

Occ. TP

# Étude des systèmes de laboratoire

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Doc.

## Étude du robot MaxPID



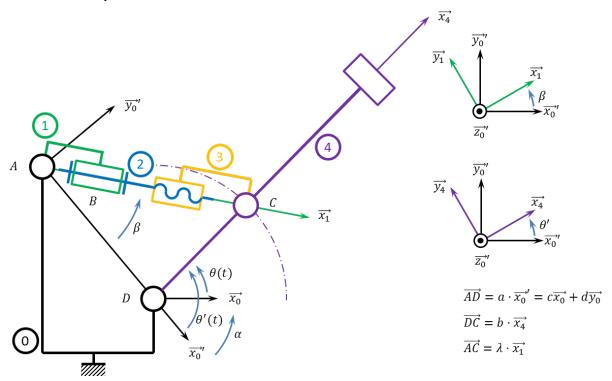
1	Modélisation cinématique du bras Maxpid	2
1.1	Schéma cinématique	2
1.2	Détermination de la loi Entrée / Sortie	2
1.3	Détermination de la loi en vitesse	3
1.4	Tracé des courbes	3
2	Étude statique	3
2.1	Modélisation	3
2.2	Bilan des actions mécaniques	3
2.3	Recherche du couple moteur en fonction de la masse	. 4
2.4	Calcul divers	





#### 1 Modélisation cinématique du bras Maxpid

#### 1.1 Schéma cinématique



#### 1.2 Détermination de la loi Entrée / Sortie

La fermeture de chaîne cinématique s'écrit ainsi:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{0} \iff \lambda \overrightarrow{x_1} - b \overrightarrow{x_4} - a \overrightarrow{x_0'} = \overrightarrow{0}$$

Projetons cette relation dans le repère  $\mathcal{R}_{0'}$ :

$$\lambda \left(\cos\beta \overrightarrow{x_0'} + \sin\beta \overrightarrow{y_0'}\right) - b \left(\cos\theta' \overrightarrow{x_0'} + \sin\theta' \overrightarrow{y_0'}\right) - a \overrightarrow{x_0'} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \lambda \cos\beta - b \cos\theta' - a = 0 \\ \lambda \sin\beta - b \sin\theta' = 0 \end{array} \right.$$

Pour exprimer la loi entrée sortie, commençons par déterminer  $\theta'$  en fonction de  $\lambda$ :

$$\lambda^2 = a^2 + b^2 \cos^2 \theta' + 2ab \cos \theta' + b^2 \sin^2 \theta' = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta' \Longleftrightarrow \theta' = \arccos\left(\frac{\lambda^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)$$

Une fermeture angulaire nous permet d'exprimer  $\theta$  :  $\theta' = \alpha + \theta$ , on a donc :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\lambda^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right) - \alpha$$

Lorsque  $\theta = 0$ , on a  $\lambda_0 = \sqrt{d^2 + (c+b)^2}$ .

Notons  $\gamma$  la position angulaire du moteur et p le pas de la liaison hélicoïdale. On a donc  $\lambda=\lambda_0+p\frac{\gamma}{2\pi}=\sqrt{d^2+(c+b)^2}+p\frac{\gamma}{2\pi}$  . Au final,

$$\theta = \arccos\left(\frac{\left(\sqrt{d^2 + (c+b)^2} + p\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right) - \arctan\left(\frac{d}{c}\right)$$



#### 1.3 Détermination de la loi en vitesse

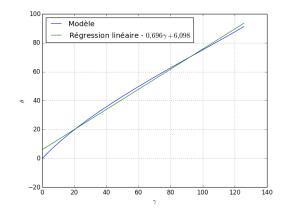
On a:

$$\dot{\theta} = -\frac{2\left(\sqrt{d^2 + (c+b)^2} + p\frac{\gamma}{2\pi}\right)\left(+p\frac{\dot{\gamma}}{2\pi}\right)}{2ab} - \frac{1 - \left(\sqrt{d^2 + (c+b)^2} + p\frac{\gamma}{2\pi}\right)^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)^2}$$

#### 1.4 Tracé des courbes

Application numérique:

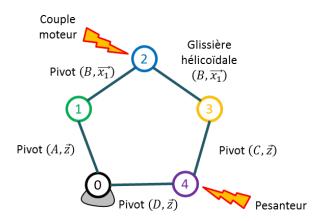
- $a = 106, 3 \,\mathrm{mm}$ ;
- $b = 80 \, \text{mm}$ ;
- $c = 70 \, \text{mm}$ ;
- $d = 80 \, \text{mm}$ .



Loi Entrée Sortie – Position angulaire du bras en fonction de la position du moteur

### 2 Étude statique

#### 2.1 Modélisation



## 2.2 Bilan des actions mécaniques

Liaison pivot entre 0 et 1:

$$\{\mathcal{T}(0 \to 1)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array} \right\}_{A,\mathcal{R}_1}$$



Liaison pivot entre 1 et 2:

$$\{\mathcal{T}(1 \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{B,\mathcal{R}_1}$$

Liaison glissière hélicoïdale entre 2 et 3:

$$\{\mathcal{T}(2 \to 3)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_1} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{array} \right\}_{D,\mathcal{R}_1}$$

On a:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(D,2\rightarrow3) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(C,2\rightarrow3) + \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{R(2\rightarrow3)} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(C,2\rightarrow3) + d\overrightarrow{x_4} \wedge \left(X_{23}\overrightarrow{x_1} + Y_{23}\overrightarrow{y_1} + Z_{23}\overrightarrow{z_1} + \right)$$

$$= \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \to 3)} + \left( d\overrightarrow{x_4} \wedge X_{23}\overrightarrow{x_1} + d\overrightarrow{x_4} \wedge Y_{23}\overrightarrow{y_1} + d\overrightarrow{x_4} \wedge Z_{23}\overrightarrow{z_1} + \right) =$$

Par ailleurs,  $|L_{23}| = p|X_{23}|$ .

Liaison pivot entre 3 et 4:

$$\{\mathcal{T}(3 \to 4)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & 0 \end{array} \right\}_{C,\mathcal{R}_1}$$

Liaison pivot entre 0 et 4:

$$\{\mathcal{T}(0 \to 4)\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{04} & L_{04} \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & 0 \end{array} \right\}_{D,\mathcal{R}_1}$$

Actions de pesanteur sur 4:

$$\left\{ \mathcal{T} \left( \operatorname{pes} \to 4 \right) \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 0 \\ -m \, g & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} -m \, g \cos \left( \alpha + \beta \right) & 0 \\ -m \, g \sin \left( \alpha + \beta \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{G, \mathcal{R}_0}$$

On a :  $\overrightarrow{y_0} = \cos \alpha \overrightarrow{y_0'} + \sin \alpha \overrightarrow{x_0'}$  avec  $\alpha = \arctan \frac{d}{c}$ . On a ensuite :

- $\overrightarrow{x'_0} = \cos \beta \overrightarrow{x_1} \sin \beta \overrightarrow{y_1}$ ;  $\overrightarrow{y'_0} = \cos \beta \overrightarrow{y_1} + \sin \beta \overrightarrow{x_1}$ .

$$\overrightarrow{y_0} = \cos(\alpha + \beta) \overrightarrow{x_1} + \sin(\alpha + \beta) \overrightarrow{y_1}$$

Couple moteur sur 2:

$$\{\mathcal{T}(\mathbf{m} \to 2)\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{R, \mathcal{T}}$$

#### Recherche du couple moteur en fonction de la masse

On isole **3+4** et on fait un théorème du moment statique en C en projection sur  $\overrightarrow{z}$ .

#### **Calcul divers**

$$\overrightarrow{x_4} = \cos\theta \, \overrightarrow{x_0} + \sin\theta \, \overrightarrow{y_0} = \cos\theta \, \left(\cos\alpha \, \overrightarrow{x_0'} + \sin\alpha \, \overrightarrow{y_0'}\right) + \sin\theta \, \left(-\sin\alpha \, \overrightarrow{x_0'} + \cos\alpha \, \overrightarrow{y_0'}\right) = (\cos\theta \cos\alpha - \sin\theta \sin\alpha) \, \overrightarrow{x_0'} + (\cos\theta \sin\alpha + \sin\theta \cos\alpha) \, \overrightarrow{y_0'} = \cos(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{x_0'} + \sin(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{y_0'}$$

$$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{x_1} = \left(\cos(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{x_0'} + \sin(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{y_0'}\right) \wedge \overrightarrow{x_1} = \cos(\theta + \alpha) \sin\beta \, \overrightarrow{z_1} - \sin(\theta + \alpha) \cos\beta \, \overrightarrow{z_1} = \sin(\theta + \alpha - \beta) \, \overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{y_1} = \left(\cos(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{x_0'} + \sin(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{y_0'}\right) \wedge \overrightarrow{y_1} = \cos(\theta + \alpha) \cos\beta \, \overrightarrow{z_1} + \sin(\theta + \alpha) \sin\beta \, \overrightarrow{z_1} = \cos(\theta + \alpha - \beta) \, \overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{x_4} \wedge \overrightarrow{z_1} = \left(\cos(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{x_0'} + \sin(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{y_0'}\right) \wedge \overrightarrow{z_1} = -\cos(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{y_0'} + \sin(\theta + \alpha) \, \overrightarrow{x_0'}$$