin\alpha = -x(t) + R\cos\alpha(t) \\ \lambda(t)\cos\beta\cos\alpha = y(t) - R\sin\alpha(t) \\ \lambda(t)\sin\beta(t) = -a + z(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{z(t)-a}{\sin\beta(t)}\cos\beta\sin\alpha = -x(t) + R\cos\alpha(t) \\ \frac{z(t)-a}{\sin\beta(t)}\cos\beta\cos\alpha = y(t) - R\sin\alpha(t) \\ \lambda(t) = \frac{z(t)-a}{\sin\beta(t)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z(t)-a}{\tan\beta(t)}\sin\alpha(t) = -x(t) + R\cos\alpha(t) \\ \frac{z(t)-a}{\tan\beta(t)}\cos\alpha(t) = y(t) - R\sin\alpha(t) \\ \lambda(t) = \frac{z(t)-a}{\sin\beta(t)} \end{cases}$$

On pose $R = 0$:

$$\begin{cases} \frac{z(t)-a}{\tan\beta(t)}\sin\alpha(t) = -x(t) \\ \frac{z(t)-a}{\tan\beta(t)}\cos\alpha(t) = y(t) \\ \lambda(t) = \frac{z(t)-a}{\sin\beta(t)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha(t) = -x(t)\frac{\tan\beta(t)}{z(t)-a} \\ \cos\alpha(t) = y(t)\frac{\tan\beta(t)}{z(t)-a} \\ \lambda(t) = \frac{z(t)-a}{\sin\beta(t)} \end{cases}$$

$$\cos^2\alpha(t) + \sin^2\alpha(t) = \frac{\tan^2\beta(t)x(t)^2}{(z(t)-a)^2} + \frac{y(t)^2\tan^2\beta(t)}{(z(t)-a)^2} \Leftrightarrow (z(t)-a)^2 = \tan^2\beta(t)(x(t)^2 + y(t)^2)$$

$$\tan^2\beta(t) = \frac{(z(t)-a)^2}{(x(t)^2 + y(t)^2)}$$

Au final :

$$\begin{cases} \tan\beta(t) = \sqrt{\frac{(z(t)-a)^2}{(x(t)^2 + y(t)^2)}} \\ \cos\alpha(t) = y(t)\frac{\tan\beta(t)}{z(t)-a} \end{cases}$$

3.2 Équation paramétrique de la trajectoire

On note (x_C, y_C, z_C) et (x_D, y_D, z_D) les coordonnées des points C et D . On note (u_x, u_z, u_z) les coordonnées du vecteur \vec{BC} . On a alors :

$$\begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x u + x_C \\ u_y u + y_C \\ u_z u + z_C \end{bmatrix}$$

avec :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{x_D - x_C}{L} \\ \frac{y_D - y_C}{L} \\ \frac{z_D - z_C}{L} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 + (z_D - z_C)^2}$$

Recherche du domaine paramétrique

$$u_0 = 0. \quad u_f \text{ est tel que : } x(u_f) = x_D = u_x u_f + x_C \Leftrightarrow u_f = \frac{x_D - x_C}{u_x}$$

Recherchons u en fonction du temps. On note v la vitesse de déplacement. En supposant que le déplacement se fait à vitesse constante, $T_f = \frac{L}{v}$. On a donc : $u(t) = \frac{u_f}{T_f} t$.