

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет компьютерных систем и сетей

Кафедра информатики

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовому проекту

на тему

Отображение четырехмерных фигур

Студент

гр. 953503
Кохан Д. С.

Руководитель

ассистент кафедры информатики
Удовин И. А.

Минск 2020

Оглавление

1. АНАЛИЗ ПОЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ	2
1.1 Актуальность темы.....	2
1.2 Предмет четвертого измерения.....	2
1.3 Возможное практическое применение четырехмерного проектирования	3
2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	5
3. ВЫБОР ИНСТРУМЕНТАРИЯ	6
4. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ.....	8
4.1 О четырехмерном пространстве	8
4.2 История высших измерений.....	8
4.3 Способы визуализации четырёхмерных тел	9
4.3.1 Проекция.....	9
4.3.2 Сечения	10
4.3.3 Развертки.....	10
5. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА	12
5.1 Дизайн архитектуры.....	12
5.2 Сущность фигуры.....	12
5.3 Сущность сечения	13
5.4 Сущность проекции	14
6. ПРОВЕРКА РАБОТОСПОСОБНОСТИ ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА	15
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	15
СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИТЕРАТУРЫ.....	16

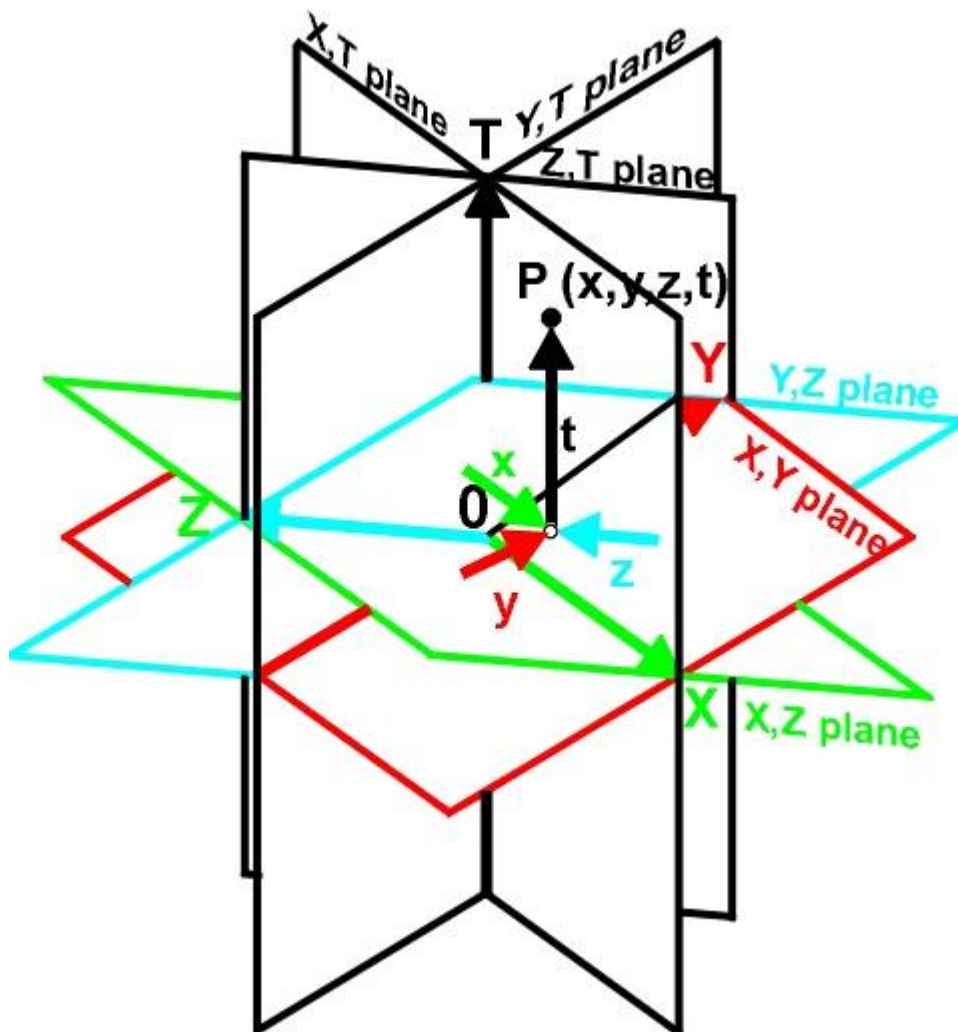
1. АНАЛИЗ ПОЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1 Актуальность темы

Четвертое измерение является предметом изучения теоретической математики по той причине, что физическое существование четвертого измерения не было зафиксировано, а, значит, разумно предположить, что оно не существует. Несмотря на это, концепция высших измерений, то есть, четвертое, пятое и так далее, является полезным инструментом сокращения и оптимизации расчетов. Для увеличения наглядности и доступности этих расчетов необходимы способы отражения подобных нематериальных концепций с помощью хорошо известных форм и инструментов, одним из которых и является эта работа.

1.2 Предмет четвертого измерения

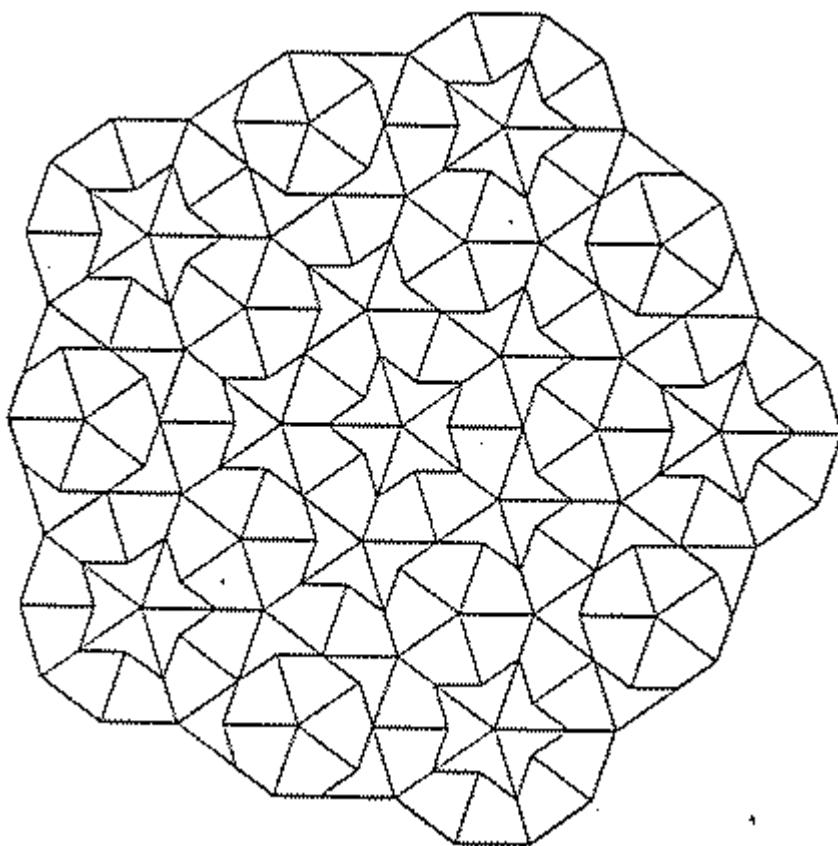
Четвертое измерение можно представить как четвертую координату точки, описывающую положение этой точки относительно невидимой четвертой координатной оси. В такой системе координат объекты реального мира находятся на пространстве, которое описывает выражение $t=\text{const}$, где t – четвертая координата.



Четырехмерный график через плоскости

1.3 Возможное практическое применение четырехмерного проектирования

- Паттерны Пенроуза являются плоским сечением пространства высших измерений
- Формулы математической логики могут быть представлены как многоугольники в n измерений
- Матричная и векторная алгебра работают с измерениями напрямую



«Плитка» Пенроуза

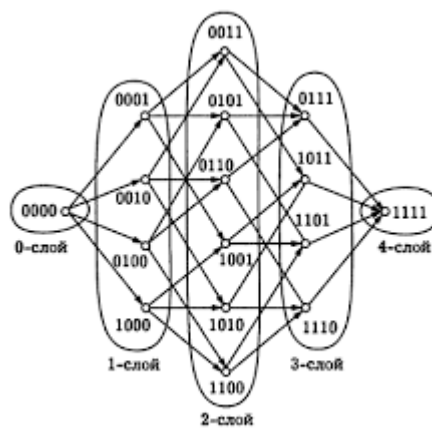


Рис. 6.2

Четырехмерная булева функция

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель: применение теоретических знаний геометрии и алгебры и выработка практических навыков трехмерного проектирования в контексте программного обеспечения.

В данном проекте предполагается разработать концепцию и структуру визуализации четырехмерных фигур на трехмерном пространстве.

Данный проект реализует следующие цели:

- создание четырехмерной структуры с заданными свойствами.
- проецирование фигуры на трехмерное и двухмерное пространство.
- динамическое отображение состояния фигуры в реальном времени.
- возможность изменения состояния фигуры с наглядным отображением изменений.

3. ВЫБОР ИНСТРУМЕНТАРИЯ

GLUT — Библиотека функций, использующих и расширяющих возможности OpenGL.

OpenGL - платформонезависимый (независимый от языка программирования) программный интерфейс для написания приложений, использующих двумерную и трёхмерную компьютерную графику.

На базовом уровне, OpenGL — это просто спецификация, то есть документ, описывающий набор функций и их точное поведение. Производители оборудования на основе этой спецификации создают реализации — библиотеки функций, соответствующих набору функций спецификации. Реализация призвана эффективно использовать возможности оборудования. Если аппаратура не позволяет реализовать какую-либо возможность, она должна быть эмулирована программно. Производители аппаратуры проходят ряд специфических тестов (conformance tests — тесты на соответствие), прежде чем реализация будет классифицирована OpenGL-реализация. Так как разработчикам программного обеспечения достаточно научиться использовать функции, описанные в спецификации, их реализация остается разработчикам аппаратного обеспечения.

Эффективные реализации OpenGL существуют для Windows, Unix-платформ, PlayStation 3 и Mac OS. Эти реализации обычно предоставляются изготовителями видеоадаптеров и активно используют возможности последних. Существуют также открытые реализации спецификации OpenGL, одной из которых является библиотека Mesa. Из лицензионных соображений Mesa является «неофициальной» реализацией OpenGL, хотя полностью с ней совместима на уровне кода и поддерживает как программную эмуляцию, так и аппаратное ускорение при наличии соответствующих драйверов.

Спецификация OpenGL пересматривается консорциумом ARB (Architecture Review Board), который был сформирован в 1992 году. Консорциум состоит из компаний, заинтересованных в создании широко распространённого и доступного API. Согласно официальному сайту OpenGL, членами ARB с решающим голосом на ноябрь 2004 года являются производители профессиональных графических аппаратных средств SGI, 3Dlabs, Matrox и Evans & Sutherland (военные приложения), производители потребительских графических аппаратных средств ATI и NVIDIA, производитель процессоров Intel, и изготовители компьютеров и компьютерного оборудования IBM, Apple, Dell, Hewlett-Packard и Sun Microsystems, а также один из лидеров компьютерной игровой индустрии id Software. Microsoft, один из основоположников консорциума,

покинула его в марте 2003 года. Помимо постоянных членов, каждый год приглашается большое количество других компаний, становящихся частью OpenGL ARB в течение одного года. Такое большое число компаний, вовлеченных в разнообразный круг интересов, позволило OpenGL стать прикладным интерфейсом широкого назначения с большим количеством возможностей.

Курт Экли (Kurt Akeley) и Марк Сигал (Mark Segal) являются авторами оригинальной спецификации OpenGL. Крис Фрэзиер (Chris Frazier) редактировал версию 1.1. Йон Лич (Jon Leech) редактировал версии с 1.2 по версию 2.0.

4. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

4.1 О четырехмерном пространстве

Четырёхмерное пространство (обозначение: 4D) — математический объект, обобщающий свойства трёхмерного пространства. Его не следует путать с четырёхмерным пространством-временем теории относительности (пространством Минковского).

Алгебраически четырёхмерное пространство может быть построено как множество векторов с четырьмя вещественными координатами. Геометрически в простейшем случае четырёхмерное пространство рассматривается как евклидово пространство четырёх измерений, в более общем рассмотрении оно имеет неевклидову метрику, переменную от точки к точке.

Далее для краткости приставка 4- указывает на четырёхмерность следующего за ней понятия. Сокращение 3D обозначает трёхмерное пространство.

4.2 История высших измерений

После того, как Бернхард Риман в 1853 году теоретически обосновал возможность существования n -мерного пространства, попытки обнаружить и исследовать гипотетические дополнительные измерения пространства неоднократно предпринимали как серьёзные учёные, так и всевозможные оккультисты и эзотерики. Английский математик Чарльз Хинтон[en] опубликовал ряд книг на эту тему и глубоко изучил проблему визуализации. По его мнению, наш трёхмерный мир разделяет невидимый нам четырёхмерный на две части (аналогично тому, как плоскость делит пополам наше пространство). Эти части он условно назвал по-гречески Ана (верхний мир) и Ката (нижний мир).

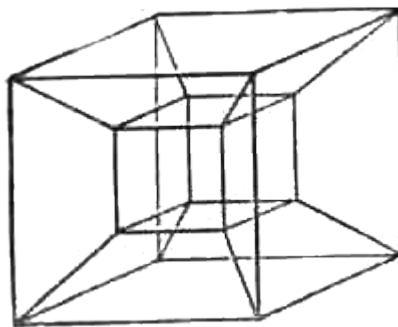
Во второй половине XIX — начале XX века изучение этой темы было основательно дискредитировано спиритизмом, который рассматривал невидимые измерения как обиталище душ умерших, а миры Ана и Ката зачастую отождествлялись с адом и раем; свой вклад внесли философы и теологи. Вместе с тем вопрос привлекал внимание таких крупных учёных, как физики Уильям Крукс и Вильгельм Вебер, астроном Иоганн Карл Фридрих Цёлльнер (автор книги «Трансцендентальная физика»), нобелевские лауреаты лорд Рэлей и Джозеф Джон Томсон[3]. Русский физик Дмитрий Бобылёв написал энциклопедическую статью по теме.

Физик и философ Эрнст Мах неоднократно высказывал предположение, что число измерений пространства не обязательно равно трём, например, в статье 1872 года: «Что до сих пор не удалось создать удовлетворительную теорию электричества, это зависит, может быть, от того, что электрические явления непременно хотели объяснить молекулярными процессами в пространстве с тремя измерениями» В 1914 году Гуннар Нордстрём опубликовал свой вариант новой теории тяготения, основанный на четырёхмерном пространстве в пятимерном пространстве-времени (модель 4+1); эта теория не соответствовала наблюдениям и была отвергнута. В 1920-е годы появилась близкая по геометрической структуре (та же модель 4+1) теория Калуцы — Клейна, объединяющая общую теорию относительности Эйнштейна и электромагнетизм Максвелла, все эффекты объяснялись геометрическими свойствами пространства и времени. В современной теории струн пространство-время имеет 11 измерений, см. старшие размерности.

4.3 Способы визуализации четырёхмерных тел

4.3.1 Проекции

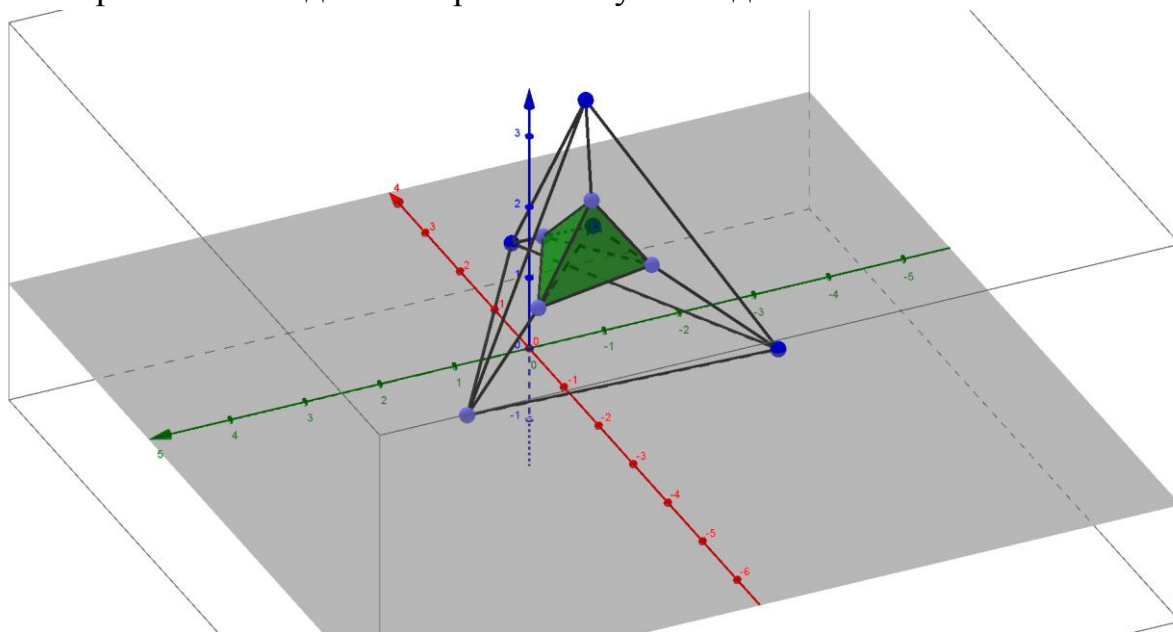
Проекция — изображение n -мерной фигуры на так называемом картинном (проекционном) подпространстве способом, представляющим собой геометрическую идеализацию оптических механизмов. Так, например, в реальном мире, контур тени предмета — это проекция контура этого предмета на плоскую или приближённую к плоской поверхность — проекционной плоскости. При рассмотрении проекций четырёхмерных тел проектирование осуществляется на трёхмерное пространство, то есть, по отношению к четырёхмерному пространству, на картинное (проекционное) подпространство (то есть пространство, с числом измерений или, иначе говоря, размерностью, на 1 меньшей, чем число измерений (размерность) самого того пространства, в котором находится проектируемое тело). Проекции бывают параллельными (проекционные лучи параллельны) и центральными (проекционные лучи исходят из некоторой точки). Иногда применяются также стереографические проекции. Стереографическая проекция — центральная проекция, отображающая $n-1$ -сферу n -мерного шара (с одной выколотой точкой) на гиперплоскость $n-1$. $N-1$ -сферой (гиперсферой) называют обобщение сферы, гиперповерхность в n -мерном (с числом измерений или размерностью n) евклидовом пространстве, образованная точками, равноудалёнными от заданной точки, называемой центром сферы, гипершаром — тело (область гиперпространства), ограниченное гиперсферой.



Проекция четырехмерного куба

4.3.2 Сечения

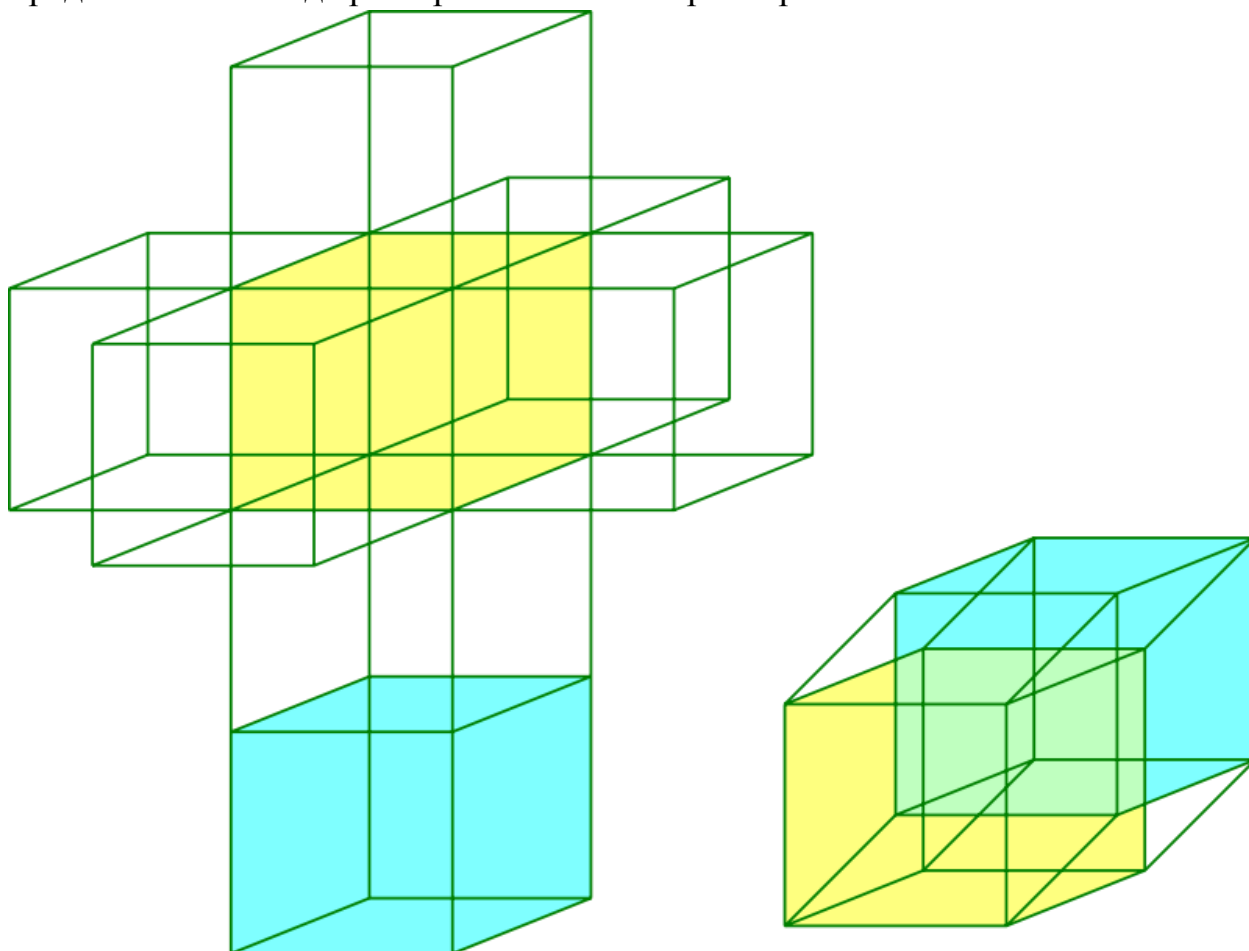
Сечение — изображение фигуры, образованной рассечением тела плоскостью без изображения частей за этой плоскостью. Подобно тому, как строятся двухмерные сечения трёхмерных тел, можно построить трёхмерные сечения четырёхмерных тел, причём также как двухмерные сечения одного и того же трёхмерного тела могут сильно отличаться по форме, так и трёхмерные сечения будут ещё более разнообразными, так как будут менять и количество граней, и количество сторон у каждой грани сечения. Построение трёхмерных сечений сложнее, чем создание проекций, поскольку проекции можно (особенно для несложных тел) получить по аналогии с двухмерными, а сечения строятся только логическим путём, при этом рассматривается каждый конкретный случай отдельно.



Трёхмерное сечение четырехмерного тетраэдра

4.3.3 Развертки

Развёртка гиперповерхности — фигура, получающаяся в гиперплоскости (подпространстве) при таком совмещении точек данной гиперповерхности с этой плоскостью, при котором длины линий остаются неизменными. Аналогично тому, как трёхмерные многогранники можно сложить из бумажных развёрток, многомерные тела могут быть представлены в виде развёрток своих гиперповерхностей.



Развертка четырехмерного куба

5. РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА

5.1 Дизайн архитектуры

OpenGL организует взаимодействие с визуальными компонентами с помощью механизма Состояния. Взаимодействие принимает форму передачи функций в основной цикл, который их затем периодически запускает. Это решение было создано для уменьшения количества передач информации во время исполнения основного цикла. В виду качеств визуальных решений, основной цикл должен выполняться часто и долго, и передавать в него информацию при каждом выполнении нецелесообразно.

5.2 Сущность фигуры

Фигура – четырехмерный куб, определенный координатами своих вершин. Вершины – объекты класса MyPoint, хранят координаты

```
class MyPoint
```

```
{
```

```
public:
```

```
    GLfloat x, y, z, w;
```

```
    void Set(GLfloat a, GLfloat b, GLfloat c, GLfloat d)
```

```
{
```

```
        x = a;
```

```
        y = b;
```

```
        z = c;
```

```
        w = d;
```

```
}
```

```
};
```

```
class MyCube
```

```
{
```

```
public:
```

```
    MyPoint points[8];
```

```
    MyCube()
```

```
{
```

```
        points[0].Set(1.0f, 1.0f, 1.0f, 1.0f);
```

```

points[1].Set(1.0f, 1.0f, -1.0f, 1.0f);
points[2].Set(1.0f, -1.0f, 1.0f, 1.0f);
points[3].Set(1.0f, -1.0f, -1.0f, 1.0f);
points[4].Set(-1.0f, 1.0f, 1.0f, 1.0f);
points[5].Set(-1.0f, 1.0f, -1.0f, 1.0f);
points[6].Set(-1.0f, -1.0f, 1.0f, 1.0f);
points[7].Set(-1.0f, -1.0f, -1.0f, 1.0f);
}
};

```

5.3 Сущность сечения

Сечение является трехмерным пространством, определенным по функции $w=0$. На этом трехмерном пространстве находится грань 4-куба, которая является 3-кубом. Этот 3-куб является примитивом, собранным из квадратных граней, определенных своими углами.

```

glBegin(GL_QUADS);

glColor3f(0.0f, 1.0f, 0.0f);    // Green
glVertex3f(1.0f, 1.0f, -1.0f);
glVertex3f(-1.0f, 1.0f, -1.0f);
glVertex3f(-1.0f, 1.0f, 1.0f);
glVertex3f(1.0f, 1.0f, 1.0f);

glColor3f(1.0f, 0.5f, 0.0f);    // Orange
glVertex3f(1.0f, -1.0f, 1.0f);
glVertex3f(-1.0f, -1.0f, 1.0f);
glVertex3f(-1.0f, -1.0f, -1.0f);
glVertex3f(1.0f, -1.0f, -1.0f);

glColor3f(1.0f, 0.0f, 0.0f);    // Red
glVertex3f(1.0f, 1.0f, 1.0f);

```

```

glVertex3f(-1.0f, 1.0f, 1.0f);
glVertex3f(-1.0f, -1.0f, 1.0f);
glVertex3f(1.0f, -1.0f, 1.0f);

glColor3f(1.0f, 1.0f, 0.0f);    // Yellow
glVertex3f(1.0f, -1.0f, -1.0f);
glVertex3f(-1.0f, -1.0f, -1.0f);
glVertex3f(-1.0f, 1.0f, -1.0f);
glVertex3f(1.0f, 1.0f, -1.0f);

glColor3f(0.0f, 0.0f, 1.0f);    // Blue
glVertex3f(-1.0f, 1.0f, 1.0f);
glVertex3f(-1.0f, 1.0f, -1.0f);
glVertex3f(-1.0f, -1.0f, -1.0f);
glVertex3f(-1.0f, -1.0f, 1.0f);

glColor3f(1.0f, 0.0f, 1.0f);    // Magenta
glVertex3f(1.0f, 1.0f, -1.0f);
glVertex3f(1.0f, 1.0f, 1.0f);
glVertex3f(1.0f, -1.0f, 1.0f);
glVertex3f(1.0f, -1.0f, -1.0f);
glEnd();

```

5.4 Сущность вращения

Вращение осуществляется либо в плоскости XY, либо в плоскости XW. Важно заметить, что, несмотря на изменение 3-куба, полная фигура не деформируется, а все изменения являются результатом свойств сечений.

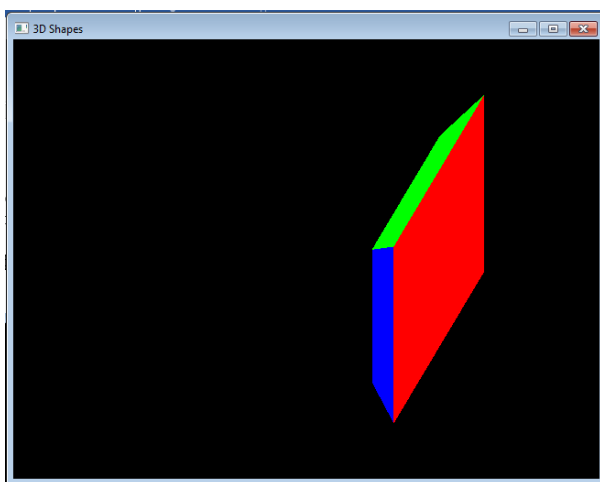
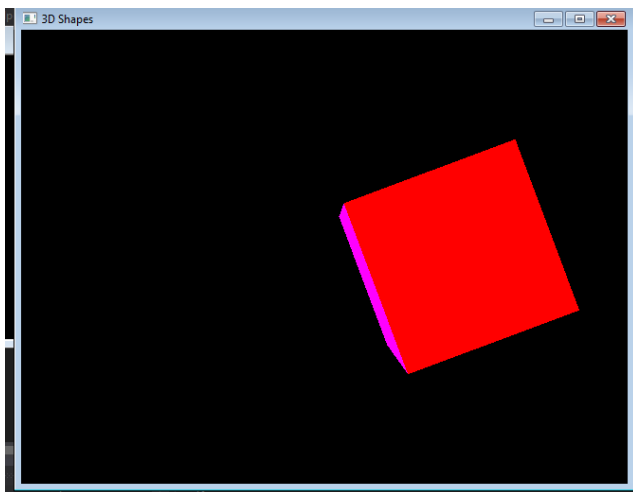
```

glRotatef(angleCube, 0.0f, 0.0f, 1.0f);

```

6. ПРОВЕРКА РАБОТОСПОСОБНОСТИ ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА

Как сечение так и проекция преобразуются в соответствии с предназначением. Визуальных артефактов не наблюдается.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результатом выполнения курсовой работы стало разработанное приложение проецирования четырехмерных объектов на плоскость, предоставляя возможность для визуализации элементов, не существующих в материальной реальности, а, потому, сложных во взаимодействии. Приложение позволяет совместить математическую терминологию и визуальные аспекты для более полного охвата темы.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Форсит Э.Р. Геометрия четырех измерений. – СПб.: Питер, 2001. – 304 с. – ISBN 5-272-00278-4.
- [2] GLUT Library [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: <http://freeglut.sourceforge.net/docs/api.php>.
- [3] OpenGL [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: <https://www.opengl.org/documentation>
- [4] OpenGL Documentation [Электронный ресурс]. – Электронные данные. – Режим доступа: <https://www.khronos.org/>