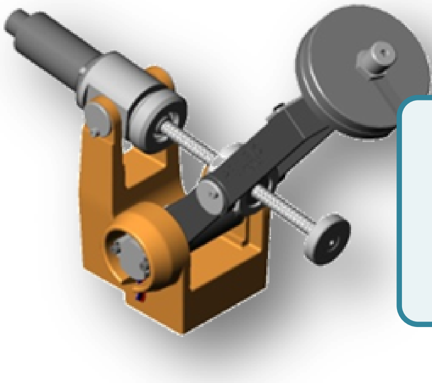


PTSI – PT

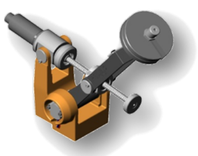
Doc. TP

Étude des systèmes de laboratoire

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Doc. TP

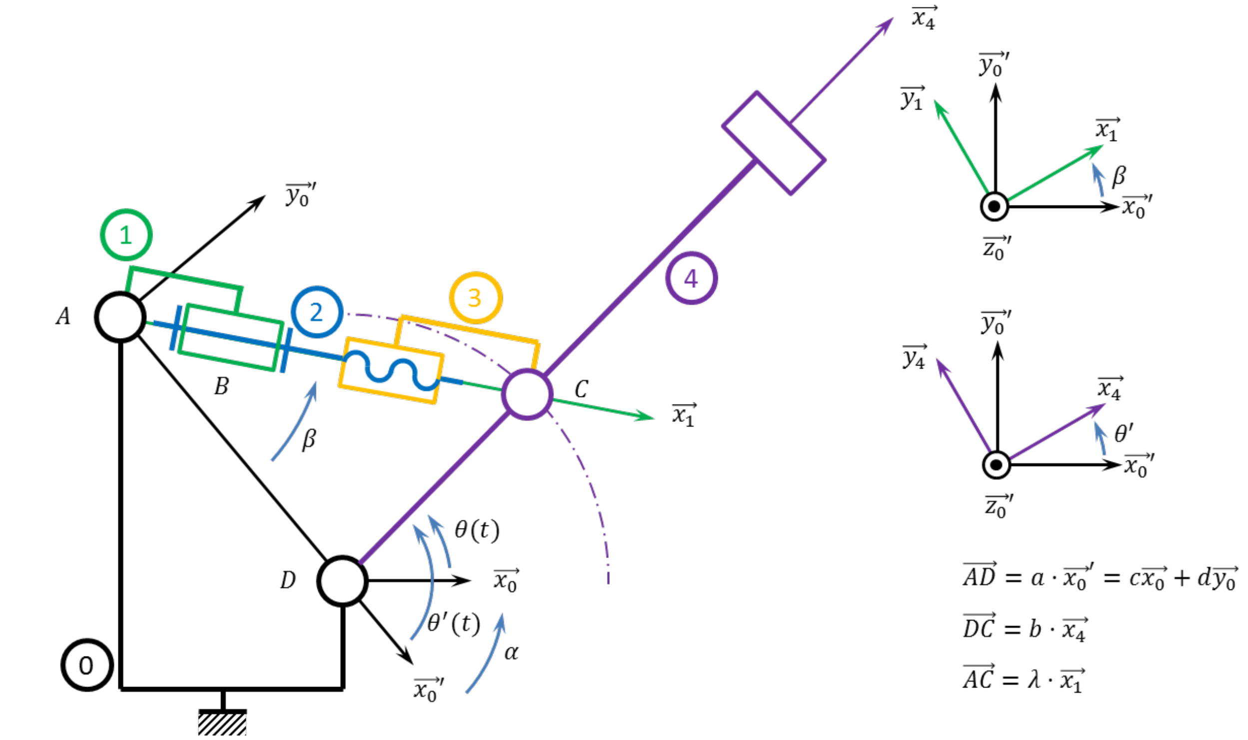
Étude du robot MaxPID



Xavier Pessoles
PTSI – PT

1 Modélisation cinématique du bras Maxpid

1.1 Schéma cinématique



1.2 Détermination de la loi Entrée / Sortie

La fermeture de chaîne cinématique s'écrit ainsi :

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \lambda\overrightarrow{x_1}-b\overrightarrow{x_4}-a\overrightarrow{x_0'}=\overrightarrow{0}$$

Projetons cette relation dans le repère $\mathscr{R}_{0'}$:

$$\lambda\left(\cos\beta\,\overrightarrow{x_0'}+\sin\beta\,\overrightarrow{y_0'}\right)-b\left(\cos\theta'\,\overrightarrow{x_0'}+\sin\theta'\,\overrightarrow{y_0'}\right)-a\,\overrightarrow{x_0'}=\overrightarrow{0}\Longrightarrow\begin{cases}\lambda\cos\beta-b\cos\theta'-a=0\\ \lambda\sin\beta-b\sin\theta'=0\end{cases}$$

Expression de λ en fonction de θ

Pour exprimer la loi entrée sortie, commençons par déterminer θ' en fonction de λ :

$$\lambda^2=a^2+b^2\cos^2\theta'+2ab\cos\theta'+b^2\sin^2\theta'=a^2+b^2+2ab\cos\theta'\Longleftrightarrow\theta'=\arccos\left(\frac{\lambda^2-a^2-b^2}{2ab}\right)$$

Une fermeture angulaire nous permet d'exprimer θ : $\theta'=\alpha+\theta$, on a donc :

$$\theta=\arccos\left(\frac{\lambda^2-a^2-b^2}{2ab}\right)-\alpha$$

Lorsque $\theta=0$, on a $\lambda_0=\sqrt{d^2+(c+b)^2}$.

Notons γ la position angulaire du moteur et p le pas de la liaison hélicoïdale. On a donc $\lambda=\lambda_0+p\dfrac{\gamma}{2\pi}=\sqrt{d^2+(c+b)^2}+p\dfrac{\gamma}{2\pi}$.

Au final,

$$\theta=\arccos\left(\frac{\left(\sqrt{d^2+(c+b)^2}+p\dfrac{\gamma}{2\pi}\right)^2-a^2-b^2}{2ab}\right)-\arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$

Expression de β en fonction de θ'

$$\begin{cases}\lambda\cos\beta=b\cos\theta'+a\\ \lambda\sin\beta=b\sin\theta'\end{cases}\Rightarrow\tan\beta=\frac{b\sin\theta'}{b\cos\theta'+a}$$

1.3 Détermination de la loi en vitesse

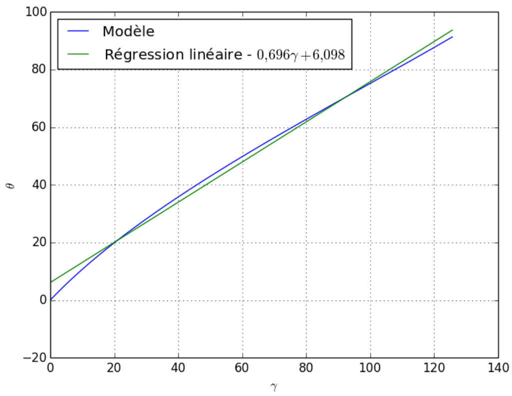
On a :

$$\dot{\theta} = -\frac{\dfrac{2\left(\sqrt{d^2+(c+b)^2}+p\dfrac{\gamma}{2\pi}\right)\left(+p\dfrac{\dot{\gamma}}{2\pi}\right)}{2ab}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\left(\sqrt{d^2+(c+b)^2}+p\dfrac{\gamma}{2\pi}\right)^2-a^2-b^2}{2ab}\right)^2}}$$

1.4 Tracé des courbes

Application numérique :

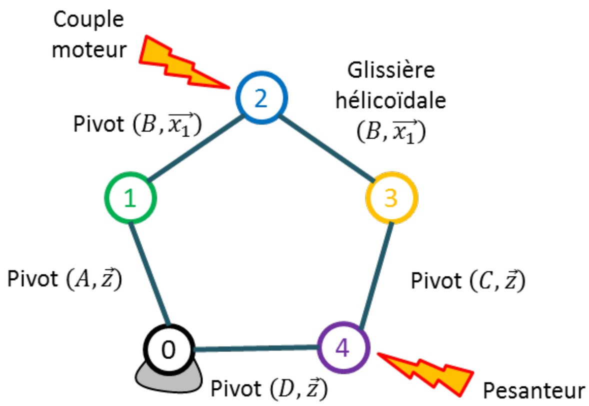
- $a = 106,3$ mm ;
- $b = 80$ mm ;
- $c = 70$ mm ;
- $d = 80$ mm.



Loi Entrée Sortie – Position angulaire du bras en fonction de la position du moteur

2 Étude statique

2.1 Modélisation



Calcul d'hyperstatisme :

- nombre d'ensembles : $n_p = 4$;
- nombres d'inconnues statiques : $n_s = 5+5+5+5+5 = 25$;
- nombre de mobilités : $m = 1$.

$$h = 1 - 24 + 25 = 2$$

. Pour lever l'hyperstatisme il faudrait ajouter deux mobilités pour résoudre toutes les inconnues de liaison.

2.2 Bilan des actions mécaniques

Liaison pivot entre 0 et 1 :

$$\{\mathscr{T}(0\rightarrow 1)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{01} & L_{01}\\ Y_{01}=0 & M_{01}\\ Z_{01} & 0\end{array}\right\}_{A,\mathscr{R}_1}=\left\{\begin{array}{cc} X_{01} & L_{01}\\ Y_{01} & M_{01}+\lambda Z_{01}\\ Z_{01} & -\lambda Y_{01}\end{array}\right\}_{C,\mathscr{R}_1}=\left\{\begin{array}{cc} X_{01} & L_{01}\\ 0 & M_{01}+\lambda Z_{01}\\ Z_{01} & 0\end{array}\right\}_{C,\mathscr{R}_1}$$

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{M}(C,0\rightarrow 1)} &= \overrightarrow{\mathscr{M}(A,0\rightarrow 1)}+\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{R(0\rightarrow 1)}\\ &= \overrightarrow{\mathscr{M}(A,0\rightarrow 1)}-\lambda\overrightarrow{x_1}\wedge\left(X_{01}\overrightarrow{x_1}+Y_{01}\overrightarrow{y_1}+Z_{01}\overrightarrow{z_1}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathscr{M}(A,0\rightarrow 1)}-\left(Y_{01}\lambda\overrightarrow{z_1}-Z_{01}\lambda\overrightarrow{y_1}\right)\end{aligned}$$

Liaison pivot entre 1 et 2 :

$$\{\mathscr{T}(1\rightarrow 2)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{12} & 0\\ Y_{12} & M_{12}\\ Z_{12} & N_{12}\end{array}\right\}_{B,\mathscr{R}_1}$$

Liaison glissière hélicoïdale entre 2 et 3 :

$$\{\mathscr{T}(2\rightarrow 3)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{23} & L_{23}\\ Y_{23} & M_{23}\\ Z_{23} & N_{23}\end{array}\right\}_{E,\mathscr{R}_1}=\left\{\begin{array}{cc} X_{23} & L_{23}\\ Y_{23} & M_{23}+eZ_{23}\\ Z_{23} & N_{23}-eY_{23}\end{array}\right\}_{C,\mathscr{R}_1}$$

Par ailleurs, $|L_{23}|=p|X_{23}|$.
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{M}(C,2\rightarrow 3)} &= \overrightarrow{\mathscr{M}(E,2\rightarrow 3)}+\overrightarrow{CE}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 3)}\\ &= \overrightarrow{\mathscr{M}(E,2\rightarrow 3)}-e\overrightarrow{x_1}\wedge\left(X_{23}\overrightarrow{x_1}+Y_{23}\overrightarrow{y_1}+Z_{23}\overrightarrow{z_1}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathscr{M}(E,2\rightarrow 3)}-e\left(Y_{23}\overrightarrow{z_1}-Z_{23}\overrightarrow{y_1}\right)\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{M}(D,2\rightarrow 3)} &= \overrightarrow{\mathscr{M}(E,2\rightarrow 3)}+\overrightarrow{DE}\wedge\overrightarrow{R(2\rightarrow 3)}\\ &= \overrightarrow{\mathscr{M}(E,2\rightarrow 3)}+\left(b\overrightarrow{x_4}-e\overrightarrow{x_1}\right)\wedge\left(X_{23}\overrightarrow{x_1}+Y_{23}\overrightarrow{y_1}+Z_{23}\overrightarrow{z_1}\right)\\ &= \overrightarrow{\mathscr{M}(E,2\rightarrow 3)}+\left(bX_{23}\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{x_1}+Y_{23}\left(b\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{y_1}-e\overrightarrow{z_1}\right)+Z_{23}\left(b\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{z_1}+e\overrightarrow{y_1}\right)\right)\\ &= \overrightarrow{\mathscr{M}(E,2\rightarrow 3)}+\left(bX_{23}\sin(\theta+\alpha-\beta)\overrightarrow{z_1}+Y_{23}\left(b\cos(\theta+\alpha-\beta)\overrightarrow{z_1}-e\overrightarrow{z_1}\right)+Z_{23}\left(b\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{z_1}+e\overrightarrow{y_1}\right)\right)\end{aligned}$$

Liaison pivot entre 3 et 4 :

$$\{\mathscr{T}(3\rightarrow 4)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{34} & L_{34}\\ Y_{34}=0 & M_{34}\\ Z_{34} & 0\end{array}\right\}_{C,\mathscr{R}_1}=\left\{\begin{array}{cc} X_{34} & L_{34}+\ldots\\ & M_{34}+\ldots\\ Z_{34} & b\left(X_{34}\sin(\theta+\alpha-\beta)\right)\end{array}\right\}_{D,\mathscr{R}_1}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathscr{M}(D,3\rightarrow 4)} &= \overrightarrow{\mathscr{M}(C,3\rightarrow 4)}+\overrightarrow{DC}\wedge\overrightarrow{R(3\rightarrow 4)}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(D,3\rightarrow 4)} &= \overrightarrow{\mathscr{M}(C,3\rightarrow 4)}+b\overrightarrow{x_4}\wedge\left(X_{34}\overrightarrow{x_1}+Z_{34}\overrightarrow{z_1}\right)\\ \overrightarrow{\mathscr{M}(D,3\rightarrow 4)} &= \overrightarrow{\mathscr{M}(C,3\rightarrow 4)}+b\left(X_{34}\sin(\theta+\alpha-\beta)\overrightarrow{z_1}+Z_{34}\overrightarrow{x_4}\wedge\overrightarrow{z_1}\right)\end{aligned}$$

Liaison pivot entre 0 et 4 :

$$\{\mathscr{T}(0\rightarrow 4)\}=\left\{\begin{array}{cc} X_{04} & L_{04}\\ Y_{04} & M_{04}\\ Z_{04} & 0\end{array}\right\}_{D,\mathscr{R}_1}$$

Actions de pesanteur sur 4 :

$$\{\mathcal{T}(\text{pes} \to 4)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G,\mathcal{R}_0} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & -Lmg\cos\theta \end{array} \right\}_{G,\mathcal{R}_0}$$

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}(D, \text{pes} \to 4)} &= \overrightarrow{0} + \overrightarrow{DG} \wedge \left(-mg\overrightarrow{y_0}\right) \\ &= L\overrightarrow{x_4} \wedge \left(-mg\overrightarrow{y_0}\right) \\ &= -Lmg\cos\theta\,\overrightarrow{z_0} \end{aligned}$$

Couple moteur sur 2 :

$$\{\mathcal{T}(\text{m} \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_1}$$

2.3 Recherche du couple moteur en fonction de la masse

Isolement de 2

Le solide **2** est soumis à trois actions mécaniques. On réalise le torseur du moment statique en B en projection sur $\overrightarrow{x_1}$.

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} + \{\mathcal{T}(3 \to 2)\} + \{\mathcal{T}(\text{mot} \to 2)\} = \{0\}$$

On a donc :

$$C_m + L_{32} = 0$$

Isolement de 3

On isole le solide **3** soumis à 2 torseurs et on applique le PFS :

$$\{\mathcal{T}(4 \to 3)\} + \{\mathcal{T}(2 \to 3)\} = \{0\} \Longleftrightarrow -\{\mathcal{T}(3 \to 4)\} + \{\mathcal{T}(2 \to 3)\} = \{0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{23} - X_{34} = 0 \\ Y_{23} - Y_{34} = 0 \Rightarrow Y_{23} = 0 \text{ car } Y_{43} = 0 \quad \text{cf isolement suivant} \\ Z_{23} - Z_{34} = 0 \\ L_{23} - L_{34} = 0 \\ M_{23} + eZ_{23} - M_{34} = 0 \\ N_{23} - eY_{23} = 0 \Rightarrow N_{23} = 0 \end{array} \right.$$

$$|L_{23}| = \frac{p}{2\pi}|X_{23}|$$

Isolement de 1 – 2 – 3

$$\{\mathcal{T}(0 \to 1)\} + \{\mathcal{T}(4 \to 3)\} + \{\mathcal{T}(\text{mot} \to 2)\} = \{0\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{01} + X_{43} = 0 \\ Y_{01} + Y_{43} = 0 \Rightarrow Y_{43} = 0 \\ Z_{01} + Z_{43} = 0 \\ L_{01} + C_{\text{mot}} + L_{43} = 0 \\ M_{01} + \lambda Z_{01} + M_{43} = 0 \\ -\lambda Y_{01} + 0 = 0 \Rightarrow Y_{01} = 0 \end{array} \right.$$

Isolement de 4

Application du théorème du moment statique en D en projection sur $\overrightarrow{z}$:

$$bX_{34}\sin(\theta + \alpha - \beta) - Lmg\cos\theta = 0$$

$$bX_{34} = Lmg\frac{\cos\theta}{\sin(\theta + \alpha - \beta)}$$

Doc. TP

On a alors :

$$L_{23} = \pm \frac{p}{2\pi} L m g \frac{\cos\theta}{b \sin\left(\theta + \alpha - \beta\right)}$$

$\tan\beta = \dfrac{b \sin\theta'}{b\cos\theta' + a}$, $\theta' = \alpha + \theta$

$$\theta = 0 \Rightarrow \theta' = \alpha$$

$\tan\beta = \dfrac{b \sin\alpha}{b\cos\alpha + a}$,

2.4 Calcul divers

$\overrightarrow{x_4} = \cos\theta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{y_0} = \cos\theta\left(\cos\alpha\,\overrightarrow{x_0'} + \sin\alpha\,\overrightarrow{y_0'}\right) + \sin\theta\left(-\sin\alpha\,\overrightarrow{x_0'} + \cos\alpha\,\overrightarrow{y_0'}\right) = \left(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha\right)\overrightarrow{x_0'} + \left(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha\right)\overrightarrow{y_0'} = \cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'} + \sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}$

$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{x_1} = \left(\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'} + \sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}\right) \wedge \overrightarrow{x_1} = \cos(\theta+\alpha)\sin\beta\,\overrightarrow{z_1} - \sin(\theta+\alpha)\cos\beta\,\overrightarrow{z_1} = \sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{y_1} = \left(\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'} + \sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}\right) \wedge \overrightarrow{y_1} = \cos(\theta+\alpha)\cos\beta\,\overrightarrow{z_1} + \sin(\theta+\alpha)\sin\beta\,\overrightarrow{z_1} = \cos\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{z_1} = \left(\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'} + \sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'}\right) \wedge \overrightarrow{z_1} = -\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'} + \sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}$

Au bilan :

$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{x_1} = \sin\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{y_1} = \cos\left(\theta+\alpha-\beta\right)\overrightarrow{z_1}$

$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{z_1} = -\cos(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{y_0'} + \sin(\theta+\alpha)\,\overrightarrow{x_0'}$