http://www.science-et-vie.com/wp-content/uploads/2012/08/Galaxie_NGC_1187_ESO.jpg

PTSI – PT

Doc. TP

Étude cinématique des systèmes de solides de la chaîne d'énergie
Analyser, Modéliser, Résoudre

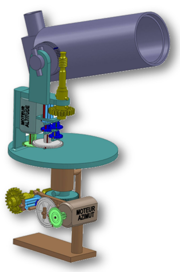
Sciences Industrielles de l'Ingénieur

TP

Télescope

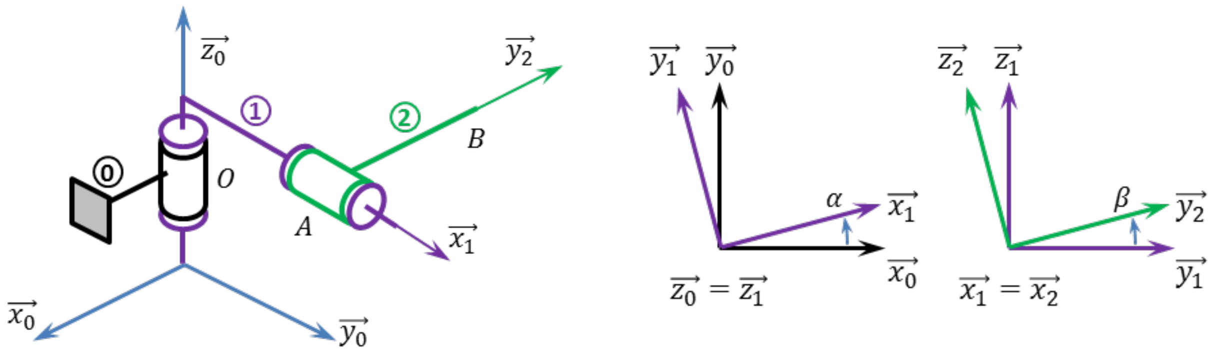
Savoirs et compétences :

- ❒ *Mod-C11 : Modélisation géométrique et cinématique des mouvements entre solides indéformables*
  - ❒ *Mod-C11.2 : Champ des vecteurs vitesses des points d'un solide*



Xavier Pessoles
PTSI – PT

1 Modélisation et paramétrage



2 Cinématique

2.1 Trajectoire du point B

On a : $\overrightarrow{OB}=a\overrightarrow{z_1}+R\overrightarrow{x_1}+L\overrightarrow{y_2}$. En exprimant $\overrightarrow{OB}$ dans le repère $\mathscr{R}_0$, on a :

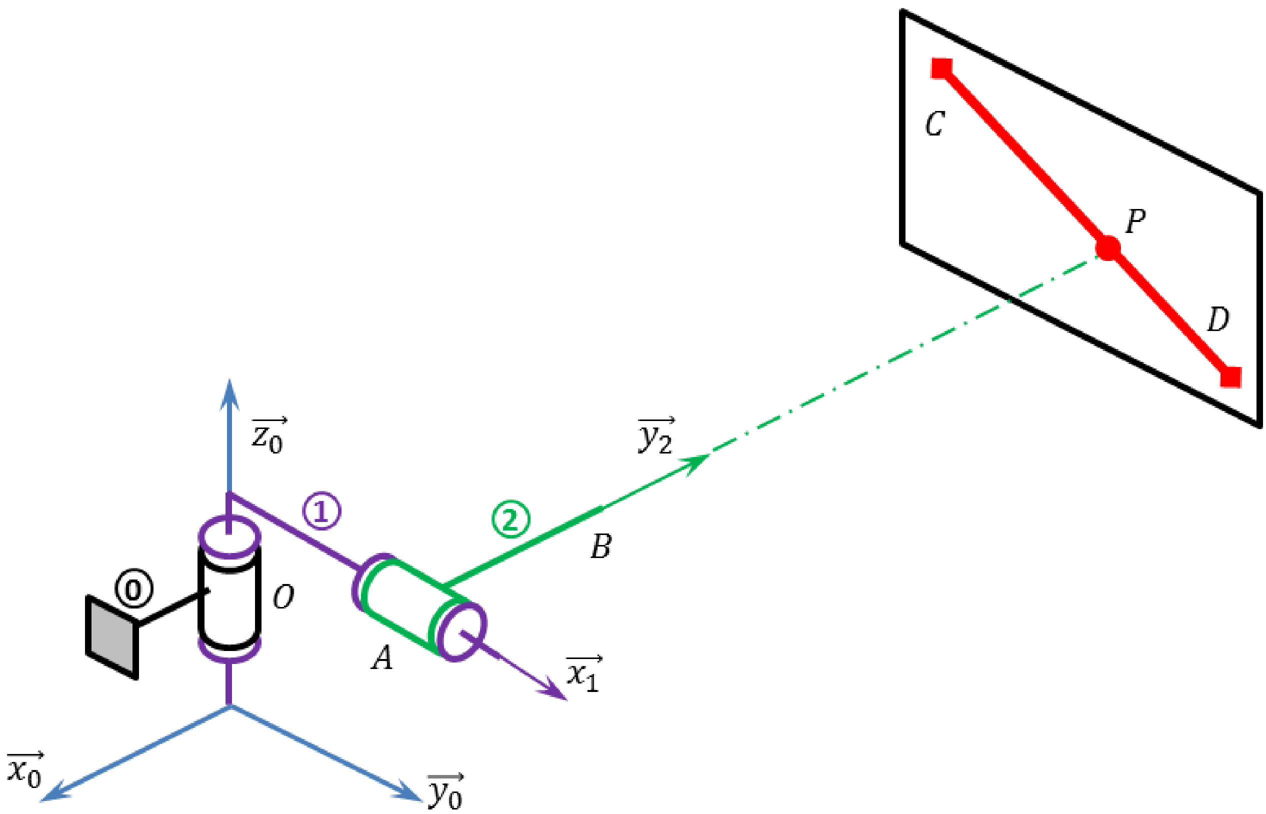
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= a\overrightarrow{z_0}+R\left(\cos\alpha\overrightarrow{x_0}+\sin\alpha\overrightarrow{y_0}\right)+L\left(\cos\beta\overrightarrow{y_1}+\sin\beta\overrightarrow{z_1}\right)\\ &= a\overrightarrow{z_0}+R\left(\cos\alpha\overrightarrow{x_0}+\sin\alpha\overrightarrow{y_0}\right)+L\left(\cos\beta\left(\cos\alpha\overrightarrow{y_0}-\sin\alpha\overrightarrow{x_0}\right)+\sin\beta\overrightarrow{z_0}\right)\end{aligned}$$

Au final,

$$\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix} R\cos\alpha-L\cos\beta\sin\alpha\\ R\sin\alpha+L\cos\beta\cos\alpha\\ a+L\sin\beta\end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

3 Lois de commande des moteurs

3.1 Transformée géométrique inverse



Soit P le point à suivre sur le segment $[CD]$. En considérant que les points A, B et P sont alignés. On peut écrire la fermeture géométrique suivante :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{0} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PO}\\
\overrightarrow{0} &= a\overrightarrow{z_1}+R\overrightarrow{x_1}+\lambda(t)\overrightarrow{y_2}-x(t)\overrightarrow{x_0}-y(t)\overrightarrow{y_0}-z(t)\overrightarrow{z_0}\\
\overrightarrow{0} &= a\overrightarrow{z_0}+R\left(\cos\alpha\overrightarrow{x_0}+\sin\alpha\overrightarrow{y_0}\right)+\lambda(t)\left(\cos\beta\left(\cos\alpha\overrightarrow{y_0}-\sin\alpha\overrightarrow{x_0}\right)+\sin\beta\overrightarrow{z_0}\right)-x(t)\overrightarrow{x_0}-y(t)\overrightarrow{y_0}-z(t)\overrightarrow{z_0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R\cos\alpha(t)-\lambda(t)\cos\beta\sin\alpha-x(t)\\ R\sin\alpha(t)+\lambda(t)\cos\beta\cos\alpha-y(t)\\ a+\lambda(t)\sin\beta(t)-z(t)\end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda(t)\cos\beta\sin\alpha=-x(t)+R\cos\alpha(t)\\ \lambda(t)\cos\beta\cos\alpha=y(t)-R\sin\alpha(t)\\ \lambda(t)\sin\beta(t)=-a+z(t)\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}\dfrac{z(t)-a}{\sin\beta(t)}\cos\beta\sin\alpha=-x(t)+R\cos\alpha(t)\\ \dfrac{z(t)-a}{\sin\beta(t)}\cos\beta\cos\alpha=y(t)-R\sin\alpha(t)\\ \lambda(t)=\dfrac{z(t)-a}{\sin\beta(t)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{z(t)-a}{\tan\beta(t)}\sin\alpha(t)=-x(t)+R\cos\alpha(t)\\ \dfrac{z(t)-a}{\tan\beta(t)}\cos\alpha(t)=y(t)-R\sin\alpha(t)\\ \lambda(t)=\dfrac{z(t)-a}{\sin\beta(t)}\end{cases}
$$

On pose $R=0$:

$$
\begin{cases}\dfrac{z(t)-a}{\tan\beta(t)}\sin\alpha(t)=-x(t)\\ \dfrac{z(t)-a}{\tan\beta(t)}\cos\alpha(t)=y(t)\\ \lambda(t)=\dfrac{z(t)-a}{\sin\beta(t)}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\alpha(t)=-x(t)\dfrac{\tan\beta(t)}{z(t)-a}\\ \cos\alpha(t)=y(t)\dfrac{\tan\beta(t)}{z(t)-a}\\ \lambda(t)=\dfrac{z(t)-a}{\sin\beta(t)}\end{cases}
$$

$$
\cos^2\alpha(t)+\sin^2\alpha(t)=\frac{\tan^2\beta(t)x(t)^2}{(z(t)-a)^2}+\frac{y(t)^2\tan^2\beta(t)}{(z(t)-a)^2}\Leftrightarrow(z(t)-a)^2=\tan^2\beta(t)\left(x(t)^2+y(t)^2\right)
$$

$$
\tan^2\beta(t)=\frac{(z(t)-a)^2}{\left(x(t)^2+y(t)^2\right)}
$$

Au final :

$$
\begin{cases}\tan\beta(t)=\sqrt{\dfrac{(z(t)-a)^2}{\left(x(t)^2+y(t)^2\right)}}\\ \cos\alpha(t)=y(t)\dfrac{\tan\beta(t)}{z(t)-a}\end{cases}
$$

3.2 Équation paramétrique de la trajectoire

On note (x_C,y_C,z_C) et (x_D,y_D,z_D) les coordonnées des points C et D. On note (u_x,u_z,u_z) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$. On a alors :

$$
\begin{bmatrix}x(u)\\y(u)\\z(u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_xu+x_C\\u_yu+y_C\\u_zu+z_C\end{bmatrix}
$$

avec :

$$
\overrightarrow{u}=\begin{bmatrix}\dfrac{x_D-x_C}{L}\\ \dfrac{y_D-y_C}{L}\\ \dfrac{z_D-z_C}{L}\end{bmatrix}\quad\text{et}\quad L=\sqrt{(x_D-x_C)^2+(y_D-y_C)^2+(z_D-z_C)^2}
$$

Recherche du domaine paramétrique

$u_0=0$. u_f est tel que : $x(u_f)=x_D=u_xu_f+x_C\Leftrightarrow u_f=\dfrac{x_D-x_C}{u_x}$.

Recherchons u en fonction du temps. On note v la vitesse de déplacement. En supposant que le déplacement se fait à vitesse constante, $T_f=\dfrac{L}{v}$. On a donc : $u(t)=\dfrac{u_f}{T_f}t$.