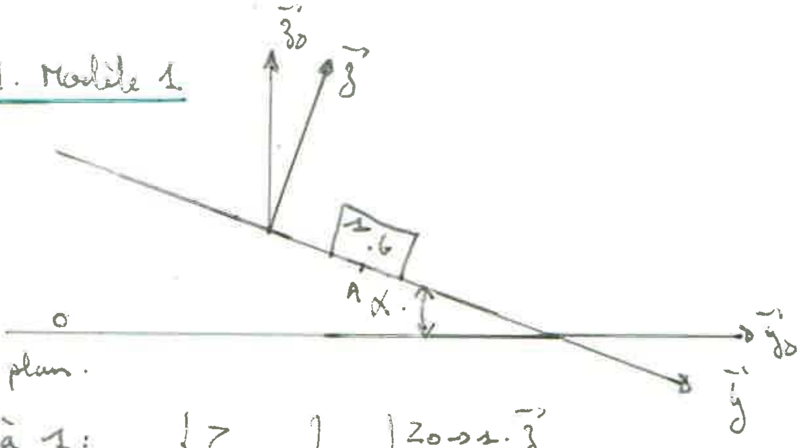
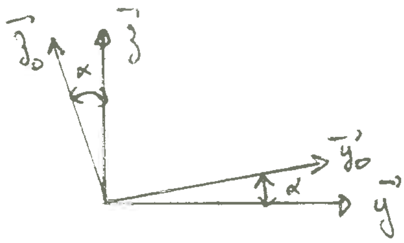
I Etude du guidage sans galet.

1. Modèle 1



Avec $\alpha = 6°$.



- hyp: Pb plan.
- BAME à 1 : $\{\mathcal{T}_{0\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} Z_{0\to 1}\cdot\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A$

$$\{\mathcal{T}_{gravité\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} -mg\cdot\vec{z_0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$$

- Equilibre dynamique (PFD) :

TRD/$\vec{y}$: $m\ddot{y} = +\sin\alpha\, m g$. equation différentielle du mouvement.

$$\Rightarrow m\dot{y} = \sin\alpha\, m g t + C_1.$$

$$\Rightarrow m y = \sin\alpha\, m g \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

CI : $\left\{\begin{matrix} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} C_2 = 0. \\ C_1 = 0 \end{matrix}\right.$ d'où $\boxed{y(t) = \sin\alpha\, g \frac{t^2}{2}}$. modèle 1.

2. Modèle 2 : avec frottement sec

- BAME à 1 : $\{\mathcal{T}_{0\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} -T\cdot\vec{y} + Z_{0\to 1}\cdot\vec{z} \\ \vec{0}. \end{matrix}\right\}_G$; $\{\mathcal{T}_{gravité\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} -mg\cdot\vec{z} \\ \vec{0}. \end{matrix}\right\}_G$

- équilibre dynamique :

TRD/$\vec{y}$: $m\ddot{y} = \sin\alpha\, m g - T$.

$$\Rightarrow m\dot{y} = (\sin\alpha\, m g - T)t + C_1.$$

$$\Rightarrow m y = (\sin\alpha\, m g - T)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

CI : $\left\{\begin{matrix} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} C_2 = 0. \\ C_1 = 0 \end{matrix}\right. \Longrightarrow \boxed{y(t) = \frac{\sin\alpha\, m g - T}{m}\,\frac{t^2}{2}}$ modèle 2.

3. Modèle 3 : Modèle avec frottement visqueux.

· BAME à sy :
$$\{\mathcal{T}_{0\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} -Fv\cdot\dot{y}\cdot\vec{y} + Z_{0\to 1}\cdot\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right._A$$

$$\{\mathcal{T}_{gravité\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} -mg\cdot\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix}\right._G$$

TRD / $\vec{y}$: $m\ddot{y} = mg\sin\alpha - Fv\,\dot{y}$.

$\Leftrightarrow \quad m\ddot{y} + Fv\,\dot{y} = mg\sin\alpha\cdot u(t)$.

Résolution avec Laplace :

$$m\,Y(p)p^2 + Fv\,Y(p)p = \frac{mg\sin\alpha}{p}.$$

$$\Leftrightarrow Y(p)\left[p\left[Fv + m\,p\right]\right] = \frac{mg\sin\alpha}{p}.$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = \frac{\frac{\cancel{m}g\sin\alpha}{\cancel{m}}}{\left[p^2\left[\frac{Fv}{m} + p\right]\right]}$$

$$\Leftrightarrow Y(p) = g\sin\alpha \times \frac{1}{\left[p^2\left[p + \frac{Fv}{m}\right]\right]}$$

décomposition en éléments simples :

$$Y(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p + \frac{Fv}{m}}.$$

calcul de A ; B et C.

$$\lim_{p\to 0} p^2 Y(p) = \lim_{p\to 0} g\sin\alpha \times \frac{1}{\left[p + \frac{Fv}{m}\right]} = \frac{g\sin\alpha}{\frac{Fv}{m}} = \boxed{\frac{mg\sin\alpha}{Fv} = A}$$

$$\lim_{p\to -\frac{Fv}{m}} \left(p + \frac{Fv}{m}\right)Y(p) = \lim_{p\to -\frac{Fv}{m}} \frac{g\sin\alpha}{(p)^2} = \frac{g\sin\alpha}{\left(-\frac{Fv}{m}\right)^2} = \boxed{\frac{m^2 g\sin\alpha}{Fv^2} = C}$$

$$\lim_{p\to +\infty} p\,Y(p) = \lim_{p\to +\infty} \frac{A}{p} + B + \frac{pC}{p + \frac{Fv}{m}} \quad \text{or} \quad \frac{pC}{p + \frac{Fv}{m}} \underset{+\infty}{\sim} C$$

donc $\lim_{p\to +\infty} p\,Y(p) = B + C = 0 \Leftrightarrow B = -C \Leftrightarrow \boxed{-\frac{m^2 g\sin\alpha}{Fv^2} = B}$

finalement : $\boxed{y(t) = tA + B + Ce^{-\frac{Fv}{m}t}}$

$$\boxed{y(t) = \frac{m^2 g \sin\alpha}{F_v^2}\left(e^{-\frac{F_v}{m}t} - 1\right) + \frac{mg\sin\alpha}{F_v}t}.$$

b) Résolution classique.

• équation sans second membre.

$m\ddot{y} + F_v\dot{y} = 0.$

Polynome caractéristique : $mr^2 + F_v r = 0.$

$$\Delta = F_v^2 - 4 \times m \times 0$$

$$\Delta = F_v^2.$$

$$r_1 = \frac{-F_v - \sqrt{F_v^2}}{2m} = -\frac{F_v}{m}.$$

$$r_2 = \frac{-F_v + \sqrt{F_v^2}}{2m} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = C_1 e^{-\frac{F_v}{m}t} + C_2.}$$

Rq on a le résultat directement avec : $m\ddot{y} + F_v\dot{y} = 0$

$$\Leftrightarrow m\ddot{y} = -F_v\dot{y}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = -\frac{F_v}{m}.$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{\dot{y}}{C_1}\right| = -\frac{F_v}{m}.$$

$$\Rightarrow \dot{y} = C_1 e^{-\frac{F_v}{m}t}.$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = C_1 e^{-\frac{F_v}{m}t} + C_2}.$$

• solution particulière :

le second membre ($mg\sin\alpha$) est une constante donc le second membre est du type : $d(t) = e^{at} \times P(t)$ avec $a = 0$ et $d^\circ(P(t)) = 0$.

or comme a est racine simple de l'équation caractéristique, on a une solution particulière $y_0(t)$ du type : $y_0(t) = e^{at} \times t \times Q(t)$ avec $d^\circ(Q(t)) = d^\circ(P(t)) = A$. d'où $y_0(t) = t \times A$.

Pb trouver A : méthode de la variation de la constante :

$$\begin{array}{r|l} & y_0(t) = t \times A \\ F_v & \dot{y}_0(t) = A \\ m & \ddot{y}_0(t) = 0 \end{array}$$

$$F_v A = m g \sin\alpha \iff \boxed{A = \frac{m g \sin\alpha}{F_v}}$$

Finalement on a : $y(t) = C_1 e^{-\frac{F_v}{m}t} + C_2 + \frac{m g \sin\alpha}{F_v} t$.

donc $\dot{y}(t) = -\frac{F_v}{m} C_1 e^{-\frac{F_v}{m}t} + \frac{m g \sin\alpha}{F_v}$.

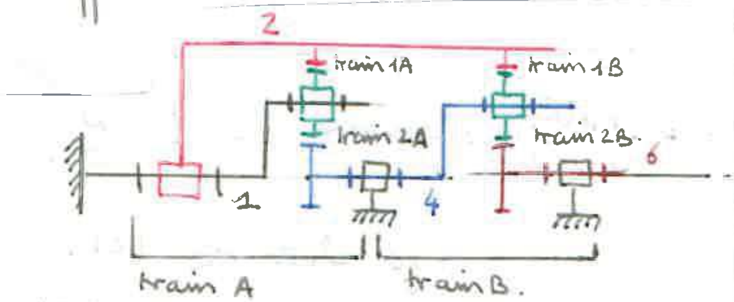
Calcul de C_1 et C_2 avec les CI :

$$\begin{cases} \dot{y}(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{F_v}{m} C_1 + \frac{m g \sin\alpha}{F_v} = 0 \iff C_1 = \frac{m^2 g \sin\alpha}{F_v^2} \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

finalement on a : $\boxed{y(t) = \frac{m^2 g \sin\alpha}{F_v^2}\left[e^{-\frac{F_v}{m}t} - 1\right] + \frac{m g \sin\alpha}{F_v} t}$

II Etude du galet.

1) Rapport de réduction.



objectif : $\alpha = \frac{\omega_{6/1}}{\omega_{2/1}}$

Etude train A : objectif : $\frac{\omega_{4/1}}{\omega_{2/1}} = \alpha_A$

train 1A : $\frac{\omega_{3/1}}{\omega_{2/1}} = +\frac{r_2}{r_3}$

train 2A : $\frac{\omega_{4/1}}{\omega_{3/1}} = -\frac{r_3}{r_4}$

$\frac{\omega_{4/1}}{\cancel{\omega_{3/1}}} \times \frac{\cancel{\omega_{3/1}}}{\omega_{2/1}} = -\frac{\cancel{r_3}}{r_4} \times \frac{r_2}{\cancel{r_3}} = \alpha_A$

$\Rightarrow \alpha_A = -\frac{r_2}{r_4} = \frac{\omega_{4/1}}{\omega_{2/1}} \Leftrightarrow \boxed{\omega_{4/1} = \alpha_A \, \omega_{2/1}}$

Etude train B : objectif : $\frac{\omega_{6/1}}{\omega_{2/1}}$

train 1B : $\frac{\omega_{5/4}}{\omega_{2/4}} = +\frac{r_2}{r_5}$

train 2B : $\frac{\omega_{6/4}}{\omega_{5/4}} = -\frac{r_5}{r_6}$

$\frac{\omega_{6/4}}{\cancel{\omega_{5/4}}} \times \frac{\cancel{\omega_{5/4}}}{\omega_{2/4}} = -\frac{\cancel{r_5}}{r_6} \times \frac{r_2}{\cancel{r_5}} = \alpha_B$

$\Rightarrow \frac{\omega_{6/4}}{\omega_{2/4}} = \boxed{-\frac{r_2}{r_6} = \alpha_B}$

$\frac{\omega_{6/1} - \omega_{4/1}}{\omega_{2/1} - \omega_{4/1}} = \alpha_B.$

$\Leftrightarrow \omega_{6/1} - \omega_{4/1} = \alpha_B(\omega_{2/1} - \omega_{4/1})$

$\Rightarrow \omega_{6/1} = \omega_{2/1}\,\alpha_B + \omega_{4/1}(1-\alpha_B).$

$\Leftrightarrow \omega_{6/1} = \omega_{2/1}\,\alpha_B + \alpha_A\,\omega_{2/1}(1-\alpha_B).$

$\Leftrightarrow \frac{\omega_{6/1}}{\omega_{2/1}} = \alpha_B + \alpha_A(1-\alpha_B).$

$\Rightarrow \frac{\omega_{6/1}}{\omega_{2/1}} = -\frac{r_2}{r_6} + -\frac{r_2}{r_4}\left(1 + \frac{r_2}{r_6}\right)$

AN $\frac{\omega_{6/1}}{\omega_{2/1}} = -\frac{43}{11} - \frac{43}{11}\left(1 + \frac{43}{11}\right)$

$\boxed{\frac{\omega_{6/1}}{\omega_{2/1}} = -23{,}1 = \alpha.}$

2) Etude des effet dynamiques dans le galet.