

---

**Institut d'Astrophysique de Paris**  
**Unité de mathématiques appliquées de l'ENSTA**

# **Dynamique d'une sphère autogravitante isotherme et tronquée**

Thèse présentée devant  
**l'Observatoire de Paris-Meudon**

pour obtenir le grade de  
**Docteur ès Astrophysique**

par  
**Guillaume Plum**

soutenue le 29 septembre 2014 devant le jury composé de

---

Françoise Combes	Présidente
Pierre-Henri Chavanis	Rapporteur
Daniel Pfenniger	Rapporteur
Julien Devriendt	Examinateur
Stéphane Colombi	Directeur
Jérôme Pérez	Directeur



# Remerciements

Avant tout, je voudrais remercier mes deux directeurs de thèse : Jérôme Pérez et Stéphane Colombi pour m'avoir permis de faire cette thèse dont le sujet était si intéressant. Merci à tous les deux de votre disponibilité, de votre soutien, de votre aide, et surtout de votre patience lors de la difficile rédaction (inventer une nouvelle langue n'est jamais facile) !

Je voudrais ensuite remercier Daniel Pfenniger et Pierre-Henri Chavanis pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Merci à Françoise Combes et Julien Devriendt pour avoir fait partie du jury.

Je remercie les deux maîtres de l'informatique de l'UMA : Christophe Mathulik pour son aide sur le cluster et pour toutes nos discussions sur les jeux vidéos, l'informatique, etc ; et à Maurice Diamantini pour nos discussions portant aussi sur l'informatique, mais pas que, et les différents langages de programmation que tu m'as fait découvrir. Un grand merci à mon prédécesseur Nicolas Kielbasiewicz pour ses conseils et nos longues discussions.

Un grand merci à tous les doctorants de l'UMA et de l'IAP pour leur accueil et l'ambiance qu'ils mettent dans le laboratoire, il y a trop de monde pour que je puisse tous vous citer, mais je pense à vous tous ! Plus particulièrement, merci à Geoffrey et Laure pour m'avoir proposé leur soutien lors de cette fin de thèse, au moment où j'en avais besoin.

Merci aux membres de l'UMA pour l'ambiance très agréable et accueillante qui règne dans le laboratoire.

Je me dois de remercier grandement mon co-bureau de l'IAP, Manuel Duarte, qui passa sa thèse à tenter de me traumatiser mais que j'ai irrémédiablement attiré du côté lumineux de la force !

Un énorme merci à mes vieux amis, que j'affectionne beaucoup, que sont Antoine, Ann'sophie et Virgile pour leur soutien indéfectible et toutes nos soirées et sorties !

Pour terminer, je remercie ma famille qui m'a soutenu et encouragé jusqu'au bout, me permettant de me consacrer pleinement à ma thèse !



# Résumé

Le thème général de la thèse est la dynamique des systèmes autogravitants tels que les amas globulaires et les galaxies. L'objectif est de confronter dans ce contexte, les faits observationnels aux modèles théoriques et aux résultats de simulations numériques.

Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à l'évolution des amas globulaires de notre galaxie. L'étude de l'évolution des profils de densité nous a appris qu'en plus de l'augmentation bien connue de leur densité centrale, ces amas présentent également une évolution de la pente de leur halo au cours de leur évolution dynamique dans la galaxie.

Nous avons alors entrepris l'étude générale de différents modèles théoriques de sphères isothermes et plus particulièrement de leur stabilité. Cette étude nous a permis d'étendre à un modèle de King simplifié certains résultats de stabilité habituellement présentés dans le cadre exclusif de la sphère isotherme. Ces tests se sont révélés à la fois concluants et instructifs.

Dans l'objectif de la confirmation de ces résultats analytiques et de ces constats observationnels, nous avons entrepris des simulations numériques. Le code choisi pour effectuer ces simulations est le treecode public Gadget-2. Outre sa grande efficacité et sa compatibilité parfaite avec notre problème, nous avons profité de ces simulations pour entreprendre des tests comparatifs avec un code Vlasov montrant un accord spectaculaire entre l'approche *N*-corps et l'approche fluide.

Les simulations que nous avons entreprises consistaient à placer un système autogravitant au sein d'un bain thermique, les deux systèmes étant constitués de particules et possédant des caractéristiques variables. Le système autogravitant d'étude était selon les cas une sphère de Hénon subissant un effondrement et poursuivant son évolution sur plusieurs centaines de temps dynamiques ou une sphère de King initialement à l'équilibre.

Bien que nous n'ayons pas réussi pour le moment, d'un point de vue numérique, à mettre réellement en évidence l'instabilité suggérée par nos calculs théoriques, nos simulations nous ont permis d'obtenir les résultats suivants :

- nous avons pu reproduire numériquement l'évolution de la pente et l'effondrement du cœur du système en quasi-équilibre obtenu après l'effondrement d'une sphère de Henon dans un bain thermique ;
- dans certains cas compatibles avec la théorie, nous avons pu faire apparaître une instabilité d'orbite radiale contrôlée par l'accrétion d'une partie du bain thermique.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>	4.1.3 Conditions au centre et sur le bords de la sphère . . . . .	30
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>	4.1.4 Droites de Padmanabhan et diagramme de Milne . . . . .	32
<b>Table des matières</b>	<b>vi</b>	4.2 Courbe calorique . . . . .	32
<b>Liste des Figures</b>	<b>viii</b>	4.2.1 Motivation et définition . .	32
<b>I Introduction</b>	<b>3</b>	4.2.2 Stabilité de la sphère isotherme en boîte . . . . .	34
<b>1 Propriétés générales des systèmes auto-gravitants</b>	<b>5</b>	4.2.3 De l'importance du contraste de densité . . . . .	34
1.1 Amas Globulaires . . . . .	5		
1.1.1 Historique . . . . .	5		
1.1.2 Définition d'un amas globulaire	5		
1.1.3 Répartition . . . . .	6		
1.1.4 Profil de densité . . . . .	6		
1.1.5 Simulation numérique des amas globulaires . . . . .	7		
1.1.6 Une première étude personnelle	8		
1.2 Les Galaxies . . . . .	10		
1.2.1 Historique . . . . .	10		
1.2.2 Les différents types de galaxies	10		
1.2.3 Profils de matière noire . . .	11		
1.2.4 Scénario de formation . . . . .	12		
<b>II Théorie</b>	<b>13</b>		
<b>2 Temps caractéristiques et équation de Vlasov</b>	<b>15</b>		
2.1 Temps caractéristiques . . . . .	15		
2.1.1 Le temps dynamique . . . . .	15		
2.1.2 Le temps de relaxation à deux corps . . . . .	16		
2.2 Le système de Vlasov-Poisson . . .	18		
2.2.1 L'équation de Poisson . . . . .	18		
2.2.2 L'équation de Vlasov . . . . .	19		
<b>3 Le problème de la sphère isotherme</b>	<b>25</b>		
3.1 La sphère isotherme et son problème intrinsèque . . . . .	25		
3.2 Formulation générale du problème .			
3.3 Propriétés de la solution générale et conséquences . . . . .			
<b>4 Sphère isotherme en boîte</b>	<b>29</b>		
4.1 Diagramme de MILNE . . . . .	29		
4.1.1 Présentation du problème . .	29		
4.1.2 Obtention des équations . . .	29		
		4.1.3 Conditions au centre et sur le bords de la sphère . . . . .	30
		4.1.4 Droites de Padmanabhan et diagramme de Milne . . . . .	32
		4.2 Courbe calorique . . . . .	32
		4.2.1 Motivation et définition . .	32
		4.2.2 Stabilité de la sphère isotherme en boîte . . . . .	34
		4.2.3 De l'importance du contraste de densité . . . . .	34
		<b>5 Le modèle de King</b>	<b>37</b>
		5.1 Équation de POISSON . . . . .	37
		5.2 Étude numérique . . . . .	38
		5.2.1 Adimensionnement de l'équation de Poisson . . . . .	38
		5.2.2 Conditions aux limites et paramètres du modèle . . . . .	39
		5.2.3 Résolution numérique . . . . .	39
		5.3 Température d'un modèle de KING .	40
		5.3.1 Calcul de la température en chaque point . . . . .	41
		5.3.2 Température moyenne d'un modèle de KING . . . . .	42
		5.4 Synthèse . . . . .	43
		<b>6 Gravitation et instabilités</b>	<b>45</b>
		6.1 L'instabilité d'orbites radiales . . . . .	45
		6.1.1 L'histoire de l'instabilité d'orbites radiales . . . . .	46
		6.1.2 La méthode symplectique . .	49
		6.2 L'instabilité de Jeans . . . . .	51
		6.2.1 Généralités . . . . .	51
		6.2.2 L'instabilité de Jeans fluide .	52
		6.2.3 État final de l'effondrement de Jeans . . . . .	54
		6.3 Stabilité de l'état post-collapse . .	55
		6.3.1 Modèle et calculs . . . . .	55
		6.3.2 Énergie cinétique . . . . .	56
		6.3.3 Conclusion du modèle . . . .	56
		<b>III Simulations</b>	<b>59</b>
		<b>7 Outils numériques</b>	<b>61</b>
		7.1 Le programme de simulation . . . .	61
		7.1.1 Calcul du potentiel : $k^d$ -Tree	61
		7.1.2 Lissage de la force . . . . .	62
		7.1.3 « Saute-mouton » et pas de temps . . . . .	63

7.2	Conditions initiales . . . . .	64	8.2.3	Le cas $\gamma = -0.1$ . . . . .	72
7.2.1	Le modèle de KING . . . . .	64	8.3	Discussion . . . . .	72
7.2.2	La sphère de Hénon . . . . .	64	<b>9</b>	<b>Expériences numériques</b>	<b>81</b>
7.3	Observables des simulations . . . . .	65	9.1	Description des conditions initiales .	81
7.3.1	Recentrage . . . . .	65	9.2	Étude préliminaire . . . . .	82
7.3.2	Masse et densité . . . . .	65	9.3	Seconde étude . . . . .	82
7.3.3	Énergie et potentiel . . . . .	66	9.4	Focalisation sur les simulations inté- ressantes . . . . .	86
7.3.4	Anisotropie des vitesses et forme de l'amas . . . . .	66	9.4.1	Instabilité d'orbites radiales .	86
7.3.5	Température cinétique . . . . .	68	9.4.2	Évolution de la pente avec l'âge (effets de relaxation) . .	91
<b>8</b>	<b>Comparaison entre Gadget et un code</b>				
	<b>Vlasov</b>	<b>69</b>	<b>9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>97</b>
8.1	Description du code Vlasov . . . . .	69	70	<b>10 Conclusion</b>	<b>97</b>
8.2	Comparaison entre les simulations Vlasov et GADGET-2 . . . . .	70	10.1	Conclusion . . . . .	97
8.2.1	Tests préliminaires : sphéri- cité et isotropie dans les si- mulations $N$ -corps . . . . .	71	10.2	Perspectives . . . . .	98
8.2.2	Le cas $\gamma = -0.5$ . . . . .	71	<b>10</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>103</b>

# Table des figures

1.1	Répartition des amas globulaires connus dans notre galaxie. Les graphiques utilisent le système de coordonnées galactiques (et donc centré sur le soleil). . . . .	6	
1.2	Deux amas globulaires caractéristiques et leurs comptages d'étoiles (tiré de Jordi and Grebel [2010]). M13 est un amas présentant une structure cœur-halo, M15 est un amas au cœur dit effondré . . . . .	7	
1.3	Évolution du temps de calcul selon l'amas globulaire et du type de simulation. . . . .	8	
1.4	Évolution des pentes pour différents âges collisionnels . . . . .	9	
1.5	Évolution des pentes pour différents âges dynamiques . . . . .	9	
1.6	Schéma d'évolution dynamique d'un amas globulaire. . . . .	10	
1.7	Structure visible d'une galaxie spirale (figure extraite de Perez [2011]).	11	
4.1	Diagramme de Milne pour $X = 1$ , $X = 5$ , $X = 10$ et pour $X = 300$ . La sphère isotherme est représenté par la courbe bleue, la droite de Padmanabhan est en vert et la SIS en rouge.	33	
4.2	Courbe calorique de la sphère isotherme en boîte : $\mu(\lambda)$ . La croix verte représente la SIS. La droite horizontale rouge et la verticale cyan représentent respectivement la température minimale et l'énergie maximale.	34	
4.3	Courbes $\lambda(\mathcal{R})$ et $\mu(\mathcal{R})$ tirées de l'article Yoon et al. [2011] . . . . .	35	
5.1	Différents profils de densité pour un modèle de King. En bleu foncé : $W_0 = 1$ , en vert $W_0 = 5$ , en rouge $W_0 = 9$ et en bleu clair $W_0 = 14$ . . .	40	
5.2	Évolution de la pente du halo de la sphère de King en fonction de $W_0$ . .	41	
5.3	Température d'un modèle de King : la fonction $\zeta(r)$ . Le code couleur est le même que pour la figure 5.1 . . .	42	
5.4	Température et densité d'un modèle de King : les fonctions $\frac{T(x)}{T(0)}$ et $\frac{\rho(x)}{\rho(0)}$ . Le code couleur est le même que pour la figure 5.1 . . . . .	42	
5.5	Température moyenne en fonction de $W_0$ . . . . .	43	
6.1	Courbe calorique du modèle isotherme idéalisé possédant un halo de pente $-4$ . . . . .	57	
6.2	Courbe calorique pour des systèmes cœur-halo de pente $\alpha = 2, 4, 5, 6, 7, 8$ . . .	57	
7.1	Critère d'ouverture : un cône vert indique un carré qu'il n'est pas nécessaire d'ouvrir, un cône rouge indique un carré à ouvrir. . . . .	62	
7.2	Principe de fonctionnement du « saute-mouton » sur deux pas de temps. . . . .	63	
7.3	Principe de fonctionnement de l'intégrateur temporel de GADGET-2 sur un pas de temps, qui permet de synchroniser les positions et les vitesses et ainsi de mettre en œuvre un pas de temps variable avec $\Delta t' \neq \Delta t$ . . .	64	
7.4	Découpage de l'amas généré pour des coquilles espacées linéairement. . . . .	65	
7.5	Comparaison entre la résolution numérique et la densité donnée par le générateur. La courbe rouge correspond à la densité théorique, la courbe verte à la densité utilisant les intervalles espacés logarithmiquement et la courbe bleue à la méthode décrite ici. . . . .	66	
7.6	Comparaison entre le potentiel théorique (courbe rouge) et le potentiel donné par le générateur (courbe bleue).	67	
7.7	Comparaison entre la température théorique (en rouge) et celle calculée (en bleue). Toutes deux sont normalisées. . . . .	68	
8.1	Évolution des rapports d'axes $a_1$ et $a_2$ pour $\gamma = -0.5$ . . . . .	72	
8.2	Évolution des rapports d'axes $a_1$ et $a_2$ pour $\gamma = -0.1$ . . . . .	72	

8.3	Évolution de l'anisotropie pour $\gamma = -0.5$ . . . . .	72	9.2	Valeur des différentes observables après l'effondrement en fonction des paramètres du bain thermique. . . . .	84
8.4	Évolution de l'anisotropie pour $\gamma = -0.1$ . . . . .	72	9.3	À gauche une simulation ( $A_{3,1}$ ) sous l'influence des conditions périodiques, à droite une simulation ( $A_{6,1}$ ) correcte. . . . .	85
8.5	Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour $\gamma = -0.5$ : conditions initiales. En haut : densité dans l'espace des phases pour une tranche de moment angulaire dans l'intervalle $j \in [0.4; 0.45]$ (à gauche VLASOLVE et à droite GADGET-2) ; au milieu : densité intégrée sur $j$ ; en bas : profils de densité projetée $\rho(r)$ . La courbe bleue correspond au code Vlasov et la courbe verte à la simulation $N$ -corps.	73	9.4	Évolution des rayons à 10% (en bleu), 50% (en vert) et 90% (en rouge) de masse au cours de la simulation $C_{3,4}^m$ . . . . .	87
8.6	Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour $\gamma = -0.5$ : $t = 13$ . Suite de la figure 8.5. . . . .	74	9.5	Évolution des rapports d'axes $a_1$ et $a_2$ et l'anisotropie au cours de la simulation $C_{3,4}^m$ . . . . .	87
8.7	Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour $\gamma = -0.5$ : $t = 45$ . Suite de la figure 8.6. . . . .	75	9.6	Zoom sur le moment de l'instabilité pour les rapports d'axes $a_1$ et $a_2$ et l'anisotropie. . . . .	88
8.8	Représentation de l'espace des phases à $j = 0.425$ et $t = 45$ pour $\gamma = -0.5$ et différents $\epsilon$ . . . . .	76	9.7	Évolution de la simulation $C_{3,4}$ . . . . .	89
8.9	Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour $\gamma = -0.1$ : conditions initiales. En haut : densité dans l'espace des phases pour une tranche de moment angulaire dans l'intervalle $j \in [0.4; 0.45]$ (à gauche VLASOLVE et à droite GADGET-2) ; au milieu : densité intégrée sur $j$ ; en bas : profils de densité projetée $\rho(r)$ . La courbe bleue correspond au code Vlasov et la courbe verte à la simulation $N$ -corps. . . . .	77	9.8	Évolution de la simulation $B_{3,1}$ . . . . .	90
8.10	Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour $\gamma = -0.1$ : $t = 5$ . Suite de la figure 8.9. . . . .	78	9.9	Évolution de la simulation $C_{6,1}$ . . . . .	90
8.11	Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour $\gamma = -0.1$ : $t = 25$ . Suite de la figure 8.10. . . . .	79	9.10	Évolution au cours du temps de la densité. En bleu, $t' = 0$ . En vert, $t' = 59.9$ . En rouge, $t' = 144$ . En noir, $t' = 246.3$ . . . . .	91
9.1	Condition initiale des simulations. . . . .	82	9.11	Simulation de paramètres $N = 100000$ , $R_c = 66.6$ , $\sigma_c = 0.001$ . . . . .	92
			9.12	Évolution des pentes du cœur (en rouge, et sur l'axe de gauche) et du halo (en bleu et sur l'axe de droite) au cours de la simulation. . . . .	92
			9.13	Comparaison avec plusieurs simulations possédant plus de particules à la fois dans le SAG et dans le bain. De gauche à droite et de haut en bas, nous avons multiplié le nombre de particules par 1, 2, 4 et 10. . . . .	93
			9.14	Comparaison de notre simulation avec deux sphères de Hénon isolées composées d'un nombre de particules différent. De gauche à droite et de haut en bas, nous avons la simulation de référence, une sphère de Hénon de $30 \times 10^4$ particules et une sphère de Hénon de $30 \times 10^5$ particules. . . . .	94

## Notation

Dans ce document, nous noterons :

- $T \equiv \langle v^2 \rangle$  (quand nous parlerons de température, il sera question de la dispersion de vitesse du système),
- $\vec{a}$  les vecteurs,
- $a$  le module de  $\vec{a}$ ,
- $d^3a$  ou  $d^3\vec{a}$  l'élément de volume associé à  $\vec{a}$ .



**Première partie**

# **Introduction**



# Chapitre 1

# Propriétés générales des systèmes auto-gravitants

## Sommaire

---

<b>1.1 Amas Globulaires</b>	<b>5</b>
1.1.1 Historique . . . . .	5
1.1.2 Définition d'un amas globulaire . . . . .	5
1.1.3 Répartition . . . . .	6
1.1.4 Profil de densité . . . . .	6
1.1.5 Simulation numérique des amas globulaires . . . . .	7
1.1.6 Une première étude personnelle . . . . .	8
<b>1.2 Les Galaxies</b>	<b>10</b>
1.2.1 Historique . . . . .	10
1.2.2 Les différents types de galaxies . . . . .	10
1.2.3 Profils de matière noire . . . . .	11
1.2.4 Scénario de formation . . . . .	12

---

## 1.1 Amas Globulaires

### 1.1.1 Historique

Les premiers amas d'étoiles ont été catalogués par Messier en 1784, mais ils n'ont été identifiés comme tel qu'en 1814 par William Herschel. Étudiés depuis cette époque, notre connaissance observationnelle à leur propos n'a pas cessé de s'améliorer avec la progression des techniques d'observation. Le premier comptage d'étoiles complet fut effectué par Bailey en 1893. En 1905, Plummer et von Zeipel ont utilisé les observations pour remonter à la distribution radiale des étoiles. Von Zeipel fit alors le rapprochement entre un amas et une sphère de gaz à l'équilibre isotherme. Parallèle encore utilisé aujourd'hui, bien qu'il soit contestable sur au moins un point : le libre parcours moyen d'une étoile est grand devant la taille du système, alors que pour une sphère de gaz c'est l'inverse.

### 1.1.2 Définition d'un amas globulaire

Dans notre galaxie, un amas globulaire est, en général, décrit comme un très vieil amas d'étoiles, âgé d'environ 10 milliards d'années. Mais l'âge absolu de ces objets est très difficile à mesurer : c'est un sujet toujours controversé.

Les amas de notre galaxie présentent des caractéristiques très variées. Par exemple, l'amas le plus massif de notre galaxie –  $\omega$  Centauri – possède une masse d'environ  $5.10^6 M_\odot$  tandis que

celle du moins massif – AM-4 – est d'environ  $10^3 M_\odot$ . La magnitude absolue<sup>1</sup> de ces objets et leur distance au centre de la galaxie<sup>2</sup> varie également dans de grandes proportions.

### 1.1.3 Répartition

Nous avons dénombré environ 150 amas globulaires dans notre galaxie, et nous continuons à en découvrir (voir par exemple Laevens et al. [2014]) dans notre galaxie, mais aussi dans la galaxie d'Andromède.

Les amas sont essentiellement répartis dans les régions proches du bulbe de la Voie Lactée ou dans son halo. La figure 1.1 montre la répartition des amas globulaires se trouvant dans le catalogue de référence Harris [2010]. Ce catalogue recense de très nombreux paramètres de 150 amas de notre galaxie. Comme on peut le voir sur ces figures, la répartition de ces amas n'a pas de propriétés particulières.

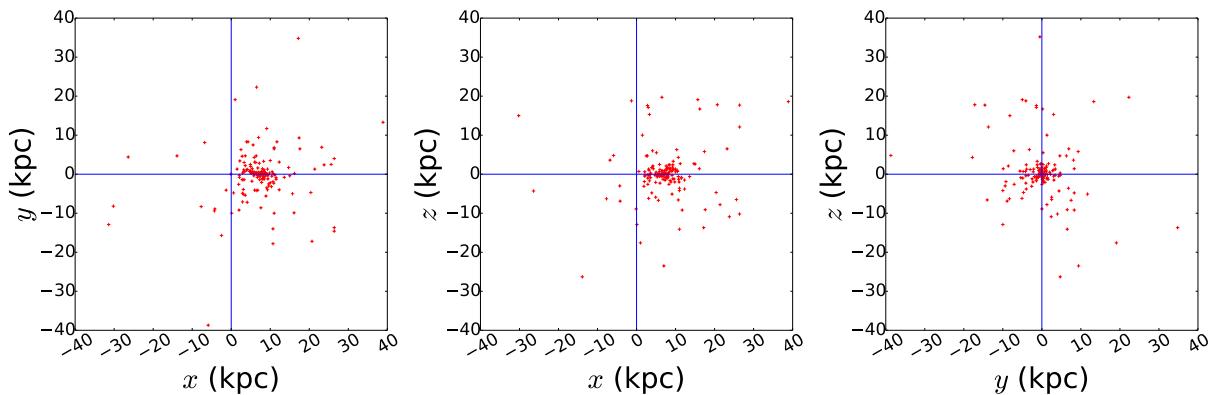


FIGURE 1.1 – Répartition des amas globulaires connus dans notre galaxie. Les graphiques utilisent le système de coordonnées galactiques (et donc centré sur le soleil).

### 1.1.4 Profil de densité

L'étude des propriétés physiques des amas globulaires s'étale aujourd'hui sur plus d'un siècle d'observations et de modélisation. Une caractéristique commune aux amas est leur forme sphérique, l'ellipticité maximale observée étant de l'ordre de 10% et s'explique par une faible rotation solide. Un consensus est maintenant établi sur le fait que leur profil de densité volumique de masse – en abrégé densité et noté  $\rho(r)$  – est un excellent traceur de leur évolution. Les amas globulaires se répartissent en deux catégories (voir la figure 1.2) :

- 80% des amas présentent une densité caractérisée par 2 régions : le cœur pour lequel la densité est quasiment constante ( $\rho(r) \approx \text{cte}$ ) et le halo dans lequel la densité évolue globalement comme une loi de puissance ( $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$ ) : ils ont un profil de type cœur-halo (core-halo dans la littérature anglo-saxonne) ;
- la densité du cœur des 20% restant est remplacée par une loi de puissance. Ils sont dits cœur effondré (core-collapsed).

La plupart des modèles d'amas globulaire sont issus de la sphère isotherme. Nous en aborderons certains au cours de ce document. Parmi ces modèles, un en particulier permet d'ajuster le profil de densité des amas globulaires durant une grande partie de leur évolution : le modèle de King (voir King [1966a] et le chapitre 5).

1. De  $M_V = -10.1$  pour  $\omega$  Centauri à  $M_V = -1.7$  pour AM-4.

2. environ 0.5 kpc pour les plus proches du centre à 120 kpc pour AM-1.

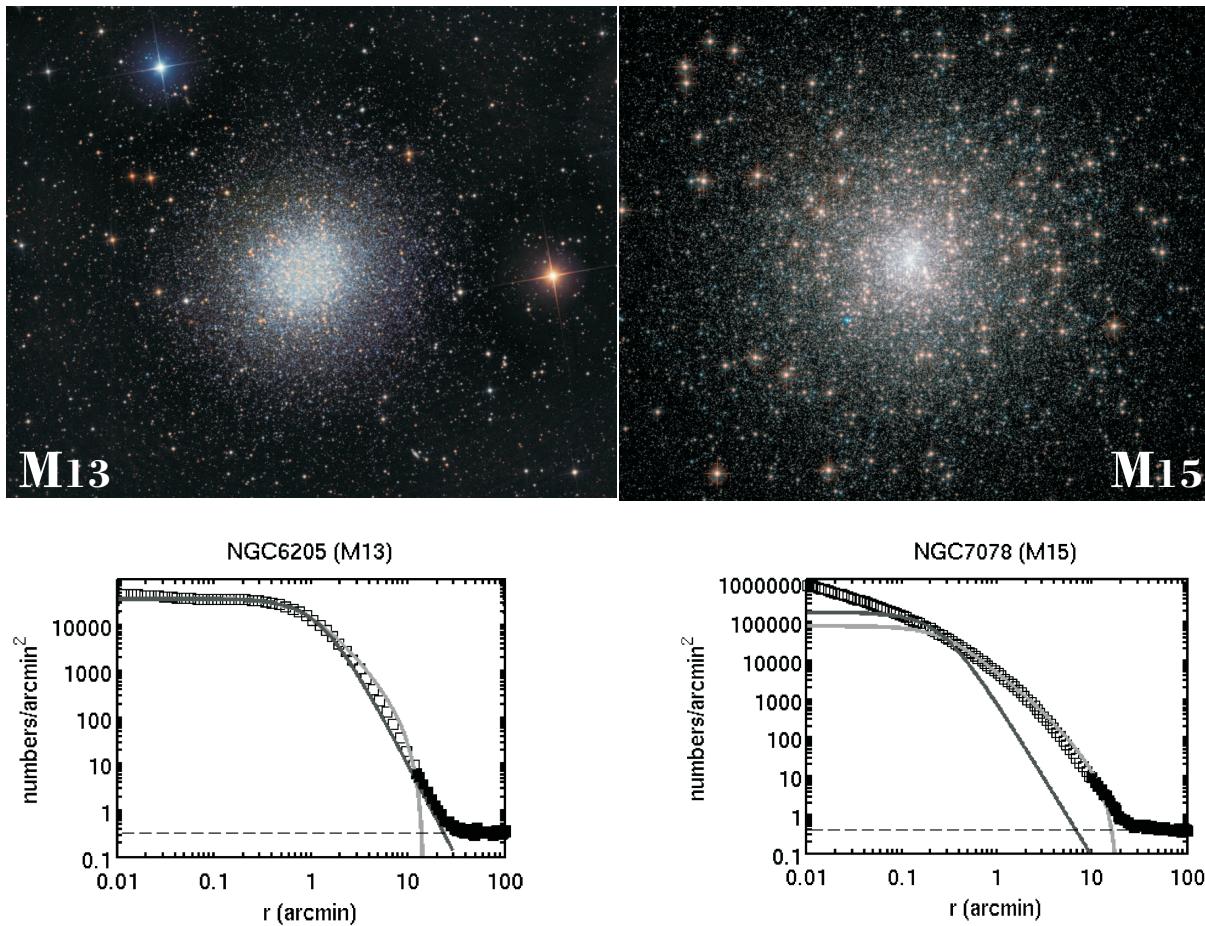


FIGURE 1.2 – Deux amas globulaires caractéristiques et leurs comptages d’étoiles (tiré de Jordi and Grebel [2010]). M13 est un amas présentant une structure cœur-halo, M15 est un amas au cœur dit effondré

### 1.1.5 Simulation numérique des amas globulaires

Dès les années 1960, des simulations numériques sont utilisées en plus de la théorie afin de modéliser l’évolution de ces objets. Plusieurs méthodes numériques ont été utilisées, les principales sont :

- les simulations Fokker-Planck permettent de simuler l’évolution d’un amas sphérique de plusieurs millions d’étoiles sur une grande période de temps en quelques jours de calcul. Même si ce type de simulation permet d’intégrer une certaine forme de dissipation dans l’évolution du système, une telle efficacité n’est possible qu’en faisant l’hypothèse que le système conserve ses propriétés sphériques et isotropes tout au long de son évolution ;
- les simulations  $N$ -corps utilisant une méthode de sommation directe modifient à chaque pas de temps les positions et vitesses des étoiles du modèle. Ces simulations sont beaucoup plus lentes mais laissent plus de liberté au système quant à son évolution.

La figure 1.3, issue de la présentation de D. Heggie au trimestre Gravasco, montre les amas du catalogue de Harris tracés dans le plan (temps de relaxation)/(magnitude intégrée en bande V). Les droites parallèles indiquent le temps que durerait une simulation  $N$ -Corps (avec une sommation directe) ou Fokker-Planck d’un amas globulaire avec ces paramètres. Par exemple, une simulation  $N$ -Corps de l’évolution dynamique complète de M4 prendrait environ 300 ans tandis que son équivalent Fokker-Planck ne prendrait qu’une journée.

Les simulations ont permis de prendre de l’avance sur les observations en confirmant certains phénomènes prévus par la théorie, notamment les oscillations gravothermales (voir Makino [1996]). Ce phénomène intervient après l’effondrement du cœur, une binaire serrée vient alors contrôler la dynamique du centre de l’amas. Sous l’effet d’interactions à 3 corps, cette binaire

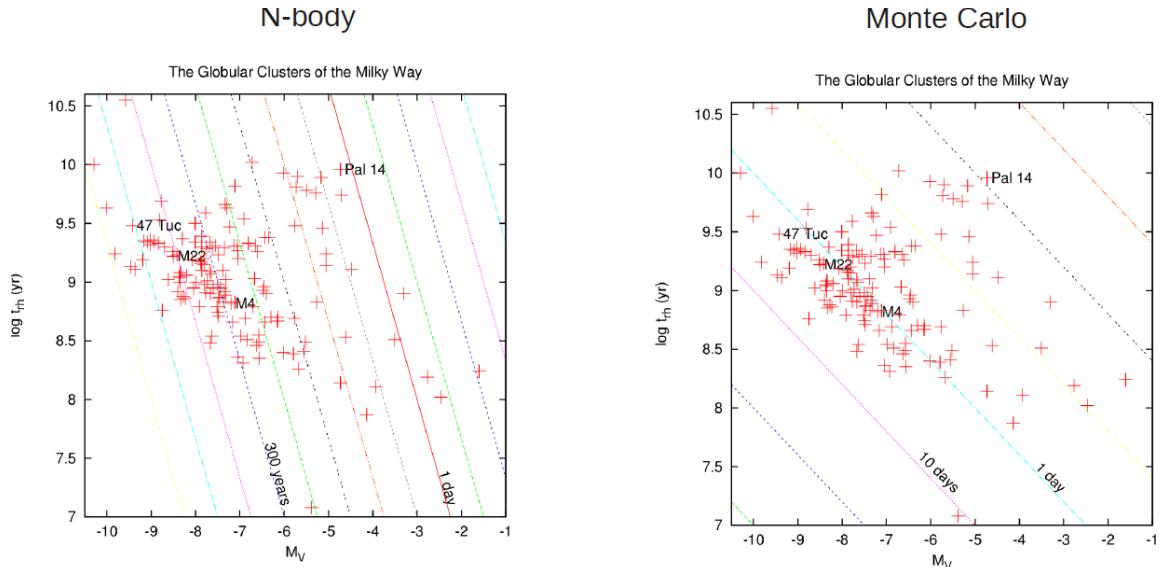


FIGURE 1.3 – Évolution du temps de calcul selon l’amas globulaire et du type de simulation.

est remplacée par une autre produisant un pic de densité. Ces pics se succèdent à un rythme dépendant des caractéristiques de l’amas.

De façon générique, les amas globulaires ne semblent pas contenir en leur centre de trou noir massif. Par cet aspect, mais aussi par le fait qu’ils ne semblent pas contenir de grandes quantités de matière noire, ils se distinguent des galaxies.

### 1.1.6 Une première étude personnelle

Comme nous l’avons précisé plus haut, il est généralement admis que le profil de densité est un traceur de l’évolution des amas globulaires. Nous n’avons cependant pas trouvé d’étude exhaustive sur ce sujet et avons donc tenté de préciser ce lien. La principale caractéristique du profil de densité d’un amas globulaire est la pente de son halo. Celle-ci n’ayant pas fait l’objet d’une étude globale nous avons donc fabriqué notre propre catalogue à partir des données de Trager et al. [1995] donnant le profil de brillance de surface en fonction de la taille angulaire de chaque amas.

La brillance de surface utilisée dans cet article est la suivante :

$$\mu = -2.5 \log \left( \frac{10^{-0.4m_2} - 10^{-0.4m_1}}{\pi (r_2^2 - r_1^2)} \right) \quad (1.1)$$

$m_i$  étant la magnitude en un point de l’objet et  $r_i$  le rayon en seconde d’arc pour ce point.

La conversion de cette brillance surfacique en densité surfacique de masse est possible en connaissant le rapport masse-luminosité de ces amas. L’article McLaughlin and Van der Marel [2005] ne donne cette quantité que pour 40 des 150 amas de notre galaxie. Par contre, il est aisément de remarquer que ces rapports sont répartis dans un intervalle de faible amplitude avec une valeur minimum de 1.87 pour NGC4147 et une valeur maximum de 2.66 pour NGC6441. Pour simplifier, nous avons utilisé :

$$\Upsilon = \frac{M}{L} = 2 \quad (1.2)$$

pour les 110 amas dont nous ne connaissons pas  $\Upsilon$ . Un algorithme de déprojection permet alors d’obtenir la densité  $\rho(r)$  de chaque amas du catalogue de Harris.

Afin de déterminer la pente du halo, nous normalisons cette densité par la densité du cœur, puis mesurons la pente dans l’intervalle :

$$10^{-4} \leq \frac{\rho(r)}{\rho(0)} \leq 0.1.$$

Nous avons alors construit un catalogue des temps de relaxation par collisions et des temps dynamiques de ces amas en utilisant d'une part le catalogue de Harris [2010] et d'autre part en intégrant le profil de densité obtenu pour chaque amas. Nous obtenons alors les graphiques 1.4 et 1.5. L'ajustement a été effectué à l'aide d'une méthode de moindre carré, donnant une valeur de la pente de chaque droite de  $-1.31 \pm 0.44$  pour la figure 1.5 et  $-1.23 \pm 0.46$  pour la figure 1.4. La valeur numérique de cette pente n'est pas fondamentale, une tendance est cependant bien présente : la pente diminue lorsque le temps dynamique ou le temps de collision augmente.

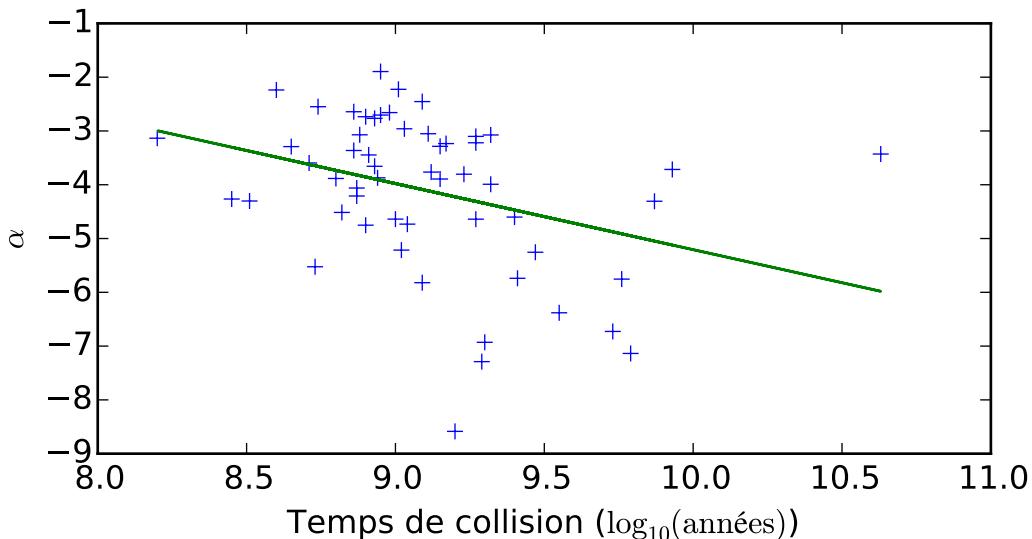


FIGURE 1.4 – Évolution des pentes pour différents âges collisionnels

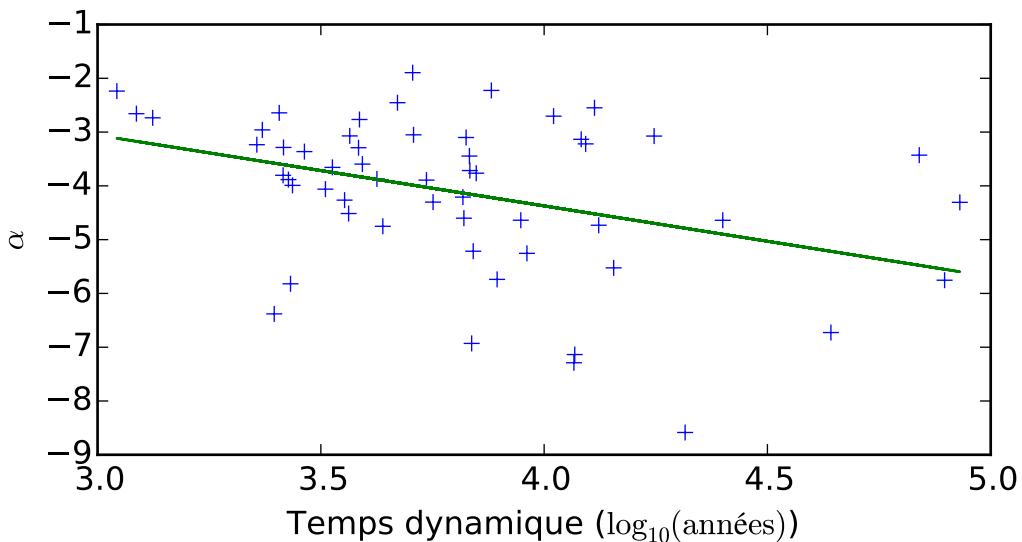


FIGURE 1.5 – Évolution des pentes pour différents âges dynamiques

Pour comprendre ces résultats, il est utile de savoir que plus un amas est âgé dynamiquement (plus il est évolué), plus ces temps vont être petits. Ainsi, un amas ayant un temps dynamique de  $10^{11}$  ans est plus jeune qu'un amas ayant un temps dynamique de  $10^8$  ans.

Les graphiques 1.4 et 1.5 nous apprennent que plus les amas sont âgés, plus la pente de leur halo diminue : elle passe de valeurs importantes (entre  $-10$  et  $-4$ ) pour des amas dynamiquement jeunes, à la valeur  $-2$  pour des amas dynamiquement évolués. Notons que cette dernière valeur correspond à la pente des coeurs effondrés. Le schéma 1.6 résume schématiquement cette évolution, d'un amas jeune à un amas évolué dont le cœur s'est effondré.

Si l'augmentation de la densité centrale au fur et à mesure de l'évolution de l'amas est souvent décrite dans la littérature, il n'en est pas de même pour l'évolution de la pente du halo. Nous tenterons de préciser ce constat observationnel lors de nos études théoriques et numériques.

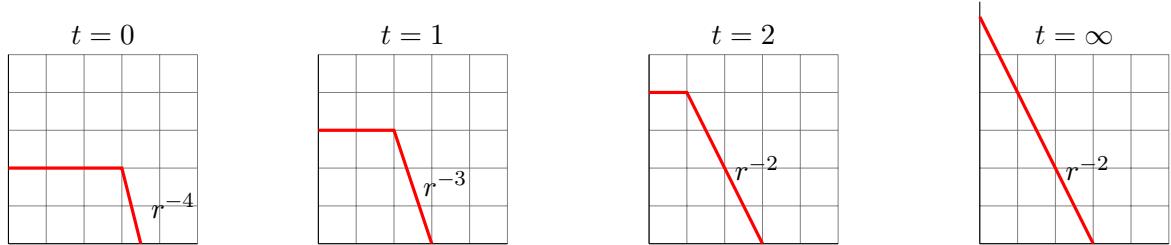


FIGURE 1.6 – Schéma d'évolution dynamique d'un amas globulaire.

## 1.2 Les Galaxies

En reprenant l'introduction de Binney and Tremaine [2008b], nous pouvons proposer la définition suivante d'une galaxie :

Une galaxie est un objet composé de  $10^5$  à plusieurs milliards d'étoiles, liées gravitationnellement, de gaz et dont la masse est supérieure à  $10^7 M_\odot$ .

### 1.2.1 Historique

L'observation des galaxies a commencé avec Charles Messier, qui les catalogua alors qu'il recherchait des comètes pour éviter de passer inutilement du temps sur ces objets « nébuleux ».

Depuis, les techniques d'observation ont évolué, les astronomes ont commencé à pouvoir distinguer de plus en plus de détails, et ont pu mesurer leurs profils de luminosité. Ces objets « nébuleux » ont été classés dans plusieurs catégories :

- les nébuleuses, composées de gaz et peut-être d'étoiles en formation ;
- les amas globulaires ;
- les galaxies.

Une autre catégorie d'objet est apparue plus tardivement : les groupes de galaxies.

Au début des années 1930, Zwicky, travaillant sur l'amas de galaxies Coma, se rendit compte que la masse gravitationnelle ne correspondait pas à la masse lumineuse (voir Zwicky [1933]) : si l'on suppose, comme le fait Zwicky, que l'amas de la Coma est dans un état d'équilibre, le théorème du viriel impose alors que sa masse, son rayon  $R$  et la vitesse caractéristique de ses composantes vérifient la relation  $GM = Rv^{1/2}$ . À l'époque, ces travaux montraient que la masse nécessaire pour être au viriel était 100 fois plus importante que la masse visible (obtenue en sommant la masse de chaque galaxie de l'amas). Malgré la précision plus importante des données d'aujourd'hui, et la meilleure prise en compte des différentes composantes (gaz, étoiles...), le problème persiste toujours et a amené à l'introduction de la matière noire. Quelques années plus tard, Babcock [1939] pointa que la courbe de rotation des galaxies elle-même nécessitait également l'introduction de matière noire.

Depuis lors, nombreux de travaux ont été menés, à la fois sur les halos de matière noire et sur les profils de luminosité (et donc de densité de masse) des galaxies.

### 1.2.2 Les différents types de galaxies

Les galaxies naines sphéroïdales, ou galaxies à faible brillance de surface (LSB), sont des galaxies très difficiles à observer. Elles ne le sont actuellement que dans notre groupe local, où elles sont les plus nombreuses (d'après Teyssier et al. [2013]). Ce sont des galaxies avec peu de gaz et un grand rapport masse/luminosité, ce dernier point laissant entendre qu'elles sont dominées par la matière noire. De Blok et al. [2001] ont étudié le profil de densité d'une cinquantaine de ces LSB et remarqué qu'elles avaient toutes un profil cœur-halo.

Les galaxies spirales ont une structure plus compliquée, dont la partie visible, détaillée sur la figure 1.7, se décompose habituellement de la façon suivante :

- le bulbe, pouvant abriter un trou noir super-massif ;
- le disque, composé lui-même de deux parties : le disque épais et le disque mince ;
- le halo stellaire, dans lequel évoluent notamment les amas globulaires.

Un halo de matière noire sphéroïdal (non représenté sur la figure 1.7) englobe le tout.

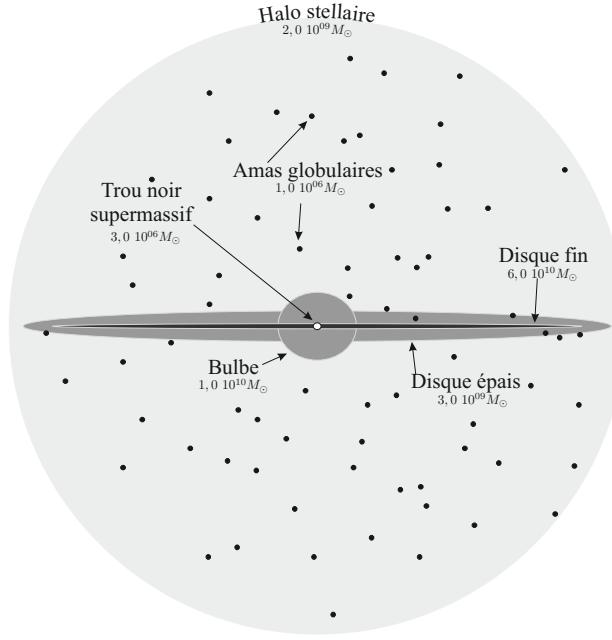


FIGURE 1.7 – Structure visible d'une galaxie spirale (figure extraite de Perez [2011]).

La dernière classe principale est celle des galaxies elliptiques. Ces galaxies sont essentiellement constituées d'étoiles vieilles et ne contiennent que très peu de gaz.

### 1.2.3 Profils de matière noire

Merritt et al. [2006], Graham et al. [2006a,b] ont menés une étude exhaustive des profils de matière noire dont la distribution a pu être mise en évidence autour des galaxies et dans les simulations numériques.

Il ressort de cette étude qu'il n'existe pas réellement de profil universel, contrairement à ce qu'il fut suggéré par les travaux de la fin du xx<sup>e</sup> siècle (voir par exemple Navarro et al. [1996]), même si le concept de profil universel reste une bonne première approximation. Chaque halo de matière noire pour chaque type de galaxie doit être ajusté par un profil différent. Comme nous l'avons vu plus haut, les galaxies naines ont un profil de type cœur-halo, et ce sont les seules à posséder un cœur. Les galaxies spirales et elliptiques possèdent généralement un profil montrant un cusp à la place du cœur (un profil de type cuspidé) ajusté correctement par un profil de Vaucouleurs.

Dès 1948, Gérard de Vaucouleurs remarqua que de nombreuses galaxies elliptiques possédaient une brillance de surface projetée variant comme :

$$I(R) = I_{\text{eff}} 10^{-3.3307 \left[ \left( \frac{R}{R_{\text{eff}}} \right)^{1/4} - 1 \right]} \quad (1.3)$$

avec  $R$  le rayon projeté. C'est la fameuse loi de de Vaucouleurs. Depuis de nombreux modèles ont étendu celle-ci :

- le modèle empirique d’Einasto<sup>3</sup> qui propose une densité volumique de masse de la forme :

$$\rho(r) = \rho_e \exp \left[ -d_n \left\{ \left( \frac{r}{r_e} \right)^{1/n} - 1 \right\} \right] \quad (1.4)$$

avec  $\rho_e = \rho(r_e)$  et  $r_e$  le rayon à 50% de masse ;

- le modèle de Prugniel-Simien, moins empirique que le précédent, est obtenu en déprojectant partiellement la loi de Vaucouleurs, la densité est de la forme :

$$\rho(r) = \rho_0 \left( \frac{r}{R_e} \right)^{-p_n} \exp \left[ -b_n \left\{ \left( \frac{r}{R_e} \right)^{1/n} - 1 \right\} \right]. \quad (1.5)$$

Les profils des halos de matière noire formés à l’échelle galactique dans les simulations numériques sont quelque peu différents. En première approximation, le modèle NFW, couramment utilisé, convient. Mais les études plus fines menées par Merritt et al. [2006], Graham et al. [2006a,b] montrent que les profils de Vaucouleurs généralisé 1.4 et 1.5 conviennent mieux.

#### 1.2.4 Scénario de formation

Le scénario de formation des galaxies le plus généralement admis aujourd’hui est le scénario hiérarchique. Dans ce scénario, les plus petites structures, comme les galaxies naines, ont été les premières à se former. Puis, au fil des interactions, elles fusionnent pour former des structures de plus en plus grosses. Ainsi arrivent les galaxies spirales, puis elliptiques.

Cependant, ce modèle apporte son lot de problèmes :

- les simulations mettant en jeu ce processus montrent des profils de type cuspide pour les halos de matière noire alors que les observations montrent que les galaxies naines possèdent un cœur et un halo et qu’elles sont très nombreuses ;
- dans les modèles numériques de formation hiérarchique, le nombre de petites structures (amas globulaire et LSB) est beaucoup plus important que dans les observations (voir Combes [2008] et les nombreuses références contenues dans ce livre).

Ces problèmes sont observés dans les simulations de formation de grande structures. Très peu d’études théoriques peuvent être menées sur ces échelles spatiales et temporelles. Nous pouvons cependant envisager certaines situations théoriques dans lesquelles certains aspects de ces problèmes peuvent être étudiés. C’est l’objet de la prochaine partie.

---

3. Ce modèle est bel et bien empirique car il est obtenu directement en remplaçant la brillance par la densité sans aucun calcul.

# **Deuxième partie**

## **Théorie**



## Chapitre 2

# Temps caractéristiques et équation de Vlasov

### Sommaire

---

<b>2.1 Temps caractéristiques . . . . .</b>	<b>15</b>
2.1.1 Le temps dynamique . . . . .	15
2.1.2 Le temps de relaxation à deux corps . . . . .	16
<b>2.2 Le système de Vlasov-Poisson . . . . .</b>	<b>18</b>
2.2.1 L'équation de Poisson . . . . .	18
2.2.2 L'équation de Vlasov . . . . .	19

---

### 2.1 Temps caractéristiques

Les systèmes autogravitants possèdent plusieurs temps caractéristiques dont la connaissance est importante pour comprendre la dynamique.

#### 2.1.1 Le temps dynamique

Le temps dynamique est le temps caractéristique que mettrait une particule à traverser le système ou à parcourir son orbite dans le système. Il est défini comme le rapport entre une taille caractéristique et une vitesse caractéristique du système, typiquement la dispersion de vitesse du système  $\sigma = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$  :

$$T \propto \frac{R}{\sigma} \quad (2.1)$$

Pour un système autogravitant isolé à l'équilibre, le théorème du viriel donne :

$$2E_c + E_p = 0$$

Pour un système de taille caractéristique  $R$  composé de  $N$  particules de masse  $m$  et dont la dispersion de vitesse est  $\sigma$  nous pouvons écrire :

$$E_c = \frac{1}{2}Nm\sigma^2 \quad \text{et} \quad E_p = -\frac{G(Nm)^2}{R}$$

le viriel donne donc :

$$\sigma = \left( \frac{GNm}{R} \right)^{1/2} = \left( \frac{GM}{R} \right)^{1/2}$$

En remplaçant la dispersion de vitesse  $\sigma$  dans le temps (2.1) par ce résultat, nous obtenons le temps dynamique :

$$T_d \propto \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Le rapport  $R^3/M$  est proportionnel à l'inverse de la densité moyenne de masse  $\bar{\rho}$  du système, nous avons alors :

$$T_d \propto (G\bar{\rho})^{-1/2} \quad (2.2)$$

Le problème de la relation (2.2) est la définition précise de la densité moyenne. Si l'on se contente d'un ordre de grandeur pour  $T_d$ , la question ne se pose pas mais pour l'analyse précise de simulation, il faudra faire un choix. Nous aurons l'occasion d'y revenir dans la section 9.3 du chapitre 9. Une option est de se donner un potentiel ou une répartition de masse et de calculer  $\bar{\rho}$ .

### 2.1.2 Le temps de relaxation à deux corps

Considérons un système constitué de  $N$  particules ponctuelles de masse  $m$  avec  $N \gg 1$ . À l'équilibre, et sur de petites échelles de temps (de l'ordre de  $T_d$ ), il semble intéressant de considérer que l'une de ces particules soit en orbite dans le champ moyen créé par toutes les autres. Sur de plus longues échelles de temps, le passage proche d'une voisine va affecter la trajectoire et modifier la vitesse de cette particule test. Nous définissons donc le temps de relaxation à 2 corps comme :

$$T_{rel} \propto \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{dv^2}{dt} \right) \right]^{-1}. \quad (2.3)$$

Il s'interprète classiquement comme le temps mis par les interactions à 2 corps<sup>1</sup> pour modifier significativement  $v^2$ . Le calcul de ce temps ainsi que des définitions plus précises abondent dans la littérature (voir par exemple le chapitre 14 de Heggie and Hut [2003]), nous privilégions ici l'extraction d'un ordre de grandeur basé sur un raisonnement de S. Chandrasekhar.

Tous les corps ont la même masse  $m$ . Lors d'un passage à une distance  $p$  d'un voisin, une particule test de vitesse  $v$  ressent une force de module :

$$F = \frac{Gm^2}{p^2}$$

pendant un temps caractéristique :

$$\delta\tau = \frac{p}{v}$$

La variation de vitesse  $\delta v$  de la particule test induite par cette rencontre peut s'obtenir en utilisant le principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{\delta v}{\delta\tau} = F \Rightarrow \delta v = \frac{F\delta\tau}{m} = \frac{Gm}{pv} \quad (2.4)$$

Le paramètre  $p$  est souvent appelé paramètre d'impact de la rencontre qui prend alors le statut de collision. Supposons que la particule test soit en orbite circulaire de rayon  $r$  dans le système de densité  $\rho$ . Sur une période, le nombre de collisions avec un paramètre d'impact compris entre  $p$  et  $p + dp$  s'écrit :

$$dn = (2\pi pdp) \times (2\pi r) \times \left( \frac{\rho(r)}{m} \right) \quad (2.5)$$

$$= \frac{4\pi^2}{m} pr\rho(r) dp \quad (2.6)$$

1. Les interactions à plus de 2 corps sont négligeables.

Les collisions sont suffisamment aléatoires pour que la moyenne des variations de vitesse  $\overline{\delta v}$  soit nulle. Pour obtenir l'action des collisions sur la vitesse, il faut donc considérer une dispersion de vitesse. Sur une période, la variation  $(\Delta v^2)_{orb}$  de  $\delta v^2$  s'obtient en combinant (2.4) et (2.5) et en sommant sur toutes les valeurs possibles de  $p$ , soit :

$$(\Delta v^2)_{orb} = \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \delta v^2 dn = \frac{4\pi^2 G^2 m r \rho(r)}{v^2} \int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \frac{dp}{p}$$

Si l'on veut éviter les infinis, il est nécessaire à ce stade d'introduire une coupure haute et basse pour les valeurs de  $p$ . Avec nos ordres de grandeurs et en suivant le calcul de S. Chandrasekhar, nous introduisons le logarithme coulombien :

$$\ln \Lambda = \ln \left( \frac{p_{\max}}{p_{\min}} \right)$$

où  $p_{\max}$  et  $p_{\min}$  sont des grandeurs caractéristiques du système. Finalement, sur une période nous obtenons :

$$(\Delta v^2)_{orb} = 4\pi^2 \frac{G^2 m r \rho(r)}{v^2} \ln \Lambda$$

Le temps dynamique étant le temps que met une particule à parcourir son orbite, nous pouvons écrire :

$$\frac{1}{v^2} \left( \frac{dv^2}{dt} \right)_{orb} \approx 4\pi^2 \frac{G^2 m r \rho(r)}{v^4} \frac{\ln \Lambda}{T_d}$$

La moyenne permettant de calculer le temps de relaxation à 2 corps peut s'envisager sur une période, l'expression (2.3) s'écrit donc :

$$\frac{T_{rel}}{T_d} \approx \frac{1}{4\pi^2} \frac{v^4}{G^2 m r \rho(r)} \frac{1}{\ln \Lambda}$$

le théorème du viriel, car nous sommes à l'équilibre, nous donne :

$$v^4 = \left( \frac{G N m}{r} \right)^2$$

ainsi :

$$\frac{T_{rel}}{T_d} \approx \frac{1}{4\pi^2} \frac{m}{r^3 \rho(r)} \frac{N^2}{\ln \Lambda}$$

Nous écrivons :

$$\rho(r) = \frac{Nm}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

et nous obtenons finalement :

$$\frac{T_{rel}}{T_d} \approx \frac{3}{16\pi^3} \frac{N}{\ln \Lambda}$$

Dans un amas d'étoiles ou une galaxie, le temps de relaxation à deux corps est donc généralement beaucoup plus grand que le temps dynamique. Le tableau 2.1 donne un ordre de grandeur de ces temps pour différents objets. Avec un univers âgé de 13 Gan, les galaxies sont très peu influencées par les collisions à deux corps l'hypothèse Vlasov est donc entièrement justifiée. En ce qui concerne les autres objets autogravitants, il est clair que les amas ouverts relaxent très vite alors que le statut des amas globulaires est plus discutable : l'importance des collisions dans leur dynamique est différente entre les régions centrales denses et le halo externe plus diffus.

	$N$	$R [\text{kpc}]$	$\sigma [\text{km.s}^{-1}]$	$T_{dyn} [\text{Gan}]$	$T_{rel} [\text{Gan}]$
Amas ouverts	250	$1 \times 10^{-3}$	1	$1 \times 10^{-3}$	$8 \times 10^{-4}$
Amas globulaires	$5 \times 10^5$	$1 \times 10^{-2}$	7	$1 \times 10^{-3}$	1
Galaxies elliptiques	$10^{11}$	5	200	$2 \times 10^{-2}$	$2 \times 10^6$
Groupes diffus de galaxies	5	400	100	4	$2 \times 10^{-1}$
Groupes compacts de galaxies	4	40	200	$2 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^{-2}$
Amas riches de galaxies	400	1200	700	2	2

TABLE 2.1 – Ordres de grandeur des temps dynamiques et temps de relaxation à 2 corps pour divers objets.

Notons que le calcul du temps de relaxation à deux corps que nous avons présenté ici est sous-estimé en ce qui concerne les groupes et amas de galaxies, pour lesquels l'effet de la matière noire doit être pris en compte.

Un phénomène de ségrégation de masse est associé au processus de collision. Une fois encore, ce calcul ne le prend pas en compte. Une rencontre entre deux étoiles de masses différentes ne produit pas la même variation de vitesse. L'effet net de cette ségrégation est de ralentir les étoiles les plus lourdes et donc de les faire tomber dans le puits de potentiel formé par le système. Sur l'échelle de temps de la relaxation, nous devrions observer une organisation des objets dans le système : les plus lourds au centre, les plus légers à l'extérieur.

Dans le cadre de simulations numériques, l'estimation du temps de relaxation est une véritable question. Les valeurs de  $p_{\min}$  et  $p_{\max}$  utilisées pour le calcul du logarithme coulombien  $\ln \Lambda$  doivent s'adapter à la simulation tout comme l'estimation de la densité. Nous présenterons notre stratégie en la matière dans la section 9.3 du chapitre 9.

## 2.2 Le système de Vlasov-Poisson

### 2.2.1 L'équation de Poisson

Les systèmes que nous étudions en dynamique stellaire possèdent des tailles caractéristiques de l'ordre du parsec pour les amas globulaires et du millier de parsecs pour les galaxies. En négligeant le rôle du gaz interstellaire et sur de telles échelles, la seule des quatre interactions pouvant intervenir dans la dynamique de ces systèmes est la gravitation.

Nous considérons donc un système  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  dont la masse est distribuée selon une certaine densité :

$$\rho = \begin{cases} \rho(\vec{r}') & \text{si } \vec{r}' \in \Omega \\ 0 & \text{si } \vec{r}' \notin \Omega \end{cases}$$

La loi de la gravitation de Newton nous indique alors que la force  $\vec{f}(\vec{r})$  que crée le système en tout point  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  de masse unité, est obtenue en sommant toutes les contributions infinitésimales :

$$\delta \vec{f}(\vec{r}) = G \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}') \delta^3 \vec{r}' \quad (2.7)$$

issues de chaque élément de volume  $\delta^3 \vec{x}'$ . Dans l'hypothèse d'une distribution continue de matière nous avons donc :

$$\vec{f}(\vec{r}) = G \int \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}' \quad (2.8)$$

En introduisant le potentiel gravitationnel :

$$\psi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3 \vec{r}' \quad (2.9)$$

et en remarquant que :

$$\text{grad}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) = \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

Nous avons donc :

$$\vec{f}(\vec{r}) = G \int \text{grad}_{\vec{r}} \left( \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \right) \rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'$$

pour une large classe de densités suffisamment régulières (celles permettant à (2.8) de converger), la force dérive donc du potentiel (2.9) et nous avons :

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\text{grad}_{\vec{r}} \psi(\vec{r}) \quad (2.10)$$

le système est alors dit conservatif. Plutôt que d'utiliser le champ vectoriel  $\vec{f}(\vec{r})$ , il est préférable de trouver une relation entre champs scalaires. Ceci est possible en remarquant que l'équation (2.9) est une convolution :

$$\psi(\vec{r}, t) = -G \rho(\vec{r}, t) * \frac{1}{|\vec{r}|}. \quad (2.11)$$

La deuxième fonction de cette convolution est, à une constante près, la fonction de Green du laplacien. Un calcul montre en effet que si  $u$  est une fonction test au sens des distributions, alors le produit scalaire :

$$\left\langle \Delta \left( \frac{1}{|\vec{r}|} \right), u \right\rangle = -4\pi u(0) = \langle -4\pi \delta(\vec{r}), u \rangle.$$

Nous allons donc appliquer le laplacien à l'équation (2.11) qui s'écrit alors :

$$\langle \Delta \psi(\vec{r}, t), u \rangle = \left\langle -G \Delta \left( \rho(\vec{r}, t) * \frac{1}{|\vec{r}|} \right), u \right\rangle$$

soit :

$$\langle \Delta \psi(\vec{r}, t), u \rangle = \left\langle -G \rho(\vec{r}, t) * \Delta \left( \frac{1}{|\vec{r}|} \right), u \right\rangle = \langle 4\pi G \rho(\vec{r}, t) * \delta(\vec{r}), u \rangle$$

Le Dirac étant l'élément neutre de l'algèbre de convolution, nous obtenons finalement l'équation de Poisson :

$$\Delta \psi(\vec{r}, t) = 4\pi G \rho(\vec{r}, t)$$

Cette équation, seule ou couplée avec d'autres, est à la base de nombreux problèmes d'astrophysique théorique.

- Utilisée seule elle nécessite la donnée (théorique ou expérimentale) de la fonction  $\rho(\vec{r})$ . La résolution de l'équation de Poisson fournit alors la force générée par le système en tout point de l'espace, il devient donc formellement possible de connaître les propriétés dynamiques de la trajectoire d'une particule test évoluant dans le champ de gravitation créé par la distribution  $\Omega$ .
- Dans le cadre d'une théorie fournissant la densité du système, l'équation de Poisson sera alors utilisée comme équation de fermeture du problème.

## 2.2.2 L'équation de Vlasov

Pour étudier la dynamique des systèmes autogravitants comme les galaxies ou les amas globulaires, la mise en œuvre des méthodes de la mécanique classique conduit à écrire, donc à résoudre, un nombre d'équations différentielles égal au nombre d'étoiles composant le système,

ce qui est en pratique irréalisable. Il convient d'utiliser des méthodes statistiques de champ moyen, dans le cas gravitationnel la théorie de Vlasov-Poisson.

Supposons que le système que nous considérons possède  $3N$  degrés de liberté. Cela signifie que les positions des différents points du système sont définies par  $N$  vecteurs  $\vec{r}_\alpha$  comportant chacun 3 composantes, l'indice  $\alpha$  prenant toutes les valeurs  $1, 2, \dots, N$ . À un instant donné, l'état du système sera complètement déterminé par les  $N$  vecteurs position et les  $N$  vecteurs impulsion  $\vec{p}_\alpha = m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$  correspondants. On peut représenter mathématiquement les différents états d'un système par des points dans un espace à  $6N$  dimensions appelé espace des phases. La trajectoire, ou le lieu de ces points, permet de représenter de manière univoque l'évolution du système.

En s'intéressant à un volume infinitésimal  $d\Gamma$  de cet espace des phases :

$$d\Gamma := d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \cdots d\vec{r}_N d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \cdots d\vec{p}_N$$

nous pouvons introduire la probabilité  $d\Omega$  des états représentés par des points contenus dans ce volume à l'instant  $t$ . C'est-à-dire, la probabilité pour qu'à cet instant les positions  $\vec{r}_\alpha$  et les impulsions  $\vec{p}_\alpha$  soient comprises dans les intervalles infinitésimaux  $[\vec{r}_\alpha + d\vec{r}_\alpha]$  et  $[\vec{p}_\alpha + d\vec{p}_\alpha]$ . Cette probabilité s'exprime par :

$$d\Omega = f^{(N)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t) d\Gamma$$

où la quantité  $f^{(N)}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t)$  est appelée fonction de distribution à  $N$  particules du système. Cette fonction est positive et de norme unité :

$$1 = \int f^{(N)}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N, t) d\vec{w}_1 \dots d\vec{w}_N$$

Elle représente la densité, au sens probabiliste, de la variable aléatoire  $\vec{w} = (\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_N)$  avec  $\vec{w}_\alpha = (\vec{r}_\alpha, \vec{p}_\alpha)$ . Si le nombre de particules est conservé au cours de l'évolution, cette densité obéit à une équation de continuité (exprimant le fait que  $df$  est une différentielle totale exacte, ou physiquement que le nombre de particules est conservé) :

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \operatorname{div}_{\vec{w}}(f^{(N)} \dot{\vec{w}}) = 0 \quad (2.12)$$

où  $\dot{\vec{w}} = (\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{p}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, \dot{\vec{p}}_N)$  représente la vitesse du flot des points dans l'espace des phases. En explicitant la divergence de l'équation (2.12), il vient :

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left[ \operatorname{div}_{\vec{r}_\alpha} \left( f^{(N)} \dot{\vec{r}}_\alpha \right) + \operatorname{div}_{\vec{p}_\alpha} \left( f^{(N)} \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \right] = 0$$

Après dérivation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N & \left\{ \dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \operatorname{grad}_{\vec{r}_\alpha} \left( f^{(N)} \right) + \dot{\vec{p}}_\alpha \cdot \operatorname{grad}_{\vec{p}_\alpha} \left( f^{(N)} \right) \right. \\ & \left. + f^{(N)} \left[ \operatorname{div}_{\vec{r}_\alpha} \left( \dot{\vec{r}}_\alpha \right) + \operatorname{div}_{\vec{p}_\alpha} \left( \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Nous introduisons alors les équations de Hamilton pour chaque particule (qui reviennent ici à écrire le principe fondamental de la dynamique) :

$$\forall 1 \leq \alpha \leq N \quad \dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_\alpha} \quad \text{et} \quad \dot{\vec{p}}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_\alpha}$$

où  $H$  est le hamiltonien du système :

$$H = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \sum_{\alpha \neq \beta=1}^{N,N} -\frac{G}{2} \frac{m_\alpha m_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}$$

nous constatons alors que :

$$\forall 1 \leq \alpha \leq N \quad \operatorname{div}_{\vec{r}_\alpha} (\dot{\vec{r}}_\alpha) = \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{r}_\alpha \partial \vec{p}_\alpha} = -\operatorname{div}_{\vec{p}_\alpha} (\dot{\vec{p}}_\alpha)$$

Ainsi l'équation de continuité se met sous la forme :

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N [\dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \operatorname{grad}_{\vec{r}_\alpha} (f^{(N)}) + \dot{\vec{p}}_\alpha \cdot \operatorname{grad}_{\vec{p}_\alpha} (f^{(N)})] = 0 \quad (2.13)$$

Il s'agit de l'équation de Liouville.

Dans notre contexte gravitationnel, la forme du hamiltonien permet de l'expliciter plus avant :

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\vec{p}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{r}_\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{p}_\alpha} \right\} = 0$$

où nous avons posé :

$$U_1 = \sum_{\beta=2}^N -G \frac{m_1 m_\beta}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_\beta|}, \quad U_2 = -G \frac{m_2 m_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \sum_{\beta=3}^N -G \frac{m_1 m_\beta}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_\beta|}, \quad \text{etc...}$$

En pratique, lorsque le système devient plus grand qu'une paire, cette équation s'avère inutilisable, et nous devons faire des hypothèses de nature statistique. À partir de la fonction de distribution à  $N$  particules  $f^{(N)}$ , nous pouvons construire une fonction de distribution à une particule (densité marginale) :

$$f^{(1)} = f^{(1)}(\vec{w}_1, t) = \int \cdots \int f^{(N)} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N$$

En intégrant l'équation de Liouville sur  $\vec{w}_2 \cdots \vec{w}_N$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} &+ \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int \frac{\vec{p}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{r}_\alpha} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N \right\} \\ &- \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int \frac{\partial U_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{p}_\alpha} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N \right\} = 0 \end{aligned}$$

Les deux sommes d'intégrales se simplifient considérablement en utilisant le fait que la fonction de distribution s'annule sur le bord du système :

$$\forall \alpha = 1, \dots, N \quad \lim_{\vec{w}_\alpha \rightarrow \infty} f^{(N)} = 0$$

ainsi toutes les intégrations sur  $\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  s'annulent et :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int \frac{\vec{p}_\alpha}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{r}_\alpha} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N \right\} &= \int \frac{\vec{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{r}_1} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N \\ &= \frac{\vec{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \int f^{(N)} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N \\ &= \frac{\vec{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{r}_1} \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons mais en vitesse :

$$\sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int \frac{\partial U_\alpha}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{p}_\alpha} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N \right\} = \int \frac{\partial U_1}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{p}_1} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N$$

L'équation de Liouville devient alors :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{r}_1} - \int \frac{\partial U_1}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{p}_1} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N = 0$$

Nous allons maintenant supposer que les particules sont indiscernables. Explicitons cette subtilité sur le calcul de l'énergie potentielle :

$$U_1 = U_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{\beta=2}^N U_{1\beta}$$

où

$$U_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta}(\vec{r}_\alpha, \vec{r}_\beta) := -\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}$$

Dans cette somme, l'indiscernabilité des particules fait jouer à toutes le même rôle. Nous faisons également l'hypothèse de champ moyen. De cette façon, nous pouvons donc en choisir une (la particule 1) pour représenter toutes les autres et subir leur action globale, et une autre (la particule 2) pour représenter toutes les particules du système et agir sur la particule 1 de façon globale. Elle est fondamentale. En pratique cela revient à considérer que :

$$U_{12} = U_{13} = \cdots = U_{1N} \Rightarrow U_1 = \sum_{\beta=2}^N U_{1\beta} = (N-1)U_{12}$$

ainsi l'intégrale devient :

$$\int \frac{\partial U_1}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{p}_1} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N = (N-1) \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \vec{p}_1} d\vec{w}_2 \cdots d\vec{w}_N$$

La particule 1 est appelée « *particule test* », elle évolue dans le système moyen représenté par la particule 2.

En introduisant la densité marginale à 2 particules :

$$f^{(2)} = f^{(2)}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, t) = \int \cdots \int f^{(N)} d\vec{w}_3 \cdots d\vec{w}_N$$

et comme  $U_{12}$  ne dépend que de  $\vec{w}_1$  et  $\vec{w}_2$ , nous pouvons finir l'intégration du terme contenant l'énergie potentielle pour obtenir la version intégrée de Liouville suivante :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \vec{r}_1} = (N-1) \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \vec{p}_1} d\vec{w}_2 \quad (2.14)$$

Cette équation permet donc de calculer  $f^{(1)}$  à partir de  $f^{(2)}$ , en poursuivant nous obtenons :

$$f^{(1)} \leftrightarrow f^{(2)} \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow f^{(N)}$$

Cette cascade d'équations est généralement appelée hiérarchie BBGKY.

La technique habituelle consiste à stopper la hiérarchie, c'est-à-dire trouver dans quelles conditions :

$$\exists p < N, \quad \text{tel que} \quad \forall n > p \quad f^{(n)} = 0$$

Dans ce contexte, nous allons utiliser l'hypothèse de chaos moléculaire de Boltzmann. Elle revient à poser :

$$f^{(2)}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, t) = f^{(1)}(\vec{w}_1, t)f^{(1)}(\vec{w}_2, t) + g(\vec{w}_1, \vec{w}_2, t)$$

la fonction  $g(\vec{w}_1, \vec{w}_2, t)$  décrivant les corrélations ou interactions binaires.

Les particules étant indiscernables, il convient de poser :

$$f(\vec{w}, t) = N f^{(1)}(\vec{w}, t)$$

ainsi

$$\int f(\vec{w}, t) d\vec{w} = N$$

Sous toutes ces hypothèses, la version intégrée (2.14) de l'équation de Liouville s'écrit donc :

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\right)}{N} = (N-1) \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial \left(\frac{f(\vec{w}_1, t)}{N} \frac{f(\vec{w}_2, t)}{N} + g\right)}{\partial \vec{p}_1} d\vec{w}_2$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} &= \frac{(N-1)}{N} \frac{\partial f(\vec{w}_1, t)}{\partial \vec{p}_1} \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} \int U_{12} f(\vec{w}_2, t) d\vec{w}_2 \\ &\quad + N(N-1) \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{p}_1} d\vec{w}_2 \end{aligned}$$

un petit rappel s'impose alors :

$$\int U_{12} f(\vec{w}_2, t) d\vec{w}_2 = -G m_1 m_2 \int \frac{f(\vec{w}_2, t)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_2 d\vec{p}_2$$

dans le second membre de cette relation, l'intégration sur les impulsions nous fait reconnaître la densité de masse :

$$\rho(\vec{r}_2, t) = m_2 \int f(\vec{w}_2, t) d\vec{p}$$

Nous avons donc :

$$\int U_{12} f(\vec{w}_2, t) d\vec{w}_2 = -G m_1 \int \frac{\rho(\vec{r}_2, t)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_2$$

où l'on voit apparaître le potentiel gravitationnel impliqué dans l'équation de Poisson :

$$\int U_{12} f(\vec{w}_2, t) d\vec{w}_2 = m_1 \psi(\vec{r}_1, t)$$

en prenant  $N-1 \approx N$ , et en laissant de côté l'indice 1 nous obtenons finalement

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - m \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} = N^2 G C(\vec{w}, t) \quad (2.15)$$

où nous avons introduit le terme de corrélation :

$$C(\vec{w}, t) = \int \frac{\partial g(\vec{w}, \vec{w}_2, t)}{\partial \vec{p}} \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} d\vec{w}_2$$

L'équation (2.15) est appelée équation de Boltzmann.

Dans le cas des systèmes gravitationnels, et contrairement au gaz de Van Der Waals, les collisions sont dynamiquement inefficaces pendant de longues périodes, Chandrasekhar montre que pour un système autogravitant composé de  $N$  particules, le temps dynamique  $T_d$  et le temps de relaxation par collisions  $T_{rel}$  vérifient (voir la section 2.1) :

$$T_{rel} \approx N \ln(N) T_d$$

Sur une centaine de temps dynamiques, les amas globulaires et galaxies sont dits non collisionnels, i.e.  $C(\vec{w}, t) \equiv 0$ , et l'équation de la dynamique des galaxies est l'équation de Vlasov (Boltzmann sans collisions, comme le suggérait Hénon [1982]) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - m \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} = 0$$

dans cette équation le potentiel  $\psi$  est lui-même relié à la fonction de distribution  $f$  via l'équation de Poisson, nous avons donc le système intégro-différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - m \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \psi(\vec{r}, t) = -Gm \int \frac{f(\vec{r}', \vec{p}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{p}' \end{cases}$$

dit système de Vlasov-Poisson, en introduisant l'énergie moyenne par particule :

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + m\psi$$

ce système s'écrit sous forme canonique :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = \{ E, f \} & \text{Vlasov : dynamique} \\ \Delta\psi = 4\pi G\rho & \text{Poisson : champ moyen} \end{cases}$$

Ce système est à la base de l'étude de la dynamique des galaxies.

Dans les chapitres suivants, nous étudierons différentes fonctions de distribution issue de ce système, puis nous nous intéresserons à la stabilité des systèmes autogravitants.

# Chapitre 3

## Le problème de la sphère isotherme

### Sommaire

---

3.1	La sphère isotherme et son problème intrinsèque . . . . .	25
3.2	Formulation générale du problème . . . . .	26
3.3	Propriétés de la solution générale et conséquences . . . . .	27

---

### 3.1 La sphère isotherme et son problème intrinsèque

La sphère isotherme est la solution classique fournie par une approche thermodynamique du problème de l'équilibre d'un système autogravitant. Elle apparaît lorsque nous cherchons un maximum de l'entropie statistique de Boltzmann  $S(f) = -k_B \int f \ln(f) d\vec{r} d\vec{p}$ , où  $k_B$  est la constante de Boltzmann. En imposant les contraintes d'une masse fixée :

$$M = \int \rho(\vec{r}, t) d\vec{r} \quad (3.1)$$

et une énergie totale fixée :

$$H = \int \frac{\vec{p}^2}{2m} f d\vec{r} d\vec{p} - \frac{Gm^2}{2} \int \int \frac{f(\vec{r}, \vec{p}) f(\vec{r}', \vec{p}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' d^3 \vec{p}' \quad (3.2)$$

Pour le système sa fonction de distribution s'écrit :

$$f(\vec{r}, \vec{p}) = f(E) = \left( \frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta} \right)^{-3/2} e^{-\beta E} \quad (3.3)$$

La fonction  $E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + m\psi(\vec{r})$  caractérise l'énergie d'une particule test. Les constantes  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  et  $\alpha$  sont des multiplicateurs de LAGRANGE associés aux contraintes imposées lors de la recherche de l'extremum de l'entropie :  $\beta \Leftrightarrow H = \text{cte}$  et  $\alpha \Leftrightarrow M = \text{cte}$ .

Les différents problèmes posés par cette solution ont émaillé la recherche dans ce domaine tout au long du xx<sup>e</sup> siècle d'Emden [1907] à Padmanabhan [1989] en passant par Chandrasekhar [1939], la revue de Chavanis [2006] pourra être consulté à ce sujet. Nous en reprendrons les éléments principaux.

### 3.2 Formulation générale du problème

La densité de la sphère isotherme se calcule directement à partir de la définition (3.3) :

$$\begin{aligned}\rho(r) &= m \int \left( \frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta} \right)^{-3/2} e^{-\beta \left( \frac{p^2}{2m} + m\psi \right)} d^3 p \\ &= 4\pi m \left( \frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta} \right)^{-3/2} \int_0^\infty e^{-\beta \left( \frac{p^2}{2m} + m\psi \right)} p^2 dp \\ &= \frac{m}{\alpha^3} e^{-m\beta\psi}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Nous avons  $\rho(\vec{r}) = \rho(\psi)$ , le théorème Gidas-Ni-Nirenberg s'applique (voir Perez [2011]) et le système est donc à symétrie sphérique  $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$  dans l'espace des positions. Avec cette symétrie radiale l'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) = 4\pi G \rho(r) = 4\pi G \frac{m}{\alpha^3} e^{-m\beta\psi(r)}$$

En introduisant les variables  $y = m\beta\psi$  et  $x = r/r_0$ , nous obtenons :

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) = \frac{4\pi G m r_0^2}{\alpha^3} e^{-y}$$

Nous pouvons alors choisir  $r_0^2 = \frac{\alpha^3}{4\pi G m r_0^2}$  afin d'adimensionner l'équation de Poisson sous la forme :

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) = e^{-y}\tag{3.5}$$

Nous pouvons chercher dans un premier temps des solutions autosimilaires pour cette équation, il est facile de vérifier que la seule solution est telle que :

$$\tilde{\rho}(r) = \frac{2}{r^2} = e^{-\tilde{y}} \Rightarrow \tilde{y} = -\ln \left( \frac{2}{x^2} \right)\tag{3.6}$$

Les propriétés physiques de cette solution autosimilaire sont singulières :

— la densité diverge en zéro :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{\rho}(r) = \infty$$

— la masse est infinie si le support du système n'est pas limité (ce qui est inclus dans les hypothèses) :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{M}(r) = \infty$$

Cette solution forme ce que l'on appelle une sphère isotherme singulière (SIS), elle ne peut en aucun cas correspondre à la solution thermodynamique recherchée qui *doit* posséder une masse finie.

Étudions à présent l'existence de solutions plus générales éventuellement susceptibles d'avoir une densité et une masse qui ne diverge pas. Nous pratiquons pour cela un changement de fonction, en introduisant  $\zeta = y - \tilde{y}$ , la différence entre la solution générale  $y$  du problème et la SIS. Il vient successivement

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d\zeta}{dx} \right) &= e^{-\zeta - \tilde{y}} - \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d\tilde{y}}{dx} \right) \\ &= e^{-\zeta - \tilde{y}} - e^{-\tilde{y}} \\ &= (e^{-\zeta} - 1) \frac{2}{x^2}\end{aligned}\tag{3.7}$$

et en utilisant l'inconnue

$$t = \ln(x)$$

il vient

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{d\zeta}{dt} = 2(e^{-\zeta} - 1) \quad (3.8)$$

Le problème consiste donc à étudier les propriétés générales de cette équation.

### 3.3 Propriétés de la solution générale et conséquences

Dans la littérature, le seul cas traité explicitement est celui de la linéarisation de l'équation autour de  $\zeta = 0$  (voir Chandrasekhar [1939]). Nous proposons ici une étude plus générale dans la totalité du plan de phase. Posons  $\vec{z} = [\zeta, \dot{\zeta}]^\top = \left[\zeta, \frac{d\zeta}{dt}\right]^\top$ , nous avons :

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = F(\vec{z}) = [\dot{\zeta}, 2(e^{-\zeta} - 1) - \dot{\zeta}]^\top \quad (3.9)$$

Le seul point d'équilibre est l'origine  $\vec{z}_0 = [0, 0]^\top$ . Considérons à présent :

$$\mathcal{E}(\zeta, \dot{\zeta}) = \frac{1}{2}\dot{\zeta}^2 + 2(e^{-\zeta} - \zeta - 1)$$

Il apparaît que :

- La fonction  $\mathcal{E}$  est nulle en  $\vec{z} = \vec{z}_0$  ;
- La hessienne de  $\mathcal{E}$  est définie positive sur  $\mathbb{R}_*^2$  :

$$H_{\mathcal{E}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \zeta^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \zeta \partial \dot{\zeta}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \dot{\zeta} \partial \zeta} & \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \dot{\zeta}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-\zeta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et donc le point  $\vec{z}_0$  est un minimum global de  $\mathcal{E}$  ;

- La fonction  $\mathcal{E}$  est strictement décroissante de la variable  $t$ , en effet :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} + \frac{d\dot{\zeta}}{dt} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \dot{\zeta}}$$

$$= -\dot{\zeta}^2$$

Les trois propriétés énumérées ci-dessus font de la fonction  $\mathcal{E}$  une fonction de Lyapounov stricte du système, l'équilibre  $\vec{z}_0$  est donc globalement asymptotiquement stable.

Le comportement asymptotique ( $t \rightarrow +\infty$ ) de la solution  $\zeta(t)$  s'obtient en considérant une combinaison linéaire des exponentielles des valeurs propres de la matrice

$$A := D[F(\vec{z})](\vec{z}_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

soit  $(-1 \pm i\sqrt{7})/2$ , ainsi lorsque  $x \rightarrow +\infty$  nous avons

$$\zeta(x) \sim \frac{k_1 \cos[\ln(x^{7/2})] + k_2 \sin[\ln(x^{7/2})]}{\sqrt{x}} \quad \text{avec } k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

En majorant les fonctions trigonométriques, nous avons donc  $\zeta(x) \sim k/x^{1/2}$  en  $x \rightarrow +\infty$ , soit  $y(x) \sim k/x^{-1/2} - \ln(2/x^2)$  soit pour la densité en variable  $r$  :

$$\rho(r) \sim \frac{2mr_o^2}{\alpha^3 r^2} \left( 1 \pm \left( \frac{r_k}{r} \right)^{1/2} \right) \quad \text{quand } r \rightarrow +\infty. \quad (3.10)$$

La longueur  $r_k$  se calcule en écrivant proprement la majoration, en revenant aux variables physiques et en calculant le laplacien. Le signe  $\pm$  provient de l'encadrement des fonctions trigonométriques. Ce qu'il faut remarquer dans cette relation, c'est que la masse d'une sphère isotherme est *toujours* infinie si celle-ci est d'extension infinie ( $r \rightarrow +\infty$ ).

La fonction de distribution (3.3) de la sphère isotherme n'est donc pas acceptable car elle est en contradiction avec les hypothèses posées pour l'obtenir.

Le problème de l'équilibre thermodynamique d'un système autogravitant est donc posé.

Pour palier à ce problème, plusieurs approches ont été développées au fil des ans :

1. Une approche « rigoureuse » consiste à chercher le maximum de l'entropie dans un ensemble de fonctions de distribution à support compact : l'extension spatiale du système est alors finie. Ce problème est communément appelé sphère isotherme en boîte (SIB). Il sera étudié en détail dans le chapitre 4.
2. Une solution « pragmatique » : développée par King [1966b] consiste à tronquer à la main et après coup la sphère isotherme. Au-dessus d'une certaine énergie, la fonction de distribution est nulle. Bien qu'empirique cette solution est devenue un modèle de choix pour l'ajustement du profil de densité de nombreux amas globulaires et de galaxies naines. Ses trois paramètres libres rendent en effet son utilisation adaptée à la modélisation de tels objets. Nous y consacrerons le chapitre 5.
3. Plus récemment une prise en compte fine des spécificités des modèles gravitationnels semble avoir fait progresser les choses : il s'agit du paradigme Darkexp (voir Hjorth and Williams [2010]). En physique statistique, la troncature au tout premier ordre de la formule de Stirling  $\ln x! = x \ln x - x$ , valide pour  $x \gg 1$ , est souvent utilisée. Dans ce type de calcul,  $x$  est une fonction du nombre de particules  $N$  présentes dans le système. Les auteurs de ce paradigme remarquent que dans notre cas (étude des galaxies ou des amas globulaires), ce nombre  $N$  n'est pas suffisamment grand pour que nous puissions stopper le développement au premier ordre dans la formule de Stirling, ils proposent d'aller jusqu'à l'ordre 2. Cette correction semble, selon les auteurs de ce paradigme, à même d'effectuer une coupure rendant la sphère isotherme plus compatible avec un modèle physique acceptable.

# Chapitre 4

## Sphère isotherme en boîte

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Diagramme de Milne</b>	<b>29</b>
4.1.1	Présentation du problème	29
4.1.2	Obtention des équations	29
4.1.3	Conditions au centre et sur le bords de la sphère	30
4.1.4	Droites de Padmanabhan et diagramme de Milne	32
<b>4.2</b>	<b>Courbe calorique</b>	<b>32</b>
4.2.1	Motivation et définition	32
4.2.2	Stabilité de la sphère isotherme en boîte	34
4.2.3	De l'importance du contraste de densité	34

---

### 4.1 Diagramme de Milne

#### 4.1.1 Présentation du problème

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les sphères isothermes ne sont pas une solution satisfaisante, du fait de leurs masses infinies. Nous allons présenter dans ce chapitre une solution de sphère isotherme intégrée sur un support borné. Cette solution est toujours obtenue en recherchant des maxima de l'entropie statistique de Boltzmann :

$$S(f) = -k_B \int f \ln f d\vec{p} d\vec{r}$$

mais pour une fonction  $f$  possédant un support borné. Ce dernier est par exemple une boule (souvent appelée boîte, d'où le nom du chapitre) définie comme :

$$B = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 ; |\vec{r}| < R \right\} \quad (4.1)$$

où  $R$  est le rayon de la boule support de  $f$ . Dans la suite, nous noterons  $\mathbb{I}_{B_R}$  la fonction indicatrice sur cette boule.

#### 4.1.2 Obtention des équations

La fonction de distribution d'une sphère isotherme en boîte, s'écrit (voir par exemple Perez [2011]) :

$$f^+(E) = \left( \frac{2\pi\alpha^2 m}{\beta} \right)^{-3/2} e^{-\beta E} \times \mathbb{I}_{B_R} \quad (4.2)$$

où  $\alpha$ , et  $\beta = (k_B T)^{-1}$ , sont des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes respectives de masse  $M$  et d'énergie totale  $H$  finie que nous imposons toujours au système. Ils assurent

également la normalisation de la fonction de distribution. Le calcul de la densité de masse donne alors  $\rho(r) = \frac{m}{\alpha^3} e^{-\beta m\psi(r)} \times \mathbb{I}_{B_R}$ . L'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dh}{dx} \right) = e^{-h} \times \mathbb{I}_{B_R}$$

où nous avons utilisé l'adimensionnement :

$$x = \frac{r}{r_0} \quad \text{avec} \quad r_0 = \sqrt{\frac{\alpha^3}{4\pi G m^2 \beta}} e^{-\frac{m\beta\psi(0)}{2}} \quad (4.3)$$

$$h = m\beta\psi(x) - m\beta\psi(0) \quad (4.4)$$

Il est important de noter que l'inconnue du problème  $h(x)$  est différente de la fonction  $y(x)$  utilisée pour la présentation du problème de la sphère isotherme illimitée. Nous avons ici  $h(0) = 0$  alors que  $y(0) = m\beta\psi(0)$ .

En notant par un ' toutes les dérivées par rapport à la variable  $x$ , nous introduisons les variables dites de MILNE :

$$\begin{cases} v = x \frac{dh}{dx} = xh' \\ u = \frac{e^{-h} x}{h'} = \frac{e^{-h} x^2}{v} \end{cases} \quad (4.5)$$

Un calcul simple donne alors :

$$\frac{d(xv)}{dx} = uv \Rightarrow v' = \frac{v(u-1)}{x}$$

La dérivée de  $u$  s'obtient directement à partir de sa définition, nous trouvons :

$$\begin{cases} v' = \frac{v(u-1)}{x} \\ u' = \frac{u}{x}(3-v-u) \end{cases}$$

que nous pouvons écrire de façon compacte :

$$\frac{dv}{du} = \frac{v(u-1)}{u(3-u-v)} \quad (4.6)$$

La courbe résultant de cette équation, tracée dans le plan  $(u, v)$ , forme le diagramme de Milne. L'étude de ce diagramme permet d'accéder à de nombreuses caractéristiques de la sphère isotherme en boîte. L'équation (4.6) ne peut être résolue explicitement mais sa solution peut être obtenue numériquement : il faut pour cela préciser les conditions au bord et au centre du système, ce qui est l'objet de la section suivante.

#### 4.1.3 Conditions au centre et sur le bords de la sphère

##### 4.1.3.1 Au centre de la sphère : $x = 0$

Dans le voisinage de  $x = 0$ , la fonction  $h(x)$ , représentant le potentiel gravitationnel du système, s'écrit :

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + h''(0)\frac{x^2}{2!} + h'''(0)\frac{x^3}{3!} + o(x^3) = ax^2 + bx^3 + o(x^3)$$

Il est clair en effet que d'une part  $h(0) = m\beta(\psi(0) - \psi(0)) = 0$  et d'autre part  $h'(0) = m\beta\psi'(0) = 0$  car la force s'appliquant sur une particule test située au centre d'un système sphérique est nulle.

En utilisant (4.5) nous trouvons alors :

$$v = xh' = 2ax^2 + 3bx^3 + o(x^3) \quad (4.7)$$

$$u = \frac{x^2 e^{-ax^2 - bx^3 + o(x^3)}}{2ax^2 + 3bx^3 + o(x^3)} \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{2a} - \frac{3b}{4a^2}x + o(x) \quad (4.9)$$

Nous utilisons ensuite l'équation de Poisson pour déterminer, par identification, les valeurs de  $a$  et de  $b$  :

$$(xv)' = 6ax^2 + 12bx^3 + o(x^3) = uv = x^2 + o(x^3) \quad (4.10)$$

Soit  $a = \frac{1}{6}$  et  $b = 0$ , puis en utilisant (4.7) et (4.9) nous trouvons finalement :

$$\lim_{r \rightarrow 0} (u, v) = (3, 0)$$

#### 4.1.3.2 Sur le bord de la sphère : $r = R$

Commençons par introduire quelques quantités sans dimension utiles :

$$X = \frac{R}{r_0} \quad , \text{ la valeur de } x \text{ en } r = R$$

$$\lambda = -\frac{HR}{GM^2} \quad , \text{l'opposé de l'énergie totale adimensionnée contenue dans la sphère}$$

$$\mu = \frac{m\beta GM}{R} \quad , \text{l'inverse de la température adimensionnée de la sphère}$$

Une intégration de l'équation de Poisson sur la boule supportant le système donne  $\left. \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=R} = \frac{GM}{R^2}$ , nous avons donc :

$$h'(X) = m\beta r_0 \frac{d\psi}{dr} = m\beta r_0 \frac{GM}{R^2} = \frac{\mu}{X} \text{ soit } \mu = Xh'(X)$$

Pour tout  $x$ ,  $v(x) = xh'(x)$ ; sur le bord de la boule nous avons donc :

$$v_m := v(X) = \mu \quad (4.11)$$

Soit :

$$K = \int \frac{\vec{p}^2}{2m} f d\vec{r} d\vec{p}$$

et :

$$W = m \int \vec{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} f d\vec{r} d\vec{p}$$

les valeurs respectives de l'énergie cinétique et potentielle totales contenues dans la boule isotherme considérée. Si l'on conserve les valeurs prises par les grandeurs concernées sur le bord du système, le théorème du viriel s'écrit :

$$2K + W = 4\pi R^3 P_e \quad (4.12)$$

où  $P_e$  est la pression qui s'exerce sur la sphère constituant le bord du système. Pour une sphère isotherme en boîte le calcul montre que  $K = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}\frac{M}{m}k_B T$ . Le théorème du viriel permet donc d'écrire dans ce cas :

$$\begin{aligned} H &= K + W = 4\pi R^3 P_e - K \\ &= -\frac{3}{2} \frac{M}{m\beta} + 4\pi R^3 P_e \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{3}{2} \frac{R}{m\beta GM} - 4\pi R^3 P_e \frac{R}{GM^2} \end{aligned}$$

Il est remarquable de noter par ailleurs qu'une sphère isotherme est un système barotropique : son équation d'état s'écrit  $P = \frac{1}{m\beta}\rho$ . Par continuité de la pression nous avons donc  $P_e = \frac{\rho(R)}{m\beta}$ . Cette relation combinée avec les diverses définitions introduites plus haut permettent d'obtenir successivement :

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{3}{2} \frac{1}{Xh'(X)} - 4\pi R^3 \frac{\rho(R)}{m\beta} \frac{R}{GM^2} \\ &= \frac{3}{2} \frac{1}{Xh'(X)} - \frac{e^{-h(X)}}{(h'(X))^2}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Par substitution, nous obtenons finalement les valeurs au bord  $u_m = u(X)$  et  $v_m = v(X)$  en fonction de  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\begin{cases} v_m = \mu \\ u_m = \frac{3}{2} - \lambda\mu \end{cases}\quad (4.14)$$

#### 4.1.4 Droites de Padmanabhan et diagramme de Milne

Les  $\mu$  dans le système (4.14) peuvent facilement s'éliminer et nous obtenons :

$$v_m = \frac{3}{2\lambda} - \frac{u_m}{\lambda}\quad (4.15)$$

Cette relation montre que si l'on ne fixe que la valeur de  $\lambda$ , les couples  $(u_m, v_m)$  se répartissent dans le plan  $(u, v)$  le long d'une droite de pente  $-1/\lambda$ , dite de Padmanabhan en référence à sa remarque dans l'article Padmanabhan [1989]. Nous remarquons aussi que toutes ces droites passent par le point  $(\frac{3}{2}, 0)$ .

Le choix de  $\lambda$  est indépendant de la valeur de la température, le point  $(u_m, v_m)$  associé à la sphère isotherme en boîte de rayon  $R$ , de masse  $M$ , d'énergie  $H$  et de température  $\beta$  se trouve donc à l'intersection de la droite de Padmanabhan fixée par  $\lambda$  et de la courbe  $v(u)$  solution de l'équation (4.6).

Cette courbe est obtenue numériquement à l'aide d'un solveur Runge-Kutta d'ordre 4, en utilisant les variables adimensionnées, le seul paramètre physique pour la résolution étant la valeur de  $X$  caractérisant le rayon et la température de la sphère. L'ensemble de ces courbes et des droites de Padmanabhan correspondantes sont représentées sur la figure 4.1. Nous constatons que plus la valeur de  $R$  augmente, plus la courbe solution est longue et finit par s'enrouler dans une spirale convergeant vers un point. Ce point correspond au cas  $R \rightarrow \infty$  et donc celui de la SIS.

En inspectant ce diagramme et ces droites, nous comprenons aisément que l'on ne peut pas mettre n'importe quelle sphère isotherme dans n'importe quelle boîte.

En effet, si l'on impose des valeurs de  $R$ ,  $M$  et  $H$  qui donnent une valeur trop grande  $\lambda > \lambda_c$ , la droite ne pourra pas avoir d'intersection avec la courbe. Cette intersection qui aurait fixé le dernier paramètre, la température, n'existant pas il en va de même de la sphère isotherme en boîte possédant ces caractéristiques physiques.

Nous remarquons même l'existence d'une seconde valeur caractéristique  $\lambda_0$  telle que :

- si  $\lambda < \lambda_0$  : il n'existe qu'une seule et unique sphère isotherme possible ;
- si  $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_c]$  : il existe plusieurs possibilités ;
- si  $\lambda > \lambda_c$  : il n'y a plus d'intersection possible !

Comme nous allons le voir dans la prochaine section, cette multiplicité de possibilités est associée à la stabilité des sphères concernées.

## 4.2 Courbe calorique

### 4.2.1 Motivation et définition

Les variables  $(u, v)$  de Milne ne sont pas directement reliées aux grandeurs physiques caractérisant la sphère isotherme en boîte considérée. Nous allons plutôt utiliser un autre moyen de

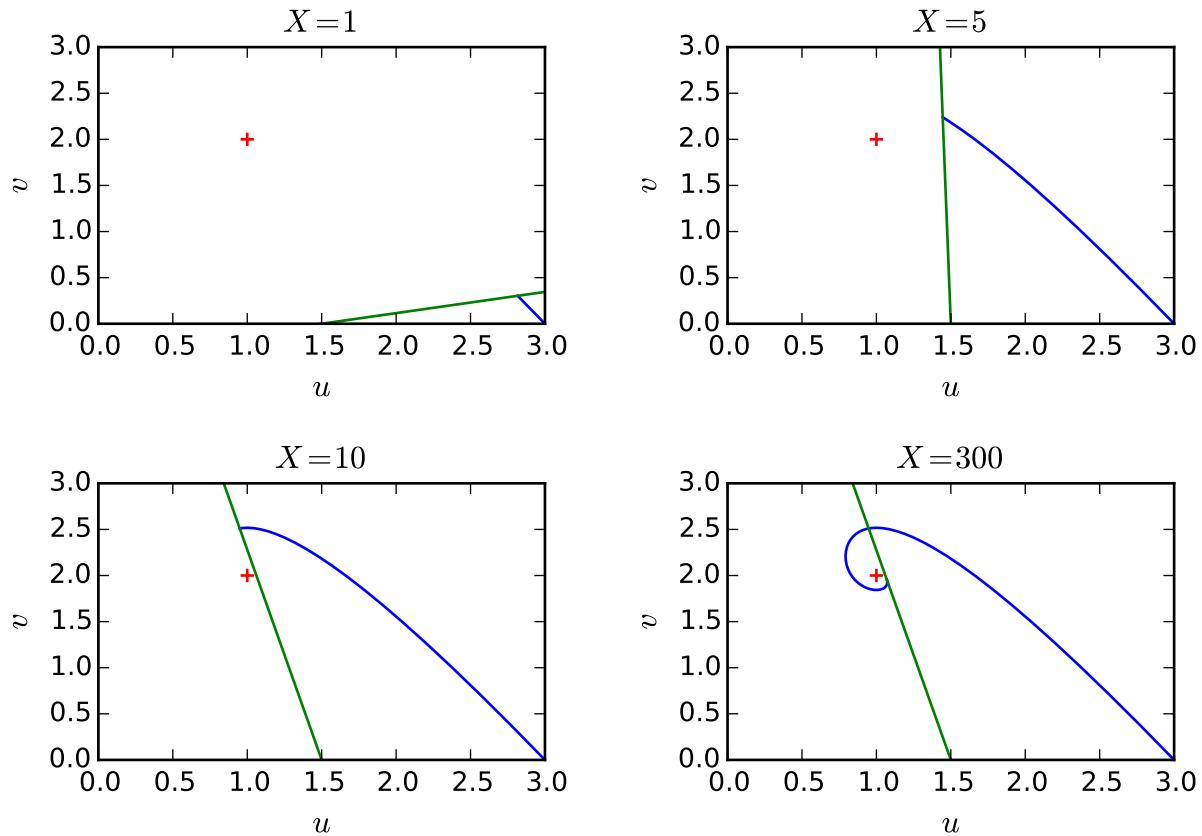


FIGURE 4.1 – Diagramme de Milne pour  $X = 1$ ,  $X = 5$ ,  $X = 10$  et pour  $X = 300$ . La sphère isotherme est représenté par la courbe bleue, la droite de Padmanabhan est en vert et la SIS en rouge.

représentation issu de la thermodynamique et appellé courbe calorique. Cette courbe est en fait directement reliée à celle de Milne et consiste à représenter  $\mu$  en fonction de  $\lambda$  ou de son opposé  $-\lambda$  car l'énergie d'un système autogravitant est souvent négative. En pratique nous résolvons le système différentiel  $u(v)$  en fixant  $X$ , nous déterminons les coordonnées du point extrême  $(u_m, v_m)$ , puis en utilisant (4.14) nous en déduisons la valeur du couple  $(\lambda, \mu)$  correspondant au choix de  $X$ .

Contrairement aux variables de Milne qui sont des fonctions de  $x$  (et donc de  $r$ ),  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes qui sont fixées dès que nous avons choisi  $H$ ,  $M$ ,  $R$  et  $\beta$ . Une sphère isotherme dans une boîte donnée est donc associée à une courbe de Milne dont l'extrémité est fixée par la droite de Padmanabhan ou bien par un point de la courbe calorique. Par contre, chaque point de la courbe calorique correspond à une sphère isotherme particulière et l'ensemble de tous les points de la courbe, qui forme lui aussi une spirale comme nous pouvons le voir sur la figure 4.2, représente donc une classe de systèmes physiques.

Dans le diagramme de Milne, la sphère isotherme singulière correspondait au point  $(1, 2)$ . Dans cette nouvelle représentation elle est associée au point  $\left(\lambda = \frac{3/2 - u_m}{v_m} = 1/4, \mu = v_m = 2\right)$ . De la même manière que sur le diagramme précédent, la courbe tend en spirant vers la sphère isotherme singulière, mais avant de l'atteindre, elle passe par un minimum de température, puis un maximum d'énergie délimitant ainsi des intervalles possibles d'existence d'une sphère gravitationnelle isotherme en boîte.

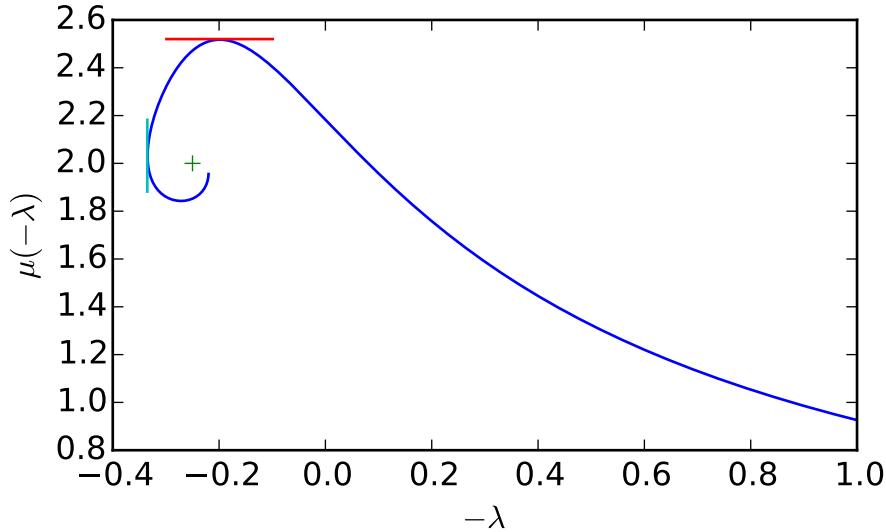


FIGURE 4.2 – Courbe calorique de la sphère isotherme en boîte :  $\mu(\lambda)$ . La croix verte représente la sis. La droite horizontale rouge et la verticale cyan représentent respectivement la température minimale et l'énergie maximale.

#### 4.2.2 Stabilité de la sphère isotherme en boîte

##### 4.2.2.1 Description statistique

En physique statistique, il existe deux ensembles capables de décrire la sphère isotherme telle que nous l'avons construite :

1. l'ensemble micro-canonical : nous imposons la valeur de l'énergie totale de la sphère, et l'équilibre est atteint pour une certaine valeur de la température. C'est par exemple le cas d'une sphère isotherme constituée de particules enfermées dans une boîte aux parois réfléchissantes. La dispersion de vitesse de ces particules, ou température cinétique du système, s'ajuste pour atteindre l'équilibre du viriel sans dissipation d'énergie.
2. l'ensemble canonique : nous imposons la valeur de la température de la sphère, le système rejoindra l'équilibre en ajustant son énergie totale. Ce processus peut par exemple se produire en mettant la sphère en contact avec un bain thermique qui imposera la température et rendra possible l'échange d'énergie susceptible d'atteindre l'état d'équilibre.

Lorsque l'on progresse le long de la courbe calorique vers la partie en spirale, en partant des petites valeurs de  $X$  i.e. les grandes valeurs de  $-\lambda$ , nous passons successivement par les deux points remarquables : le premier est caractérisé par une tangente horizontale et correspond à la valeur minimale qu'il est possible d'imposer à la température, le second est caractérisé par une tangente verticale et correspond à la valeur maximale de l'énergie susceptible d'être atteinte par une sphère isotherme de masse donnée et contenue dans une boîte de rayon fixé.

Les deux points correspondants et leurs tangentes ont été représentés sur la courbe calorique figure 4.2.

De nombreuses analyses dynamiques ont été menées concernant ces limites et ont révélé un lien étroit avec la stabilité du système. Une approche simple de cette problématique est d'étudier le contraste de densité de la sphère et son influence.

#### 4.2.3 De l'importance du contraste de densité

La densité de la sphère isotherme s'écrit :

$$\rho(r) = \frac{m}{\alpha^3} e^{-\beta m \psi(r)}$$

En dehors du cas de la SIS cette densité est toujours finie au centre du système, nous pouvons donc former la quantité sans dimension  $\rho^s(r) = \frac{\rho(r)}{\rho_0}$ . Un rapide calcul montre alors que :

$$\rho^s(x) = e^{-h(x)} = \frac{u(x)v(x)}{x^2} \quad (4.16)$$

Par définition, ou en utilisant les expressions asymptotiques de  $u$  et  $v$  en  $x = 0$ , nous avons  $\rho^s(0) = 1$ . Au bord du système, nous avons par contre  $\rho^s(X) = u_m v_m X^{-2}$ , la relation (4.14) permet donc d'écrire :

$$\rho^s(X) = \mu X^{-2} \left( \frac{3}{2} - \lambda \mu \right)$$

Nous pouvons donc former le contraste de densité entre le centre et le bord du système, il s'écrit :

$$\mathcal{R} = \frac{\rho(0)}{\rho(R)} = \frac{\rho^s(0)}{\rho^s(X)} = \frac{X^2}{\mu \left( \frac{3}{2} - \lambda \mu \right)} \quad (4.17)$$

Il est possible de déterminer numériquement les coordonnées des points de tangentes remarquables et donc en déduire les valeurs correspondantes du contraste de densité :

- La tangente horizontale est obtenue pour une sphère telle que  $X = 9.00$  avec  $(\lambda, \mu) = (-0.199; 2.518)$ . Son contraste de densité est de  $\mathcal{R}_c^\beta \approx 32.1$ .
- La tangente verticale est obtenue pour une sphère telle que  $X = 34.3$  avec  $(\lambda, \mu) = (-0.335; 2.032)$ . Son contraste de densité est de  $\mathcal{R}_c^H \approx 709$ .

Il est même possible d'obtenir numériquement les courbes  $\lambda(\mathcal{R})$  et  $\mu(\mathcal{R})$ , c'est l'objet de la figure 4.3. L'analyse de stabilité est alors possible. Le maximum de l'entropie dans l'ensemble

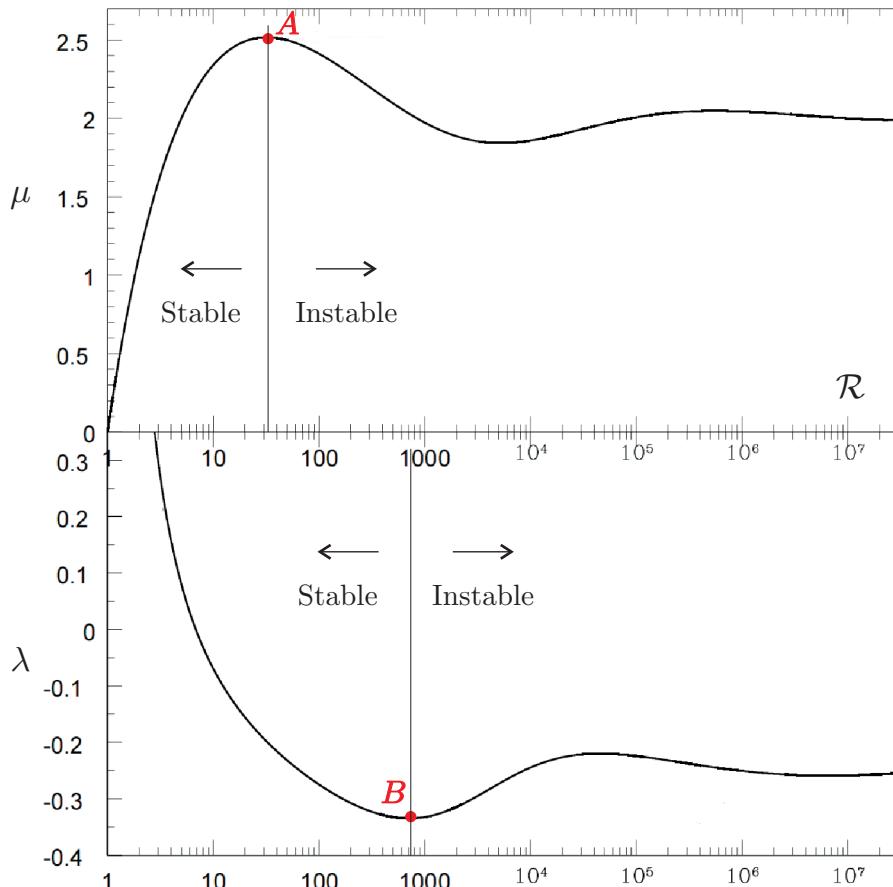


FIGURE 4.3 – Courbes  $\lambda(\mathcal{R})$  et  $\mu(\mathcal{R})$  tirées de l'article Yoon et al. [2011]

microcanonique ( $\delta S = 0$  avec  $H = \text{cte}$ ) dans un domaine borné correspond à la sphère isotherme

en boîte. Tous les points de la courbe  $\lambda(\mathcal{R})$  correspondent à  $\delta S = 0$ , au point critique  $B$  de coordonnées  $\mathcal{R} = 709$  et  $\lambda = -0.335$  nous avons  $\frac{d\lambda}{d\mathcal{R}} = 0$  et  $\delta^2 S = 0$  (voir Lynden-Bell and Wood [1968], Padmanabhan [1989] et Padmanabhan [1990]). Dans les deux derniers de ces articles, Padmanabhan montre que tous les points de la courbe  $\lambda(\mathcal{R})$  situés avant  $B$ , i.e.  $\mathcal{R} < 709$ , correspondent à des situations telles que  $\delta^2 S > 0$ , c'est-à-dire des maxima locaux d'entropie et sont donc des configurations stables. Par contre, tout ceux situés après le point  $B$ , i.e.  $\mathcal{R} > 709$ , sont toujours instables : soit parce que  $\delta^2 S < 0$  dans un premier temps (Padmanabhan [1989]), soit pour des raisons dynamiques plus compliquées (voir Katz [1978] et Katz [1979]).

Comme le montre Chavanis [2002], dans l'ensemble canonique, la situation est différente. En lieu et place de l'entropie, le potentiel d'étude de la stabilité est l'énergie libre  $F = H - TS$ . La courbe à étudier est maintenant  $\mu(\mathcal{R})$ . Elle fait apparaître deux régions. Tous les points de cette courbe situés avant le point  $A$  de coordonnées  $\mathcal{R} = 32.1$  et  $\lambda = 2.518$ , i.e.  $\mathcal{R} < 32.1$ , sont tels que  $\delta^2 F > 0$  : ils correspondent à des sphères isothermes en boîte stables. Au delà du point  $A$ , i.e.  $\mathcal{R} > 32.1$ , le système est instable dans l'ensemble canonique.

De manière concrète, nous retiendrons que l'étude de la stabilité d'une sphère isotherme en boîte est de manière générale contrôlée par son contraste de densité et l'étude des tangentes horizontales ou verticales de sa courbe calorique.

- Pour une boîte isolée aux parois réfléchissantes (situation microcanonique), le point critique de stabilité est associé à la tangente verticale la plus à gauche sur la courbe calorique  $\mu(-\lambda)$  de la figure 4.2.
- Pour une boîte dont les parois (conductrices de chaleur...) sont en contact avec un thermostat, le point critique de stabilité est associé à la tangente horizontale la plus en haut sur la courbe calorique  $\mu(-\lambda)$  de la figure 4.2.

# Chapitre 5

## Le modèle de King

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Équation de Poisson</b>	<b>37</b>
<b>5.2</b>	<b>Étude numérique</b>	<b>38</b>
5.2.1	Adimensionnement de l'équation de Poisson	38
5.2.2	Conditions aux limites et paramètres du modèle	39
5.2.3	Résolution numérique	39
<b>5.3</b>	<b>Température d'un modèle de King</b>	<b>40</b>
5.3.1	Calcul de la température en chaque point	41
5.3.2	Température moyenne d'un modèle de KING	42
<b>5.4</b>	<b>Synthèse</b>	<b>43</b>

---

Face aux problèmes soulevés par la sphère isotherme singulière et afin de prendre en considération les contingences observationnelles, I. King proposa en 1966 un nouveau modèle qui consiste à limiter l'extension la sphère par des arguments physiques et « à la main ». Il introduit pour cela une énergie maximale, au-delà de laquelle une particule n'est plus liée au système. Cette énergie, qui s'interprète comme une énergie de libération, implique une vitesse maximale ainsi qu'un rayon au-delà desquels une particule quitterait le système.

### 5.1 Équation de Poisson

La fonction de distribution associée au modèle de King s'écrit (voir King [1966b]) :

$$f_K(E) = \begin{cases} \rho_0 (2\pi m \sigma^2)^{-3/2} \left( e^{\frac{E_l - E}{\sigma^2}} - 1 \right) & \text{si } E < E_l \\ 0 & \text{si } E > E_l \end{cases} \quad (5.1)$$

où le paramètre  $\sigma^2$  représente la dispersion d'énergie du système. Le paramètre  $\rho_0$  correspond à la densité de masse au centre du système. L'énergie  $E_l$  de libération d'une particule s'écrit :  $E_l = \frac{p_l^2}{2m} + m\psi(r)$ , où  $\psi(r)$  est le potentiel gravitationnel de la sphère de King et  $p_l$  l'impulsion de libération fonction de  $r$ .

La densité de masse s'écrit toujours à partir de la fonction de distribution :

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \int_0^{p_l} f_K(E) 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{\rho_0}{(2\pi m \sigma^2)^{3/2}} \int_0^{p_l} \left\{ e^{\frac{E_l - E}{\sigma^2}} - 1 \right\} 4\pi p^2 dp \end{aligned}$$

L'énergie d'une particule test s'écrit  $E = \frac{p^2}{2m} + m\psi$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \frac{\rho_0}{(2\pi m\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{p_l} \left\{ e^{\frac{E_l - \frac{p^2}{2m} - m\psi}{\sigma^2}} - 1 \right\} 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{4\pi\rho_0}{(2\pi m\sigma^2)^{3/2}} \left( e^{\frac{E_l - m\psi}{\sigma^2}} \int_0^{p_l} e^{-\frac{p^2}{2m\sigma^2}} p^2 dp - \int_0^{p_l} p^2 dp \right)\end{aligned}$$

Une intégration par partie de la première intégrale permet alors d'écrire :

$$\rho(r) = \frac{4\pi\rho_0}{(2\pi m\sigma^2)^{3/2}} \left( e^{\frac{E_l - m\psi}{\sigma^2}} \left[ -m\sigma^2 p_l e^{-\frac{p_l^2}{2m\sigma^2}} + m\sigma^2 \int_0^{p_l} e^{-\frac{p^2}{2m\sigma^2}} dp \right] - \frac{p_l^3}{3} \right)$$

En introduisant un nouveau potentiel  $\phi(r)$  tel que :

$$p_l^2 = 2m(E_l - m\psi(r)) = 2m\phi(r) \quad (5.2)$$

il vient maintenant :

$$\rho(r) = \rho_0 \left( -\sqrt{\frac{4\phi}{\pi\sigma^2}} \left( 1 + \frac{2\phi}{3\sigma^2} \right) + \frac{2e^{\frac{\phi}{\sigma^2}}}{\sqrt{2m\pi\sigma^2}} \int_0^{p_l} e^{-\frac{p^2}{2m\sigma^2}} dp \right)$$

la dernière intégrale s'exprime directement en utilisant la fonction d'erreur :

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$$

la densité du modèle de King s'écrit donc :

$$\rho(r) = \rho_0 \left( -\sqrt{\frac{4\phi}{\pi\sigma^2}} \left( 1 + \frac{2\phi}{3\sigma^2} \right) + e^{\frac{\phi}{\sigma^2}} \text{erf} \left( \sqrt{\phi}/\sigma \right) \right) \quad (5.3)$$

L'équation de Poisson pour le potentiel  $\phi(r) = E_l - m\psi(r)$  s'écrit donc :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -4m\pi Gr^2 \rho_0 \left\{ -\sqrt{\frac{4\phi}{\pi\sigma^2}} \left( 1 + \frac{2\phi}{3\sigma^2} \right) + e^{\frac{\phi}{\sigma^2}} \text{erf} \left( \sqrt{\phi}/\sigma \right) \right\} \quad (5.4)$$

Malgré le fait que cette équation n'admette pas de solution explicite, son étude numérique ne pose pas de problème majeur.

## 5.2 Étude numérique

### 5.2.1 Adimensionnement de l'équation de Poisson

L'adimensionnement des énergies se fait au moyen de  $\sigma^2$  et celui des longueurs via  $r_c$ , en posant :

$$\gamma = \frac{\phi}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad x = \frac{r}{r_c}$$

Il vient alors :

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d\gamma}{dx} \right) = -\frac{4m\pi Gr_c^2 \rho_0}{\sigma^2} x^2 \left\{ -\sqrt{\frac{4\gamma}{\pi}} \left( 1 + \frac{2\gamma}{3} \right) + e^\gamma \text{erf}(\sqrt{\gamma}) \right\} \quad (5.5)$$

L'adimensionnement est complet en prenant comme chaque fois dans ce contexte :

$$r_c^2 = \frac{\sigma^2}{4m\pi G\rho_0} \quad (5.6)$$

L'équation de Poisson a résoudre numériquement s'écrit finalement :

$$\frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d\gamma}{dx} \right) = x^2 \frac{d^2\gamma}{dx^2} + 2x \frac{d\gamma}{dx} = -x^2 \left\{ -\sqrt{\frac{4\gamma}{\pi}} \left( 1 + \frac{2\gamma}{3} \right) + e^\gamma \text{erf}(\sqrt{\gamma}) \right\} \quad (5.7)$$

### 5.2.2 Conditions aux limites et paramètres du modèle

Le système étant isolé et à l'équilibre, son centre d'inertie est au repos. Sa symétrie sphérique implique que la résultante des forces qui s'applique à une particule test située en  $r = 0$  s'annule. Cette force est proportionnelle au gradient du potentiel, nous avons donc :

$$\frac{d\gamma}{dr} \Big|_{r=0} = \frac{d}{dr} \left( \frac{E_l - m\psi}{\sigma^2} \right) \Big|_{r=0} = -\frac{m}{\sigma^2} \frac{d\psi}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \quad (5.8)$$

En l'absence de vitesse, l'énergie minimale est atteinte pour la plus petite valeur de  $m\psi(r)$ , soit  $m\psi(0)$ .

La quantité  $\phi(r) = E_l - m\psi(r)$  représente la quantité d'énergie qu'il faut fournir à une particule située à la distance  $r$  du centre du système afin qu'elle sorte du système. Il est clair que le potentiel  $\psi(r)$  est une fonction partout négative ou nulle, ainsi  $\phi(r)$  est à l'inverse positive ou nulle. Au centre, cette quantité vaudra :

$$\phi(0) = E_l - m\psi(0)$$

Il est donc commode d'introduire la quantité adimensionnée :

$$W_0 = \gamma(0) = \frac{E_l - m\psi(0)}{\sigma^2} > 0 \quad (5.9)$$

Nous éviterons de la prendre nulle, car, dans ce cas, le système ne contient au plus aucune étoile !

Le choix de  $\gamma(0) = W_0$  et le fait que la dérivée de  $\gamma$  en  $r = 0$  soit nulle permettent la résolution numérique de l'équation (5.7). Cette résolution permet d'obtenir le rayon  $R$  de la sphère de King, premier zéro de la fonction  $\phi(r)$ . La vitesse d'une particule test située en  $r = R$  est la vitesse de libération du système, en introduisant  $X = \frac{R}{r_c}$  nous avons bien :

$$E_l = m\psi(X) \Leftrightarrow \gamma(X) = 0 \quad (5.10)$$

Le paramètre  $W_0$  fixe donc toutes les caractéristiques nécessaires à la résolution numérique du modèle de King. Le rayon de la sphère de King est une fonction croissante de  $W_0$ . Comme nous pouvons le voir sur la définition (5.9), une même valeur de  $W_0$  peut correspondre à des systèmes possédant des propriétés physiques différentes caractérisées par une profondeur du puits de potentiel  $\psi(0)$ , une dispersion de vitesse  $\sigma^2$  ou une énergie de libération différente. Ces différences ne concernent que le système une fois redimensionné.

### 5.2.3 Résolution numérique

L'algorithme que nous utiliserons pour résoudre l'équation (5.4) est un Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4). Nous devons écrire l'équation différentielle comme un système d'ordre 1, ce que nous faisons en posant  $u = \frac{d\gamma}{dx}$  :

$$\begin{cases} u = \gamma' \\ u' = -\left\{ -\sqrt{\frac{4\gamma}{\pi}} \left( 1 + \frac{2\gamma}{3} \right) + e^\gamma \operatorname{erf}(\sqrt{\gamma}) \right\} - 2\frac{u}{x} \end{cases} \quad (5.11)$$

Un terme en  $1/x$  est apparu, l'équation semble donc singulière en 0. Un développement limité de la fonction  $\gamma$  autour de 0 nous apprend qu'il n'en est rien, il n'y a pas de divergence. Un rapide calcul montre que toutes les dérivées d'ordre impair de  $\gamma(x)$  s'annulent en  $x = 0$ , et que :

$$\gamma(0) = W_0, \quad \gamma''(0) = -\frac{\rho(W_0)}{3\rho_0} \text{ et } \gamma^{(4)}(0) = \frac{2\rho(W_0)}{5\rho_0} \left\{ \sqrt{\frac{W_0}{\pi}} - \frac{e^{W_0} \operatorname{erf}(\sqrt{W_0})}{2} \right\}$$

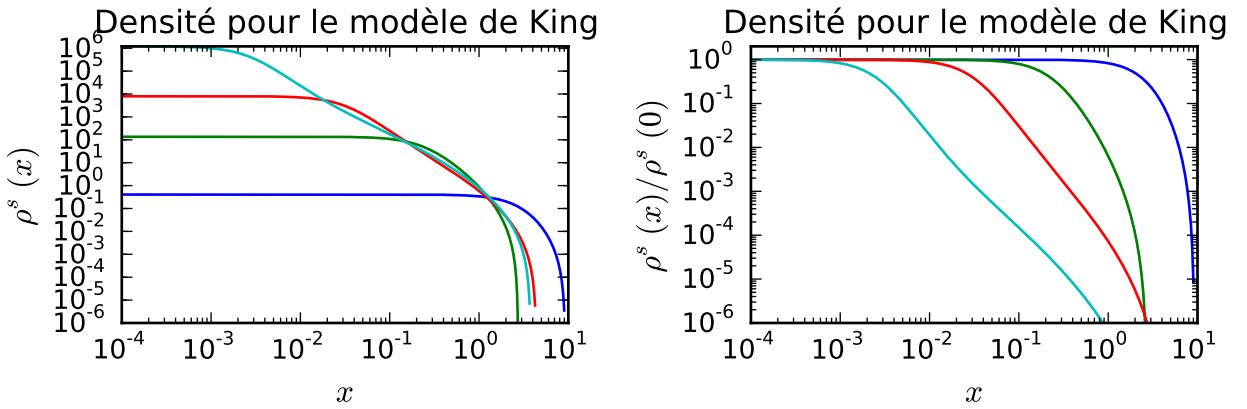


FIGURE 5.1 – Différents profils de densité pour un modèle de King. En bleu foncé :  $W_0 = 1$ , en vert  $W_0 = 5$ , en rouge  $W_0 = 9$  et en bleu clair  $W_0 = 14$ .

Nous pouvons donc écrire directement un développement de Taylor de  $\gamma(x)$  à l'ordre 5 en  $x = 0$ . La résolution des équations nous permet alors d'avoir les graphiques de la figure 5.1 (les graphiques sont adimensionnés).

La résolution numérique du système (5.11) permet d'obtenir la fonction  $\gamma(x)$  pour chaque donnée initiale  $W_0$ . De cette fonction nous en déduisons la densité volumique de masse du système adimensionnée  $\rho^s(x)$  par la relation :

$$\rho^s(x) = \frac{\rho(x)}{\rho_0} = e^{\gamma(x)} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\gamma(x)}\right) - \sqrt{\frac{4\gamma(x)}{\pi}} \left(1 + \frac{2\gamma(x)}{3}\right)$$

En échelle logarithmique, sa densité normalisée est très bien approchée sur plus de 5 décades par deux segments de droites : l'un horizontal décrit le cœur de la sphère de densité quasiment constante, l'autre de pente  $-\alpha$  décrit un halo autosimilaire entourant le cœur. L'intersection des droites portant ces deux segments est une bonne approximation de ce que l'on pourrait appeler le rayon du cœur de la sphère de King considérée.

Pour les petites valeurs de  $W_0$ , typiquement  $W_0 \leq 5$ , la sphère de King est essentiellement constituée d'un très large cœur de densité quasiment constante. Par contre, dès que  $W_0 \geq 15$ , le cœur ne renferme plus qu'une faible proportion de la masse du système et la sphère de King est essentiellement constituée d'un halo autosimilaire dont la densité est comparable à celle d'une sphère isotherme singulière. Cette comparaison n'est valide que jusqu'à un certain rayon où la densité de la sphère de King chute violemment à cause de la troncature introduite par l'énergie de libération. Une étude plus fine montre que les halos des sphères de King sont associés à des profils autosimilaires de pente étagée entre  $-5$  et  $-2$  lorsque  $W_0$  varie de 5 à 15. La figure 5.2 illustre ce comportement.

Une sphère de King définie par une grande valeur de  $W_0$  est très proche d'une sphère isotherme singulière, sa température est donc vraisemblablement indépendante de la distance au centre. Il est intéressant de préciser cette idée de façon plus quantitative. C'est l'objet de la prochaine section.

### 5.3 Température d'un modèle de King

La température cinétique d'un système autogravitant est la valeur moyenne dans l'espace des positions du carré de la vitesse d'une particule test. Comme  $\vec{p} = m\vec{v}$ , si  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  est la fonction de distribution de ce système et  $\rho(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}$  sa densité, alors sa température cinétique  $T(\vec{r}, t)$  est définie par la relation

$$T(\vec{r}, t) = \frac{\int v^2 f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}}{\int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}} = \frac{1}{m\rho(\vec{r}, t)} \int p^2 f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p} \quad (5.12)$$

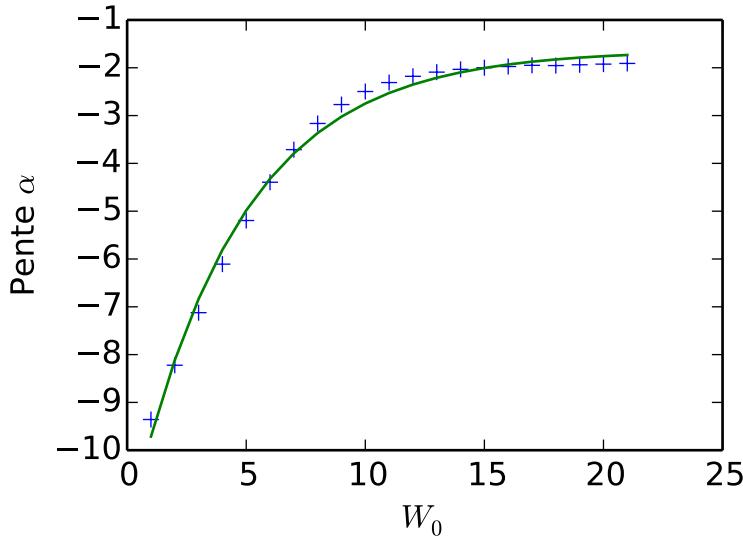


FIGURE 5.2 – Évolution de la pente du halo de la sphère de King en fonction de  $W_0$

Un rapide calcul montre que dans le cas de la sphère isotherme (3.3), la température  $T(\vec{r}, t) = (k_B \beta)^{-1}$  est constante en chaque point, d'où le nom de ce système. Nous avons vu que la sphère de King peut s'apparenter à une sphère isotherme tronquée en énergie, étudions l'influence de cette troncature sur la température.

### 5.3.1 Calcul de la température en chaque point

Dans le cas de la fonction de distribution de King, nous avons :

$$\int_0^{p_l} p^2 f_K(E) dp = 4\pi \frac{\rho_0}{(2\pi m \sigma^2)^{3/2}} \int_0^{p_l} \left( e^{\frac{E_l - E}{\sigma^2}} - 1 \right) p^4 dp \quad (5.13)$$

avec  $p_l = \sqrt{2m(E_l - m\psi(r))} = \sqrt{2m\phi(r)}$ . Une intégration par parties et quelques lignes de calcul donnent alors directement :

$$\int_0^{p_l} p^2 f_K(E) dp = \frac{4\pi\rho_0}{m^2 (2\pi m \sigma^2)^{3/2}} \left( \frac{3}{2} (m\sigma^2)^2 \sqrt{2m\pi\sigma^2} \left[ e^{\frac{\phi}{\sigma^2}} \text{erf} \left( \sqrt{\frac{\phi(r)}{\sigma^2}} \right) - \sqrt{\frac{4\phi(r)}{\pi\sigma^2}} \left( 1 + \frac{2\phi(r)}{3\sigma^2} \right) \right] - \frac{(2m\phi(r))^{5/2}}{5} \right) \quad (5.14)$$

Nous en déduisons la température cinétique de la sphère de King en divisant par le produit  $m\rho$ ; après quelques simplifications et en utilisant la fonction  $\gamma(r) = \phi(r)/\sigma^2$ , il vient :

$$T_K(r) = \frac{3\sigma^2}{m} \left( 1 - \frac{8}{15\sqrt{\pi}} \left( \frac{\rho(r)}{\rho_0} \right)^{-1} (\gamma(r))^{5/2} \right) \quad (5.15)$$

Cette expression n'est pas très explicite mais son calcul numérique ne présente pas de difficulté dès lors que l'on a déterminé, numériquement aussi, la fonction  $\phi(r)$ . Il s'avère intéressant de tracer la fonction :

$$\zeta(r) = \left( \frac{\rho(r)}{\rho_0} \right)^{-1} (\gamma(r))^{5/2}$$

et de la comparer avec la valeur 1. C'est l'objet de la figure 5.3. Outre le facteur  $\frac{8}{15\sqrt{\pi}} \approx 0.3$ , nous remarquons que la température  $T(r)$  est quasiment constante sur dans les régions où la densité est importante ( $\frac{\rho(r)}{\rho_0} > 10^{-5}$  pour  $W_0 = 15$ ).

À partir de maintenant, nous assimilerons un modèle de King à une sphère isotherme.

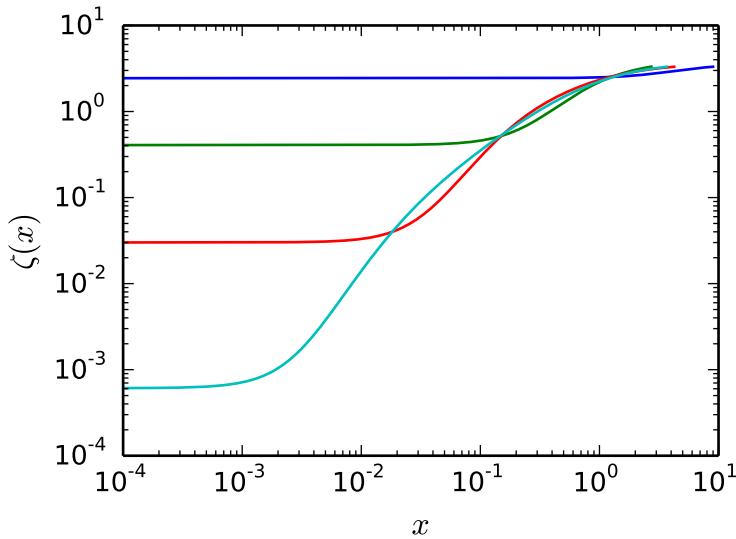


FIGURE 5.3 – Température d'un modèle de King : la fonction  $\zeta(r)$ . Le code couleur est le même que pour la figure 5.1

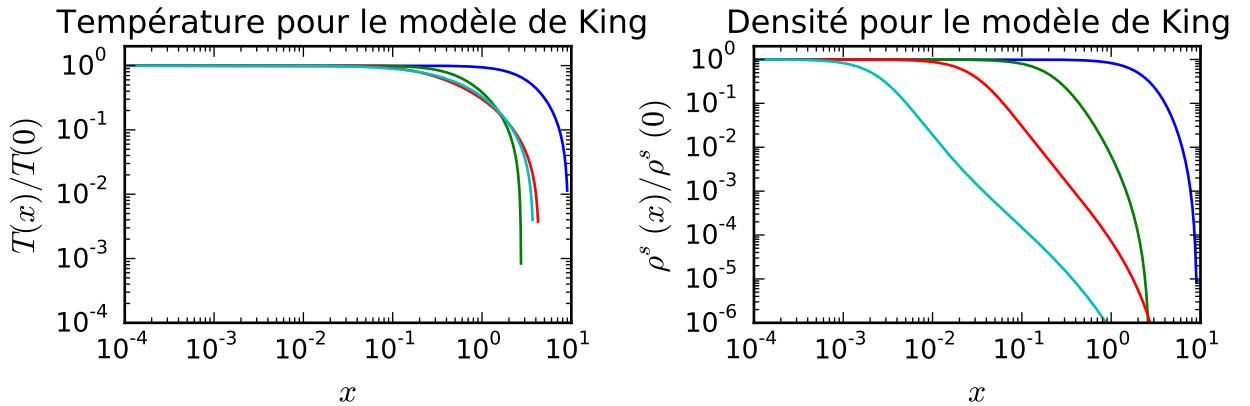


FIGURE 5.4 – Température et densité d'un modèle de King : les fonctions  $\frac{T(x)}{T(0)}$  et  $\frac{\rho^s(x)}{\rho^s(0)}$ . Le code couleur est le même que pour la figure 5.1

### 5.3.2 Température moyenne d'un modèle de King

Hormis le cas particulier de la sphère isotherme, la température cinétique est une fonction de la position<sup>1</sup>. Nous pouvons tout de même définir une température moyenne en intégrant la température cinétique dans l'espace des positions. Nous prendrons par exemple et par définition :

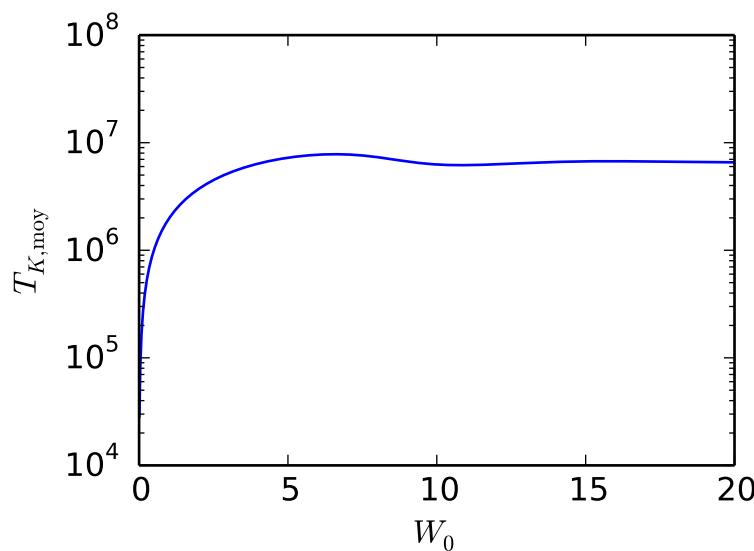
$$T_{\text{moy}} = \frac{\int \frac{p^2}{m^2} f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p} d\vec{r}}{\int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p} d\vec{r}} \quad (5.16)$$

Il est clair que pour la sphère isotherme  $T_{\text{moy}} = T(r) = T$ ; pour la sphère de King un calcul final montre que :

$$T_{K,\text{moy}} = \frac{3\sigma^2}{m} - \frac{32\pi^2\rho_0}{5Mm(\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^R r^2 (\phi(r))^{5/2} dr \quad (5.17)$$

Cette relation montre que la température moyenne d'un modèle de King est toujours inférieure à celle des modèles de sphère isotherme vus précédemment.

1. Il s'agit même d'une fonction du temps si le système est hors de l'équilibre. Dans ce cas la notion de température perd un peu de son sens.

FIGURE 5.5 – Température moyenne en fonction de  $W_0$ 

La courbe 5.5 présente la variation de la température moyenne. Il est intéressant de noter que pour  $W_0$  dans l'intervalle [5; 20] la température moyenne ne varie plus, nous confirmant ce que l'on pouvait voir sur la figure 5.4 : passé une valeur de  $W_0$ , tous les King semblent avoir la même température.

## 5.4 Synthèse

Nous avons maintenant étudié trois modèles pouvant décrire l'état d'équilibre d'un amas d'étoile :

**La sphère isotherme (SI)** est un modèle thermodynamique étudié sur un support spatial infini. Ce modèle avait l'avantage de posséder une solution analytique, mais cette solution présente, comme nous l'avons montré, une masse infinie.

**La sphère isotherme en boîte (SIB)** est une variante du modèle de SI avec une extension finie. Grâce à ce modèle, nous avons appris que l'étude de la stabilité était pilotée par un seul paramètre important : le contraste de densité  $\mathcal{R}_c$ .

**Le modèle de King** est lui aussi une variante de SI, mais avec une coupure plus physique, effectuée après coup. Il nous a permis de montrer que l'évolution de la pente du halo, et donc du contraste de densité, pouvait être liée à un seul paramètre :  $W_0$ . Une étude de sa température nous a confirmé que ce modèle pouvait être considéré comme isotherme dès lors qu'il est un peu évolué ( $W_0 > 5$ ) et qu'il correspond à un amas globulaire (pente du halo supérieur à  $-5$ ).



# Chapitre 6

# Gravitation et instabilités

## Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>L'instabilité d'orbites radiales . . . . .</b>	<b>45</b>
6.1.1	L'histoire de l'instabilité d'orbites radiales . . . . .	46
6.1.2	La méthode symplectique . . . . .	49
<b>6.2</b>	<b>L'instabilité de Jeans . . . . .</b>	<b>51</b>
6.2.1	Généralités . . . . .	51
6.2.2	L'instabilité de Jeans fluide . . . . .	52
6.2.3	État final de l'effondrement de Jeans . . . . .	54
<b>6.3</b>	<b>Stabilité de l'état post-collapse . . . . .</b>	<b>55</b>
6.3.1	Modèle et calculs . . . . .	55
6.3.2	Énergie cinétique . . . . .	56
6.3.3	Conclusion du modèle . . . . .	56

---

Les instabilités dans le domaine de la gravitation peuvent se regrouper en trois catégories. L'instabilité gravitationnelle de base qui fait s'effondrer un système froid et trop dense sous l'effet de son propre poids reçoit l'appellation générale d'instabilité de Jeans. L'instabilité dite d'Antonov ou instabilité gravothermale, que nous avons étudiée dans le cas particulier de la sphère isotherme en boîte au chapitre 4, résulte du fait que les systèmes autogravitants ont une chaleur spécifique négative qui conduit à un réaction d'emballlement dans certaines conditions. Enfin, la plus subtile est sans doute l'instabilité d'orbites radiales caractérisant les systèmes sphériques dont l'anisotropie radiale dans l'espace des vitesses est trop importante.

Dans ce chapitre de référence pour notre propos, nous présenterons les fondamentaux des deux instabilités que nous n'avons pas encore étudiées, puis nous mènerons une analyse de stabilité du produit final de l'instabilité de Jeans dans un cadre idéalisé.

En fin de chapitre, nous serons alors en mesure de présenter un scénario dynamique basé sur ces instabilités et visant à rendre compte des différentes observations ou simulations dont nous disposons actuellement.

Dans la partie suivante nous testerons numériquement certains points de ce scénario global à travers un certain nombre de cas test.

## 6.1 L'instabilité d'orbites radiales

L'un des vieux problèmes de la dynamique galactique est l'étude des systèmes autogravitants formés de particules majoritairement en orbite radiale, très allongées et passant donc près du centre du système. Il est très vite apparu que de tels systèmes initialement sphériques pourraient être instables et perdre leur symétrie dans ce qu'il est convenu d'appeler l'instabilité d'orbite radiale IOR ou ROI en anglais. Ce mécanisme pourrait même être à l'origine de la forme de certains objets à l'échelle galactique attendu que la gravitation peine à former des structures possédant une direction privilégiée.

### 6.1.1 L'histoire de l'instabilité d'orbites radiales

#### 6.1.1.1 Les pionniers

Le premier résultat publié est l'œuvre de Vadim Antonov [1973]. Il s'agit d'un résultat analytique concernant un système constitué de  $N$  particules. L'équation de Poisson correspondante est étudiée en perturbation dans un cas limite correspondant aux orbites radiales. Un système différentiel est alors produit pour un certain « déplacement » des orbites. Le résultat est obtenu en utilisant une fonction de Lyapunov stricte pour ce système différentiel.

La même année, Michel Hénon [1973] publie l'un des tout premiers résultats numériques dans ce domaine. Utilisant  $N = 1000$  coquilles concentriques distribuées selon un modèle polytropique  $f(E) \propto E^n$ , il vérifie la stabilité obtenue analytiquement par Antonov dès les années 60 pour ce type de système. Puis, en étendant son modèle au cas anisotrope (dans l'espace des vitesses) des polytropes généralisés  $f(E) \propto E^n L^{2m}$ , il montre numériquement que le système devient instable lorsque  $m \rightarrow -1$ , qu'il identifie à la fonction de distribution  $f(E) \propto E^n \delta(L^2)$  et donc aux systèmes présentant de plus en plus d'orbites radiales. L'instabilité est identifiée dans l'espace des phases qui montre une évolution du système dès que celui-ci est trop anisotrope dans l'espace des vitesses. Le mécanisme de cette instabilité n'est pas précisé, l'effet de cette instabilité dans l'espace des positions (la fameuse barre) n'est pas non plus abordé. Cet article ne fait pas référence au travail d'Antonov [1973]. L'utilisation de coquilles sphériques ne permet pas de prendre en compte d'éventuelles interactions non radiales.

En utilisant les méthodes de Water-Bag, qui consistent à décomposer la fonction de distribution sur une base de fonctions continues par morceaux, une équipe française Gillon et al. [1976] publie un résultat affirmant la stabilité de tous les systèmes autogravitants  $f(E, L^2)$  contre des perturbations non-sphériques<sup>1</sup>. Le même Antonov ayant déjà réglé le cas des perturbations à symétrie sphérique pour ces mêmes systèmes anisotropes, tout les cas étaient traités : tout système autogravitant sphérique (isotrope ou non dans l'espace des vitesses) est stable contre toutes les formes de perturbations. Le cas des systèmes constitués d'orbites de plus en plus radiales, inclus dans le champ d'action du résultat de l'équipe française est donc prédit stable par cette analyse, en désaccord patent avec le résultat analytique d'Antonov [1973], et les simulations de Hénon [1973].

#### 6.1.1.2 Des avancées conséquentes

Sans faire référence au résultat de l'équipe française, Polyachenko and Shukhman [1981] proposent une formulation matricielle du problème de la stabilité (basée sur une décomposition en série de Fourier des perturbations) qui leur permet de prouver qu'une fonction de distribution de la forme  $f(E - \lambda L^2/r_a^2)$ , modèle que l'on appellera plus tard Ossipkov-Merritt, décrit un modèle instable si  $r_a^2$  est suffisamment petit. Leurs résultat est contraire à celui proposé par Gillon et al. [1976], et va dans le sens d'Antonov et Hénon. Cet article contient de plus un critère de stabilité qui sera repris dans le livre de Fridman et al. [1984a,b], et qui affirme qu'un système sphérique déclenche une instabilité d'orbite radiale dès que l'on a  $2T_r/T_\perp > 1.75 \pm 0.25$  où  $T_r$  et  $T_\perp$  représentent respectivement les énergies cinétiques radiale et perpendiculaire totales contenues dans le système.

La première étude numérique globale et à peu près réaliste du problème de l'effondrement gravitationnel est effectuée par van Albada [1982]. Cette étude considère des ensembles de  $N = 5000$  particules de même masse dont les conditions initiales sont réparties en 2 catégories : les sphères homogènes de taille 1 et des systèmes composés de 20 sphères homogènes (clumps) contenant chacune 250 particules. Ces clumps possèdent initialement un rayon égal à 0.4 et leurs centres sont positionnés uniformément dans une boule de rayon 1. Ces différentes conditions initiales sont abandonnées à leur gravité dans 3 conditions initiales de vitesse déterminées par le rapport du viriel initial :  $-2T/U = 0.5, 0.2$  et  $0.1$ . Le résultat est clair : les sphères homogènes ne souffrent pas (dans les cas d'effondrement considérés) d'instabilité d'orbite radiale. Par contre,

---

1. La seule condition requise est le fait que  $\partial f / \partial E < 0$  et  $\partial f / \partial L^2 < 0$ , ce qui correspond au cas physique.

les assemblages de grumeaux qui s'effondrent violemment ( $-2T/U = 0.1$ ) produisent un équilibre triaxial. Même si cet article ne parle pas de l'instabilité d'orbite radiale, il confirme que les profils (luminosité et densité) obtenus numériquement sont compatibles avec ceux qui sont observés pour les galaxies (loi en  $r^{1/4}$ ).

Dans un article à la fois numérique et analytique, Barnes et al. [1986] abordent l'une des premières études globale de l'instabilité. L'étude numérique consiste à refaire les expériences avec des coquilles de Michel Hénon en utilisant maintenant des techniques à  $N$  corps pour des valeurs de  $N$  comprises entre  $10^3$  et  $10^4$ . Ils confirment les résultats de leur prédécesseur en faisant une étude plus exhaustive dans l'espace des paramètres des modèles utilisés par Hénon, Polyachenko et Shukhman ; ils confirment d'ailleurs le critère de stabilité des russes et proposent une explication analytique qui ferait passer l'instabilité d'orbite radiale pour une sorte d'instabilité de Jeans<sup>2</sup> : la pression stellaire dans la direction tangentielle devient insuffisante pour compenser la tendance naturelle qu'ont les orbites radiales à se condenser. Il est à noter que l'école russe propose le même style d'interprétation pour l'instabilité dans le livre de Fridman et al. [1984b] (p. 148).

Le travail suivant sur le sujet est publié par Merritt and Aguilar [1985]. Il se concentre sur les aspects numériques et sur l'opportunité que représente cette instabilité dans le contexte de la formation des galaxies, c'est la première fois que cette idée surgit dans la littérature. Les auteurs utilisent une première famille de systèmes dont le profil de densité est « de type galactique » :  $\rho(r) \propto (r/r_o)^{-2}(1+r/r_o)^{-2}$  (c'est le modèle de Jaffe qui est compatible avec le profil de luminosité en  $r^{1/4}$ ). Il possède en outre la bonne propriété d'être facilement transposable en un modèle anisotrope en suivant l'algorithme d'Ossipkov-Merritt<sup>3</sup>. Il s'agit d'expériences à  $N$  corps avec  $N = 5 \times 10^3$ , l'état initial est un équilibre dont le degré d'anisotropie radiale est contrôlé par la valeur de  $r_o$ . Les conclusions sont les suivantes : la transition stable/instable est très rapide et elle se produit pour un rapport  $2T_r/T_\perp \approx 2.5$ , soit un peu plus que ce qui est prévu par le critère russe. L'étude de deux familles complémentaires (l'une avec une anisotropie indépendante du rayon et l'autre avec une fonction de distribution décroissante en  $E$  et en  $L^2$ ) semble indiquer d'une part que la valeur de  $2T_r/T_\perp$  n'est pas un critère de stabilité et d'autre part que le résultat de Gillon et al. [1976] est définitivement infirmé. L'idée de l'importance de cette instabilité dans le processus de formation des galaxies est avancée en conclusion de l'article, en reprenant ses termes « elle ne doit pas être écartée ».

Une étude analytique d'une équipe anglaise (Palmer and Papaloizou [1987]) basée sur une analyse spectrale de la perturbation d'un système sphérique anisotrope conclut à l'instabilité. C'est, depuis les résultats de Polyachenko and Shukhman [1981] et hormis le résultat water-bag de Gillon et al. [1976], la seule approche analytique de ce problème et toujours par des méthodes consistant à décomposer les perturbations sur des bases de fonctions orthogonales. Deux autres aspects importants de cet article sont la démonstration de la non validité du critère de stabilité russe déjà écorné par Merritt et Aguilar et la présentation d'un nouveau mécanisme pour la croissance de l'instabilité inspiré d'un travail de Lynden-Bell [1979]. Ce dernier point mérite une attention particulière. Le travail de Lynden-Bell [1979] étudie l'influence d'une perturbation axisymétrique dans le plan de symétrie d'un potentiel de galaxie spirale sur l'orbite d'une étoile. Il tend à montrer un effet d'elongation des orbites qui ont alors tendance à s'aligner le long de la perturbation. Cet effet serait à l'œuvre dans la formation des barres des galaxies spirales. Pour la première fois dans l'histoire de l'instabilité d'orbites radiales, Palmer and Papaloizou [1987] suggèrent que c'est le mécanisme de Lynden-Bell qui est à l'œuvre.

Une synthèse de tous ces résultats est effectuée par Merritt [1987]. Les 2 mécanismes sont détaillés et expliqués, l'instabilité de Jeans est critiquée car elle nécessite un système homogène ce qui n'est pas le cas, Merritt [1987] met donc en avant le mécanisme de Lynden Bell.

Un article de Katz [1991] propose alors de nouvelles simulations cosmologiques montrant que le processus hiérarchique de formation des structures cosmologiques avec ses effondrements

2. Instabilité qui survient lorsque la pression cinétique ne suffit plus à compenser la tendance qu'à le système à s'effondrer sous l'effet de son propre poids.

3. Il s'agit de modèles sphériques dont la fonction de distribution étend un modèle isotrope à un système présentant une anisotropie radiale de plus en plus forte en s'éloignant du centre du système.

successifs tend à gommer les traces possibles d'une instabilité d'orbite radiale qui aurait pu se produire dans les phases initiales de cette formation.

Un article de Saha [1991] vient étendre la portée des méthodes spectrales de modes normaux aux systèmes d'extension infinie. Une étude de Weinberg [1991], reprend les méthodes matricielles initiées par l'école russe de Polyachenko, retrouve des résultats et présente dans sa section IV-c une analyse détaillée du mécanisme de Lynden-Bell appliqué à l'instabilité d'orbites radiales. Cette analyse fait l'objet d'un article complet de Cincotta et al. [1996] qui étudie la transformation d'orbites de type boucle en type boîte, ce qui est dans la veine du mécanisme de Lynden-Bell et confirme l'intuition de Merritt [1987].

### 6.1.1.3 De nouveaux travaux

Mettant à profit certains de leurs résultats analytiques Perez and Aly [1996] et Perez et al. [1996] proposent et testent un critère de stabilité pour les systèmes auto-gravitants construit sur la nature des perturbations qu'ils reçoivent. Ce critère est validé sur des modèles Ossipkov-Merritt appliqués à des polytropes. Le nombre de particules mis en jeu devient pour la première fois raisonnable  $N \approx 10^4$  pour l'ensemble des simulations. Dans leurs résultats analytiques, ils expliquent la carence des méthodes de Water-Bag dans le domaine des orbites radiales, ce qui pourrait expliquer le résultat de Gillon et al. [1976].

Une étude numérique systématique de l'instabilité d'orbite radiale, utilisant les machines dédiées « GRAPE », est produite par Theis and Spurzem [1999]. Les simulations effectuées sont des effondrements de sphères de Plummer de température initiale variable. Le taux de croissance de ROI est grandement affecté par le softening  $\epsilon$  du potentiel et très peu par des variations du nombre de particules. Ces simulations ont mis en évidence une évolution à très long terme (de l'ordre du temps de relaxation à 2 corps) du système triaxial produit par ROI vers un système plus ou moins sphérique, selon les auteurs cette transformation est due aux interactions à deux particules.

Un étude systématique de l'effondrement gravitationnel (collapse) avec test des paramètres numériques ( $N, \epsilon, \dots$ ) par Roy and Perez [2004], permet, entre autres résultats, de mettre en évidence un aspect pressenti de l'instabilité d'orbites radiales. Son déclenchement dans un collapse est subordonné à la présence d'inhomogénéités robustes. Ce n'est pas en effet que les effondrements en au moins deux phases successives qui sont le siège de ROI : l'effondrement d'une sphère homogène ne remplit pas cette condition. Ces résultats sont complétés et raffinés par Boily and Athanassoula [2006] qui montrent un léger effet du nombre de particules sur l'état final de ROI.

Bien que le rôle de ROI dans la formation des structures ait été atténué par le travail de Katz [1991], deux analyses complémentaires par Huss et al. [1999] et MacMillan et al. [2006] observent le résultat de la formation de structures à moyenne échelle par des expériences de collapse en se donnant la possibilité de supprimer numériquement l'instabilité d'orbite radiale (en retirant la composante radiale de la force de gravitation). Ils remarquent que si l'on empêche ROI dans les phases primordiales, le profil de densité final de ces structures formées dans un contexte cosmologique est modifié : on obtient un profil à deux pentes au lieu de trois dans NFW par exemple. La forme allongée que prend le système à cause de l'instabilité d'orbite radiale serait donc progressivement gommée par le processus de formation hiérarchique comme l'a remarqué Katz, mais le profil de densité final garderait subtilement sa trace. Les différents résultats observationnels ou numériques indiquent la présence de cette marque.

Un regain d'activité dans le domaine se manifeste sous l'impulsion d'une équipe dirigée par E. Barnes depuis 2005. Ce qu'il est possible de retenir des articles de cette équipe, notamment Barnes et al. [2005] et Bellovary et al. [2008] est la chose suivante : depuis longtemps nous savons que ROI produit un système triaxial dans l'espace des positions, mais il crée aussi une ségrégation spatiale dans l'espace des vitesses (centre isotrope et halo radial). C'est cette ségrégation qui serait à l'origine du profil universel observé dans les grandes structures. Dans le cadre de ce renouveau, deux articles étudient ROI (Barnes et al. [2009], Trenti and Bertin [2006]) avec de nombreux détails, des comparaisons de codes. L'équipe de Trenti and Bertin [2006] s'étonne de ne pas pouvoir produire d'instabilité d'orbite radiale lors de l'effondrement d'une sphère homogène

– dite de Hénon. Leur explication à ce sujet est discutable : l’effondrement serait trop rapide ou l’anisotropie ne serait pas suffisante. L’explication de ce phénomène avait déjà été proposée par Roy and Perez [2004] : un effondrement monolithique (sphère de Hénon) se produit en une seule phase. Le germe dont à besoin ROI pour se développer n’est donc pas présent dans le cas générique de ce type d’effondrement.

Enfin ROI aurait été observée dans un équilibre triaxial selon Antonini et al. [2009] : elle se produirait lorsque ce dernier serait trop peuplé d’orbites en forme de boîtes. Le système deviendrait alors plus prolate et toujours triaxial.

Comme le montre cette perspective historique, l’instabilité d’orbite radiale a connu des développements controversés. Elle demeure cependant fondamentale dans le processus de formation hiérarchique des structures gravitationnelles. La dernière avancée dans la compréhension de son mécanisme ainsi que la preuve de l’instabilité par des méthodes d’énergie se trouve dans le travail de Maréchal and Perez [2009]. Les principaux éléments de ce travail sont présentés dans la section suivante.

### 6.1.2 La méthode symplectique

#### 6.1.2.1 Présentation de la méthode

La méthode symplectique a été introduite dans le contexte de la stabilité des systèmes auto-gravitants par Bartholomew [1971], elle est issue de la physique des plasmas. Elle fut popularisée par Kandrup [1991].

Il s’agit de tirer parti de la structure hamiltonienne associée au système de Vlasov-Poisson. Dans ce contexte, nous remarquons tout d’abord que l’énergie totale contenue dans le système autogravitant décrit par la fonction de distribution  $f$ , i.e. :

$$H[f] = \int d\Gamma \frac{\vec{p}^2}{2m} f(\Gamma, t) - \frac{1}{2} G m^2 \int d\Gamma \int d\Gamma' \frac{f(\Gamma, t) f(\Gamma', t)}{|\vec{q} - \vec{q}'|}$$

est telle que sa dérivée fonctionnelle est l’énergie moyenne d’une particule test :

$$\frac{\delta H}{\delta f} = \lim_{\delta f \rightarrow 0} \frac{H[f + \delta f] - H[f]}{\delta f} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + m\psi = E$$

Si  $K[f]$  est une fonctionnelle dérivable de la fonction de distribution nous pouvons donc écrire :

$$\frac{dK[f]}{dt} = \int \frac{\delta K}{\delta f} \frac{\partial f}{\partial t} d\Gamma = \int \frac{\delta K}{\delta f} \{E, f\} d\Gamma \quad (6.1)$$

où nous avons utilisé la forme canonique de l’équation de Vlasov  $\dot{f} = \{E, f\}$ . Nous pouvons alors introduire les crochets popularisés par Morrison and Greene [1980] : pour deux fonctionnelles  $A$  et  $B$  de  $f$ , nous avons :

$$[A, B](f) := \int f \left\{ \frac{\delta A}{\delta f}, \frac{\delta B}{\delta f} \right\} d\Gamma$$

Ainsi, après une intégration par partie, la relation (6.1) s’écrit :

$$\frac{dK[f]}{dt} = - \int f \left\{ \frac{\delta H}{\delta f}, \frac{\delta K}{\delta f} \right\} d\Gamma = [K, H](f) \quad (6.2)$$

Comme cela est expliqué par Kandrup [1991], toute perturbation linéaire  $f^{(1)}$  pouvant physiquement être reçue par l’état décrit par la fonction de distribution  $f_0$  s’écrit :

$$f^{(1)}(\Gamma, t) = -\{g, f_0\}$$

la fonction  $g$  est appelée *générateur* de la perturbation. Introduisons la quantité :

$$G[f] := \int f g d\Gamma$$

À partir de cette perturbation, il est possible de construire la variation d'énergie correspondante. Au premier ordre il vient :

$$H^{(1)}[f_0] = [G, H](f_0) = - \int g\{f_0, E\} d\Gamma = 0$$

Si l'état  $f_0$  est un équilibre,  $\{f_0, E\} = 0$  et la variation d'énergie est donc nulle à l'ordre 1. En d'autre terme La fonctionnelle  $H[f]$  présente un extremum en  $f = f_0$ , c'est bien la définition d'un état d'équilibre.

La variation de l'énergie au second ordre  $H^{(2)}[f_0] = [G, [G, H]](f_0)$  donne alors :

$$\begin{aligned} H^{(2)}[f_0] &= - \int \frac{\delta[G, H]}{\delta f} \Big|_{f=f_0} \{g, f_0\} d\Gamma \\ &= - \int \left( \{g, E\} + \int \frac{Gm^2}{|\vec{q} - \vec{q}'|} \{g', f'_0\} d\Gamma' \right) \{g, f_0\} d\Gamma \\ &= - \int \{g, E\} \{g, f_0\} d\Gamma - Gm^2 \iint \frac{\{g, f_0\} \{g', f'_0\}}{|\vec{q} - \vec{q}'|} d\Gamma d\Gamma' \end{aligned} \quad (6.3)$$

L'étude du signe de cette quantité s'est révélé un outil efficace d'investigation de la stabilité des systèmes autogravitants (voir par exemple Perez and Aly [1996]).

### 6.1.2.2 Des critères de stabilité

Dans le cas classique d'une particule soumise à l'influence de forces conservatives, la stabilité locale d'un état d'équilibre est directement reliée au signe de la variation d'énergie à l'ordre 2 au voisinage de cet état : une variation positive laisse l'équilibre stable alors qu'une variation négative de l'énergie conduit à une instabilité.

L'extension d'un tel résultat à des situations plus compliquées (forces non conservatives, systèmes de particules, etc...) n'est cependant pas triviale.

Dans le cas qui nous intéresse de la physique statistique des systèmes non collisionnels évoluant dans un champ moyen la situation n'est cependant pas désespérée.

Si la variation  $H^{(2)}$  est positive pour tous les générateurs  $g$ , Bartholomew [1971] montre que le système est stable. Cette méthode a été largement mise en application dans tous les cas favorables par Perez and Aly [1996]. Par contre, s'il existe des générateurs  $g$  conduisant à des variations  $H^{(2)}$  négatives, il n'existe pas de résultat général assurant l'instabilité du système ; du moins sans hypothèse complémentaire.

Dans ce contexte, les résultats de Bloch et al. [1994] mais surtout de Rouslan and Marsden [2009], permettent l'étude de cas assez généraux.

Ces résultats affirment que l'existence de modes d'énergie négative ( $g$  tels que  $H^{(2)} < 0$  dans notre contexte) rendent instables des systèmes hamiltoniens dès lors qu'ils ont la possibilité de dissiper leur énergie. Ces résultats sont d'ailleurs connus sous l'appellation « d'instabilités dissipatives ».

### 6.1.2.3 L'application à l'instabilité d'orbites radiales

Il n'est pas question ici de reprendre le détail des calculs présentés par l'article de Maréchal and Perez [2009], nous présenterons simplement l'idée du résultat.

Un état d'équilibre composé exclusivement de particules en orbite radiale est décrit par une fonction de distribution  $f_0(E, L^2) = \varphi(E)\delta(L^2)$  : si  $\varphi$  est une fonction acceptable mais quelconque, la distribution de Dirac, qui sélectionne les valeurs  $L^2 = 0$ , assure en effet le caractère purement radial de toutes les orbites. L'idée mise en œuvre dans la preuve est alors claire. Après

avoir rappelé le caractère hamiltonien de la dynamique de Vlasov-Poisson gravitationnelle, il suffit de calculer la variation de :

$$H^{(2)} = \underbrace{- \int \{g, E\} \{g, f\} d\Gamma}_{(A)} - Gm^2 \underbrace{\iint \frac{\{g, f\} \{g', f'\}}{|\vec{q} - \vec{q}'|} d\Gamma d\Gamma'}_{(B)} \quad (6.4)$$

pour un équilibre de la forme  $f_{0,a}(E, L^2) = \varphi(E)\delta_a(L^2)$  avec une fonction  $\delta_a(L^2)$  admettant  $\delta(L^2)$  comme limite lorsque  $a$  tend vers 0. Le terme (A) dans la variation (6.4) correspond à la variation d'énergie cinétique alors que (B) rend compte de la variation d'énergie potentielle. Cette dernière est toujours négative compte-tenu des propriétés du laplacien. Il est alors possible de montrer qu'il existe toute une classe de perturbations, non radiales, associées à des variations d'énergie négative dès que  $a$  est suffisamment petit et donc que le système est suffisamment radial.

Dans ce contexte la présence de dissipation est donc irrémédiablement associée à une instabilité du système. Il est clair qu'il est impossible de garantir la totale conservation de l'énergie pour un système physique réel ou numérique. L'instabilité d'orbite radiale peut donc se développer dans les simulations ou dans la réalité. Le mécanisme est celui par initié par Lynden-Bell (voir section 6.1.1.2) : une perturbation non radiale étire ou compresse certaines régions du système initialement sphérique, le couplage avec les orbites proches conduit à une avalanche dans la direction sélectionnée et une barre se forme. Sans la dissipation, un tel couplage est impossible, l'instabilité d'orbite radiale est bien d'origine dissipative.

Nous remarquons dans ce processus qu'un état d'équilibre radial est nécessaire afin que cette instabilité puisse se développer. C'est l'accumulation d'orbites radiales couplées par une légère dissipation qui en permet le déclenchement.

## 6.2 L'instabilité de Jeans

### 6.2.1 Généralités

L'instabilité de Jeans est sans aucun doute le véritable moteur de la formation des structures autogravitantes. C'est elle qui fait s'effondrer les nuages du gaz interstellaire pour former les étoiles mais c'est elle aussi qui déclenche et alimente la formation des grandes structures de l'Univers ; elle occupe donc quasiment tout le spectre de taille des objets de l'astrophysique. D'un point de vue théorique, elle apparaît au tout début du XX<sup>e</sup> siècle avec Sir James Jeans dans l'article Jeans [1902] ; elle fut mise en action dès que le rôle de la gravitation dans la formation et l'évolution des objets astrophysique fut compris, dans les années 1920 à 1930. L'avènement de la physique des plasmas lui donnera un cadre théorique solide dans les années 1940 où elle devient le cas particulier gravitationnel de la théorie de l'amortissement de Landau. Ce modèle linéaire sera vite controversé : arnaque de Jeans (voir la section 5.2.2 de Binney and Tremaine [2008a] ou l'article de Kiessling [2003]), comportement non linéaire complexe... L'histoire semble désormais terminée sur le plan théorique avec la démonstration de sa version non linéaire de Mouhot and Villani [2011]. En physique trois approches sont généralement pratiquées pour se convaincre de cette instabilité :

- L'approche dite cinétique consiste à partir du système de Vlasov-Poisson et de le linéariser au voisinage d'une distribution d'équilibre ; c'est à ce moment qu'apparaît l'arnaque de Jeans car dans cette approche linéaire nous évacuons « à la main » un terme gênant. Nous faisons alors l'hypothèse d'une distribution d'équilibre isotherme dans l'espace des vitesses et uniforme dans l'espace des positions. Nous obtenons une relation de dispersion faisant apparaître une longueur caractéristique pour l'instabilité.
- L'approche fluide consiste à partir des équations de la mécanique des fluides – conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Euler) – fermées par l'équation de Poisson. Ces deux équations fluides sont directement issues de l'équation de Vlasov par intégration sur les impulsions. Nous linéarisons alors au voisinage d'un équilibre homogène et stationnaire, nous faisons apparaître une vitesse du son constante dans le fluide et

obtenons une relation de dispersion similaire à celle obtenue dans le cas cinétique. Nous détaillerons cette méthode dans la section suivante.

- La dernière approche consiste simplement à écrire le théorème du viriel scalaire. Une longueur caractéristique apparaît alors ; elle correspond à une figure d'équilibre, un raisonnement physique permet de l'identifier à une longueur caractéristique de stabilité. Cette approche est contenue dans les deux précédentes car le théorème du viriel est d'origine cinétique ; la version scalaire utilisée dans ce contexte est simplement la trace de la version complète obtenue en calculant le moment du viriel  $\vartheta = \vec{p} \cdot \vec{r}$  dans le cadre de la théorie cinétique.

Les trois approches fournissent le même résultat, elles sont physiquement équivalentes. L'ensemble des calculs peut être trouvé avec tous les détails dans le cours de Perez [2011]. Nous proposons simplement ici de reprendre rapidement les grandes étapes de l'approche fluide.

### 6.2.2 L'instabilité de Jeans fluide

Outre le champ de densité  $\rho(\vec{r}, t)$  et le potentiel gravitationnel  $\psi(\vec{r}, t)$  dont nous avons déjà parlé, la description fluide d'un système autogravitant est assurée par les grandeurs moyennes suivantes :

- un champ de vitesse moyenne au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$  :

$$\overline{\vec{v}}(\vec{r}, t) = \frac{m}{\rho} \int \frac{\vec{p}}{m} f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}$$

- un « tenseur » de pression au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$  dont les composantes cartésiennes s'écrivent :

$$\mathbb{P}_{ij} = \frac{1}{m^2} \left( \int p_i p_j f d\vec{p} - \int p_i f d\vec{p} \int p_j f d\vec{p} \right)$$

Pour simplifier les notations et s'il n'y a pas d'ambigüité, nous omettrons la barre de moyenne sur le champ de vitesse dans le fluide. La conservation de la masse et de l'impulsion conduisent alors aux deux équations fondamentales suivantes :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{P}} - \rho \vec{\nabla} \psi \quad (6.5a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (6.5b)$$

Si nous faisons apparaître une vitesse du son  $c_s$  supposée constante partout dans le fluide, les champs de pression et de densité sont alors reliés par l'équation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{P}} = c_s^2 \vec{\nabla} \rho$$

Nous pouvons alors étudier la stabilité d'un équilibre décrit par des champs constants et stationnaires  $\vec{v}_{eq} = \vec{v}_o$ ,  $\rho_{eq} = \rho_o$  et  $\psi_{eq} = \psi_o$ . Pour cela, nous développons les divers champs du fluide au voisinage de l'équilibre :

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_o + \varepsilon \vec{v}_1(\vec{r}, t) \\ \rho(\vec{r}, t) = \rho_o + \varepsilon \rho_1(\vec{r}, t) \\ \psi(\vec{r}, t) = \psi_o + \varepsilon \psi_1(\vec{r}, t) \end{cases} \quad \text{avec } |\varepsilon| \ll 1$$

Nous injectons ces relations dans les deux équations fondamentales et nous ne conservons que les termes d'ordre  $\varepsilon$ , en négligeant les suivants, il vient :

$$\begin{cases} \rho_o \left[ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_o \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 \right] = -c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 - \rho_o \vec{\nabla} \psi_1 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_o \cdot \vec{\nabla} \rho_1 = -\rho_o \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \end{cases}$$

Nous n'avons toujours pas précisé le référentiel galiléen d'usage, nous le choisissons donc tel que  $\vec{v}_o = 0$ , ainsi il ne reste plus que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_o} \vec{\nabla} \rho_1 - \vec{\nabla} \psi_1 \\ \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \end{cases}$$

Nous dérivons alors la seconde équation par rapport au temps et prenons la divergence de la première : le terme  $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1)$  est alors présent dans les deux équations, il est possible de l'éliminer. Il vient :

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + \rho_o \Delta \psi_1 \quad (6.6)$$

L'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel s'écrit :

$$\Delta \psi = 4\pi G \rho$$

au voisinage de l'équilibre uniforme et stationnaire, nous avons donc :

$$\Delta \psi_1 = 4\pi G \rho_1$$

l'équation (6.6) devient donc :

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + 4\pi G \rho_o \rho_1$$

Il ne reste plus qu'à décomposer  $\rho_1$  sur une base de modes normaux :

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} \rho_{1,\alpha} \exp[i(\vec{k}_{\alpha} \cdot \vec{r} + \omega_{\alpha} t)]$$

et nous obtenons une relation de dispersion pour chaque mode  $\alpha$  :

$$\omega_{\alpha}^2 = c_s^2 (k_{\alpha}^2 - k_j^2) \quad \text{avec } k_j^2 := \frac{4\pi G \rho_o}{c_s^2} \quad \text{et} \quad k_{\alpha} = |\vec{k}_{\alpha}|$$

Nous remarquons que :

- si  $k_{\alpha} > k_j$  alors  $\omega_{\alpha}^2 > 0$ , la pulsation du mode  $\alpha$  est réelle il s'agit d'un mode oscillant, et donc stable ;
- si  $k_{\alpha} < k_j$  alors  $\omega_{\alpha}^2 < 0$ , la pulsation du mode  $\alpha$  est imaginaire pure :  $\omega_{\alpha} = \pm i\Omega_{\alpha}$  avec  $\Omega_{\alpha} \in \mathbb{R}$ . Le mode  $\alpha$  est donc instable (il possède une partie exponentiellement croissante).

Si l'on introduit la longueur d'onde  $\lambda_{\alpha}$  associée au nombre d'onde  $k_{\alpha}$  par la relation :

$$k_{\alpha} = \frac{2\pi}{\lambda_{\alpha}}$$

la condition de stabilité du mode  $\alpha$  s'écrit :

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\alpha}} > k_j \Rightarrow \lambda_{\alpha} < \lambda_j \quad \text{avec} \quad \lambda_j := \frac{2\pi}{k_j} = \sqrt{\pi} \frac{c_s}{\sqrt{G\rho_o}}$$

Si un mode est associé à une longueur d'onde plus grande que la longueur d'onde de Jeans  $\lambda_j$  du système, il le déstabilisera.

Le critère ci-dessus fait intervenir une longueur caractéristique, nous pouvons aussi faire apparaître une masse correspondante. La masse de Jeans  $M_j$  correspond à la masse d'une boule homogène de densité  $\rho_o$  dont le rayon est la longueur de Jeans :

$$M_j = \frac{4\pi}{3} \rho_o \lambda_j^3 = \frac{4\pi^{5/2}}{3} \frac{c_s^3}{G^{3/2} \sqrt{\rho_o}} \quad (6.7)$$

Une sphère homogène plus lourde que sa masse de Jeans est donc instable.

Pour une sphère isotherme de température  $T$  composée de  $N$  particules de masse  $m$ , l'équation d'état s'écrit  $P(r) = \frac{k_B T}{m} \rho(r)$ , la vitesse du son  $c_s$  dans la sphère est donc égale à la vitesse quadratique moyenne de ses particules (écart-type de la gaussienne définissant la distribution des vitesses), elle est constante pour la sphère isotherme et s'écrit :

$$c_s^2 = \frac{k_B T}{m}$$

En supposant la sphère isotherme homogène de rayon égal à sa longueur de Jeans (pour des raisons d'équilibre), nous pouvons définir la température de Jeans :

$$T_j = \frac{G m \rho_o \lambda_j^2}{\pi k_B} = \frac{3 G m^2 N}{4 \pi^2 k_B \lambda_j} \quad (6.8)$$

Une sphère isotherme de rayon égal à sa longueur de Jeans et plus froide que sa température de Jeans est donc instable.

### 6.2.3 État final de l'effondrement de Jeans

Que se passe-t-il lorsqu'un système autogravitant homogène dépasse sa longueur de Jeans ? Comment cela est-il possible ?

Si un système autogravitant homogène ne s'effondre pas sous l'effet de sa propre masse c'est que l'énergie cinétique qu'il contient, c'est-à-dire la température qui le caractérise lui permet de lutter contre. Nous décrivons ici un état d'équilibre, cette température lui permet donc exactement de contrebalancer la gravitation, afin que le système soit « au viriel », s'il était plus chaud le système s'évaporerait. C'est sans doute ce qui arrive aux amas ouverts.

Dans son état homogène, il peut devenir plus gros, en absorbant sous l'effet de la gravitation un autre système autogravitant homogène.

Numériquement la situation est plus simple. Pour construire une configuration instable au sens de Jeans, il suffit de fabriquer une boule homogène de  $N$  particules massives et de calculer l'énergie potentielle gravitationnelle totale de cette boule,  $W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$  si sa masse est  $M$  et son rayon  $R$ . Nous attribuons alors une vitesse à chaque particule de manière à ce que l'énergie cinétique totale  $T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$  soit telle que le rapport du viriel  $\eta = \left| \frac{2T}{W} \right|$  soit plus petit que 1. Ce jeu de conditions initiales sera ainsi associé à un système plus gros que sa longueur de Jeans : il s'effondrera. De nombreuses expériences numériques (voir par exemple Roy and Perez [2004] ou Joyce et al. [2009]) ont été menées pour étudier de telles situations. Dès que le nombre de particules est suffisant pour éviter les problèmes d'interaction à deux corps, le système s'effondre pour former une structure cœur-halo à l'équilibre et isotrope dans l'espace des vitesses. Le système final est sphérique indépendamment de sa forme initiale, de la dispersion de vitesse et même du rapport du viriel initial  $\eta \in [0.1, 0.9]$ . L'état d'équilibre est atteint en quelques temps dynamiques, le cœur homogène contient approximativement la moitié de la masse totale, le halo possède une densité autosimilaire  $\rho(r) \propto r^{-4}$ . Ce type de système est assez bien ajustable par un modèle de King de paramètre  $W_0 \simeq 5$ .

L'introduction de grumeaux ou d'inhomogénéités au sein du système avant son effondrement peut modifier le résultat. Pour ce type de configurations initiales, le processus d'effondrement conduit à des systèmes ne présentant pratiquement plus de cœur. Lorsque que l'on peut ajuster leur densité par un profil de King, le paramètre  $W_0$  est alors beaucoup plus grand, typiquement  $W_0 > 15$ . Ces configurations initialement inhomogènes possèdent aussi une caractéristique qui les distinguent des effondrements homogènes : les configurations initialement très froides ( $\eta < 0.15$ ), c'est-à-dire les effondrements les plus violents, conduisent à des états d'équilibre qui ne sont plus sphériques car ils ont développé l'instabilité d'orbite radiale.

Dans la prochaine section nous allons tenter de proposer, dans un contexte simplifié, une analyse de stabilité permettant de comprendre cette diversité des états post-collapse.

## 6.3 Stabilité de l'état post-collapse

Nous avons vu dans la section précédente que l'état final générique de l'effondrement d'un système homogène est une structure cœur-halo, ce dernier étant caractérisé par une densité de la forme  $\rho(r) \propto r^{-4}$ . Tant qu'elle est isolée, une telle structure est stable et n'évolue que sur des échelles de temps beaucoup plus grandes que le temps dynamique, sous l'effet des collisions ou de divers harcèlements (voir l'évolution des amas globulaires par exemple).

Une situation plus complexe se présente lors de l'effondrement d'un système présentant des inhomogénéités. Prenons pour simplifier le cas idéalisé d'un système inhomogène caractérisé par deux structures homogènes emboitées de tailles différentes. L'effondrement du plus petit de ces sous-système va se produire dans le bain thermique assuré par la présence du plus gros. Si cet effondrement produit une structure cœur-halo, sa stabilité doit ainsi être envisagée dans l'ensemble canonique. Nous avons vu que ce type d'analyse dans le contexte de la sphère isotherme en boîte revenait à chercher la première tangente horizontale sur la courbe calorique. Nous avons vu par ailleurs que les structures cœur-halo de pente quelconques<sup>4</sup> sont pratiquement isothermes. Nous proposons donc dans la section suivante, une analyse de la courbe calorique d'une structure cœur-halo idéalisée, supposée isotherme et entourée d'un bain thermique. L'intérêt de l'idéalisation est qu'elle permet de mener à la main la totalité des calculs. Nous vérifierons que dans le cas de l'idéalisation de la sphère isotherme (halo de pente  $-2$ ), l'analyse de stabilité donne les mêmes résultats que ceux obtenus au moment de l'étude de la sphère isotherme en boîte.

### 6.3.1 Modèle et calculs

Le système que nous étudions est sphérique de rayon fini  $R$ , il possède un cœur de rayon  $r_0$ , le paramètre d'étude sera la quantité sans dimension :

$$x = \frac{R}{r_0} \geq 1$$

La densité idéalisée que nous utilisons est la suivante :

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r < r_0 \\ \rho_0 \left( \frac{r_0}{rx} \right)^4 & \text{si } R > r > r_0 \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases} \quad (6.9)$$

Nous pouvons avantageusement remplacer la densité centrale par la masse totale du système en utilisant le fait que  $\int_0^R \rho(r) dr = M$ , il vient :

$$\rho_0 = \frac{3}{4} \frac{M x^4}{R^3 (4x - 3) \pi} \quad (6.10)$$

La masse contenue dans une sphère de rayon  $r$  s'écrit :

$$\mu(r) = \begin{cases} \frac{Mr^3 x^4}{R^3 (4x - 3)} & \text{si } r < r_0 \\ \frac{(3R - 4rx) M}{(3 - 4x) r} & \text{si } r > r_0 \end{cases} \quad (6.11)$$

L'énergie potentielle totale contenue dans le système est le résultat du calcul d'une intégrale assez simple pour notre modèle :

$$W = -4\pi G \int_0^R r \rho(r) \mu(r) dr \quad (6.12)$$

$$= -\frac{3GM^2 (5 - 10x + 6x^3)}{5R(3 - 4x)^2} \quad (6.13)$$

4. Pourvu qu'ils soient ajustables par un modèle de king avec  $W_0 > 5$ .

### 6.3.2 Énergie cinétique

La sphère que nous étudions est supposée isotherme de température<sup>5</sup>  $T = (\beta k_B)^{-1}$ . L'énergie cinétique s'écrit alors :

$$K = \frac{3M}{2m\beta} \quad (6.14)$$

L'hypothèse d'isothermie permet de calculer la pression grâce à l'équation d'état  $P(r) = \frac{\rho(r)}{m\beta}$ . Sur le bord de la sphère nous avons donc :

$$P(R) = \frac{3M}{4m\pi R^3(-3 + 4x)\beta} \quad (6.15)$$

Le théorème du viriel pour une sphère en boîte s'écrit :

$$4\pi R^3 P(R) = 2K + W \quad (6.16)$$

grâce aux différentes expressions obtenues nous pouvons donc trouver une relation entre  $\beta$ ,  $x$  et les caractéristiques de la sphère. Il vient :

$$\beta(x) = \frac{20R(3 - 7x + 4x^2)}{GmM(5 - 10x + 6x^3)} \quad (6.17)$$

Nous pouvons également exprimer l'énergie totale  $H = K + W$  contenue dans la sphère en fonction de  $x$  et des caractéristiques de celle-ci. Finalement, en utilisant les mêmes paramètres sans dimensions que ceux utilisés pour la SIB, nous obtenons :

$$\mu(x) = \frac{GMm\beta}{R} = \frac{20(-1 + x)(-3 + 4x)}{5 - 10x + 6x^3} \quad (6.18)$$

$$\lambda(x) = -\frac{HR}{GM^2} = \frac{3(-5 + 4x)(5 - 10x + 6x^3)}{40(3 - 4x)^2(-1 + x)} \quad (6.19)$$

Pour chaque valeur du paramètre  $x$  nous avons donc un couple  $(\lambda, \mu)$ . Le paramètre  $x$  varie entre la valeur minimale  $x_{\min} = 1$  pour un système de densité constante, et  $x_{\max} \rightarrow +\infty$  pour une sphère de plus en plus grande avec un cœur occupant proportionnellement de moins en moins de place lorsque  $x$  grandit. Le contraste de densité est facilement calculable pour ce modèle :  $\mathcal{R}_4 = x^4$ . La courbe  $(\lambda(x), \mu(x))$  pour  $x \in [1, +\infty[$  est donc la courbe calorique de notre sphère. Elle est tracée sur la figure 6.1.

Cette courbe présente bel et bien une tangente horizontale, en  $x_4^* = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{5}) \approx 1.81$ , qui correspond à une instabilité dans l'ensemble canonique dans le cadre de notre calcul (bain thermique). Le contraste de densité correspondant est  $\mathcal{R}_4 \approx 10.71$ .

### 6.3.3 Conclusion du modèle

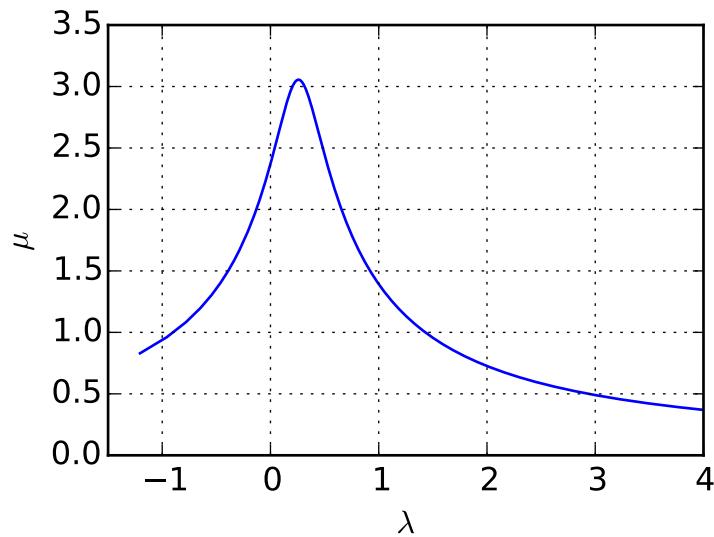
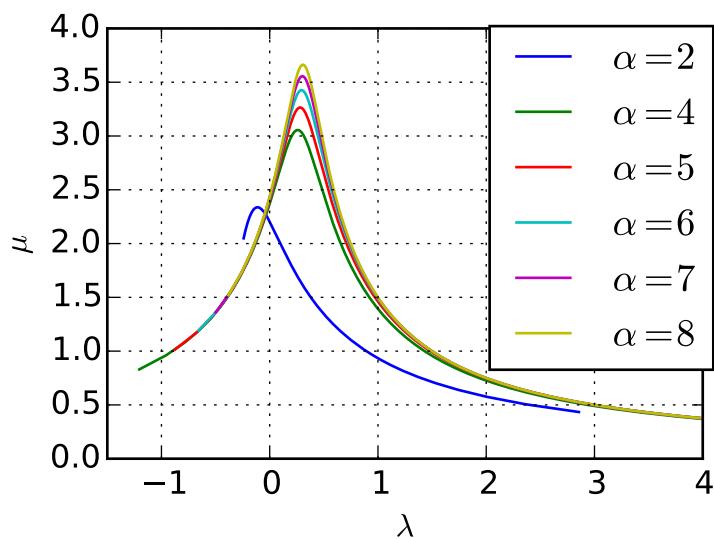
Une conclusion raisonnable de cette étude est qu'un système cœur-halo dont le contraste de densité est plus important que  $\mathcal{R}_4$  est instable s'il est entouré d'un bain thermique de même température que la sphère. Cette instabilité conduit à l'effondrement du cœur du système.

Cette instabilité pourrait être à l'origine de l'absence de cœur dans le résultat de l'effondrement d'un système inhomogène.

La courbe calorique peut être calculée dans les mêmes conditions pour des systèmes cœur-halo idéalisés de pentes différentes. Nous les avons rassemblés sur la figure 6.2. La même instabilité

---

5. C'est une hypothèse simplificatrice mais raisonnable compte-tenu de l'analyse faite sur le modèle de King par exemple

FIGURE 6.1 – Courbe calorique du modèle isotherme idéalisé possédant un halo de pente  $-4$ FIGURE 6.2 – Courbe calorique pour des systèmes cœur–halo de pente  $\alpha = 2, 4, 5, 6, 7, 8$

est toujours présente. Dans le cas  $\alpha = 2$ , les calculs sont identiques, ils conduisent au couple :

$$\mu(x) = \frac{10(3x-2)(x-1)}{x(15x-14-10\ln(x))} \quad (6.20)$$

$$\lambda(x) = -\frac{3x(15x-14-10\ln(x))(x-2)}{20(x-1)(3x-2)^2} \quad (6.21)$$

Nous remarquons que  $\lim(\lambda, \mu)_{x \rightarrow \infty} = (-\frac{1}{4}, 2)$  correspond bien à la sphère isotherme. La tangente verticale n'a pas résisté à l'idéalisatoin, par contre la tangente horizontale reste présente pour une valeur  $x_2^* = 3.48$  correspondant à un contraste de densité  $\mathcal{R}_2 = 12.1$ . Cette valeur est environ trois fois plus petite que la valeur exacte (32.1) mais la transition stable/instable est bien respectée par le modèle approché. Il semble légitime de penser que la valeur de  $\mathcal{R}_4$  trouvée pour le modèle cœur-halo de pente  $-4$  soit également un peu sous-estimée.

## **Troisième partie**

### **Simulations**



# Chapitre 7

# Outils numériques

## Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Le programme de simulation . . . . .</b>	<b>61</b>
7.1.1	Calcul du potentiel : $k^d$ -Tree . . . . .	61
7.1.2	Lissage de la force . . . . .	62
7.1.3	« Saute-mouton » et pas de temps . . . . .	63
<b>7.2</b>	<b>Conditions initiales . . . . .</b>	<b>64</b>
7.2.1	Le modèle de KING . . . . .	64
7.2.2	La sphère de Hénon . . . . .	64
7.2.3	Bain thermique . . . . .	64
<b>7.3</b>	<b>Observables des simulations . . . . .</b>	<b>65</b>
7.3.1	Recenterage . . . . .	65
7.3.2	Masse et densité . . . . .	65
7.3.3	Énergie et potentiel . . . . .	66
7.3.4	Anisotropie des vitesses et forme de l'amas . . . . .	66
7.3.5	Température cinétique . . . . .	68

---

Après avoir évoqué diverses propriétés des amas globulaires de notre galaxie puis étudié certains résultats analytiques concernant les propriétés dynamiques des systèmes auto-gravitant (SAG), nous allons maintenant mener des expériences numériques. Nous présenterons dans un premier temps le code d'évolution dynamique que nous avons utilisé, puis les conditions initiales de nos expériences et enfin les différentes observables de nos simulations.

## 7.1 Le programme de simulation

Les expériences numériques que nous souhaitons réaliser ont pour objectif de modéliser l'évolution dynamique d'un système auto-gravitant placé dans un bain thermique.

Dans ce contexte, le programme que nous utilisons pour faire évoluer notre système est GADGET-2<sup>1</sup> (voir Springel [2005] et Springel et al. [2001]), écrit par Volker SPRINGEL.<sup>2</sup> Ce programme allie un octree pour la gestion spatiale des particules et un algorithme de type « prédicteur-correcteur » pour la partie temporelle.

### 7.1.1 Calcul du potentiel : $k^d$ -Tree

Un calcul direct des forces d'interaction entre chaque particules nécessite  $N^2$  opérations. Bien que très couteuse, cette méthode est encore très utilisée pour suivre finement la dynamique d'un amas. À ce jour, la plus grosse simulation  $N$ -corps directe est le travail de D. Heggie avec presque 300 000 particules (voir sa présentation au trimestre Gravasco) en utilisant la version

1. <http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>

2. dont nous n'utiliserons que la partie « tree-code »

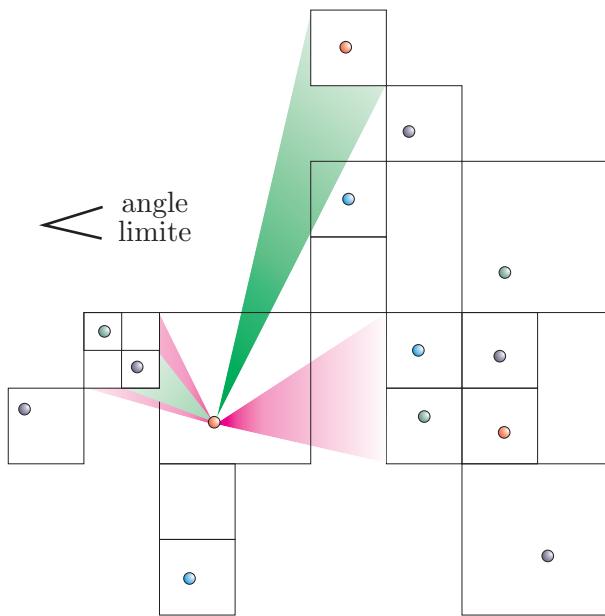


FIGURE 7.1 – Critère d’ouverture : un cône vert indique un carré qu’il n’est pas nécessaire d’ouvrir, un cône rouge indique un carré à ouvrir.

GPU de NBODY6. Nous aurons parfois besoin d’un grand nombre de particules pour représenter la fonction de distribution dans l’espace des phases. Nous avons donc besoin d’une approche nous permettant d’accélérer les calculs. Il existe de nombreuses méthodes le permettant. Celle que nous utilisons est basée sur un algorithme en arbre.

Cet algorithme, nommée « treecode », a été mis au point par Barnes and Hut [1986]. Les particules sont organisées dans un arbre modulable appelé  $k^d$ -Tree. En dimension  $d = 3$ , et avec une division dichotomique ( $k = 2$ ), cet arbre est un octree. Le principe est de subdiviser un espace cubique en 8 sous-cubes, eux-mêmes subdivisés en 8 nouveaux sous-cubes... Chaque cube est à nouveau divisé s’il contient encore trop de particules. Dans notre propre mise en œuvre de cette algorithme, nous nous arrêterons lorsqu’un cube contiendra au plus  $N_{\max} = 15$  particules. Les carrés et les points de la figure 7.1 montrent la structure d’un quadtree ( $k = 2$ ,  $d = 2$ ) se construisant de la même façon.

Avant de continuer il peut être utile de définir un peu de vocabulaire lié aux arbres :

- la racine constitue la base de l’arbre ;
- un nœud est un cube ayant un père et des fils, il s’agit d’un embranchement ;
- une feuille est un cube n’ayant plus de fils, et donc terminant une branche de l’arbre ;
- une branche est le chemin à suivre pour aller de la racine vers une feuille.

Une fois l’arbre construit, le calcul de la force ou du potentiel se fait en descendant dans les nœuds tant que l’angle d’ouverture reste supérieur à une valeur critique. L’angle d’ouverture correspond à la taille angulaire du nœud vue par la particule sélectionnée. Si cette taille est suffisamment petite, nous n’entrons pas à l’intérieur et résumons le contenu du cube à une macro-particule, sinon la descente continue. Le critère d’ouverture est illustré par la figure 7.1.

### 7.1.2 Lissage de la force

Comme nous souhaitons observer l’effet d’un bain thermique sur un SAG, nous aimerais pouvoir contrôler l’effet des collisions sur le système, et notamment diminuer leurs effets. Pour cela, nous allons jouer sur le paramètre de lissage de la force  $\epsilon$  dont l’effet est d’adoucir le potentiel gravitationnel à petite échelle, ce qui peut s’exprimer par exemple, dans le cas le plus

simple, par le potentiel effectif suivant :

$$\psi(r_i) = -G \sum_{j \neq i}^N \frac{m_i}{(r_{ij}^2 + \epsilon^2)^{1/2}} \quad (7.1)$$

où  $r_{ij}$  est le module de distance entre les particules  $i$  et  $j$ . Afin de minimiser suffisamment les collisions, nous devons choisir ce paramètre tel que d'une part la sphère de rayon  $\epsilon$  contienne un nombre  $N_\epsilon$  suffisant de particules mais que d'autre part  $N_\epsilon$  soit suffisamment petit devant le nombre total de particules du système. Ce nombre  $N_\epsilon$  peut s'évaluer de la façon suivante ; considérons le paramètre

$$\alpha = \frac{\rho_\epsilon}{\rho_{\text{moy}}}$$

où  $\rho_\epsilon$  est la densité d'un petit volume de rayon  $\epsilon$  et  $\rho_{\text{moy}}$  la densité moyenne de l'objet. Toutes les particules ayant la même masse, nous pouvons écrire :

$$N_\epsilon = \alpha N \left(\frac{\epsilon}{R}\right)^3 \quad (7.2)$$

$N$  étant le nombre total de particules de l'amas. Les paramètres  $N$ ,  $R$  et  $\alpha$  étant fixés, nous sommes ainsi libres de choisir  $N_\epsilon$  ou  $\epsilon$  pour répondre à nos besoins.

Notons que le code GADGET-2 utilise une expression différente de l'équation (7.1), que nous n'avons pas écrite par simplicité, consistant à approximer les particules par des nuages de taille  $\epsilon$  et dont le profil suit une fonction spline.

### 7.1.3 « Saute-mouton » et pas de temps

GADGET-2 utilise un schéma d'intégration temporelle à pas de temps variable de type « prédicteur-correcteur ». Il se ramène à un saute-mouton (« leap-frog » en anglais), lorsque le pas de temps est constant.

Le saute-mouton est un schéma d'intégration symplectique d'ordre 2. Il a la particularité d'introduire un décalage entre l'évaluation des positions et des vitesses : les positions vont être évaluées tous les  $n\Delta t$  tandis que les vitesses vont l'être tout les  $(n+\frac{1}{2})\Delta t$ . Ce schéma d'intégration s'écrit :

$$\begin{cases} \vec{v}_{n+1/2} = \vec{v}_{n-1/2} + \Delta t \vec{a}(\vec{r}_n) \\ \vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \Delta t \vec{v}_{n+1/2} \end{cases}$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération. La figure 7.2 illustre le fonctionnement de ce schéma.

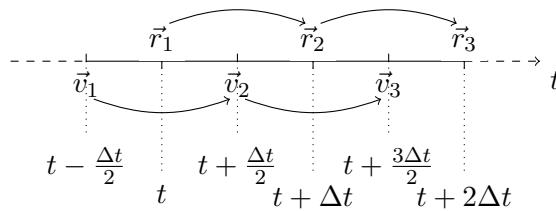


FIGURE 7.2 – Principe de fonctionnement du « saute-mouton » sur deux pas de temps.

L'algorithme utilisé par Gadget est basé sur ce schéma saute-mouton, excepté que les vitesses sont actualisées par demi pas de temps pour permettre leur synchronisation avec les positions, comme illustré par la figure 7.3. Cette modification simple du saute-mouton permet d'utiliser un pas de temps lentement variable, dont la gestion fine est contrôlée par l'accélération :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2\eta\epsilon}{|\vec{a}|}}$$

Le paramètre  $\eta$  permet de contrôler la précision de l'intégration. De plus, GADGET-2 gère un pas de temps unique pour chaque particule.

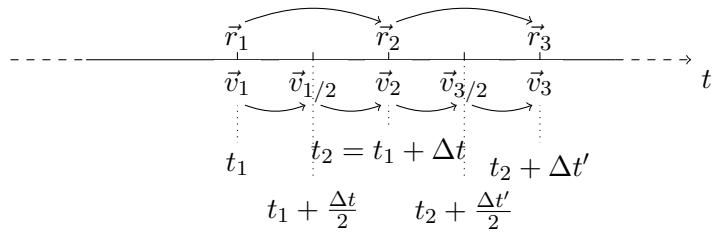


FIGURE 7.3 – Principe de fonctionnement de l'intégrateur temporel de GADGET-2 sur un pas de temps, qui permet de synchroniser les positions et les vitesses et ainsi de mettre en œuvre un pas de temps variable avec  $\Delta t' \neq \Delta t$ .

## 7.2 Conditions initiales

Pour mener à bien nos expériences numériques, nous avons besoin de pouvoir générer plusieurs types d'objet : une sphère de King, une sphère de Hénon et un bain thermique.

### 7.2.1 Le modèle de King

Les particules du modèle de King, de paramètres  $W_0$ ,  $\sigma$  et  $r_c$  sont générées en utilisant une méthode d'acceptation-rejection que nous allons décrire. À partir de ces 3 paramètres, nous pouvons résoudre l'équation de poisson (5.4) donnant le potentiel pour le modèle de King. Nous pouvons alors calculer le potentiel central  $\psi(0)$  et l'énergie de libération  $E_l$ . Toutes les particules de la sphère de King ont une vitesse dont le module est inférieur à une valeur  $v_{\max}$  et leurs distance au centre est inférieure à un rayon  $R$ . La vitesse maximale  $v_{\max}$  est donnée par la relation :

$$v_{\max} = \sqrt{2 \left( \frac{E_l}{m} - \psi(0) \right)} \quad (7.3)$$

Le rayon  $R$  de la sphère est obtenu en résolvant numériquement  $\rho(R) = 0$ .

Les paramètres  $R$  et  $v_{\max}$  étant connus, nous tirons aléatoirement les positions  $x_i, y_i, z_i$  telles que  $|\vec{r}_i| \leq R$ ; puis les vitesses  $v_i^x, v_i^y, v_i^z$  telles que  $|\vec{v}_i| \leq v_{\max}$ .

Nous utilisons alors la fonction de distribution du modèle de King (voir la relation (5.1)) normalisée à 1 comme une densité de probabilité, en utilisant l'énergie  $E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 + m\psi(r_i)$ , pour accepter ou rejeter la particule  $i$  fabriquée. Le taux de rejet est de l'ordre de 99.99% mais la vitesse des ordinateurs permet d'utiliser cette méthode très simple pour fabriquer un modèle de King discret.

### 7.2.2 La sphère de Hénon

La sphère de Hénon (Hénon [1964]) est une sphère de densité constante  $\rho_0$  possédant une distribution de vitesse suivant une loi de Gauss :

$$f_H(r, v) = \rho_0 e^{-v^2/\sigma^2} \quad (7.4)$$

Nous générerons donc indépendamment les positions selon une loi uniforme, et les vitesses selon une loi gaussienne centrée et réduite. En fixant le rapport du viriel initial  $\gamma = \frac{2E_c}{E_p}$  à une valeur donnée, nous pouvons calculer la dispersion de vitesse à attribuer au système.

### 7.2.3 Bain thermique

Lors de notre étude numérique, nous allons avoir besoin de créer un objet nous permettant de simuler un bain thermique. Pour ceci, nous allons utiliser un cube homogène de côté  $R_c$  possédant une distribution de vitesse gaussienne de dispersion  $\sigma_c$ . Nous jouerons sur ces deux paramètres pour tester l'influence du bain.

## 7.3 Observables des simulations

Lors de nos expériences numériques, nous souhaitons étudier l'évolution des paramètres de nos systèmes. Nous avons donc construit un code effectuant le calcul de différentes observables spatiales (densité, position, rapport d'axes, etc) et cinétiques (énergies, température, etc).

Toutes les courbes présentées dans cette section correspondent au test de ces différentes observables calculées pour un modèle de King de paramètre  $W_0 = 6$ ,  $r_c = 3.5\text{pc}$  et  $\sigma_v = 2.9\text{km.s}^{-1}$  généré avec 100 000 particules.

### 7.3.1 Recentrage

Pour calculer avec précision les différentes quantités physiques qui nous intéressent, il est important d'avoir la meilleure détermination possible du centre du système, qui a tendance à se déplacer. Ce déplacement peut se produire car la vitesse moyenne du système n'est pas exactement nulle, ou encore parce que des particules sont éjectées loin du système, emportant une partie notable de l'énergie.

Plusieurs méthodes sont envisageables pour recentrer le système. La première est de calculer le centre de gravité. Le problème posé par cette approche est que les particules très éloignées du centre système ont le même poids statistique que les particules proches du centre. Le calcul du centre de gravité peut s'en trouver largement affecté. Par conséquent, nous devons calculer un centre en donnant plus de poids aux particules se trouvant dans des zones denses du système. Il s'agit du « centre de densité », tel que décrit dans Casertano and Hut [1985]. Le principe est de chercher les  $j$  plus proches voisins d'une particule afin de déterminer un volume caractéristique pour cette particule et d'en déduire la densité locale :

$$\rho_j^i = \frac{j - 1}{V(r_j)} m \quad (7.5)$$

avec  $j$  le nombre de voisin,  $\rho_j^i$  la densité locale à la particule  $i$ ,  $V(r_j)$  le volume dans lequel se situent les  $j$  voisins, et  $m$  la masse d'une particule. Pour obtenir le centre de densité, nous faisons un calcul similaire au centre de gravité mais en pondérant chaque position par sa densité locale.

Ce calcul peut s'avérer numériquement couteux, nous avons donc adapté l'algorithme de l'octree pour accélérer ce calcul.

### 7.3.2 Masse et densité

Le calcul de ces observables est primordial et repose sur la construction d'histogrammes.

Le premier histogramme que nous générerons sera celui représentant la masse en fonction du rayon. Notre objet étant sphérique, nous allons le découper en coquilles d'épaisseur  $dr_i$  variable. Pour la calculer, nous comptons le nombre de particules dans chaque coquille sphérique de largeur  $dr$ , puis, après avoir multiplié par la masse d'un particule, nous sommes, pour le bin  $j$ , tous les bins inférieurs.

En même temps que nous calculons la fonction de masse, nous pouvons calculer la densité en divisant la masse dans un bin par le volume du bin :

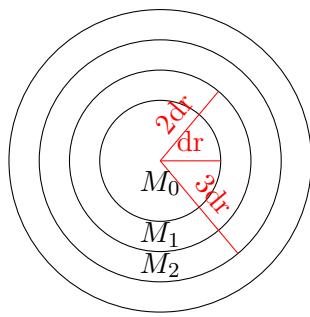


FIGURE 7.4 – Découpage de l'amas générée pour des coquilles espacées linéairement.

$$\begin{aligned} \rho_{\text{bin}} &= \frac{M_{\text{bin}}}{V_{\text{bin}}} \\ \rho(r_i + dr_i) &= \frac{M(r_i + dr_i) - M(r_i)}{V(r_i + dr_i) - V(r_i)} \end{aligned} \quad (7.6)$$

avec  $M_{r_{i=0}} \equiv 0$ . Nous utilisons deux calcul de ce type pour obtenir la densité : l'un utilisant des bins espacées logarithmiquement, l'autre utilisant des bins de pas constant.

La densité obtenue et celle prévue par la résolution numérique sont très proches, comme le montre le graphique 7.5. Le second graphique montre l'erreur relative en fonction du rayon.

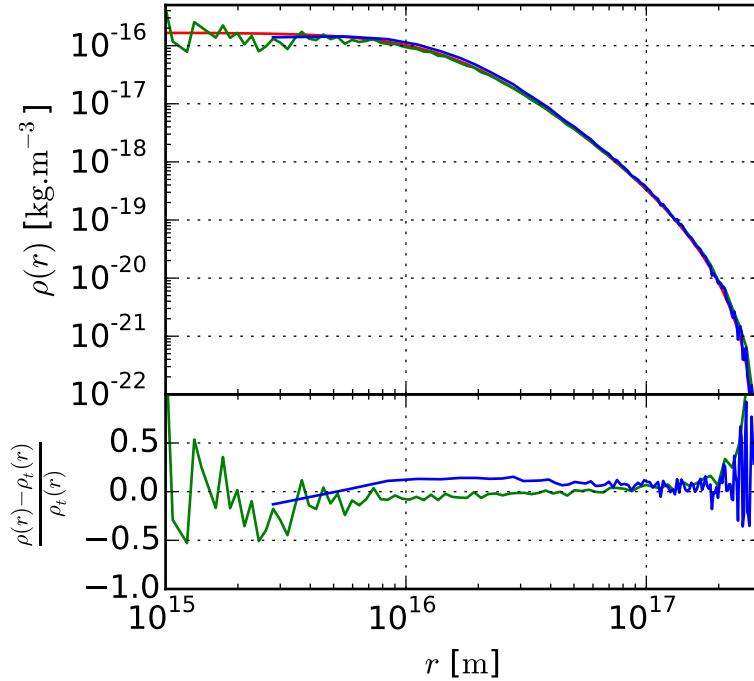


FIGURE 7.5 – Comparaison entre la résolution numérique et la densité donnée par le générateur. La courbe rouge correspond à la densité théorique, la courbe verte à la densité utilisant les intervalles espacés logarithmiquement et la courbe bleue à la méthode décrite ici.

Nous pouvons voir que l'accord entre les courbes théorique et calculées est toujours meilleur que 20%, sauf au centre et au bord du système. Ces deux régions sont en général trop pauvres en particules pour que nous puissions y avoir une précision correcte avec notre méthode de calcul.

### 7.3.3 Énergie et potentiel

Nous allons calculer le potentiel avec la méthode décrite dans la section 7.1.1. La méthode en arbre décrite dans la section 7.1.1 nous permet de calculer le potentiel gravitationnel avec précision.

La figure 7.6 montre le potentiel obtenu avec un angle d'ouverture de 0.5, et sans lissage, superposé au modèle de King décrit plus haut. Le second graphique représente l'erreur relative en fonction du rayon sur la calcul du potentiel. L'erreur sur le calcul est extrêmement faible.

En plus du potentiel, nous en profitons pour calculer l'énergie cinétique pour obtenir finalement l'énergie totale du système et le rapport du viriel  $\gamma = \frac{2E_c}{E_p}$ .

### 7.3.4 Anisotropie des vitesses et forme de l'amas

Nos conditions initiales correspondront généralement à des systèmes sphériques et isotropes en vitesse, mais qu'en est-il de l'état final ? Afin de suivre l'évolution de la forme et de l'anisotropie des vitesses de nos systèmes au cours du temps, nous avons développé deux observables : l'indicateur d'anisotropie et les rapports d'axe de la matrice d'inertie.

L'indicateur d'anisotropie des vitesses est défini comme suit :

$$\beta(r) = 1 - \frac{\sigma_t^2(r)}{2\sigma_r^2(r)} \quad (7.7)$$

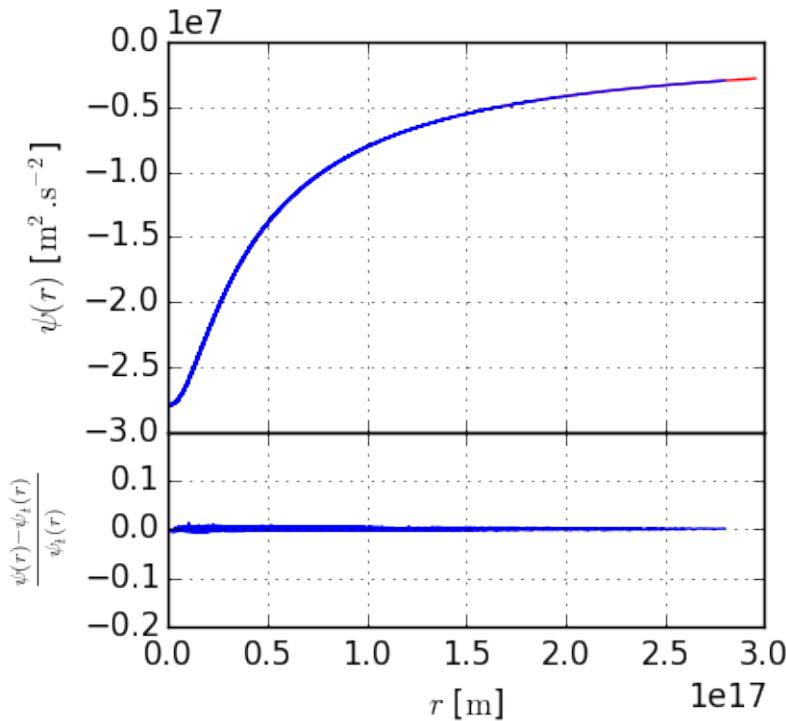


FIGURE 7.6 – Comparaison entre le potentiel théorique (courbe rouge) et le potentiel donné par le générateur (courbe bleue).

où  $\sigma_t$  est la dispersion de vitesse tangentielle et  $\sigma_r$  la dispersion de vitesse radiale. Pour obtenir ces dispersions, nous calculons, pour chacune des coquilles de la figure 7.4, les vitesses tangentielles moyennes et les vitesses radiales moyennes, puis les dispersions de vitesses correspondantes. Lorsque  $\beta(r) \equiv 0$ , le système est isotrope, pour  $\beta(r) \rightarrow 1$  le système présente une anisotropie radiale dans l'espace des vitesses et enfin quand  $\beta(r) < 0$  le système est tangentiel. Cet indicateur va nous permettre de déceler l'apparition d'une éventuelle instabilité d'orbite radiale.

Pour surveiller l'évolution de la forme du système, nous calculons les valeurs propres  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  de la matrice d'inertie :

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} A & -D & -E \\ -D & B & -F \\ -E & -F & C \end{pmatrix}$$

Toutes les particules ayant la même masse, il suffira de prendre :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^N y_i^2 + z_i^2 & D &= \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ B &= \sum_{i=1}^N x_i^2 + z_i^2 & E &= \sum_{i=1}^N x_i z_i \\ C &= \sum_{i=1}^N y_i^2 + x_i^2 & F &= \sum_{i=1}^N y_i z_i \end{aligned}$$

où  $x_i, y_i, z_i$  sont les coordonnées de chaque particules du système.

Une fois ces valeurs propres obtenues, nous traçons l'évolution des rapports d'axe (« axial ratio »)  $a_1 = \lambda_1/\lambda_2$  et  $a_2 = \lambda_3/\lambda_2$ . Quand  $a_1 = a_2 = 1$ , le système est sphérique. Si  $a_2 < 1$  et  $a_1 = 1$ , le système présente une forme allongée caractéristique de l'instabilité d'orbite radiale ; et enfin, pour  $a_1 > 1$  et  $a_2 < 1$  le système est triaxial. Cette observable va donc nous être très utile pour détecter l'apparition d'instabilités morphologiques comme l'instabilité d'orbite radiale.

Les indicateurs de structures que sont les rayons à 10% ( $R_{10}$ ), 50% ( $R_{50}$ ) et à 90% ( $R_{90}$ ) de masse sont également calculés.

### 7.3.5 Température cinétique

La dernière observable que nous souhaitons obtenir est la température. La température que nous calculons est la version discrète de celle donnée dans le chapitre 5 :

$$\begin{aligned} T(r) &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(\vec{x}, \vec{p}) d\vec{p}}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, \vec{p}) d\vec{p}} \\ &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (v_i - \langle v \rangle)^2 \end{aligned} \quad (7.8)$$

où  $\langle v \rangle$  est la vitesse moyenne. Cette observable va nous permettre de savoir si les sphères sont chauffées ou refroidies par leurs interactions avec un bain thermique, et à quelle rythme. La figure 7.7 montre l'évolution, avec le rayon, de la température calculée par l'équation (7.8) et la théorie. Nous pouvons voir ici que l'erreur relative est beaucoup plus importante que sur les autres observables.

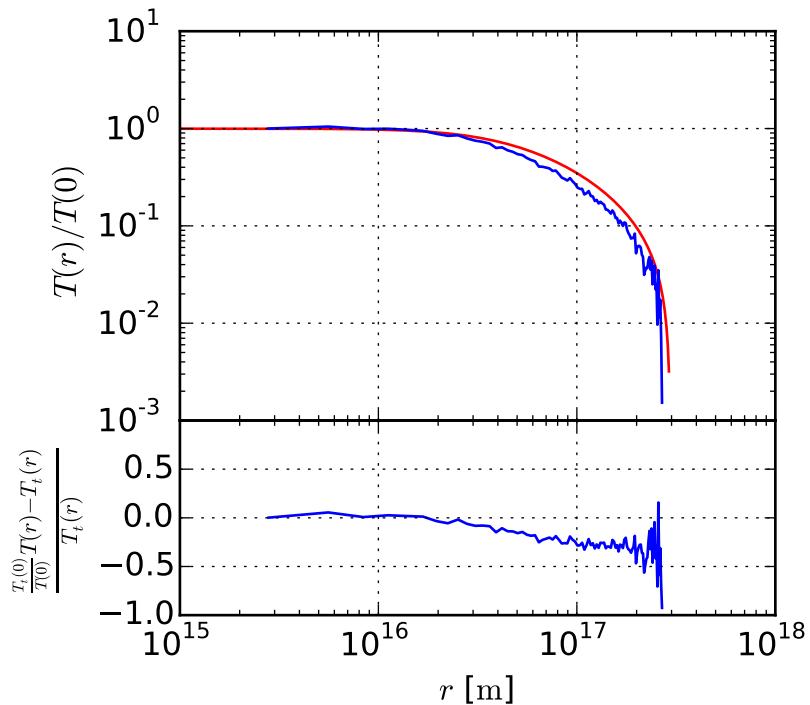


FIGURE 7.7 – Comparaison entre la température théorique (en rouge) et celle calculée (en bleue). Toutes deux sont normalisées.

## Chapitre 8

# Comparaison entre Gadget et un code Vlasov

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Description du code Vlasov</b>	<b>69</b>
<b>8.2</b>	<b>Comparaison entre les simulations Vlasov et Gadget-2</b>	<b>70</b>
8.2.1	Tests préliminaires : sphéricité et isotropie dans les simulations $N$ -corps	71
8.2.2	Le cas $\gamma = -0.5$	71
8.2.3	Le cas $\gamma = -0.1$	72
<b>8.3</b>	<b>Discussion</b>	<b>72</b>

---

Dans ce chapitre, je vais présenter un travail de comparaison de la mesure de la fonction de distribution dans l'espace des phases et du profil de densité entre le code  $N$ -corps GADGET-2 et un code résolvant numériquement l'équation de Vlasov pour un système sphérique. Ce projet a été réalisé dans le cadre d'une collaboration avec Stéphane Colombi, Sébastien Peirani, Thierry Soubrie et Yasushi Suto (Colombi et al. [2014], inclut en annexe page 107, plus loin C2PSS). Après une description du code Vlasov dans la première section, les résultats de mon travail seront présentés dans la section 8.2.1. Ils correspondent à une étude préliminaire dont les conclusions nous ont conduit à écrire un article sur le sujet, dont je résumerai les résultats principaux dans la discussion de la section 8.3.

Pour que nos comparaisons aient un sens, il faut que le système préserve au mieux sa symétrie sphérique car nous utilisons GADGET-2 tel quel, notamment sans modification du calcul de la force qui imposerait par exemple qu'elle soit purement radiale. La sphère de Hénon, introduite dans la section 7.2.2, représente dans ce cadre un excellent cas test car elle est sujette à une évolution dynamique non triviale et il a été prouvé dans de nombreuses études qu'elle est très peu sensible numériquement aux formes d'instabilités qui conduiraient à des déviations par rapport à la symétrie sphérique, telles que l'instabilité d'orbite radiale (voir par exemple van Albada [1982], Roy and Perez [2004], Barnes et al. [2009]). Nous effectuerons nos analyses pour deux types de conditions initiales : un cas « chaud » correspondant à un rapport du Viriel  $\gamma = -0.5$  et un cas « froid » correspondant à  $\gamma = -0.1$ .

### 8.1 Description du code Vlasov

Le solveur de Vlasov que nous utiliserons dans ce travail sera désigné par VLASOLVE. Il a été écrit par Thierry Soubrie en se basant sur l'article de Fujiwara [1983]. Il est présenté en détail dans Colombi et al. [2014] et j'en résume ici le principe.

L'équation de Vlasov en symétrie sphérique s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{j^2}{r^3} - \frac{M(r)}{r^2} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0 \quad (8.1)$$

avec  $f = f(r, v_r, j, t)$  la fonction de distribution dans l'espace des phases du système au temps  $t$ ,  $r$  la position radiale,  $v_r$  la vitesse radiale et  $j$  le moment angulaire. La fonction  $M(r)$  donne la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon  $r$ . Dans cette équation, et comme il le sera fait dans tous le reste de ce chapitre, nous avons choisi les unités telles que la constante gravitationnelle vaut  $G = 1$ .

Pour résoudre l'équation, l'espace des phases est discréteisé sur un maillage tridimensionnel de dimensions  $(N_r, N_v, N_j)$  et tel que  $(r, v_r, j) \in ([r_{\min}; r_{\max}], [-v_r^{\max}; v_r^{\max}], [0; j_{\max}])$  avec  $r$  évoluant logarithmiquement,  $v_r$  linéairement et chaque tranche  $k$  de  $j$  telle que  $j = j_{\max} (k - 1/2)^2 / N_j^2$ .

Pour suivre numériquement l'évolution de  $f(r, v_r, j, t)$ , un schéma dit de « splitting » est utilisé, inspiré d'un article de référence de Cheng and Knorr [1976]. Dans ce schéma, chaque point  $i$  du maillage est considéré comme une particule virtuelle. Pour calculer  $f(r, v_r, j, t + \Delta t)$  en ce point, on remonte la trajectoire de cette particule virtuelle d'un pas de temps en arrière en séparant l'équation (8.1) en deux opérateurs :

- un premier opérateur permet d'obtenir la trajectoire balistique d'une particule, incluant la partie inertielle :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{j^2}{r^3} \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

- un second permettant de calculer l'accélération gravitationnelle :

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{M(r)}{r^2} \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0$$

Ces deux opérateurs, alliés à un schéma de type « saute-mouton », permettent d'obtenir la position de la particule virtuelle correspondant à chaque point du maillage au pas de temps précédent. La densité dans l'espace des phases est mesurée en ce point par interpolation sur la grille en utilisant des splines d'ordre 3. Elle est alors affectée au point  $i$  de la grille au temps  $t + \Delta t$  par application directe du théorème de Liouville.

Notons que chaque tranche de moment angulaire  $j$  peut être traitée séparément étant donné que le moment angulaire est un invariant du système.

Cette méthode ne permet de suivre qu'une fonction de distribution suffisamment lisse, notamment à cause de l'interpolation utilisée. Comme nous allons le voir, les variations des vitesses orbitales des différentes composantes du système induisent la filamentation de  $f$  dans le sous-espace  $(r, v_r)$ . La résolution finie de la grille ne permet pas de suivre tous les détails de cette filamentation à petite échelle, et va donc naturellement les lisser par effet de diffusion, ou parfois malheureusement les amplifier par effet de crénage. Nous verrons que ce dernier a peu d'impact sur la dynamique. Cependant, pour tenir compte des éléments dont nous venons de discuter, nous apodiserons la sphère de Hénon, supposée de masse totale unité, de la manière suivante :

$$g(r) = \text{erf}\left(\frac{R - r}{r_\epsilon}\right) + 1$$

avec  $R$ , le rayon de l'objet choisi égal à 2 et  $r_\epsilon = 0.5$ . Pour corriger des effets de cette apodisation, la masse totale est renormalisée a posteriori. Cette apodisation sera bien entendu appliquée également aux conditions initiales des simulations  $N$ -corps.

## 8.2 Comparaison entre les simulations Vlasov et Gadget-2

Dans cette section, nous discutons des comparaisons détaillées de GADGET-2 et VLASOLVE que nous réalisons pour des rapports du viriel  $\gamma = -0.5$  et  $\gamma = -0.1$ . Étant donné le choix des unités (masse totale du système unité, taille initiale  $R = 2$ ), on peut donc s'attendre à ce que le système plus froid ( $\gamma = -0.1$ ) évolue dynamiquement plus vite que l'autre système comme argumenté par exemple dans Fujiwara [1983]. Par conséquent, les analyses ont été réalisées en des temps plus petits pour  $\gamma = -0.1$  que pour  $\gamma = -0.5$ .

Pour conduire les comparaisons, les simulations VLASOLVE réalisées ont une grille de résolution  $(N_r, N_v, N_j) = (1024, 1024, 512)$  et un pas de temps  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$ . Les simulations GADGET-2, quant à elles, composées de  $10^6$  particules, utilisent un paramètre de lissage de la force  $\epsilon = 10^{-3}$  et un pas de temps maximum de  $\Delta t = 0.1$ .<sup>1</sup> Les autres paramètres de GADGET-2 sont ceux par défaut, notamment l'angle d'ouverture  $\theta = 0.5$  et la tolérance sur l'erreur `ErrTolForceAcc` = 0.005 pour le calcul de la force.

### 8.2.1 Tests préliminaires : sphéricité et isotropie dans les simulations $N$ -corps

Comme mentionné dans l'introduction de ce chapitre, la sphère de Hénon est connue pour préserver la symétrie sphérique. L'hypothèse de la sphéricité étant un élément fondamental de nos analyses, nous allons donc vérifier sa validité dans nos simulations  $N$ -corps. Cela est fait dans les figures 8.1 et 8.2 pour  $\gamma = -0.5$  et  $\gamma = -0.1$ , respectivement. En accord avec les résultats de la littérature, les rapports des valeurs propres du tenseur d'inertie restent très proches de 1 avec un écart maximum de l'ordre du pourcent pour  $\gamma = -0.5$  et de 3% pour  $\gamma = -0.1$ .

L'analyse des propriétés d'ellipticité du système peut être complétée par la mesure de l'anisotropie dans l'espace des vitesses  $\beta$ . En effet, cette dernière, si elle est trop prononcée, peut être la source d'instabilités d'orbites radiales (voir la section 6.1). Nos conditions initiales imposent  $\beta = 0$ . La figure 8.3 montre que pour  $\gamma = -0.5$ ,  $\beta$  reste très proche de 0 et donc que le caractère isotrope du système dans l'espace des vitesses est presque parfaitement préservé. En revanche, pour  $\gamma = -0.1$  (figure 8.4),  $\beta$  devient positif, plus particulièrement au moment du croisement des trajectoires ( $t \sim 3$ ) puis son amplitude diminue et se stabilise à  $\beta \simeq 0.4$ . Cela veut dire que la composante radiale des vitesses est significativement amplifiée par rapport à la composante tangentielle, mais les valeurs propres du tenseur d'inertie ne montrent pas d'évolution significative. Le système ne développe donc pas d'instabilité d'orbites radiales essentiellement parce qu'il n'y a pas de germe sur laquelle elle pourrait se développer, comme attendu d'après les discussions de la section 6.1.

En conclusion, nous pouvons considérer que nos sphères de Hénon conservent suffisamment leur caractère sphérique pour pouvoir sans crainte effectuer des comparaisons de la structure fine de la fonction de distribution dans l'espace avec le solveur VLASOLVE.

### 8.2.2 Le cas $\gamma = -0.5$

Les panneaux du haut et du milieu des figures 8.5, 8.6 et 8.7 montrent l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases pour  $j = 0.425$  et intégrée sur  $j$ . L'accord entre GADGET-2 et VLASOLVE est très bon jusqu'à  $t = 45$ . À  $t = 45$ , des irrégularités commencent à être visibles dans la structure filamentaire des enroulements de la fonction de distribution dans l'espace des phases, ce qui est le signe de l'apparition d'instabilités. L'accord entre les deux simulations se déteriora. Premièrement, la simulation Vlasov présente comme attendu des effets de diffusion significatifs. Deuxièmement, les deux simulations ne semblent plus exactement synchronisées. Notamment, les irrégularités mentionnées plus haut ne sont pas exactement positionnées au même endroit.

Cette désynchronisation n'apparaît pas dans les simulations présentées dans C2PSS. Les principales différences entre les simulations présentées dans ce chapitre et celles de l'article sont le paramètre de lissage de la force  $\epsilon$  et le pas de temps maximal autorisé. La figure 8.8 montre que  $\epsilon$  n'a pas d'influence importante sur la dynamique. La seule explication du désaccord observé est donc le pas de temps, dix fois supérieur ici par rapport aux simulations montrées dans C2PSS.

Les panneaux du bas des figures 8.5, 8.6 et 8.7 nous informent sur l'évolution du profil de densité projetée. Excepté au centre et sur le bord du système, où le nombre de particules devient trop faible, l'accord entre VLASOLVE et GADGET-2 est excellent, même dans les régions de faible densité.

1. Sachant que le temps dynamique initial est de l'ordre de  $2\pi$ .

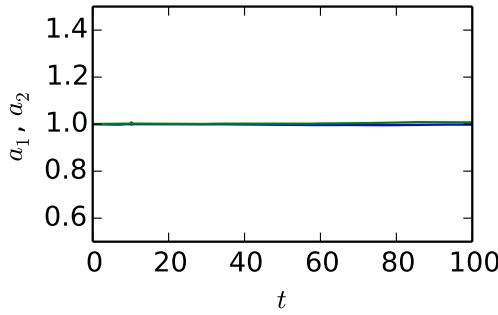


FIGURE 8.1 – Évolution des rapports d’axes  $a_1$  et  $a_2$  pour  $\gamma = -0.5$ .

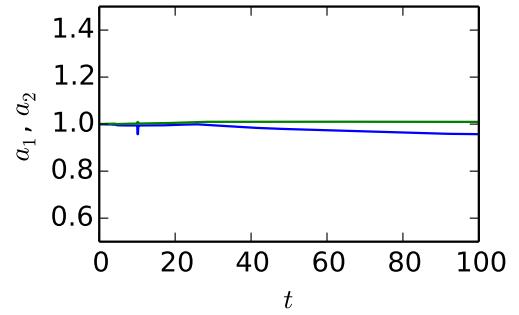


FIGURE 8.2 – Évolution des rapports d’axes  $a_1$  et  $a_2$  pour  $\gamma = -0.1$ .

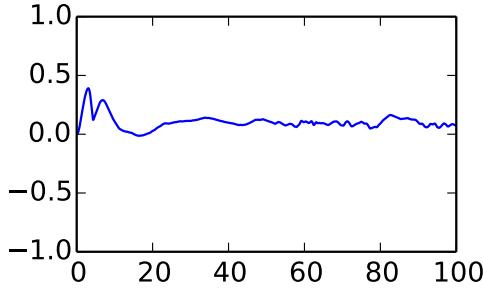


FIGURE 8.3 – Évolution de l’anisotropie pour  $\gamma = -0.5$ .

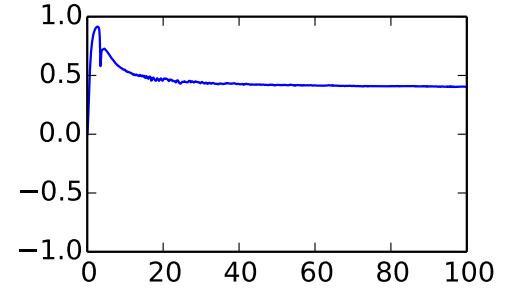


FIGURE 8.4 – Évolution de l’anisotropie pour  $\gamma = -0.1$ .

### 8.2.3 Le cas $\gamma = -0.1$

Les résultats correspondant à  $\gamma = -0.1$  sont similaires aux précédents mais un peu plus complexes. En effet, si nous regardons le profil de densité à différents temps (voir les panneaux du bas des figures 8.9, 8.10 et 8.11), l'accord entre GADGET-2 et VLASOLVE est excellent (toujours à l'exception du centre et du bord du système). Lorsque l'on s'intéresse à l'espace des phases, les temps  $t \leq 10$  (les panneaux du haut et du milieu des figures 8.9 et 8.10) montrent là encore un excellent accord. Aux temps plus grands, par exemple à  $t = 25$ , comme illustré par la figure 8.11, les espaces des phases ne sont plus en aussi bon accord, mais cela n'est pas un problème de synchronisation comme c'était le cas pour  $\gamma = -0.5$ . Ici, on note que la simulation Vlasov, outre une légère diffusion, est sujette à un effet d'aliasing numérique conséquent, mais qui ne semble pas avoir d'effet sur la dynamique. La simulation GADGET-2, quant à elle, développe une instabilité, visible sur les enroulements extérieurs, qui n'est pas présente dans la simulation Vlasov. Cette instabilité est étudiée en détail dans C2PSS et nous montrons qu'elle est entièrement due aux effets collectifs du bruit blanc des particules. En effet, elle ne dépend ni de  $\epsilon$ , ni du pas de temps, ni des paramètres contrôlant les erreurs sur la force. Il semble de plus qu'elle apparaisse plus tardivement quand on augmente le nombre de particules jusqu'à  $N = 10^7$ . En revanche, une simulation comportant 100 millions de particules semble aussi instable qu'une simulation n'en comportant que 10 millions. Ceci suggère que l'instabilité observée est bien physique mais se développe trop tôt quand le nombre de particules est trop petit. Cette instabilité n'est pas présente dans la simulation VLASOLVE, mais cela pourrait être dû aux effets de diffusion qui pourraient empêcher certains modes instables de se développer.

## 8.3 Discussion

Dans ce chapitre, nous venons de comparer GADGET-2 à un code Vlasov et les résultats de nos analyses, tant pour l'inspection visuelle dans l'espace des phases que pour le profil de densité  $\rho(r)$ , montrent un bon accord général entre les deux méthodes numériques à condition d'utiliser

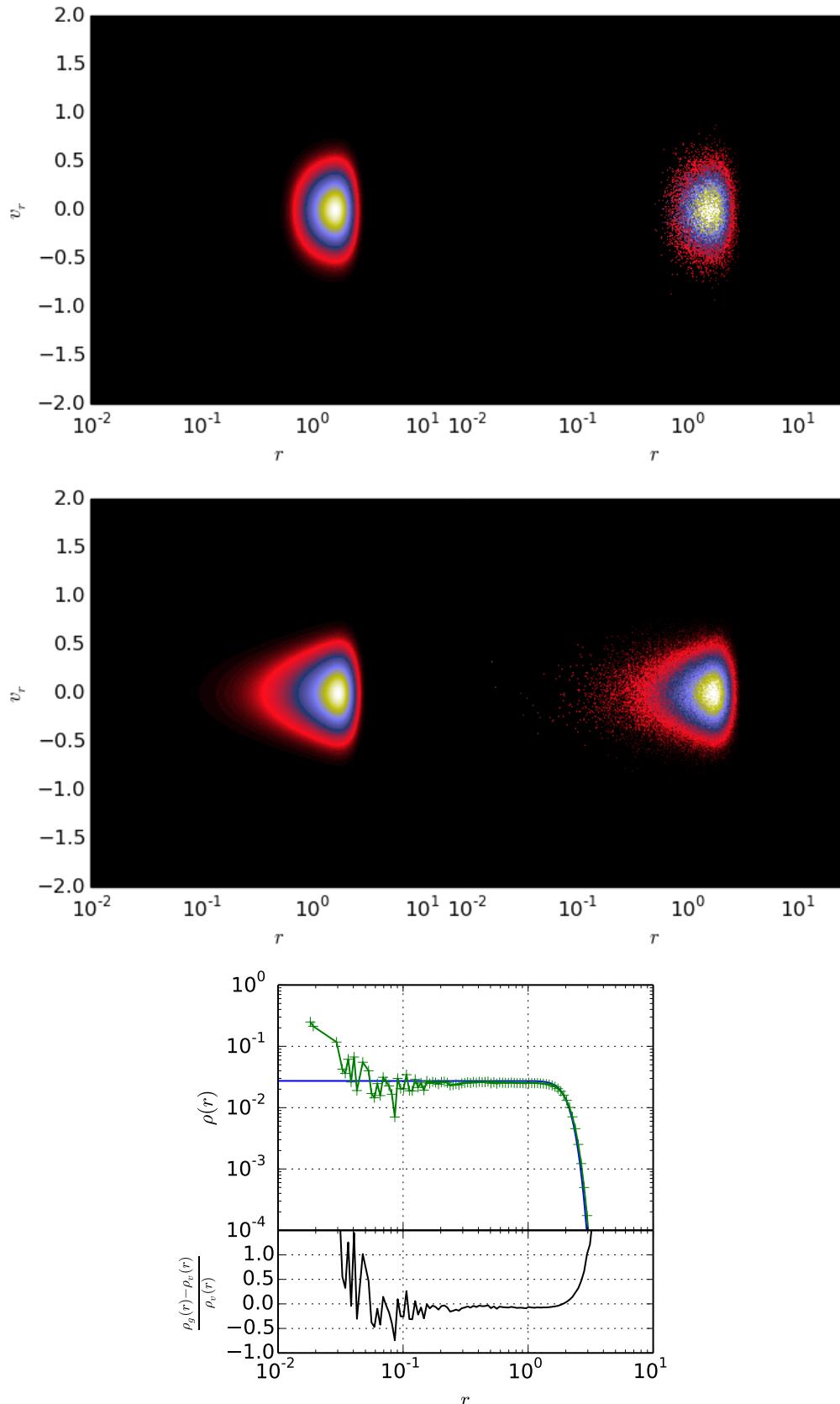


FIGURE 8.5 – Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour  $\gamma = -0.5$  : conditions initiales. En haut : densité dans l'espace des phases pour une tranche de moment angulaire dans l'intervalle  $j \in [0.4; 0.45]$  (à gauche VLASOLVE et à droite GADGET-2) ; au milieu : densité intégrée sur  $j$  ; en bas : profils de densité projetée  $\rho(r)$ . La courbe bleue correspond au code Vlasov et la courbe verte à la simulation  $N$ -corps.

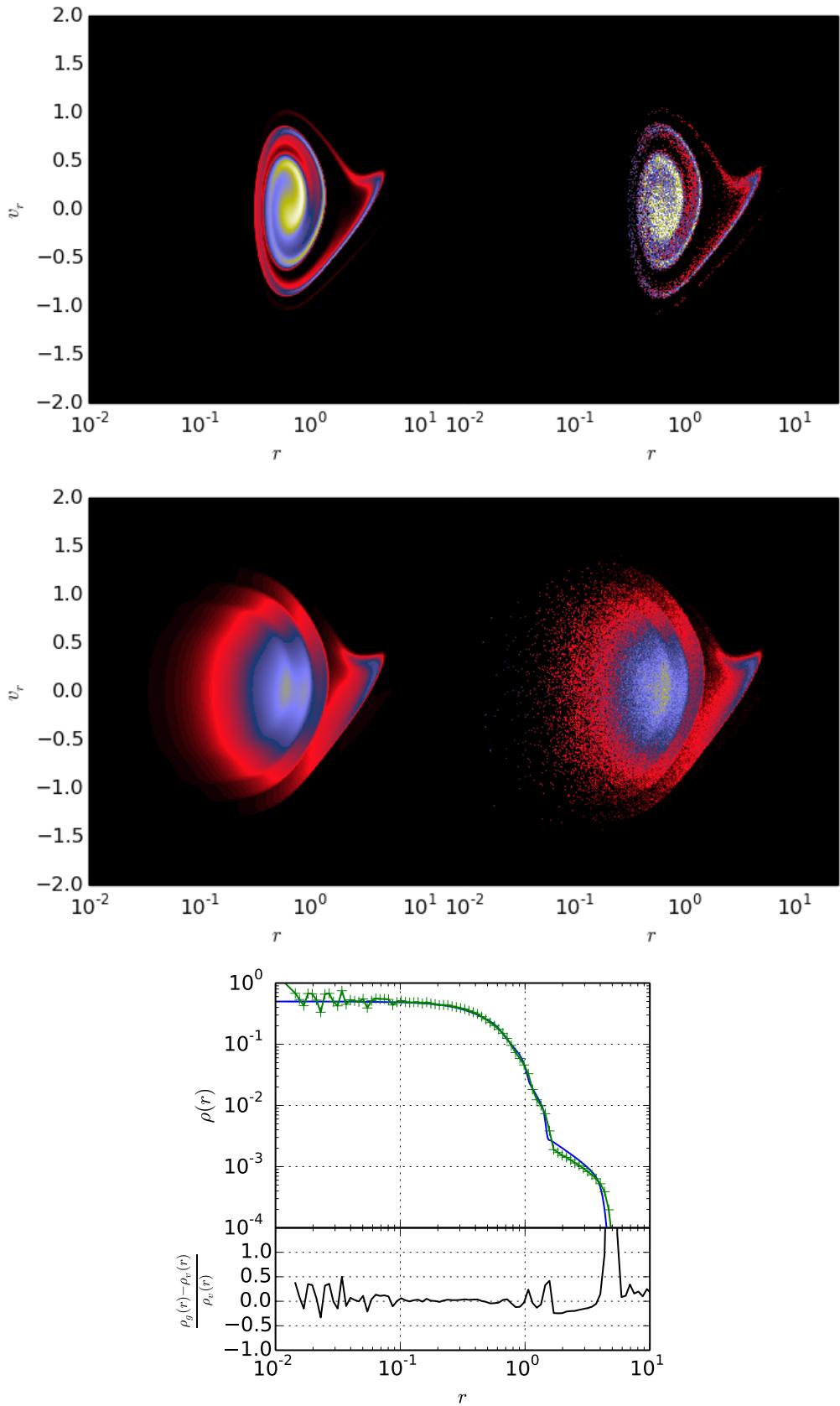


FIGURE 8.6 – Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour  $\gamma = -0.5$  :  $t = 13$ . Suite de la figure 8.5.

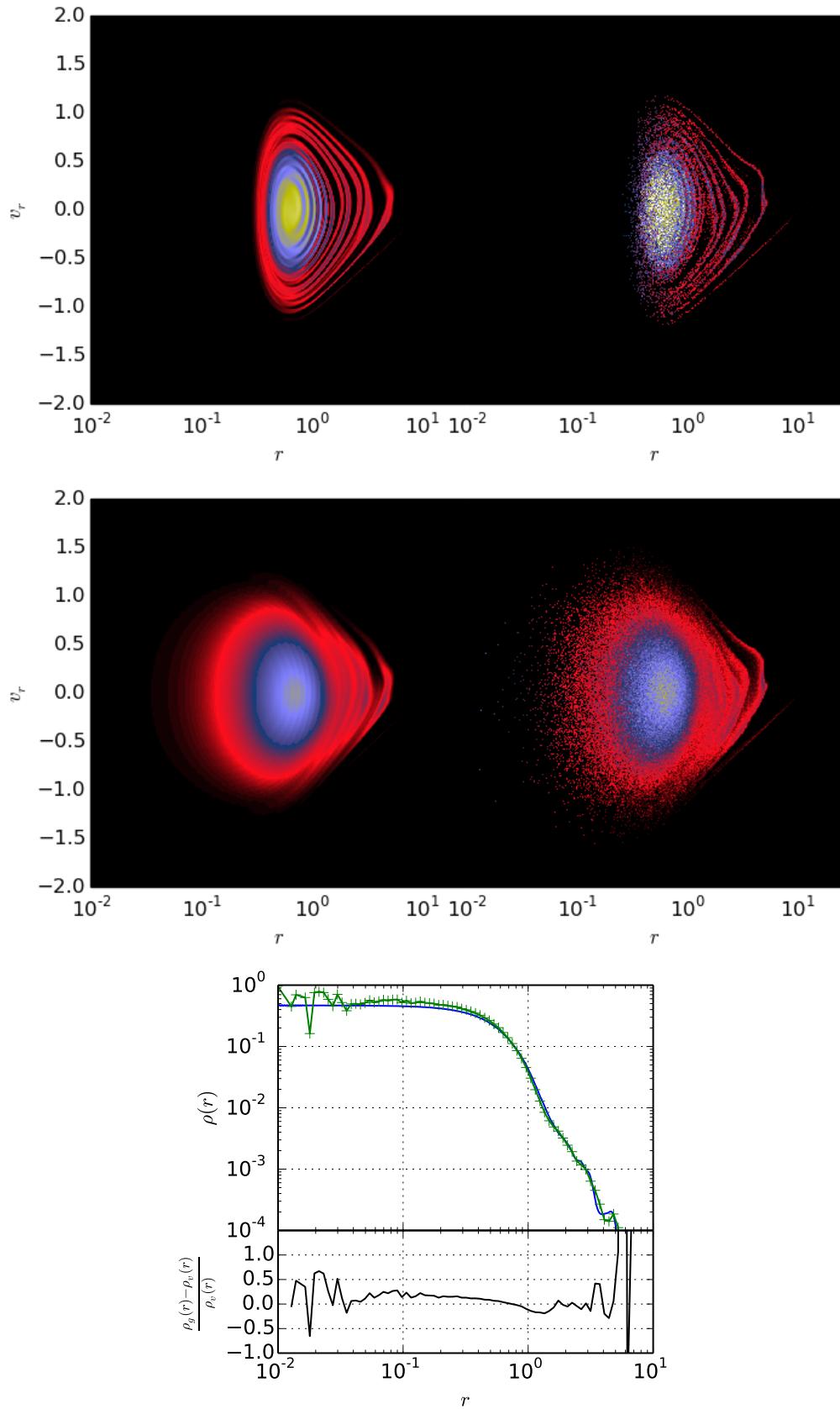


FIGURE 8.7 – Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour  $\gamma = -0.5$  :  $t = 45$ . Suite de la figure 8.6.

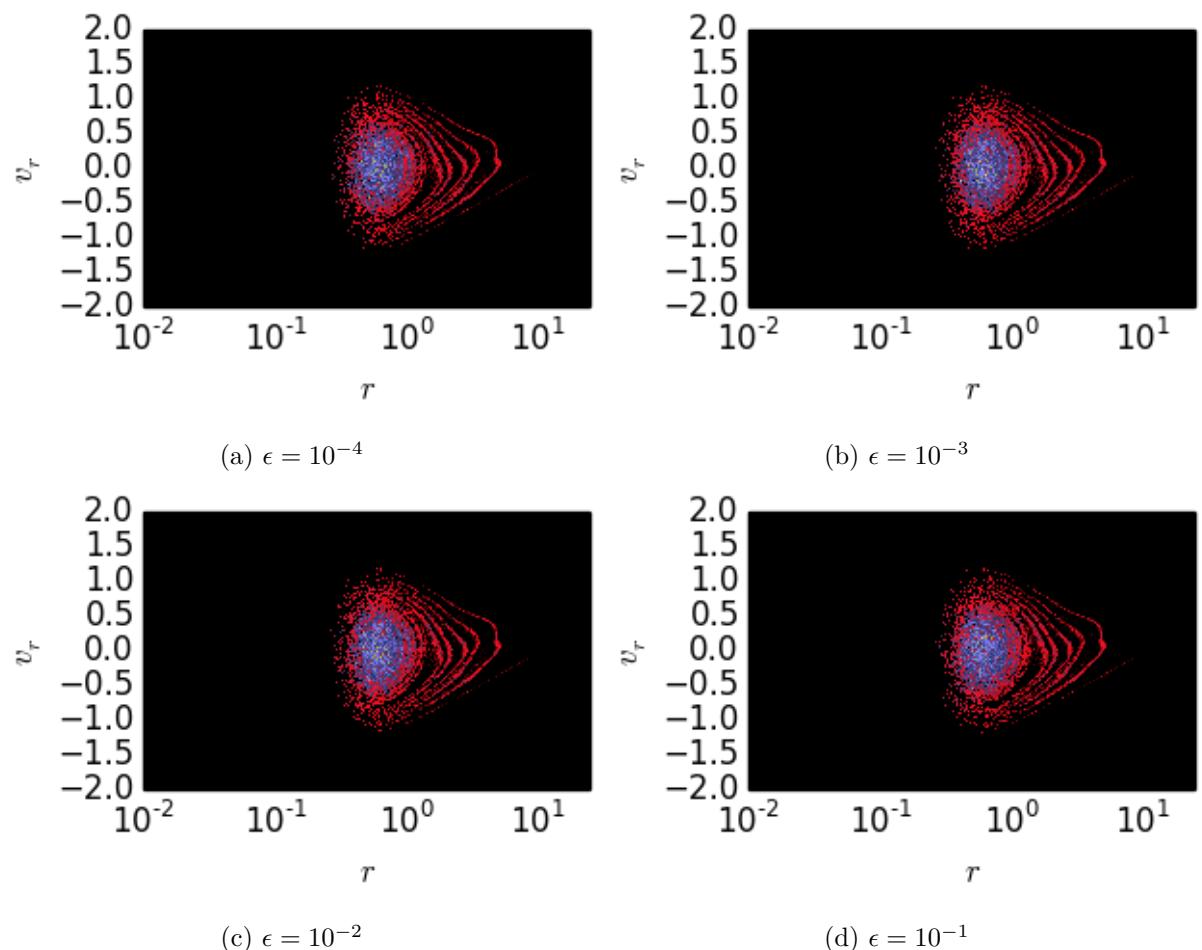


FIGURE 8.8 – Représentation de l'espace des phases à  $j = 0.425$  et  $t = 45$  pour  $\gamma = -0.5$  et différents  $\epsilon$ .

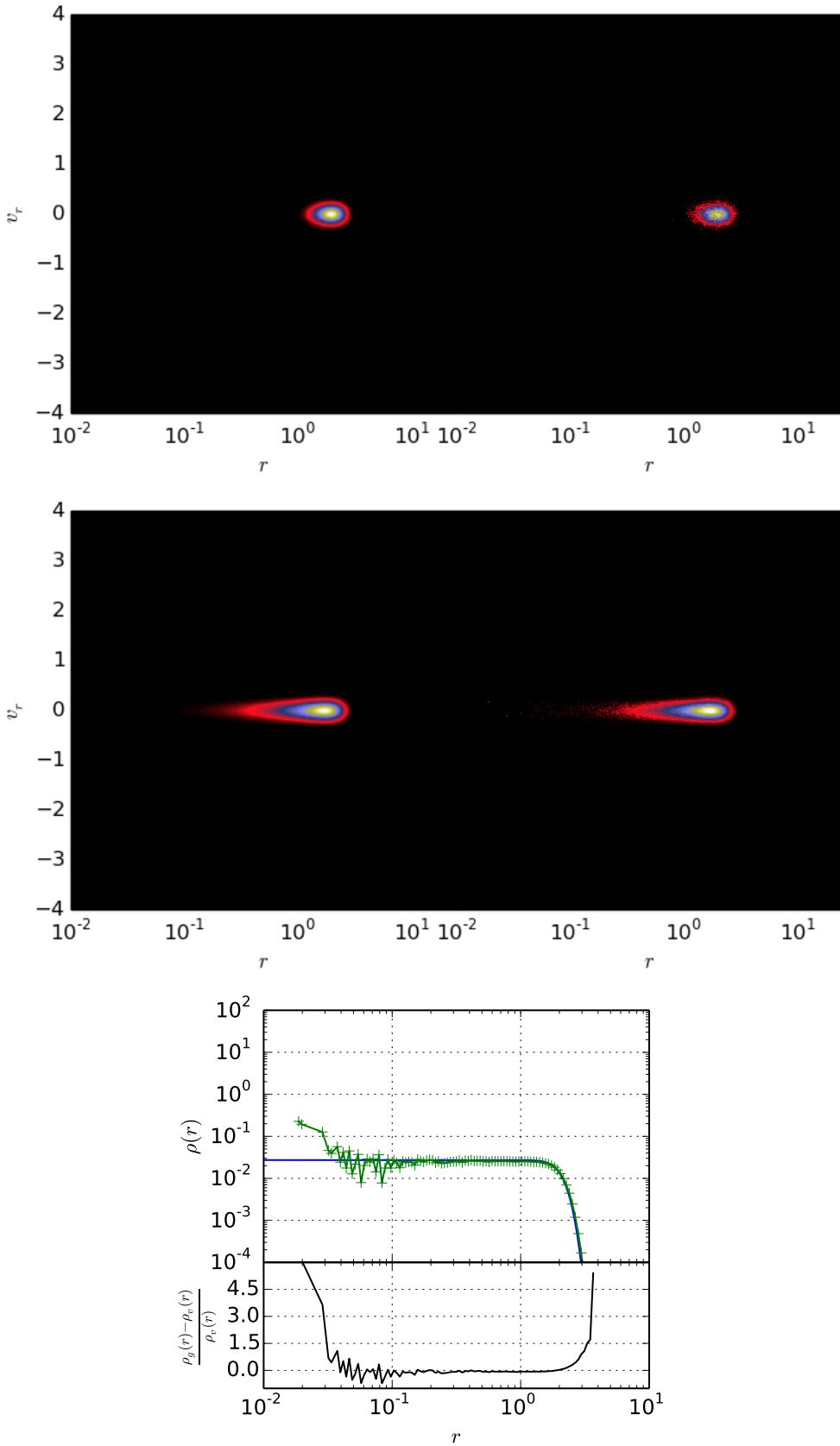


FIGURE 8.9 – Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour  $\gamma = -0.1$  : conditions initiales. En haut : densité dans l'espace des phases pour une tranche de moment angulaire dans l'intervalle  $j \in [0.4; 0.45]$  (à gauche VLASOLVE et à droite GADGET-2) ; au milieu : densité intégrée sur  $j$  ; en bas : profils de densité projetée  $\rho(r)$ . La courbe bleue correspond au code Vlasov et la courbe verte à la simulation  $N$ -corps.

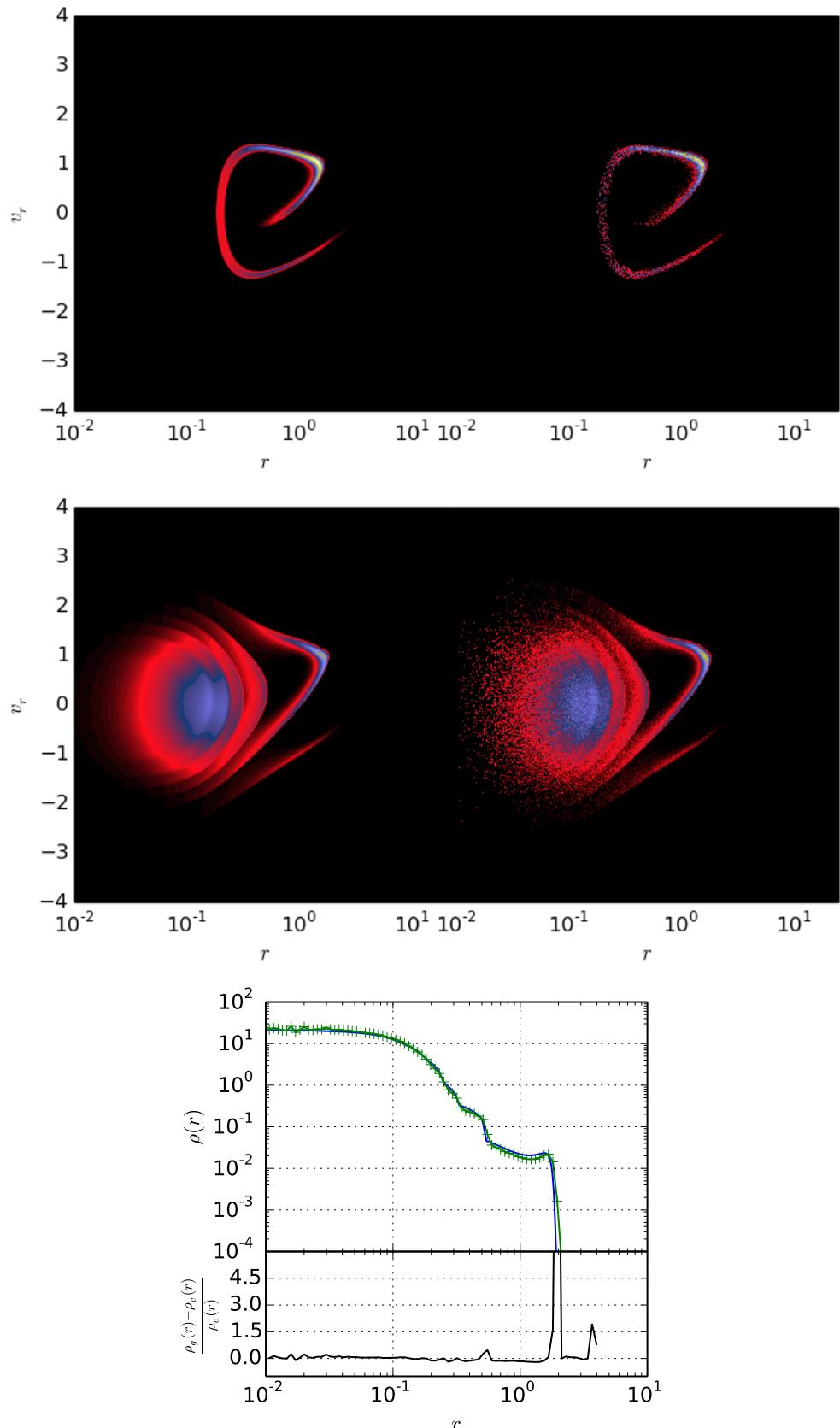


FIGURE 8.10 – Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour  $\gamma = -0.1$  :  $t = 5$ . Suite de la figure 8.9.

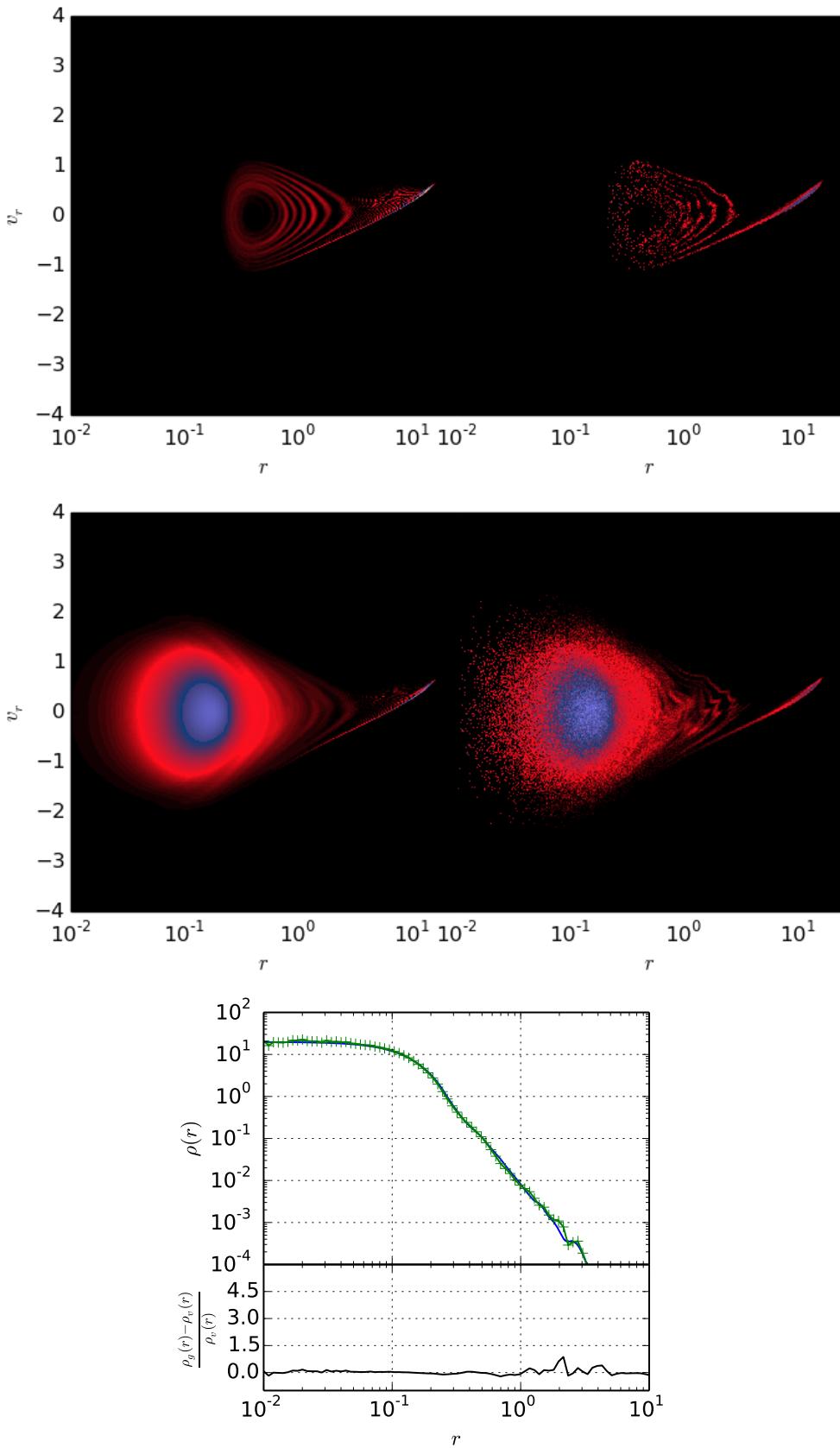


FIGURE 8.11 – Comparaison de GADGET-2 à VLASOLVE pour  $\gamma = -0.1 : t = 25$ . Suite de la figure 8.10.

les bons paramètres pour réaliser les simulations. Nous notons cependant l'apparition d'une instabilité numérique dans les simulations GADGET-2 dans le cas  $\gamma = -0.1$ . Cette instabilité pourrait être physique bien que dans C2PSS, nous ayons montré une dépendance manifeste par rapport au nombre de particules utilisées dans les simulations  $N$ -corps.

Ici, j'ai utilisé des simulations avec  $N = 10^6$  particules et je n'ai testé que les variations (très faibles) induites par le choix du lissage de la force. Dans C2PSS, des tests supplémentaires sont réalisés, notamment en variant le nombre de particules entre  $N = 10^4$  et  $N = 10^8$ , le pas de temps et les paramètres de tolérance sur l'erreur de la force. Clairement, la quantité la plus déterminante est le nombre de particules. En particulier, il semble nécessaire d'avoir au moins de l'ordre de 100 millions de particules pour réaliser correctement une simulation de la sphère de Hénon avec  $\gamma = -0.1$  !

Dans C2PSS, des analyses quantitatives supplémentaires sont réalisées pour compléter l'inspection visuelle de la fonction de distribution dans l'espace des phases. Pour réaliser ces mesures additionnelles, de nouveaux estimateurs statistiques sont introduits : des corrélateurs et des estimateurs de l'entropie, tous deux basés sur une écriture de la vraisemblance que les simulations  $N$ -corps représentent des réalisations localement poissonniennes des simulations Vlasov. L'analyse statistique confirme les impressions visuelles et apporte quelques informations supplémentaires. Notamment, on remarque que pendant la phase de relaxation, l'accord entre les simulations  $N$ -corps et les simulations Vlasov se dégrade temporairement. Cet évènement est de plus faible amplitude et apparaît plus tardivement quand le nombre de particules augmente.

Ce qu'il faut conclure de ce chapitre, c'est que les simulations  $N$ -corps sont capables dans les cas relativement chauds considérés ici de suivre avec précision la structure fine de l'espace des phases, mais il est nécessaire d'utiliser un grand nombre de particules et cela d'autant plus que le système est froid.

# Chapitre 9

## Expériences numériques

### Sommaire

---

9.1	Description des conditions initiales . . . . .	81
9.2	Étude préliminaire . . . . .	82
9.3	Seconde étude . . . . .	82
9.4	Focalisation sur les simulations intéressantes . . . . .	86
9.4.1	Instabilité d'orbites radiales . . . . .	86
9.4.2	Évolution de la pente avec l'âge (effets de relaxation) . . . . .	91

---

Après avoir étudié les propriétés observationnelles des amas globulaires et des galaxies, nous avons mis en évidence un certain nombre de résultats analytiques sur diverses sphères isothermes. Nous allons maintenant entreprendre des simulations numériques visant à illustrer ces divers résultats et constats.

Les expériences que nous allons mener consistent à étudier la dynamique d'un système auto-gravitant (SAG) placé dans un bain thermique. Ces conditions respectent celles du problème détaillé dans la section 6.3.

Afin de préserver l'intégrité de nos différents systèmes, nous avons imposé aux particules du bain et du SAG d'avoir la même masse.

### 9.1 Description des conditions initiales

Nous avons utilisé principalement deux types de bain :

**Un thermostat** : ce type de bain est construit de sorte à se comporter comme un thermostat. Il s'agit d'un cube périodique, dans lequel les particules massives sont réparties spatialement selon une distribution uniforme. La température est fixée par la distribution gaussienne attribuée aux vitesses. Un thermostat maintient une température sans être affecté par le système avec lequel il est en contact. Nous faisons donc en sorte que les particules de ce bain puissent influer sur les particules du SAG sans que celles-ci n'affectent celles du bain en utilisant une option de Gadget.

**Un réservoir thermique** : il s'agit d'un système composé de particules massives réparties uniformément dans un cube périodique et dont la température est aussi fixée par une distribution gaussienne des vitesses. Contrairement au thermostat, les particules du réservoir ressentent l'interaction gravitationnelle des particules du SAG.

Les paramètres du réservoir et du thermostat sont les suivants :

- le nombre de particules  $N_b$  ;
- la température  $T$  ;
- le côté du cube  $R_c$ .

Ces paramètres sont indépendants et constituent une partie de l'espace des paramètres de nos simulations. La stabilité du réservoir thermique va dépendre des valeurs de ces paramètres, notamment à travers le critère de Jeans (voir la section 6.2).

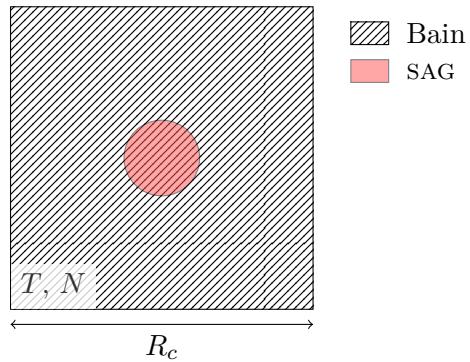


FIGURE 9.1 – Condition initiale des simulations.

L'effet d'un thermostat sur le SAG ne peut a priori se faire qu'aux travers des collisions<sup>1</sup>, les particules du thermostat ne pouvant être capturées par le SAG. L'effet correspondant ne peut alors apparaître que sur des temps grands devant le temps dynamique du SAG. Un réservoir thermique sera a priori plus efficace, les interactions gravitationnelles pouvant amener une partie des particules du réservoir à être capturées par le SAG, ou réciproquement. Des effets peuvent donc apparaître plus rapidement.

Nous avons utilisé deux types de SAG :

- un modèle de King, dont les paramètres (définis dans le chapitre 5) sont  $W_0$ ,  $\sigma$ ,  $r_c$  et le nombre de particules  $N_K$  ;
- une sphère de Hénon, de rayon initial  $R$ , de masse  $M$ , de viriel initial  $\gamma$  et contenant  $N_H$  particules.

La figure 9.1 représente la répartition initiale du bain et du SAG. À ce moment, des particules du bain se trouvent déjà dans le SAG.

## 9.2 Étude préliminaire

Une première série de simulations a consisté à placer un modèle de King, de paramètre  $W_0 = 5.2$ ,  $\sigma_c = 2.9 \text{ km.s}^{-1}$  et  $r_c = 3.5 \text{ pc}$ , dans un thermostat. Les paramètres de chaque simulation étaient la température du bain, la taille de la boîte et le nombre de particules utilisées dans chacun des deux systèmes. La taille de la boîte nous permet de jouer sur la densité du bain. La température était calculée pour être un multiple  $k$  de la température moyenne de la sphère de King initiale. Nous avons fait varier  $k$  dans l'intervalle  $10^{-3}$  à  $10^5$ . Chaque configuration initiale a évolué sur des périodes de temps allant de  $10T_d$  à  $120T_d$ , où  $T_d$  est le temps dynamique de la sphère de King initiale (voir le chapitre 2). De plus, nous avons ajusté le paramètre de lissage de la force  $\epsilon$  de sorte que le SAG utilisé ne soit pas affecté par les effets de relaxations à deux corps. Ni la densité du SAG ni les autres paramètres n'ont jamais montré de véritable évolution lors de ces simulations.

Face à ce constat, nous avons augmenté la sensibilité de nos simulations en remplaçant le thermostat par un réservoir thermique et la sphère de King par une sphère de Hénon.

## 9.3 Seconde étude

Une seconde série de simulations est construite en utilisant une sphère Hénon de rayon  $R = 2$ , de masse  $M = 1$ , de viriel  $\gamma = -0.5$ , contenant  $N_H = 30000$  particules et placée dans un réservoir thermique. Nous utiliserons ici le même système d'unité que dans le chapitre 8, dans lequel le temps dynamique du SAG est  $T_d^{t=0} = 2\pi$ . De la même façon que lors de l'étude précédente, nous allons utiliser les caractéristiques du réservoir comme paramètres des simulations : le nombre de

1. par collisions, nous entendons des interactions à deux corps.

particules  $N_b$ , la taille du cube  $R_c$  et sa température  $\sigma_c$ . Globalement l'évolution dynamique de ce système montre toujours deux phases successives.

Dans un premier temps, la sphère de Hénon s'effondre et forme, comme attendu pour  $\gamma = -0.5$  (Roy and Perez [2004], Joyce et al. [2009]), une structure cœur-halo de pente  $\alpha \simeq -4$  (CH4) à l'équilibre ( $\gamma = -1$ ). La durée de cette phase initiale est de l'ordre de quelques temps dynamiques de la sphère de Hénon initiale. Cette phase d'effondrement n'est pratiquement pas affectée par les paramètres du réservoir, excepté pour certaines simulations. L'intersection des deux systèmes (bain et SAG) n'étant pas vide, le nombre de particules du bain contenu dans le SAG est variable, ce qui explique la légère variation observée des paramètres post-effondrement. La figure 9.2 indique, après l'effondrement, les valeurs des différents rayons, axes d'inertie, viriel, température et anisotropie en fonction des paramètres du réservoir thermique pour une partie représentative de nos simulations. Ces valeurs sont calculées en faisant la moyenne de chaque paramètre dans l'intervalle  $[1T_d^{t=0}; 1.5T_d^{t=0}]$ . Cette phase d'effondrement est la traduction de l'instabilité de Jeans.

L'évolution dynamique post-effondrement de cette structure de type CH4 est alors influencée par le bain. Cette influence est modulée par les paramètres du réservoir thermique. Nous avons effectué plus de 300 simulations dans l'espace des paramètres, la table 9.1 résume l'évolution dynamique d'une partie représentative de ces simulations. Cette évolution s'étend jusqu'à un temps correspondant à  $15.9T_d^{t=0}$ . Les observables étudiées sont celles définies dans le chapitre 7, nous avons regroupé leur évolution dynamique en différentes classes associées aux symboles suivants :

$N$	$R_c$	$\sigma_c$	$R_{10}, R_{50}, R_{90}$	$a_1, a_2$	$\beta$	$\rho$	$T$	$\gamma$	nom
$1 \cdot 10^5$	33.3	$10^{-3}$	●	◊	$0.15 \nearrow 0.43$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$A_{3,1}$
		$10^{-1}$	●	∅	$0.02 \searrow -0.1$	∅	↗	∅	$A_{3,2}$
		$2 \cdot 10^{-1}$	●	∅	$0.02 \searrow -0.11$	∅	↗	∅	$A_{3,3}$
	66.6	$10^{-3}$	●	∅	$0.08 \searrow 0.03$	∅	↗	↘	$A_{6,1}$
		$10^{-1}$	●	∅	$0.06 \searrow -0.11$	∅	↗	∅	$A_{6,2}$
		$2 \cdot 10^{-1}$	●	∅	$0.06 \searrow -0.12$	∅	↗	∅	$A_{6,3}$
$2 \cdot 10^5$	66.6	$10^{-3}$	●	∅	$0.1 \nearrow 0.17$	$\alpha \searrow$	↗	∅	$A_{6,1}^m$
$4 \cdot 10^5$	66.6	$10^{-3}$	●	∅	$0.1 \nearrow 0.23$	$\alpha \searrow$	↗	∅	$A_{6,2}^m$
$1 \cdot 10^6$	66.6	$10^{-3}$	●	∅	$0.12 \nearrow 0.27$	$\alpha \searrow$	↗	∅	$A_{6,3}^m$
$3.25 \cdot 10^5$	33.3	$10^{-3}$	●	♠	$0.36 \searrow 0.33$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$B_{3,1}$
		$10^{-1}$	●	∅	$0.05 \searrow 0.0$	∅	↗	↘	$B_{3,2}$
		$2 \cdot 10^{-1}$	●	∅	$0.03 \searrow -0.05$	∅	↗	∅	$B_{3,3}$
	66.6	$10^{-3}$	●	∅	$0.11 \nearrow 0.42$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$B_{6,1}$
		$10^{-1}$	●	∅	$0.06 \searrow -0.1$	∅	↗	∅	$B_{6,2}$
		$2 \cdot 10^{-1}$	●	∅	$0.06 \searrow -0.1$	∅	↗	∅	$B_{6,3}$
$5.5 \cdot 10^5$	33.3	$10^{-3}$	●	♠	$0.5 \nearrow 0.37$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$C_{3,4}$
		$10^{-1}$	●	∅	$0.07 \searrow 0.03$	∅	↗	↘	$C_{3,5}$
		$2 \cdot 10^{-1}$	●	∅	$0.04 \searrow -0.01$	∅	↗	↘	$C_{3,6}$
	66.6	$10^{-3}$	●	♠	$0.15 \nearrow 0.67$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$C_{6,1}$
		$10^{-1}$	●	∅	$0.06 \searrow -0.07$	∅	↗	∅	$C_{6,2}$
		$2 \cdot 10^{-1}$	●	∅	$0.05 \searrow -0.1$	∅	↗	∅	$C_{6,3}$
$1856250$	50	$1,25 \cdot 10^{-4}$	●	♠	$0.5 \searrow 0.13$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$C_{3,1}^m$
		$2,5 \cdot 10^{-4}$	●	♠	$0.5 \searrow 0.28$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$C_{3,2}^m$
		$5 \cdot 10^{-4}$	●	♠	$0.5 \searrow 0.22$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$C_{3,3}^m$
		$10^{-3}$	●	♠	$0.5 \searrow 0.24$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$C_{3,4}^m$
		$10^{-1}$	●	∅	$0.36 \rightarrow 0.36$	$\alpha \searrow$	↗	↘	$C_{3,5}^m$
		$2 \cdot 10^{-1}$	●	∅	$0.3 \nearrow 0.36$	∅	↗	↘	$C_{3,6}^m$

TABLE 9.1 – Résultats des simulations combinant un Hénon et un réservoir thermique.

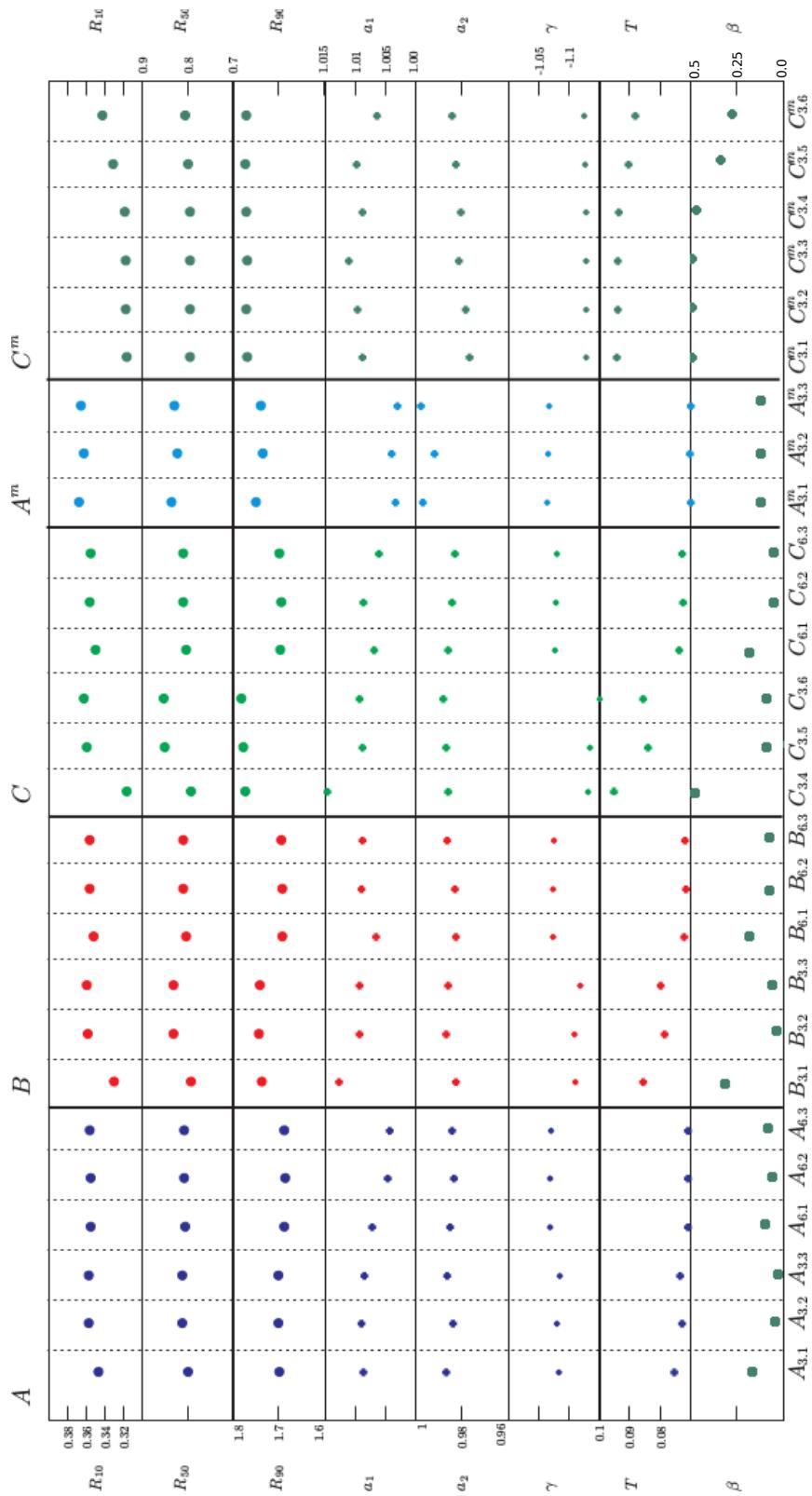


FIGURE 9.2 – Valeur des différentes observables après l'effondrement en fonction des paramètres du bain thermique.

- Les variations des observables  $R_{10}$ ,  $R_{50}$  et  $R_{90}$  peuvent être regroupées en 3 classes :
  - indique que  $R_{10}$  et  $R_{50}$  diminuent (de 5% à 40%) ; le cœur du SAG se contracte alors que  $R_{90}$  varie de -15% à 60%.
  - indique une accrétion modérée du bain par le SAG. Le rayon  $R_{10}$  continue à décroître (de l'ordre de 20%) alors que  $R_{50}$  et  $R_{90}$  croissent. La variation de  $R_{50}$  peut atteindre 30% tandis que  $R_{90}$  peut aller jusqu'à doubler.
  - indique une forte accrétion du bain par le SAG. Tous les rayons caractéristiques sont au minimum doublés sur l'évolution dynamique du système.
- Les variations des rapports d'axes mettent en évidence 3 évolutions distinctes :
  - ♠ indique l'apparition d'une déformation du système au cours de laquelle  $a_1 \simeq 1$  et  $a_2 \rightarrow 0.4$ .
  - ∅ indique que le système conserve sa forme sphérique.
  - ◊ est un cas particulier qui sera détaillé un peu plus loin.

Une première analyse est alors possible :

1. les simulations auxquelles sont associées les symboles ● et ♠ présentent également une évolution particulière de l'anisotropie. Ce paramètre passe par un minimum au moment où le SAG se déforme. Ce type d'évolution peut-être interprété dans le contexte de l'instabilité d'orbite radiale.
2. les simulations ● entrent dans une catégorie intermédiaire suggérant que les caractéristiques du bain, comme sa densité ou sa température, sont des paramètres importants dans le déclenchement de l'instabilité d'orbite radiale.
3. les simulations ● forment la dernière catégorie. La concentration du cœur présente dans ces simulations peut avoir une origine thermodynamique issue de la présence du Halo ou bien être la manifestation des effets de relaxation à 2 corps. L'étude faite dans la section suivante tentera de répondre à cette question.
4. la simulation caractérisée par le symbole ◊ est un cas limite où les résultats semblent affectés par les conditions périodiques. Ces simulations vont avoir tendance à former des barres alignées sur les coins de la boîte. La figure 9.3 compare deux simulations, l'une subissant les effets de la boîte périodique, l'autre ne les subissant pas.

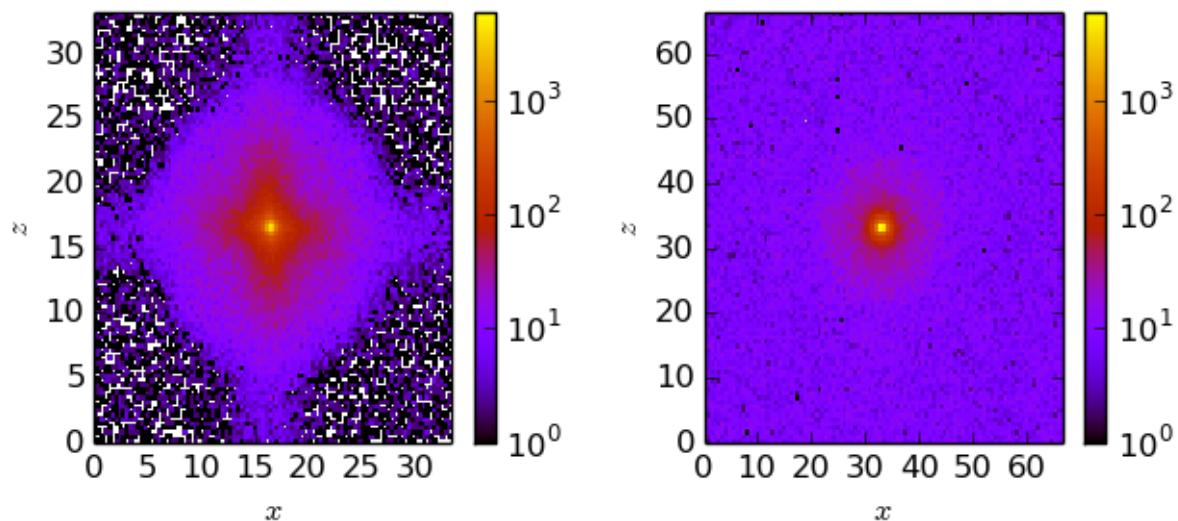


FIGURE 9.3 – À gauche une simulation ( $A_{3,1}$ ) sous l'influence des conditions périodiques, à droite une simulation ( $A_{6,1}$ ) correcte.

Pour rendre compte correctement de l'évolution dynamique, nous avons besoin d'une unité de temps capable de rendre compte de cette évolution. Les deux unités arrivant directement à l'esprit sont le temps dynamique et le temps de relaxations à deux corps (voir chapitre 2). Nous

rappelons que le temps dynamique  $T_d$  s'écrit :

$$T_d = \pi \sqrt{\frac{R^3}{2m(R)G}}$$

et que le temps de relaxation à deux corps  $T_{\text{rel}}$  s'écrit (voir le chapitre 2) :

$$T_{\text{rel}} = \frac{Nm(R)}{4\pi^2 R^3 \rho(R) \ln \frac{R}{p_{\min}}} T_d$$

avec  $R$  un rayon caractéristique de l'objet,  $m(R)$  la masse contenue dans le rayon  $R$  et  $\rho(R)$  la densité à ce même rayon. Quel rayon utiliser ? Comme nous le verrons dans la section suivante,  $R_{90}$  est très sensible à l'environnement, surtout pour les simulations de types ( $\bullet$ ,  $\spadesuit$ ).  $R_{10}$  est plus intéressant mais ne rend compte que de l'évolution du cœur du système.  $R_{50}$  semble ainsi le meilleur choix. Dans la suite, et sauf mention contraire, nous utiliserons le temps dynamique  $T_d^{50\%}$  et le temps de relaxation à deux corps  $T_{\text{rel}}^{50\%}$  calculés avec  $R_{50}$ . Pour  $p_{\min}$ , nous prendrons la plus petite longueur caractéristique de nos simulation : le paramètre de lissage de la force  $\epsilon$ .

Une estimation directe du temps de la simulation en unités de temps dynamique consisterait à utiliser une relation de la forme  $t'_i = \frac{t_i}{T_d^{50\%}}$ . Cependant les fluctuations de  $T_d^{50\%}$  pourraient conduire à des « retour en arrière ». Pour éviter cet effet, nous allons calculer une nouvelle échelle de temps comme suit :

$$t'_i = t'_{i-1} + \frac{t_i - t_{i-1}}{T_d^{50\%}}$$

Cette échelle est plus stable mais le temps correspondant est sous-estimé par rapport à l'échelle précédente « naturelle ».

Dans la section suivante, nous commencerons par étudier le déclenchement de l'instabilité d'orbite radiale, puis nous chercherons à comprendre pourquoi certaines simulations semblent montrer un effondrement du SAG.

## 9.4 Focalisation sur les simulations intéressantes

### 9.4.1 Instabilité d'orbites radiales

Les simulations de la première catégorie présentent une forte accrétion ( $\bullet$  et  $\spadesuit$ ), les rayons  $R_{10}$ ,  $R_{50}$  et  $R_{90}$  augmentent de façon importante. Nous allons nous concentrer sur la simulation  $C_{3,4}^m$  dans un premier temps. Dès le début de l'évolution,  $R_{90}$  augmente et va quadrupler jusqu'à  $t' = 16$  où il semble avoir atteint une valeur limite.  $R_{50}$  et  $R_{10}$  commencent à augmenter peu après (à partir de  $t' = 7$  pour  $R_{50}$  et  $t' = 12$  pour  $R_{10}$ ) et continuent tout au long de la simulation. Cette évolution fait l'objet de la figure 9.4. Elle montre l'évolution des rayons  $R_{10}$ ,  $R_{50}$  et  $R_{90}$  au cours de la simulation. Au fur et à mesure que l'accrétion se poursuit, l'anisotropie du SAG évolue jusqu'à atteindre un maximum puis diminue. Dans le même temps, les rapports d'axes nous apprennent que la forme de l'objet change :  $a_1$  reste constant mais  $a_2$  va diminuer jusqu'à atteindre  $a_2 \approx 0.5$ . Le système s'étend donc selon un axe privilégié et passe d'une forme sphérique à ovale. Cette évolution est présentée sur la figure 9.5 et se retrouve sur toutes les simulations marquées par le symbole  $\spadesuit$ . Comme nous avons pu le voir dans le chapitre 6, l'instabilité d'orbite radiale est censée se produire lorsqu'un système sphérique voit la partie radiale de son espace des phases se peupler. C'est bien ce qu'indique l'augmentation progressive du paramètre d'anisotropie  $\beta$ . En effectuant un zoom autour du maximum de l'anisotropie (voir la figure 9.6d), nous observons une diminution significative de  $a_2$ , signe de l'arrivée de l'instabilité vers  $t' = 11.5$ , tandis que le maximum de l'anisotropie est atteint dans l'intervalle  $t' \in [11; 12]$ .

En cherchant à savoir à quel moment l'instabilité se produit, nous remarquons que pour les simulations de la catégorie  $C_{i,j}^m$ , le changement de température du bain n'influe pas de manière significative sur son déclenchement : toutes les simulations de cette catégorie déclenchent l'instabilité dans l'intervalle  $t' \in [11; 12]$ . La figure 9.6 montre l'évolution des simulations  $C_{i,j}^m$ ,  $C_{3,4}$  et

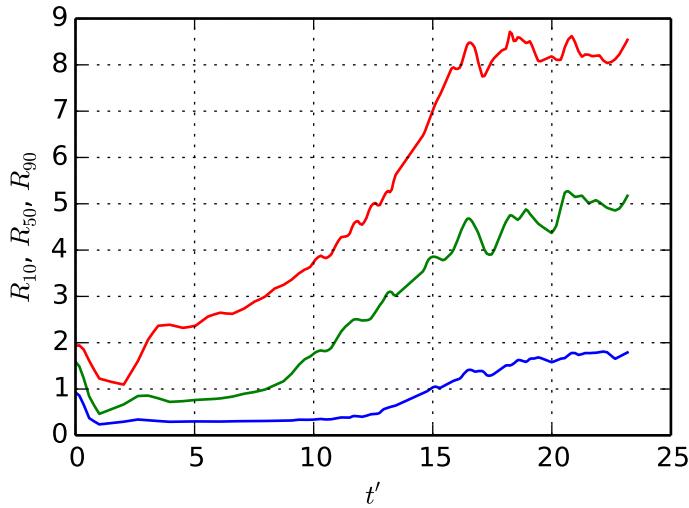


FIGURE 9.4 – Évolution des rayons à 10% (en bleu), 50% (en vert) et 90% (en rouge) de masse au cours de la simulation  $C_{3,4}^m$ .

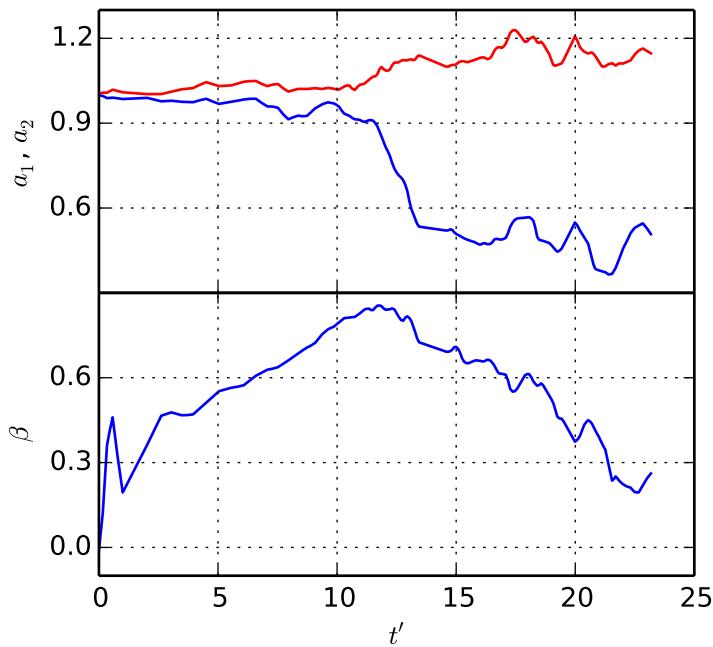


FIGURE 9.5 – Évolution des rapports d'axes  $a_1$  et  $a_2$  et l'anisotropie au cours de la simulation  $C_{3,4}^m$ .

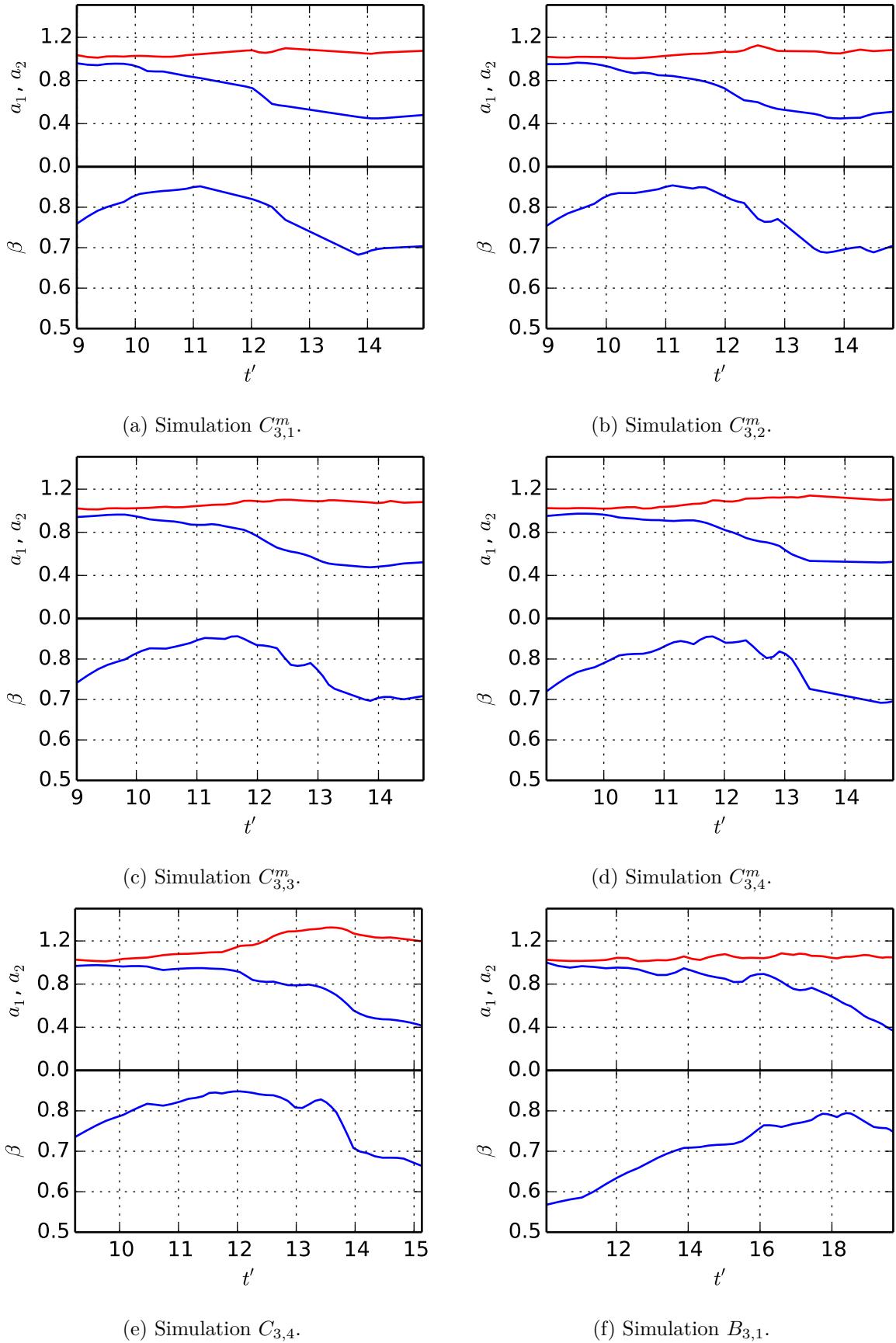


FIGURE 9.6 – Zoom sur le moment de l’instabilité pour les rapports d’axes  $a_1$  et  $a_2$  et l’anisotropie.

$B_{3,1}$  sur la région où se produit l'instabilité. Il est aisément de remarquer que l'instabilité se produit toujours au même moment, sauf pour la simulation  $B_{3,1}$  (figure 9.6f). La seule différence entre les simulations de la famille  $C_{i,j}^m$  est la dispersion de vitesse du bain et donc sa température qui varie dans un facteur 100 entre les éléments de cette famille. Le SAG central et la densité du bain sont les mêmes. Nous pouvons donc en déduire que la dispersion de vitesse du bain, dans l'intervalle de valeurs testé, a très peu d'effet sur le déclenchement de l'instabilité d'orbite radiale.

La simulation  $C_{3,4}$  et la simulation  $C_{3,4}^m$  ont été construites pour être les plus similaires possible. Pour construire la simulation  $C_{3,4}^m$ , nous avons multiplié la taille du cube par 1.5 afin de vérifier si cette différence n'est pas dû aux conditions périodiques, et nous avons multiplié le nombre de particules du bain par  $1.5^3$  pour conserver sa densité. Cette simulation affiche une

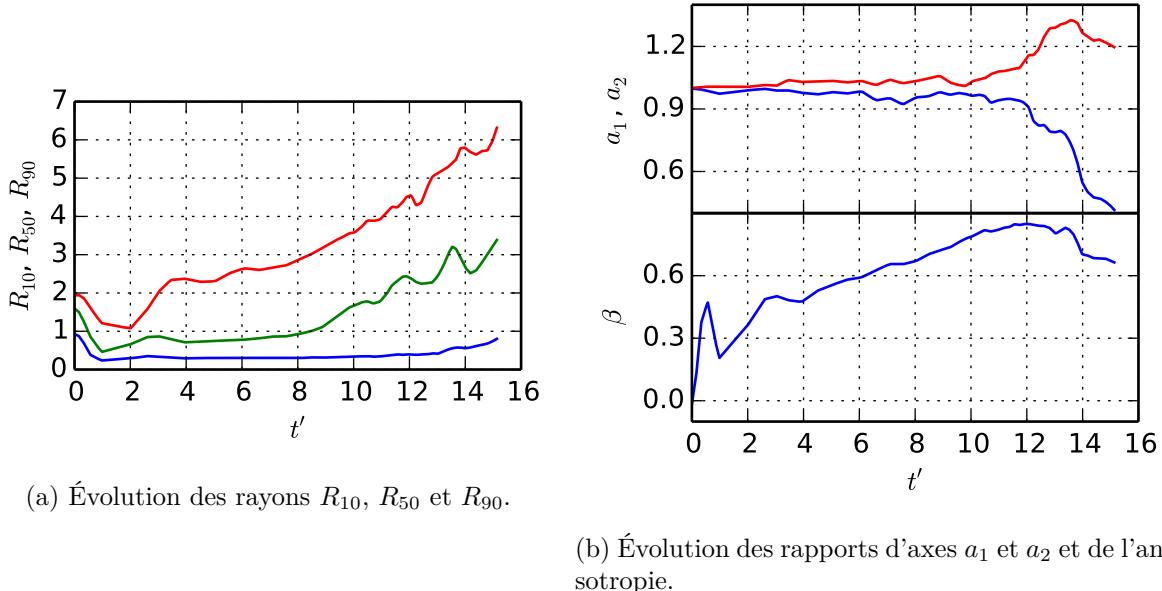
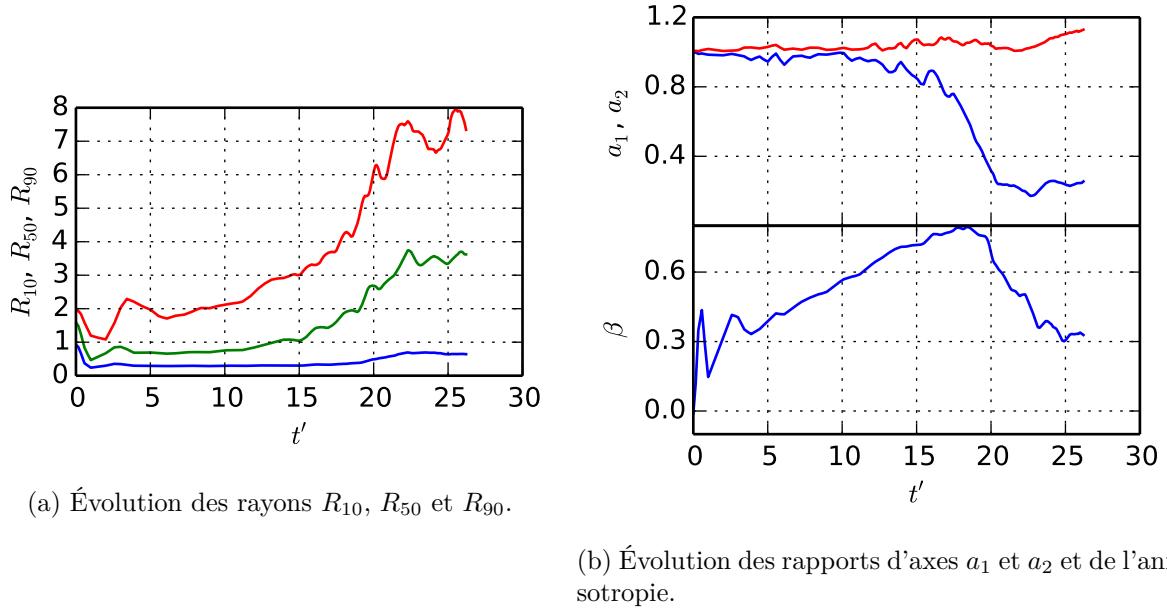


FIGURE 9.7 – Évolution de la simulation  $C_{3,4}$ .

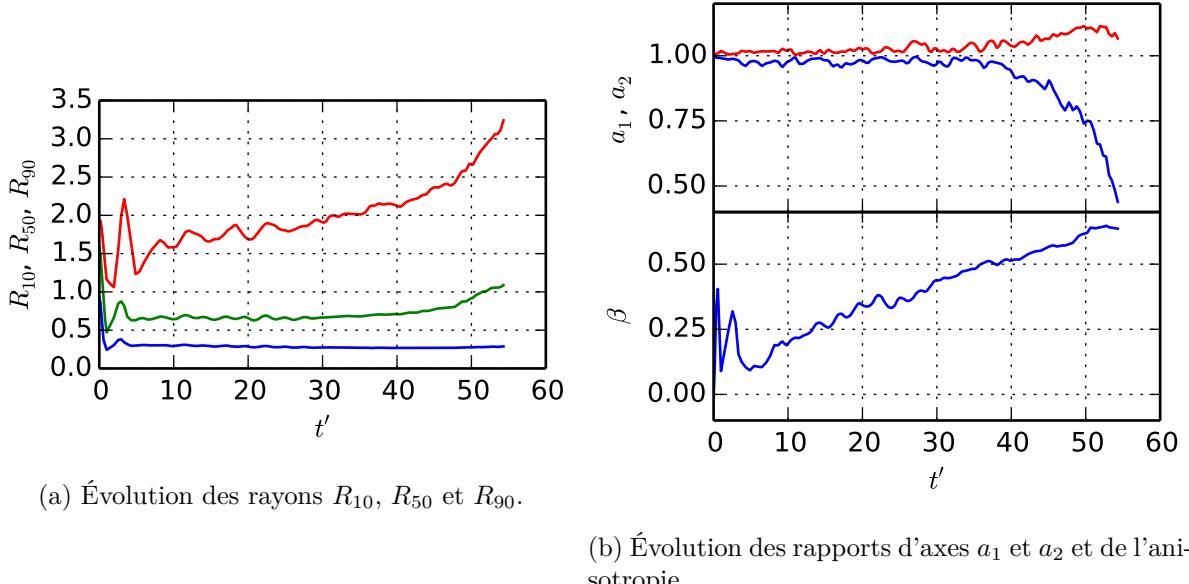
forte accréation (●). Les rayons  $R_{90}$  et  $R_{50}$  montrent une croissance similaire à la simulation  $C_{3,4}^m$ , l'accréation commence au même moment et en arrive au même point au même temps. En regardant l'évolution des rapports d'axes et de l'anisotropie (figure 9.7a et 9.7b), nous remarquons que leurs évolutions n'est pas complètement similaire. La décroissance de  $a_2$  et l'évolution de l'anisotropie semblent indiquer que l'instabilité se produit au même moment. Mais  $a_1$  montre une croissance plus importante. La simulation n'a pas été assez loin pour conclure, en effet, compte tenu du temps de calcul, elle a duré deux fois moins de temps que la simulation  $C_{3,4}^m$  ( $t'_{C_{3,4}} = 15$  au lieu de  $t'_{C_{3,4}^m} = 23$ ).

La simulation  $B_{3,1}$  présente les mêmes caractéristiques que celles de la famille  $C_{3,4}^m$  mais l'accréation est plus tardive :  $R_{50}$  commence à croître vers  $t' = 15$  et vers  $t' = 20$  pour  $R_{10}$ . Par ailleurs, le système évolue plus longtemps avant de déclencher l'instabilité (voir la figure 9.8a). Les variations du rapport  $a_2$  et de l'anisotropie nous apprennent que l'instabilité d'orbite radiale se déclenche vers  $t' = 18$  (voir la figure 9.8). Les principales différences entre cette simulation et les autres sont le nombre de particule et la taille du bain. Par conséquent, la densité du bain est différente. Ici, la densité du bain de la famille des  $C_{i,j}^m$  est 1.7 fois plus importante que la densité de cette simulation. Il semblerait donc qu'augmenter la densité du bain accélère l'apparition de l'instabilité.

La dernière simulation à étudier est la simulation  $C_{6,1}$ , qui est bien plus évoluée dynamiquement que les précédentes. Le rayon  $R_{10}$  reste constant pendant toute l'évolution et  $R_{50}$  commence à croître vers  $t' = 45$ . Par contre,  $R_{90}$  croît tout au long de la simulation, mais cette croissance s'accélère à partir de  $t' = 40$  (voir la figure 9.9a). Le rapport d'axe  $a_2$  commence à décroître à  $t' = 40$ , signe que l'instabilité d'orbite radiale se produit. Le maximum de l'anisotropie n'a


 FIGURE 9.8 – Évolution de la simulation  $B_{3,1}$ .

pas encore été atteint. Le bain de cette simulation est 8 fois moins dense que celui de la famille des  $C_{i,j}^m$ . Même si nous ne l'avons pas observée complètement, il semble bien là aussi que ce soit l'instabilité d'orbite radiale qui soit en train de se produire, mais plus tardivement.


 FIGURE 9.9 – Évolution de la simulation  $C_{6,1}$ .

Au cours de cette série de simulation, nous avons mis en évidence quelques propriétés sur l'instabilité d'orbite radiale. Le premier résultat nous indique que cette instabilité peut se produire lorsqu'un système accrète de la matière à partir d'un environnement homogène. De plus, nous avons observé que le déclenchement de l'instabilité était paramétré par la densité de matière accrétée mais pas par sa température. Bien que semblant assez naturel, ce résultat n'avait pas encore été mis en évidence. Il pourrait s'insérer comme l'un des mécanismes structurants de l'aspect des systèmes autogravitants.

### 9.4.2 Évolution de la pente avec l'âge (effets de relaxation)

Nous allons maintenant nous concentrer sur la seconde catégorie de simulations (●), montrant un effondrement progressif du cœur. Plus précisément, nous allons étudier la simulation de paramètres  $N_b = 10^5$ ,  $R_c = 66.7$  et  $\sigma_c = 10^{-3}$ . La première chose que nous faisons est de regarder si la tendance se conserve lorsque nous poursuivons la simulation dans le temps. Nous avons donc étendu la durée de la simulation de  $15.9T_d^{t=0}$  à  $47.7T_d^{t=0}$ . La figure 9.11 rassemble les graphiques montrant l'évolution des observables les plus intéressantes. Les 2 premières figures (9.11a et 9.11b) montrent l'évolution des rapports d'axes de la matrice d'inertie et l'anisotropie. Ces observables sont constantes, le SAG n'est donc pas sous l'influence de ROI. De plus, la figure 9.11c montre que le SAG n'accrète pas le bain. Par contre, la figure 9.10 montre une évolution nette et globale de la densité du SAG. Afin de quantifier cette évolution, nous avons

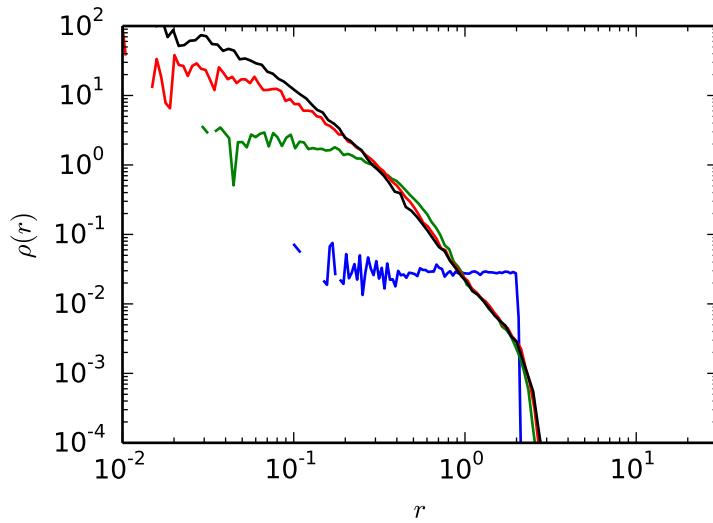


FIGURE 9.10 – Évolution au cours du temps de la densité. En bleu,  $t' = 0$ . En vert,  $t' = 59.9$ . En rouge,  $t' = 144$ . En noir,  $t' = 246.3$ .

étudié l'évolution des pentes du cœur et du halo. Ces pentes sont calculées en utilisant 10 points pour le cœur et 15 pour le halo. Le résultat de cette étude est présenté sur la figure 9.12. L'évolution est double et simultanée. Sur l'intervalle d'étude la pente du cœur passe de 0 à  $-2$  pendant que celle du halo passe de  $-4$  à  $-3$ . La transition est progressive et les deux courbes atteignent des plateaux apparemment stables dès que  $t' > 175$ . Il est intéressant de noter que cette évolution est similaire à celle des amas globulaires sous l'influence des effets de relaxations à deux corps (décrise dans l'introduction) : un effondrement progressif du cœur et une augmentation de la pente du halo. Par ailleurs, le profil final a formé un cusp de pente  $-2$  suivi d'un halo de pente  $-3$ . Ce profil est assez proche des profils utilisés pour décrire les halos de matière noire (typiquement, un NFW).

Cette transition est-elle un effet du bain ?

Pour répondre à cette question, nous allons augmenter le nombre de particules dans chaque objet (bain et SAG) de la simulation, tout en gardant constant tous les paramètres de sorte que les nouvelles simulations soient strictement équivalentes. Les différents graphiques de la figure 9.13 montrent l'évolution de ces nouvelles simulations. Nous pouvons voir que plus le nombre de particules augmente, moins l'effondrement est prononcé.

L'évolution de la densité du SAG ne semble donc pas liée à la présence du bain. Cette impression est confirmée par l'étude de l'évolution du SAG isolé (simulation sans bain). La figure 9.14 montre l'évolution d'une sphère de Hénon comprenant  $3 \times 10^4$  particules et d'une sphère de Hénon de  $3 \times 10^5$  particules. La conclusion apparaît immédiatement : le SAG plongé dans un bain et le SAG isolé ont la même évolution. De surcroît, si l'on multiplie par 10 le nombre de particules du Hénon (en conservant sa masse totale), l'évolution de la densité est radicalement

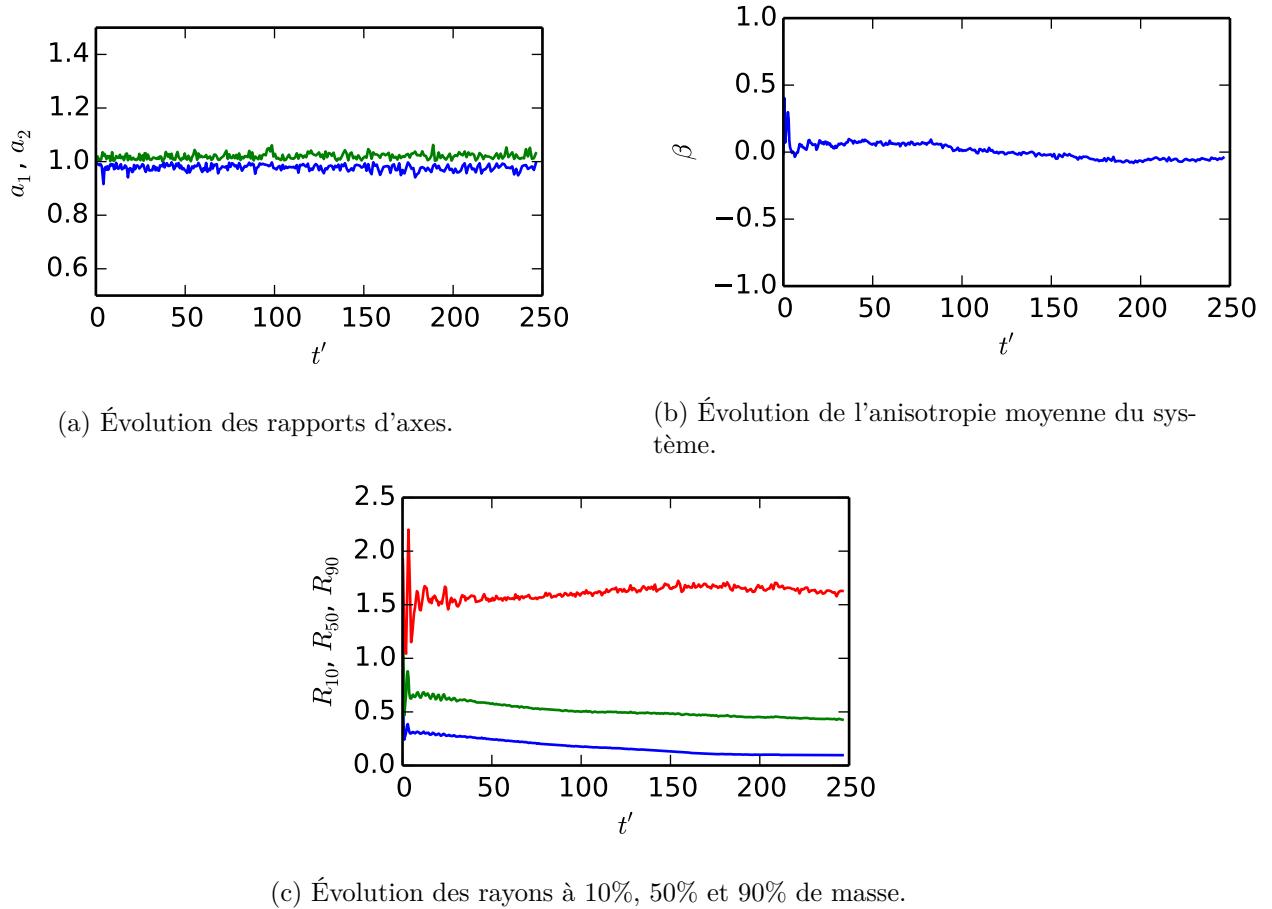
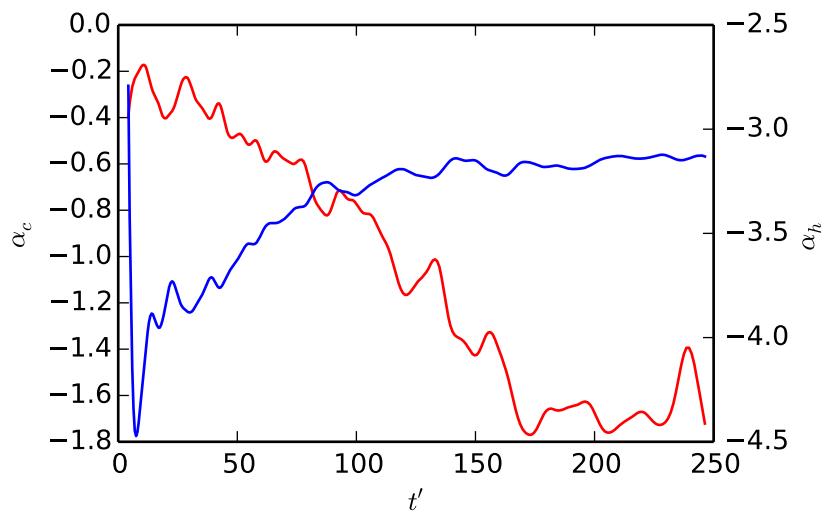

 FIGURE 9.11 – Simulation de paramètres  $N = 100000$ ,  $R_c = 66.6$ ,  $\sigma_c = 0.001$ .


FIGURE 9.12 – Évolution des pentes du cœur (en rouge, et sur l'axe de gauche) et du halo (en bleu et sur l'axe de droite) au cours de la simulation.

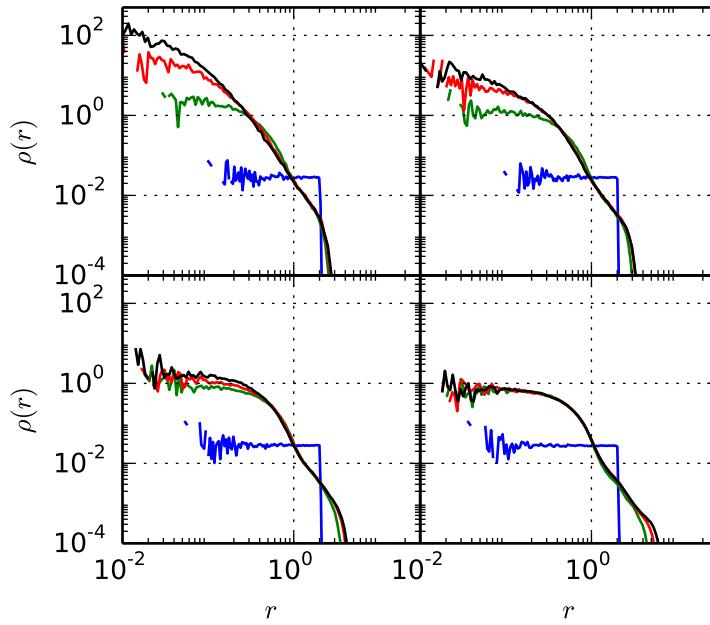


FIGURE 9.13 – Comparaison avec plusieurs simulations possédant plus de particules à la fois dans le SAG et dans le bain. De gauche à droite et de haut en bas, nous avons multiplié le nombre de particules par 1, 2, 4 et 10.

changée et ne montre plus de changement sur l'intervalle considéré. L'effet observé n'est donc pas un effet du bain, il pourrait donc s'agir d'un effet de la relaxation à deux corps.

Le temps de relaxation à deux corps est défini par la relation :

$$T_{\text{rel}}^{50\%} = \frac{Nm(R_{50})}{4\pi^2 R_{50}^3 \rho(R_{50}) \ln \frac{R_{50}}{10^{-3}}} T_d^{50\%}$$

À la fin de la simulation, le système a évolué sur une durée de l'ordre de  $340T_d^{50\%}$  ne représentant qu'environ 20% du temps de relaxation à deux corps de notre système constitué de 30000 particules ; ce qui affaiblit mais n'écarte pas l'hypothèse des effets de relaxation à  $N$ -corps.

Une autre explication possible de cet effondrement rapide, qui s'inspire partiellement d'arguments donnés dans Aarseth et al. [1988], pourrait être un effet collectif dû au bruit blanc des particules. En effet, une particule à la distance  $r(t)$  du centre du système est soumise à une force proportionnelle au nombre de particule  $N_r(t)$  contenues dans la sphère de rayon  $r(t)$ . L'erreur sur cette force est donc de l'ordre de  $\sqrt{N_r}$ . Les variations au cours du temps de  $N_r$  sont également influencées par le bruit blanc des particules. Nous pouvons comprendre ainsi que la dynamique des particules est perturbée de manière aléatoire par un effet collectif dont l'amplitude diminue avec le nombre de particules. Cette perturbation aléatoire induit un « flou » sur les vitesses qui pourrait donc effacer certaines structures fines de la fonction de distribution dans l'espace des phases, comme nous pensons l'avoir remarqué dans Colombi et al. [2014]. Une autre conséquence possible de cet effet de bruit pourrait être l'introduction d'une instabilité au long cours induisant l'apparition du cusp que nous voyons dans la simulation. En effet, nous pourrions argumenter que le système en son cœur présente à tout instant des inhomogénéités correspondant aux fluctuations du bruit de Poisson. Ces fluctuations peuvent être assimilées à des grumeaux dont la présence dans un système homogène et lisse est connue pour induire l'apparition d'un cusp (voir Roy and Perez [2004]), comme nous l'avons discuté dans la section 6.2.2.

Au cours de cette section, nous avons étudié une simulation qui reproduit assez fidèlement l'évolution dynamique d'un amas globulaire. Pour ces objets, le facteur d'évolution principal attendu est la relaxation à deux corps. Dans notre simulation, cette évolution se produit cependant sur une échelle de temps cinq fois moindre.

Nous avons remarqué que l'état final de la simulation est assez semblable aux profils de type

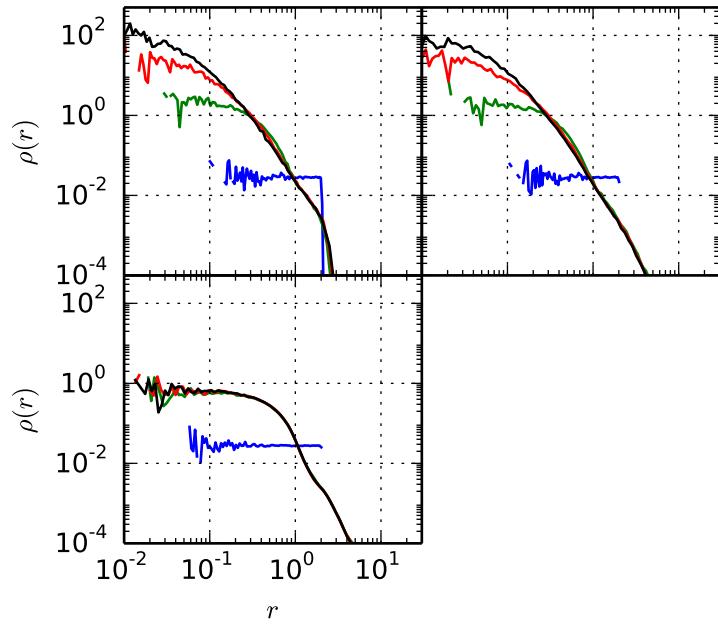


FIGURE 9.14 – Comparaison de notre simulation avec deux sphères de Hénon isolées composées d'un nombre de particules différent. De gauche à droite et de haut en bas, nous avons la simulation de référence, une sphère de Hénon de  $30 \times 10^4$  particules et une sphère de Hénon de  $30 \times 10^5$  particules.

cuspides observés pour les halos de matière noire. Mais dans ce contexte, le fait que le bain n'a pas d'influence sur le résultat est problématique. Dans le contexte hiérarchique de la formation des structures, nous aurions aimé voir ce bain contrôler cet effondrement du cœur comme le suggère l'instabilité que nous avons développé au chapitre 6 section 6.3.

En l'état, des études complémentaires sont à mener pour affiner ces résultats. Elles s'insèrent comme des perspectives à notre travail.

# **Conclusion**



# Chapitre 10

## Conclusion

### 10.1 Conclusion

Les travaux de cette thèse ont eu pour objet la modélisation dynamique de la structure des amas globulaires et des galaxies, structures autogravitantes (SAG).

Il est communément accepté que ces objets possèdent globalement un profil de densité volumique de masse caractérisé soit par une structure cœur halo soit par un simple halo pouvant posséder plusieurs pentes. L'objectif de cette thèse était de comprendre les différentes propriétés et les raisons de l'évolution dynamique de ces profils. Il a été atteint dans ses grandes lignes.

Le tout début de l'étude a été consacré à réalisation d'une synthèse de l'évolution dynamique du profil de densité des amas globulaires de notre galaxie. Cette étude a permis de confirmer le fait bien connu que ces profils sont, avant le collapse du cœur, ajustables par un modèle de King. Elle a aussi et surtout mis en évidence le fait que la pente du halo était une fonction croissante de l'âge de ces objets. Cette étude préliminaire confirme donc le paradigme suivant lequel le profil de densité est l'un des indicateurs fondamentaux de l'évolution des amas globulaires et par extension des galaxies.

Après un travail de revue théorique sur les différents types de structures isothermes en domaine borné ou non, nous avons montré que les modèles de King, et par extension les SAG de type cœur halo de pente inférieur à  $-2$ , étaient d'excellentes approximations de sphères isothermes. En utilisant un modèle idéalisé de structure cœur halo isotherme de pente quelconque, nous avons pu étendre certains résultats d'instabilité jusqu'à obtenus uniquement dans le cadre des sphères isothermes en domaine borné. Cette instabilité appliquée aux structures cœur halo de pente  $-4$  (instabilité CH4), a été mise en contexte en dehors du scénario évolutif à long terme, pour expliquer l'existence de deux type de profils pour les SAG : cœur halo (pour les amas globulaires ou les galaxies LSB) ou cuspide (pour les galaxies en général). La présence ou l'absence (réelle ou effective) d'un bain thermique autour de l'objet en formation permettrait ou non à cette instabilité de se développer et conduirait ou pas à l'effondrement du cœur de ces objets sur des échelles de temps de l'ordre de quelques temps dynamiques.

Afin d'ajuster les différents paramètres de ce scénario nous avons effectué un certain nombre de simulations numériques. Ces expériences démarrées dans un contexte ciblé se sont révélées d'une ampleur et d'une portée supérieure aux attentes initiales.

Face à la non-évolution des profils de King placés dans un thermostat, nous avons augmenté la sensibilité de nos expériences en imposant un bain thermique dès la phase initiale d'effondrement d'une sphère de Hénon.

La plupart de nos expériences ont été réalisées avec des bains plus froids que la structure autogravitaire d'étude. Mais les bains sont toujours moins denses.

Les raisons de cette dernière limitation sont simples. La méthode particulière utilisée pour modéliser notre bain thermique dans de bonnes conditions se serait révélée trop coûteuse avec un contraste de densité plus faible entre le bain et la structure autogravitaire.

Malgré cette limitation importante nous avons obtenu deux résultats principaux :

1. Dans tous les cas d'accrétion progressive du bain par la structure, nous avons observé

l'apparition d'une instabilité d'orbite radiale. Certains éléments du mécanisme de cette instabilité, qui n'avait pas été observée dans ce contexte, ont pu être analysés :

- Le contexte général de nos résultats sur cette instabilité confirme un résultat déjà rapporté mais non généralement reproduit. L'instabilité d'orbite radiale se produit par déplacement adiabatique d'un système autogravitant à l'équilibre vers les zones radiales de son espace des phases. Cette instabilité ne saurait donc se déclencher sans la présence du germe constitué par cet équilibre.
  - La densité du bain, et non pas sa température, semble être l'un des paramètres essentiels du déclenchement de cette instabilité dans ce contexte.
2. Dans un contexte sans accrétion, nous avons pu mettre en évidence un effondrement du cœur de l'une de nos familles de SAG. Les aspects morphologiques de cet effondrement sont tout à fait comparables à ceux observés pour les amas globulaires : augmentation du contraste de densité, augmentation de la pente du halo, passage progressif à un profil de type cuspide. Le résultat final de ce processus est tout à fait comparable au profil de type de Vaucouleurs généralisé ou NFW généralement observé pour les structures autogravitantes à l'échelle galactique dans les simulations de grandes structures. L'échelle de temps sur laquelle se produit cette évolution semble cependant bien inférieure à celle nécessaire pour observer des effets de relaxation à deux corps : elle ne représente au maximum que 10% du temps généralement accepté ( $T_{rel} \propto \frac{0.1N}{\ln N} T_d$ ) pour ce genre de processus. Les études préliminaires que nous avons pu mener semblent toutefois montrer que cet effondrement ne soit pas causé par la présence du bain thermique. Dans l'état actuel de la situation nous ne sommes donc pas en mesure d'affirmer que nous avons reproduit numériquement l'instabilité CH4.

Parallèlement à cette étude dynamique, nous avons conduit une comparaison entre un code résolvant l'équation de Vlasov pour un système sphérique et le treecode GADGET-2. Nous avons montré que l'accord entre ces deux codes était étonnamment bon, même à faible rapport du viriel, ce qui montre que les simulations  $N$ -corps sont capables de suivre avec précision la structure fine de l'espace des phases, mais il est nécessaire d'utiliser un grand nombre de particules et cela d'autant plus que le système est froid.

## 10.2 Perspectives

Nous aimions pouvoir étendre le domaine temporel de l'étude des simulations déclenchant l'instabilité d'orbite radiale. Cette extension permettrait d'une part de raffiner l'étude de l'influence de la densité du bain sur le déclenchement de cette instabilité, en fournissant par exemple un critère précis et utilisable dans un contexte éventuellement cosmologique. Dans le même temps, il s'agirait de confirmer définitivement le fait que le déclenchement de l'instabilité d'orbite radiale dans ce contexte ne dépend pas de la température du bain.

À ce stade, une étude plus avancée de la simulation  $A_{6,1}$  conduisant à l'évolution accélérée du profil de densité vers un effondrement est nécessaire. Cette étude pourrait être effectuée en modifiant d'une part les caractéristiques « numériques » du code GADGET-2 (angle d'ouverture, gestion du pas de temps, paramètre d'adoucissement du potentiel), mais aussi en construisant de nouvelles observables mieux adaptées à la surveillance fine de la dynamique de ce système (calculs raffinés de temps caractéristiques, calcul de la densité par résolution de l'équation de Poisson, etc.).

Finalement, les principales pistes envisageables pour tenter de mettre en évidence numériquement l'instabilité CH4 est l'augmentation soit de la température du bain, soit de sa densité dans nos simulations. Cette augmentation pourra être effectuée dans le cadre particulaire proposé ici, elle sera alors très coûteuse ; elle pourra également être envisagée dans le cadre d'une méthode numérique adaptée, elle sera alors moins coûteuse mais nécessitera le développement d'un code spécifique.

# Bibliographie

- S. J. Aarseth, D. N. C. Lin, and J. C. B. Papaloizou. On the collapse and violent relaxation of protoglobular clusters. *ApJ*, 324 :288–310, January 1988. doi : 10.1086/165895.
- F. Antonini, R. Capuzzo-Dolcetta, and D. Merritt. A counterpart to the radial-orbit instability in triaxial stellar systems. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, pages 1180–+, August 2009. doi : 10.1111/j.1365-2966.2009.15342.x.
- V. A. Antonov. On the instability of stationary spherical models with purely radial motions. In *Dynamics of Galaxies and Star Clusters*, pages 139–143, translated in de Zeeuw [1987], 1973.
- H. W. Babcock. The rotation of the Andromeda Nebula. *Lick Observatory Bulletin*, 19 :41–51, 1939.
- E. I. Barnes, L. L. R. Williams, A. Babul, and J. J. Dalcanton. Scale Lengths in Dark Matter Halos. *ApJ*, 634 :775–783, November 2005. doi : 10.1086/497066.
- E. I. Barnes, P. A. Lanzel, and L. L. R. Williams. The Radial Orbit Instability in Collisionless N-Body Simulations. *ApJ*, 704 :372–384, October 2009. doi : 10.1088/0004-637X/704/1/372.
- J. Barnes and P. Hut. A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm. *Nature*, 324 :446–449, December 1986. doi : 10.1038/324446a0.
- J. Barnes, P. Hut, and J. Goodman. Dynamical instabilities in spherical stellar systems. *ApJ*, 300 :112–131, January 1986. doi : 10.1086/163786.
- P. Bartholomew. On the theory of stability of galaxies. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 151 :333–+, 1971.
- J. M. Bellovary, J. J. Dalcanton, A. Babul, T. R. Quinn, R. W. Maas, C. G. Austin, L. L. R. Williams, and E. I. Barnes. The Role of the Radial Orbit Instability in Dark Matter Halo Formation and Structure. *ApJ*, 685 :739–751, October 2008. doi : 10.1086/591120.
- J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics : Second Edition*. Princeton University Press, 2008a.
- J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 2008b.
- A.M. Bloch, P.S. Krishnaprasad, J.E. Marsden, and T.S. Ratiu. Dissipation induced instabilities. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1994.
- C. M. Boily and E. Athanassoula. On the equilibrium morphology of systems drawn from spherical collapse experiments. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 369 :608–624, June 2006. doi : 10.1111/j.1365-2966.2006.10365.x.
- S. Casertano and P. Hut. Core radius and density measurements in N-body experiments Connections with theoretical and observational definitions. *ApJ*, 298 :80–94, November 1985. doi : 10.1086/163589.
- Subrahmanyan Chandrasekhar. An introduction to the study of stellar structure, University of Chicago Press, 1939.

- P. H. Chavanis. Gravitational instability of finite isothermal spheres. *Astronomy & Astrophysics*, 381 :340–356, January 2002. doi : 10.1051/0004-6361:20011438.
- P. H. Chavanis. Phase Transitions in Self-Gravitating Systems. *International Journal of Modern Physics B*, 20 :3113–3198, 2006. doi : 10.1142/S0217979206035400.
- C. Z. Cheng and G. Knorr. The integration of the Vlasov equation in configuration space. *Journal of Computational Physics*, 22 :330–351, November 1976. doi : 10.1016/0021-9991(76)90053-X.
- P. M. Cincotta, J. A. Nunez, and J. C. Muzzio. On the Radial Orbit Instability. *ApJ*, 456 :274–+, January 1996. doi : 10.1086/176647.
- S. Colombi, S. Peirani, G. Plum, T. Sousbie, and Y. Suto. Vlasov versus  $n$ -body : the hénon sphere. *Mon. Not. R. Astr. Soc., submitted*, 2014.
- F. Combes. *Mystères de la formation des galaxies*. Dunod, 2008.
- W. J. G. de Blok, S. S. McGaugh, A. Bosma, and V. C. Rubin. Mass Density Profiles of Low Surface Brightness Galaxies. *ApJL*, 552 :L23–L26, May 2001. doi : 10.1086/320262.
- P. T. de Zeeuw, editor. *Structure and dynamics of elliptical galaxies ; Proceedings of the IAU Symposium, Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, May 27-31, 1986*, volume 127 of *IAU Symposium*, 1987.
- Robert Emden. Gaskugeln, Teubner Verlag, Liepzig, 1907.
- A. M. Fridman, V. L. Polyachenko, A. B. Aries, and I. N. Poliakoff. *Physics of gravitating systems. I. Equilibrium and stability*. 1984a.
- A. M. Fridman, V. L. Polyachenko, A. B. Aries, and I. N. Poliakoff. *Physics of gravitating systems. II. Nonlinear collective processes : nonlinear waves, solitons, collisionless shocks, turbulence. Astrophysical applications*. 1984b.
- T. Fujiwara. Integration of the collisionless Boltzmann equation for spherical stellar systems. *PASJ*, 35 :547–558, 1983.
- D. Gillon, J. P. Doremus, and G. Baumann. Stability of self-gravitating systems with phase space density - A function of energy and angular momentum for aspherical modes. *Astronomy & Astrophysics*, 48 :467–474, May 1976.
- A. W. Graham, D. Merritt, B. Moore, J. Diemand, and B. Terzić. Empirical Models for Dark Matter Halos. II. Inner Profile Slopes, Dynamical Profiles, and  $\rho/\sigma^3$ . *Astronomical Journal*, 132 :2701–2710, December 2006a. doi : 10.1086/508990.
- A. W. Graham, D. Merritt, B. Moore, J. Diemand, and B. Terzić. Empirical Models for Dark Matter Halos. III. The Kormendy Relation and the  $\log\rho_e$ - $\log R_e$  Relation. *Astronomical Journal*, 132 :2711–2716, December 2006b. doi : 10.1086/508992.
- William E. Harris. Catalogue de harris, December 2010. [physwww.physics.mcmaster.ca/~harris/mwgc.dat](http://physwww.physics.mcmaster.ca/~harris/mwgc.dat).
- D. Heggie and P. Hut. *The Gravitational Million-Body Problem : A Multidisciplinary Approach to Star Cluster Dynamics*. February 2003.
- M. Hénon. L'évolution initiale d'un amas sphérique. *Annales d'Astrophysique*, 27 :83, February 1964.
- M. Henon. Vlasov equation. *Astronomy & Astrophysics*, 114 :211, October 1982.

- J. Hjorth and L. L. R. Williams. Statistical Mechanics of Collisionless Orbits. I. Origin of Central Cusps in Dark-matter Halos. *ApJ*, 722 :851–855, October 2010. doi : 10.1088/0004-637X/722/1/851.
- A. Huss, B. Jain, and M. Steinmetz. How Universal Are the Density Profiles of Dark Halos ? *ApJ*, 517 :64–69, May 1999. doi : 10.1086/307161.
- Michel Hénon. Numerical Experiments on the Stability of Spherical Stellar Systems. *Astronomy & Astrophysics*, 24 :229–+, April 1973.
- J. H. Jeans. The Stability of a Spherical Nebula. *Phil. Trans. of the Royal Society*, 199-A :1–53, 1902.
- K. Jordi and E. K. Grebel. Search for extratidal features around 17 globular clusters in the Sloan Digital Sky Survey. *Astronomy & Astrophysics*, 522 :A71, November 2010. doi : 10.1051/0004-6361/201014392.
- M. Joyce, B. Marcos, and F. Sylos Labini. Energy ejection in the collapse of a cold spherical self-gravitating cloud. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 397 :775–792, August 2009. doi : 10.1111/j.1365-2966.2009.14922.x.
- H. E. Kandrup. A stability criterion for any collisionless stellar equilibrium and some concrete applications thereof. *ApJ*, 370 :312–317, March 1991.
- J. Katz. On the number of unstable modes of an equilibrium. *Monthly Notices of the astronomical society*, pages p.765, vol. 183, 1978.
- J. Katz. On the Number of Unstable Modes of an Equilibrium - Part Two. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 189 :817, December 1979.
- N. Katz. Dissipationless collapse in an expanding universe. *ApJ*, 368 :325–336, February 1991. doi : 10.1086/169696.
- M. K.-H. Kiessling. The jeans swindle. a true story : Mathematically speaking. *Adv. in App. Math.*, 31 :132–149, 2003.
- I. R. King. The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models. *Astronomical Journal*, 71 :64, February 1966a. doi : 10.1086/109857.
- I. R. King. The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models. *Astronomical Journal*, 71 :64, February 1966b. doi : 10.1086/109857.
- B. P. M. Laevens, N. F. Martin, B. Sesar, E. J. Bernard, H.-W. Rix, C. T. Slater, E. F. Bell, A. M. N. Ferguson, E. F. Schlafly, W. S. Burgett, K. C. Chambers, L. Denneau, P. W. Draper, N. Kaiser, R.-P. Kudritzki, E. A. Magnier, N. Metcalfe, J. S. Morgan, P. A. Price, W. E. Sweeney, J. L. Tonry, R. J. Wainscoat, and C. Waters. A New Distant Milky Way Globular Cluster in the Pan-STARRS1 3 $\pi$  Survey. *ApJL*, 786 :L3, May 2014. doi : 10.1088/2041-8205/786/1/L3.
- D. Lynden-Bell. On a mechanism that structures galaxies. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 187 :101–107, April 1979.
- D. Lynden-Bell and R. Wood. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 138 :495, 1968.
- J. D. MacMillan, L. M. Widrow, and R. N. Henriksen. On Universal Halos and the Radial Orbit Instability. *ApJ*, 653 :43–52, December 2006. doi : 10.1086/508602.
- J. Makino. Postcollapse Evolution of Globular Clusters. *ApJ*, 471 :796, November 1996. doi : 10.1086/178007.

- L. Maréchal and J. Perez. Radial orbit instability as a dissipation-induced phenomenon. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 194(405-4) :2785, 2010, 2009.
- Dean E. McLaughlin and Roeland P. Van der Marel. Resolved massive star clusters in the milky way and its satellites : Brightness profiles and a catalog of fundamental parameter. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, pages 304–360, 2005.
- D. Merritt. Stability of elliptical galaxies - Numerical experiments. In P. T. de Zeeuw, editor, *Structure and Dynamics of Elliptical Galaxies*, volume 127 of *IAU Symposium*, pages 315–327, 1987.
- D. Merritt and L. A. Aguilar. A numerical study of the stability of spherical galaxies. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 217 :787–804, December 1985.
- D. Merritt, A. W. Graham, B. Moore, J. Diemand, and B. Terzić. Empirical Models for Dark Matter Halos. I. Nonparametric Construction of Density Profiles and Comparison with Parametric Models. *Astronomical Journal*, 132 :2685–2700, December 2006. doi : 10.1086/508988.
- P. J. Morrison and J. M. Greene. Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics. *Physical Review Letters*, 45 :790–794, September 1980. doi : 10.1103/PhysRevLett.45.790.
- Clément Mouhot and Cédric Villani. On landau damping. *Acta mathematica*, 207(1) :29–201, 2011.
- J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. The structure of cold dark matter halos. *ApJ*, 462 :563–575, May 1996.
- T. Padmanabhan. Antonov instability and gravothermal catastrophe - Revisited. *Astrophysical Journal Supplement*, 71 :651–664, November 1989. doi : 10.1086/191391.
- T. Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating systems. *Physics Reports*, 188 :285–362, April 1990. doi : 10.1016/0370-1573(90)90051-3.
- P. L. Palmer and J. Papaloizou. Instability in spherical stellar systems. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 224 :1043–1053, February 1987.
- J. Perez and J.-J. Aly. Stability of spherical stellar systems - I. Analytical results. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 280 :689–699, June 1996.
- J. Perez, J.-M. Alimi, J.-J. Aly, and H. Scholl. Stability of spherical stellar systems - II. Numerical results. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 280 :700–710, June 1996.
- Jérôme Perez. Gravitation classique, problème à  $N$  corps, de 2 à l'infini,, deuxième édition, Les presses de l'ENSTA, Novembre 2011.
- Jérôme Perez and Jean-Jacques Aly. Stability of spherical stellar systems 1 : Analytical results. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, pages 689–699, vol. 280, 1996.
- V. L. Polyachenko and I. G. Shukhman. General Models of Collisionless Spherically Symmetric Stellar Systems - a Stability Analysis. *Soviet Astronomy*, 25 :533–+, October 1981.
- K. Rouslan and J. Marsden. Dissipation-induced instability phenomena in infinite-dimensional systems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 194(2) :611–668, November 2009.
- F. Roy and J. Perez. Dissipationless collapse of a set of  $N$  massive particles. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 348 :62–72, February 2004. doi : 10.1111/j.1365-2966.2004.07294.x.
- P. Saha. Unstable modes of a spherical stellar system. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 248 :494–502, February 1991.

- V. Springel, N. Yoshida, and S. D. M. White. GADGET : a code for collisionless and gasdynamical cosmological simulations. *New Ast*, 6 :79–117, April 2001. doi : 10.1016/S1384-1076(01)00042-2.
- Volker Springel. The cosmological simulation code GADGET-2. *Royal Astronomical Society*, pages 1105–1134, 2005.
- R. Teyssier, A. Pontzen, Y. Dubois, and J. I. Read. Cusp-core transformations in dwarf galaxies : observational predictions. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 429 :3068–3078, March 2013. doi : 10.1093/mnras/sts563.
- C. Theis and R. Spurzem. On the evolution of shape in N-body simulations. *Astronomy & Astrophysics*, 341 :361–370, January 1999.
- Scott C. Trager, Ivan R. King, and S. Djorgovski. Catalogue of galactic globular-cluster surface-brightness profiles. *The Astronomical Journal*, pages 109–218, 1995.
- M. Trenti and G. Bertin. Partial Suppression of the Radial Orbit Instability in Stellar Systems. *ApJ*, 637 :717–726, February 2006. doi : 10.1086/498637.
- T. S. van Albada. Dissipationless galaxy formation and the R to the 1/4-power law. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 201 :939–955, December 1982.
- M. D. Weinberg. A search for instability in two families of spherical stellar models. *ApJ*, 368 :66–78, February 1991. doi : 10.1086/169671.
- I. Yoon, H. M. Lee, and J. Hong. Equilibrium and dynamical evolution of a self-gravitating system embedded in a potential well. *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 414 :2728–2738, July 2011. doi : 10.1111/j.1365-2966.2011.18589.x.
- F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta*, 6 :110–127, 1933.



# **Article**



# Vlasov versus $N$ -body: the Hénon sphere

S. Colombi,<sup>1\*</sup> S. Peirani,<sup>1</sup> G. Plum,<sup>1</sup> T. Sousbie<sup>1</sup> and Y. Suto<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut d’Astrophysique de Paris, CNRS UMR 7095 and UPMC, 98bis, bd Arago, F-75014 Paris, France

<sup>2</sup> Department of Physics, The University of Tokyo, Tokyo 113-0033, Japan

15 August 2014

## ABSTRACT

We perform a detailed comparison of the phase-space density traced by the particle distribution in `Gadget` simulations to the result obtained with a spherical Vlasov solver using the splitting algorithm. The systems considered are apodized Hénon spheres with two values of the virial ratio,  $R \simeq 0.1$  and  $0.5$ . After checking that spherical symmetry is well preserved by the  $N$ -body simulations, visual and quantitative comparisons are performed. In particular we introduce new statistics, correlators and entropic estimators, based on the likelihood of whether  $N$ -body simulations actually trace randomly the Vlasov phase-space density. When taking into account the limits of both the  $N$ -body and the Vlasov codes, namely collective effects due to the particle shot noise in the first case and diffusion and possible nonlinear instabilities due to finite resolution of the phase-space grid in the second case, we find a spectacular agreement between both methods, even in regions of phase-space where nontrivial physical instabilities develop. However, in the colder case,  $R = 0.1$ , it was not possible to prove actual numerical convergence of the  $N$ -body results after a number of dynamical times, even with  $N = 10^8$  particles.

**Key words:** gravitation – methods: numerical – galaxies: kinematics and dynamics – dark matter

## 1 INTRODUCTION

Stars in galaxies and dark matter in the Universe can be modeled in phase-space as self-gravitating collisionless fluids obeying Vlasov-Poisson equations

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f - \nabla_{\mathbf{r}} \phi \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (1)$$

$$\Delta_{\mathbf{r}} \phi = 4\pi G \rho = 4\pi G \int f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\mathbf{u}, \quad (2)$$

where  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  represents the phase-space density at position  $\mathbf{r}$ , velocity  $\mathbf{v}$ , and  $\phi$  is the gravitational potential. In general, these equations do not have simple analytical solutions. They are therefore often solved numerically. The most widely used numerical scheme is the  $N$ -body approach and there exist many ways to implement it, which mainly differ from each other by the way Poisson equation is solved (see, e.g., Bertschinger 1998; Colombi 2001; Dolag et al. 2008; Dehnen & Read 2011, for reviews on the subject). The  $N$ -body method consists of sampling the phase-space density with particles, that is an ensemble of Dirac functions in phase-space interacting with each other through gravitational force. To avoid numerical artefacts due to the  $1/r^2$

divergence of the force at small distances, the gravitational potential is usually replaced by an effective one, where the force is smoothed at scales smaller than a softening parameter  $\epsilon$ . This is also equivalent to assuming that the particles are clouds of size  $\epsilon$  interacting with each other.

Approximating the phase-space density with macro-particles is not free of biases. Among numerical artefacts, one can naturally cite close  $N$ -body encounters, but also more subtle collective effects induced by the discrete nature of the distribution of the particles (see, e.g. Aarseth, Lin, & Papaloizou 1988; Binney 2004). The time integration scheme and the way Poisson equation is resolved numerically can of course be also sources of errors.

There are some clear example where  $N$ -body results can be questioned, sometimes because of underestimating strong numerical artefacts, particularly in the cold case where the initial velocity dispersion is null (see, e.g., Melott et al. 1997; Melott 2007), but also in cases where the  $N$ -body method is perfectly controlled, because of long term nonlinear resonant modes induced by the discrete nature of the representation (see, e.g., Colombi & Touma 2014). In addition, despite numerous thorough convergences studies of the  $N$ -body approach (see, e.g., Moore et al. 1998; Power et al. 2003; Springel et al. 2008; Stadel et al. 2009), it is not yet

\* E-mail: colombi@iap.fr

obvious that the fine inner structure of dark matter halos is completely understood from the numerical point of view.

It is therefore interesting to consider alternative to the traditional  $N$ -body approach.

In the cold case, relevant to the current paradigm of large-scale structure formation, the phase-space distribution function is supported by a three-dimensional sheet evolving in six-dimensional phase-space, which be partitioned in a continuous way with an ensemble of tetrahedra as proposed in recent works (see, e.g., Shandarin, Habib, & Heitmann 2012; Hahn, Abel, & Kaehler 2013). Of course, because of the increasing complexity of the structure of the system in phase-space, it is needed to add sampling elements during time and the cost might become prohibitive after a number of dynamical times.

In the warm case that we consider in this article, the phase-space distribution function has to be sampled on 6-dimensional grid, which is again potentially very costly even with the most powerful supercomputers available nowadays, but might become feasible in the next few years according to Moore’s law. However, one can restrict to systems with lower-dimensionality or with high level of symmetry, such as spherical systems considered in this work.

There exist many methods to solve Vlasov-Poisson equations in the warm case, most of them coming from plasma physics. The most famous solver is the so-called splitting algorithm of Cheng & Knorr (1976) and its numerous extensions (see, e.g. Shoucri & Gagne 1978; Sonnendrücker et al. 1999; Filbet, Sonnendrücker, & Bertrand 2001; Besse & Sonnendrücker 2003; Alard & Colombi 2005; Umeda 2008; Besse et al. 2008; Crouseilles, Mehrenberger, & Sonnendrücker 2010; Campos Pinto 2011; Rossmanith & Seal 2011; Güçlü, Christlieb, & Hitchon 2014, but this list is far from being exhaustive). This algorithm, that we shall use here, exploits directly the Liouville theorem, namely that the phase-space density is conserved along motion: the equations of the dynamics during a time step are separated in “drift” and “kick” parts in terms of Hamiltonian dynamics and are resolved backwards,

$$f^*(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{r} - \mathbf{v}\Delta t/2, \mathbf{v}, t), \quad \text{Drift}, \quad (3)$$

$$f^{**}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f^*(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{r}}\phi\Delta t), \quad \text{Kick}, \quad (4)$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t + \Delta t) = f^{**}(\mathbf{r} - \mathbf{v}\Delta t/2, \mathbf{v}), \quad \text{Drift}, \quad (5)$$

where  $\nabla_{\mathbf{r}}\phi$  is computed from  $f^*$ . In practice the phase-space distribution function is sampled on a mesh, and each step is performed by using test particles coinciding with mesh sites and following the equations of motion split as above. Resampling of  $f^*$ ,  $f^{**}$  and finally the phase-space distribution function at next time step is performed using some interpolation procedure relying for instance on spline functions. In astrophysics, the splitting scheme was applied in the eighties to one dimensional systems (Fujiwara 1981), galactic disks (Watanabe et al. 1981; Nishida et al. 1981) and spherical systems (Fujiwara 1983) but was seldom used since then, although one can mention a recent preliminary investigation of the algorithm in full 6-dimensional phase-space (Yoshikawa, Yoshida, & Umemura 2013).

As mentioned above, resolving the general problem in fully six-dimensional phase-space with sufficient accuracy remains still prohibitive. In this article, we therefore restrict our investigations to spherical systems, where phase-space is

only three dimensional: the three coordinates of interest are the radial position, the radial velocity and the angular momentum. We perform a comparison between a  $N$ -body code, namely the treecode **Gadget** (Springel, Yoshida, & White 2001; Springel 2005), and an improved version of the implementation by Fujiwara (1983) of the splitting algorithm. The goal is to check how well the particle distribution in **Gadget** traces the phase-space density obtained from the Vlasov code and how the results depend on various parameters of the simulations, in particular the number of particles in the  $N$ -body simulations and the spatial resolution in the Vlasov code. While visual inspection is primordial, we shall also perform a detailed quantitative comparison. To do so, we shall introduce correlators and entropic estimators based on a likelihood approach, the question being whether the  $N$ -body simulations can be considered as local Poisson realizations of the Vlasov code phase-space density. Note that the purpose of this article is not by any mean to find out which method is the best in terms of computational cost, although we shall discuss briefly about these issues.

Because of our restrictive choice of the geometry of the system, it is important to consider spherical configurations stable against small anisotropic perturbations induced by the shot noise of the particles. Indeed, we shall use the public treecode **Gadget**, without any specific modification to enforce spherical dynamics. The Hénon sphere (Hénon 1964) is particularly adapted to our problem since it is known to preserve well its spherical nature during the course of dynamics when being simulated with a  $N$ -body technique and, in particular, it is not prone to radial orbit instability (see, e.g., van Albada 1982; Roy & Perez 2004; Barnes, Lanzel, & Williams 2009). In this configuration, the initial phase-space distribution function is simply given by

$$f_H(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi\sigma_v^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{v^2}{\sigma_v^2}\right), \quad r \leq R_H, \quad (6)$$

with  $(4\pi/3)\rho_0 R_H^3 = M$ , the total mass of the system. Here we shall consider “warm” and a “cold” settings, corresponding to two values  $R \simeq 0.5$  and  $R \simeq 0.1$  of the initial virial ratio  $R = |2T/W| = 10R_H\sigma_v^2/(3M)$ , where  $T$  and  $W$  are respectively the total kinetic and potential energy of the system. In the simulations discussed in this article, the initial radius of the Hénon sphere and its total mass are chosen to be

$$M = 1, \quad R_H = 2, \quad (7)$$

which fixes  $\sigma_v$  in equation (6) once the virial ratio is given.

This article is thus organized as follows. In § 2 we describe our Vlasov solver, denoted by **Vlasolve**, and the simulations performed with it. § 3 provides information about the  $N$ -body runs and the parameters used in **Gadget**. In § 4, we check that the  $N$ -body simulations stay indeed spherical during evolution. In § 5, we perform a visual inspection of the phase-space density, which is followed by a quantitative statistical analysis in § 6. Finally § 7 summarizes and discusses the results.

## 2 THE VLASOV CODE

In spherical symmetry, Vlasov equation reads

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{j^2}{r^3} - \frac{GM_r}{r^2} \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (8)$$

where  $v$  is the radial component of the velocity,  $j$  is the angular momentum,  $M_r = M(r' < r)$  the mass inside a sphere of radius  $r$  and  $G$  the gravitational constant. The choice of units in the remaining of this paper is such that  $G = 1$ .

In order to solve equation (8) numerically with the splitting algorithm, our code **Vlasolve** follows closely Fujiwara (1983). Phase space is discretized into a rectangular mesh of size  $(N_r, N_v, N_j)$  which spans the domain of interest as follows: the position  $R_{\min} \leq r \leq R_{\max}$  is sampled in a logarithmic fashion, the velocity  $-v_{\max} \leq v \leq v_{\max}$  linearly, and the angular momentum  $0 \leq j \leq J_{\max}$  is such that the position of the  $k^{\text{th}}$  angular momentum slice is  $j_k = J_{\max}(k - 1/2)^2/N_j^2$ , corresponding formally to the interval  $[J_{\max}(k - 1)^2/N_j^2, J_{\max}k^2/N_j^2]$ .

The splitting algorithm procedure is modified to exploit the property that angular momentum is an invariant of the dynamics. In particular, each slice corresponding to a given value of  $j$  can be treated independently, except for the obvious coupling from Poisson equation. In addition, the inertial component of the force,  $j^2/r^3$ , is included in the “drift” step (equations 3 and 5), while the “kick” step (equation 4) corresponds solely to gravitational force. Because the angular momentum contribution bends trajectories,<sup>1</sup> the drift step requires two-dimensional interpolation of the phase-space distribution function in  $(r, v)$  space, while the kick step, which only modifies the velocities, needs only a one dimensional interpolation. These interpolations are carried out using third order splines, exactly as in Fujiwara (1983). Hence, positivity of the phase-space distribution function is not warranted and aliasing effects can be expected, as well as diffusion, when details of the phase-space distribution become of the order of or smaller than the mesh element size.

Because of these defects, we decided to apodize the edges of the Hénon sphere as follows,

$$f_H \rightarrow f_H \times \frac{1}{2} \left[ 1 + \text{erf} \left( \frac{R_H - r}{\Delta} \right) \right], \quad (9)$$

with  $\Delta = 1/2$ , and to recompute  $\rho_0$  in equation (6) such that the total mass remains unity. This apodization slightly changes the actual values of the virial ratio to  $R \simeq 0.55$  and  $0.11$ , although we shall still denote them by  $0.5$  and  $0.1$ . This corresponds to a rather significant change of the original Hénon sphere and might completely modify the long term properties of the system compared to what is expected, which by itself justifies the fact that we check again in § 4 how spherical the  $N$ -body simulations remain.

Using a logarithmic scale along the radial direction proves particularly advantageous for tracing tiny features close to the center of the system that subsequently expand to larger scales as they get away from it. One downside of this procedure is that a small sphere of radius  $R_{\min}$  is necessarily missing from the computing domain. This shortcoming is usually dealt with by considering the central part as a small reflecting sphere (see, e.g., Gott 1973; Fujiwara 1983). Although simple, this method presents the major drawback of

$N_r$	$N_v$	$N_j$	$\Delta t$
1024	1024	512	$5 \times 10^{-4}$
512	512	512	$10^{-3}$
2048	2048	32	$2.5 \times 10^{-4}$
1024	1024	32	$5 \times 10^{-4}$

**Table 1.** The parameters used for the **Vlasolve** simulations.

introducing a systematic lag between orbits: particles reaching the reflective kernel boundary instantly travel the  $2R_{\min}$  distance through the central region, while they should actually take a finite time depending on their radial velocity and angular momentum.

In **Vlasolve**, we improve the reflecting sphere method by taking into account the actual time spent by particles travelling inside the region  $r \leq R_{\min}$ , which is made easily possible by neglecting the gravitational force. Technical details about the implementation are provided in Appendix A1.

As a final algorithmic detail, Appendix A2 discusses details about the hybrid parallelization of **Vlasolve** with OpenMP and MPI libraries.

For the analyses of this article, we performed 4 simulations with various resolutions for each value of the virial ratio considered, as listed in Table 1. To cover the dynamical range of interest, the computing mesh defined above was such that  $R_{\min} = 0.01$ ,  $R_{\max} = 25$ ,  $J_{\max} = 1.6$ . The maximum amplitude of the velocity was taken to be  $v_{\max} = 2$  and  $4$  for the virial ratios  $R = 0.5$  and  $0.1$ , respectively. The time step  $\Delta t$  in each of the simulations was constant and resolutely small to stay on the safe side, which significantly increased the computational cost.

In appendix A3, a comparison between all simulations is performed for  $R = 0.1$ . It brings out diffusion and aliasing effects. These latter are significant, but do not seem to affect the dynamical properties of the system. It is tempting to undersample angular momentum space since  $j$  is an invariant of the dynamics. It is shown as well in this appendix that it is not wise to do so, because it can provoke nonlinear instabilities after a few dynamical times.

### 3 THE $N$ -BODY SIMULATIONS

To perform the  $N$ -body simulations, we used the latest version of the **Gadget-2** code (Springel 2005). Only the treecode part of this “treePM” algorithm was used to simulate isolated Hénon spheres. The simulations involved, for both values of the virial ratio, from  $N = 10^4$  to  $10^7$  particles. An additional simulation with  $N = 10^8$  particles was performed for  $R = 0.1$ . Note that these simulations, except for the 100 millions particles one, were much cheaper in terms of computational time than our Vlasov fiducial runs with  $(N_r, N_v, N_j) = (1024, 1024, 512)$ .

The main parameters used to perform the simulations were chosen as follows:

- The softening length of the force was given by  $\epsilon = 0.002 \times (N/10^6)^{-1/3}$ , that is about  $1/16$  of the initial mean interparticle distance.
- In **Gadget**, each particle has its individual time step

<sup>1</sup> In a way which can be computed analytically, see e.g., Colombi & Touma (2008).

bounded by  $dt = \min[dt_{\max}, (2\eta\epsilon/|\mathbf{a}|)^{1/2}]$ , where  $\mathbf{a}$  is the acceleration of the particle and  $\eta$  is a control parameter. Our choice was  $\eta = 0.025$  and  $\Delta t_{\max} = 0.01$ .

- The tolerance parameter  $\alpha_F = 0.005$  controlling the accuracy of the relative cell-opening criterion (parameter designed by `ErrTolForceAcc` in the documentation of `Gadget`, see equation 18 of Springel 2005).

In appendix B, we inspect visually the effects of changing these parameters on the phase-space distribution function for simulations with  $N = 10^6$  particles and a virial ratio of  $R = 0.1$ . These analyses, performed at  $t = 15$ , confirm that the parameters used for the simulations of this paper are reasonable. Interestingly, changing the softening length by large factors does not influence much the results, as already noticed previously in the literature (see, e.g. Barnes, Lanzel, & Williams 2009), as long as it is kept small enough.

#### 4 CONSISTENCY CHECK: SPHERICITY OF THE $N$ -BODY SIMULATIONS

Before performing any comparison between `Gadget` and `Vlasolve`, it is fundamental to check a crucial assumption of this paper, namely that the system remains spherical in the `Gadget` simulations. Figure 1 shows, for different values of the number of particles  $N$ , the evolution with time of the ratios  $b/a$  and  $b/c$ , where  $a \leq b \leq c$  are the eigenvalues of the inertia tensor of the particle distribution.

The dashed regions correspond to the one sigma zone obtained from an ensemble of 100 local Poisson realizations of the spherical density  $\rho(r)$ . This latter was interpolated over spherical shells from the `Gadget` particles. Particle shot noise introduces deviations from spherical symmetry which can be quantified as follows:

$$\left\langle \frac{b}{a} \right\rangle - 1 \simeq 1 - \left\langle \frac{b}{c} \right\rangle \simeq 2\sigma_{b/a} \simeq 2\sigma_{b/c} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (10)$$

where  $\sigma_{b/a}^2$  is the variance of  $b/a$  obtained from the dispersion over the 100 realizations, and similarly for  $\sigma_{b/c}^2$ . Note that equation (10) is only indicative. The asphericity due to discreteness is indeed expected to depend on the details of the shape of the profile  $\rho(r)$ , as can be seen on Fig. 1. Note that it would be possible to compute in a perturbative way the quantities in equation (10) from statistical analysis of the inertia tensor by assuming  $N \gg 1$  and using error propagation formulae, but this is a cumbersome exercise far beyond the scope of this paper.

It is also important to be aware of another possible source of errors related to the determination of the position of the center of the system. Indeed, a bad determination of the position of the center of the system obviously worsens apparent agreement with spherical symmetry. In the measurements presented in Fig. 1, the inertia matrix is not computed with respect to the center of gravity of the particle distribution, which can be affected by the fact that some particles can get far away from the system through  $N$ -body relaxation. Instead, we determine the center of the system using an iterative procedure trying to optimize the match of the phase-space distribution function with that of the Vlasov code, as detailed in § 6.1. This procedure is obviously not free of errors that can contribute to the fluctuations observed on the curves of Fig. 1.

Inspection of Fig. 1 shows that the measured ratios  $b/a$  and  $b/c$  behave differently in the  $R = 0.5$  and  $R = 0.1$  simulations. In the  $R = 0.5$  case, the agreement of the measurements with the Poisson prediction is in general good, with a slight trend to ellipticity, except for the top red curve and the bottom green curve where the deviation from spherical symmetry is definitely off the Poisson expectation. Still, for  $R = 0.5$ , we believe it can be fairly claimed that the system remains to a very good approximation spherical whatever  $N$  given expected deviations due to pure statistical noise.

For  $R = 0.1$ , the curves representing the axis ratios are much more steady than for  $R = 0.5$ , which is slightly puzzling. Deviations from spherical symmetry are clearly more significant compared to local Poisson expectations as soon as  $t \gtrsim 3$ , which corresponds roughly to collapse time. However, they remain small for a particle number larger than  $10^5$ , while  $N = 10^4$ , with a deviation larger than 10 percent, is clearly a matter of concern.

As a final remark, we also invested deviations of spherical symmetry for subsets of particles in excursions corresponding to  $f \geq f_{\text{th}}$  where  $f$  is the phase-space distribution function measured in the  $1024 \times 1024 \times 512$  `Vlasolve` simulations. For each value of the virial ratio, two thresholds  $f_{\text{th}}$  were chosen such that the excursions contained initially about 90 and 60 percent of the total mass (see bottom panels of Fig. 6 below). Given the uncertainties in the measurements, the conclusions derived above still stand: the properties of the deviations from spherical symmetry, that we do not show here, for simplicity, do not indeed depend significantly on radius. We only noticed a slight improvement in the  $R = 0.5$  case when considering particles in the excursions.

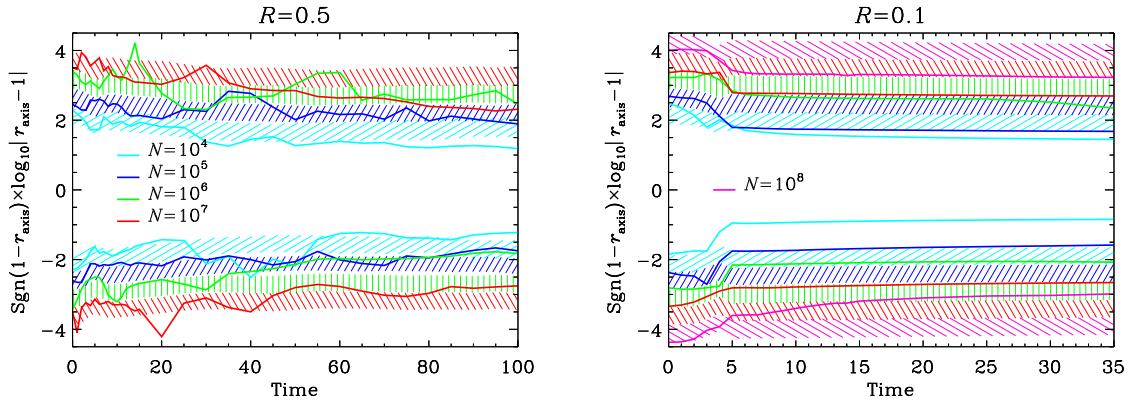
#### 5 PHASE-SPACE DENSITY: VISUAL INSPECTION

Figure 2 shows  $f(r, v, j \simeq 0.244)$  at various times for the `Vlasolve` and `Gadget` simulations corresponding to the warm case,  $R = 0.5$ . Figure 3 is analogous to Fig. 2, except that the quantity displayed is the integral of  $f$  over angular momentum space:

$$f_{\text{summed}}(r, v) = \int f(r, v, j) 2\pi j dj. \quad (11)$$

This allows one to distinguish better the details in the  $N$ -body simulations with less particles.

The level of agreement between the  $N$ -body and the semi-Lagrangian simulations is striking, even in regions where instabilities develop. Of course, this statement has to be tempered with the fact that the `Vlasolve` simulations are subject to significant diffusion, which smears out fine details of the phase-space distribution function. This diffusion effect is clearly visible at  $t = 50$ , when comparing the outer filamentary structures observed in the Vlasov simulations to the  $N$ -body result. Putting aside this coarse graining effect, the structures are exactly similar in both the  $N$ -body and Vlasov simulations at  $t \leq 50$ , including small gaps in the phase-space distribution function related to nonlinear instabilities that start building up. These instabilities grow furthermore at later time. They are considerably smeared out in the  $(1024, 1024, 512)$  `Vlasolve` simulation but unquestion-



**Figure 1.** Deviations from spherical symmetry: ratios of the eigenvalues of the inertia tensor of the system as functions of time in the **Gadget** simulations. To emphasize the differences from unity, which are expected to be small, the quantity  $\text{sgn}(1 - r_{\text{axis}}) \log_{10} |1 - r_{\text{axis}}|$  is plotted as a function of time, where  $r_{\text{axis}} = b/a$  (upper curves on each panel) or  $b/c$  (lower curves) and  $a \leq b \leq c$  are the eigenvalues of the inertia tensor of the **Gadget** particle distribution. Each color corresponds to a given value of the number  $N$  of particles as indicated the panels. In addition, there are dashed regions which correspond to the one sigma confidence level zone expected for a particle distribution locally Poisson sampling the spherically symmetrical projected density profile  $\rho(r, t)$ , where  $\rho(r, t)$  is estimated from interpolation of the **Gadget** particle distribution in spherical shells. To calculate the average of  $r_{\text{axis}}$  and the associated one sigma error contours, 100 local Poisson realizations have been performed for each snapshot and value of  $N$  considered, except for  $N = 10^7$  and  $N = 10^8$  (on right panel only for the latter). In the last cases, the dashes correspond to an extrapolation of the results obtained from  $N = 10^6$ .

ably present. Adding resolution in  $(r, v)$  space (at the cost of resolution in  $j$ ) improves the results, which confirms that the instabilities observed in the **Gadget** simulations are physical and not of numerical nature.

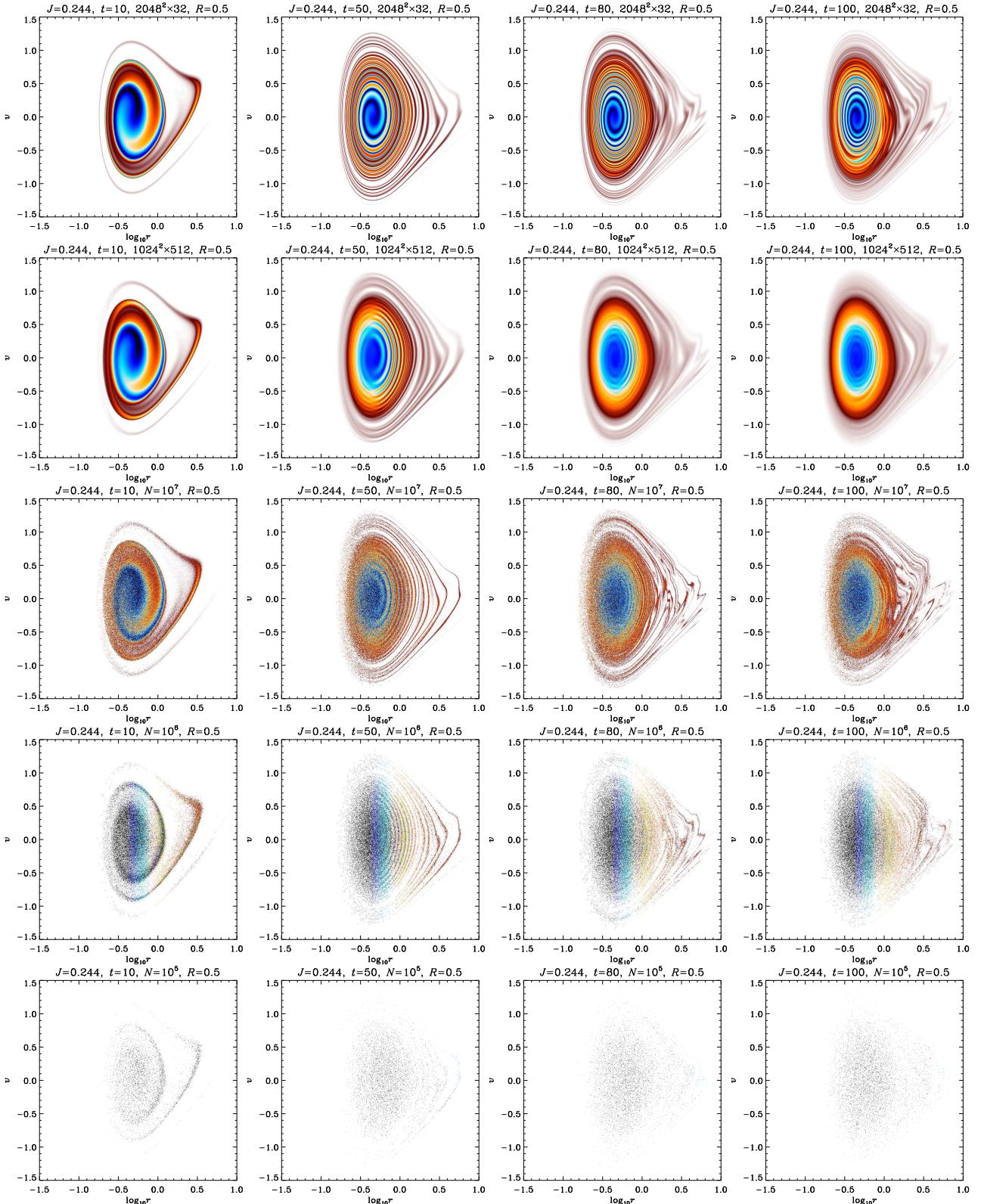
It is worth noticing, when examining Fig. 2, that lowering the number of particles seems, at least from the visual point of view, to have a dynamical effect somewhat similar to coarse graining, with a loss of fine details but not of the global shape of the phase-space density features. Note also that using a small number of slices in  $j$  in the Vlasov solver does not seem to alter the dynamical properties of the system despite the considerable level of aliasing it introduces.

Things get more complicated when considering a colder initial configuration with  $R = 0.1$ , as can be observed on Figs. 4 and 5. Indeed, while, at early times,  $t \lesssim 10$ , the conclusions obtained for  $R = 0.5$  still stand, some instabilities appear as soon as  $t \gtrsim 10$  in the **Gadget** simulations with  $N \leq 10^6$  particles as well as the (2048, 2048, 32) Vlasov run. At this point of time, the  $N \geq 10^7$  particles and the (1024, 1024, 512) simulations agree perfectly with each other (modulo the smearing effects already discussed above) and present a smooth phase-space density without any sign of instability, at variance with the other simulations, where the phase-space density is slightly irregular. This is best exemplified by Fig. 4, although not yet obvious in the (2048, 2048, 32) Vlasov simulation. These irregularities appear as well in the  $N \geq 10^7$  simulations but at later times and then develop in a dramatic way. A careful inspection of successive snapshots of the simulations indeed shows that the moment of appearance of these irregular patterns indeed increases with  $N$ .

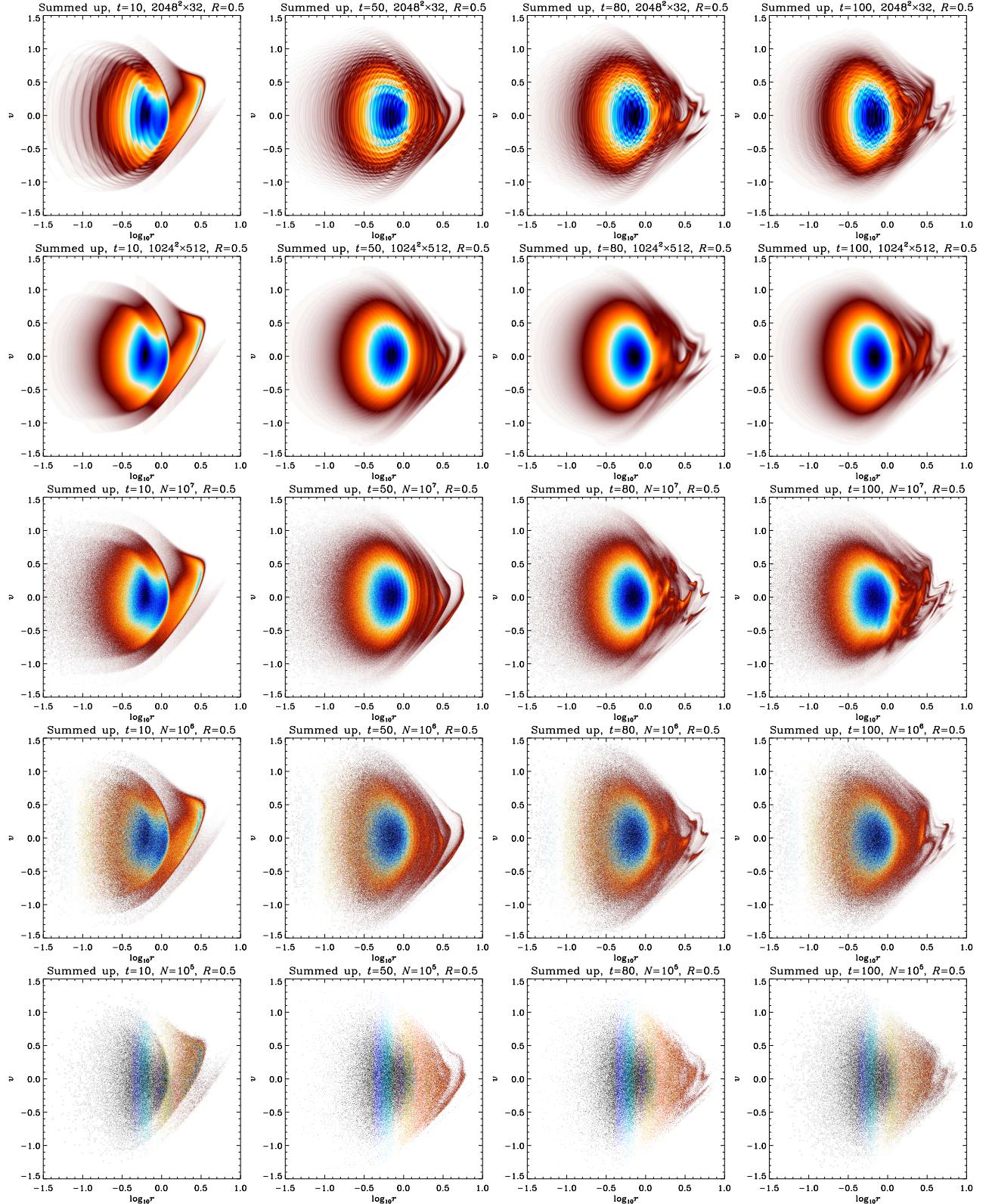
As discussed in appendices B and A3, these instabilities are due the discrete nature of the system in the  $N$ -body case or the aliasing effects introduced by sparse-sampling the angular momentum space in the Vlasov code. The numerical nature of these instabilities is also suggested by the fact that

their pattern changes completely from one simulation to another, unlike the  $R = 0.5$  case studied previously. As shown in Appendix B, they are rather insensitive to the choice of softening, time step or parameters controlling treecode force accuracy calculation in **Gadget**. They can therefore be reduced only by respectively increasing the number of particles and the resolution in the **Gadget** and **Vlasolve** simulations.

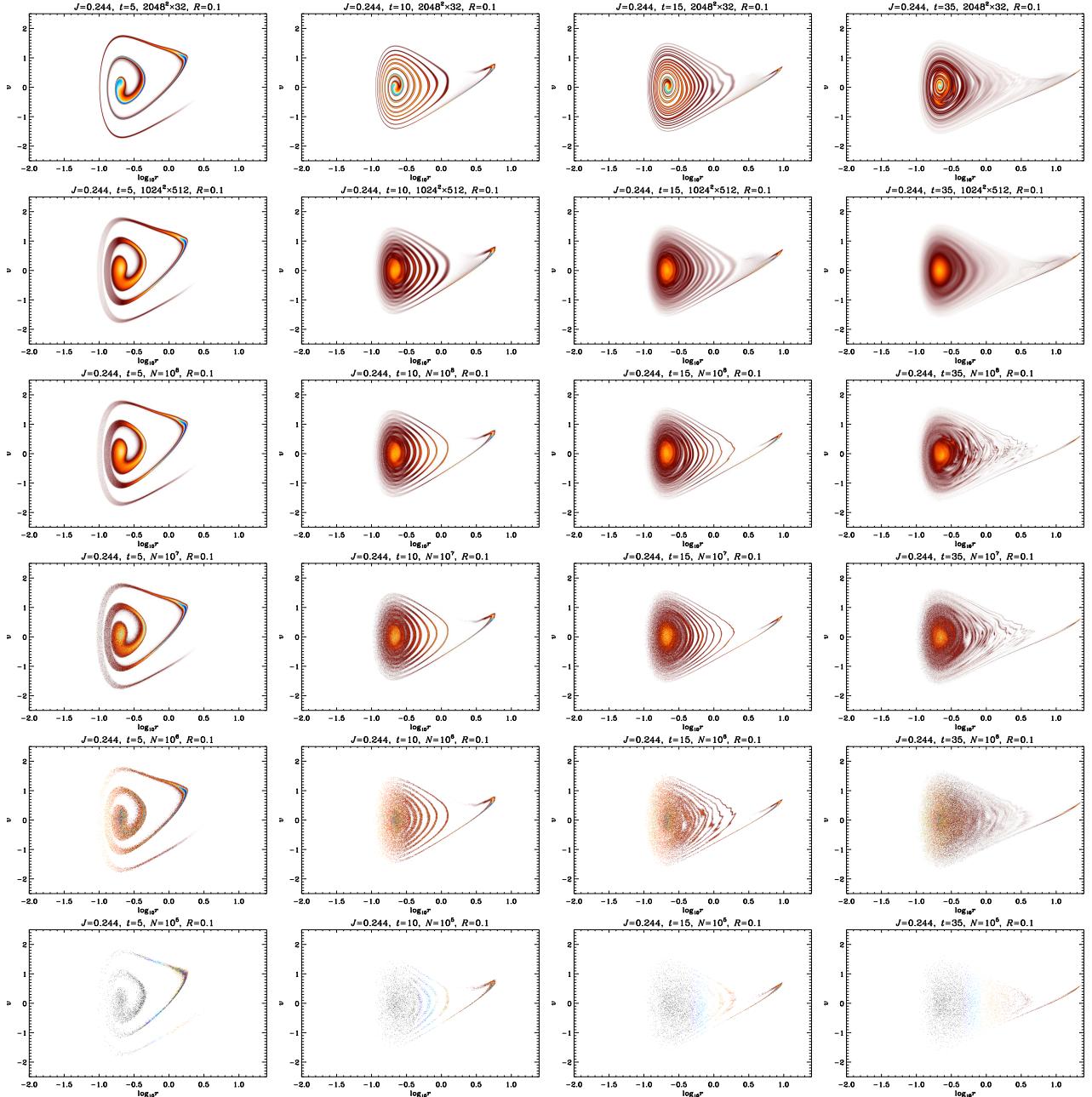
It is important to notice that even  $10^8$  particles might be insufficient to describe properly the system at late times. In the (1024, 1024, 512) Vlasov simulation, the phase-space distribution function seems to be rather smooth at all times and the system free of instability, contrarily to the  $R = 0.5$  case. However, it is difficult at this point to know if actual physical instabilities build up at late times in the  $R = 0.1$  case, because diffusion in the Vlasov simulation might prevent the appearance of some unstable modes. While the instabilities observed in Figs. 4 and 5 are definitely of numerical nature, the very fact that they appear so easily suggests that the system is prone to react nonlinearly to small perturbations. Uneven gaps between the filaments of the phase-space density clearly appear at  $t = 15$  (third column of Fig. 4), even in the (1024, 1024, 512) Vlasov simulation, and one might expect that they correspond to seeds of instabilities. In this respect, the system might actually develop, at some point, physical unstable modes. Yet, even with our 100 millions particles simulation, it is not clear whether these unstable mode dominate over collective effects due to discreteness. Only an appropriate convergence study showing that the pattern produced by the instability does not change with the number of particles, similarly as obtained for the  $R = 0.5$  case, would be conclusive.



**Figure 2.** Vlasolve versus Gadget in phase-space: phase-space density for  $R = 0.5$  and averaged over  $j \in I_J = [0.225, 0.264]$ . Each column of panels corresponds to a given value of time  $t$ , increasing from left to right. The first two lines of panels display  $f(r, v, j)$  for Vlasolve simulations with  $(N_r, N_v, N_j) = (2048, 2048, 32)$  and  $(1024, 1024, 512)$  respectively, while the three bottom lines correspond to the  $N$ -body simulations, with various values of the number of particles  $N$  as indicated on each panel. Note that the Vlasolve simulation with  $(N_r, N_v, N_j) = (2048, 2048, 32)$  has only one angular momentum slice,  $J = 0.244$ , in the interval  $I_J$ , so there is no blurring of the filamentary details of  $f(r, v, j)$  on the left side of the peak of the distribution function contrarily to the other cases. In the  $N$ -body case,  $f(r, v, j)$  was computed on the same mesh as the  $(1024, 1024, 32)$  Vlasolve simulation using nearest grid point interpolation, which explains the artefacts on the color pattern in the last two lines of panels.



**Figure 3.** Same as in Fig. 2, but the phase-space distribution function has now been summed up over the whole available range of values of  $j \in [0, J_{\max} = 1.6]$ , where  $J_{\max}$  is the maximum sampled value of  $j$  for the `Vlasolve` simulations.



**Figure 4.** Same as in Fig. 2, but for a colder initial configuration with virial ratio  $R = 0.1$ . There is also an additional line of panels corresponding to the **Gadget** simulation with  $N = 10^8$  particles.

## 6 STATISTICAL ANALYSIS

### 6.1 Correlators and entropic estimators: definitions and concepts

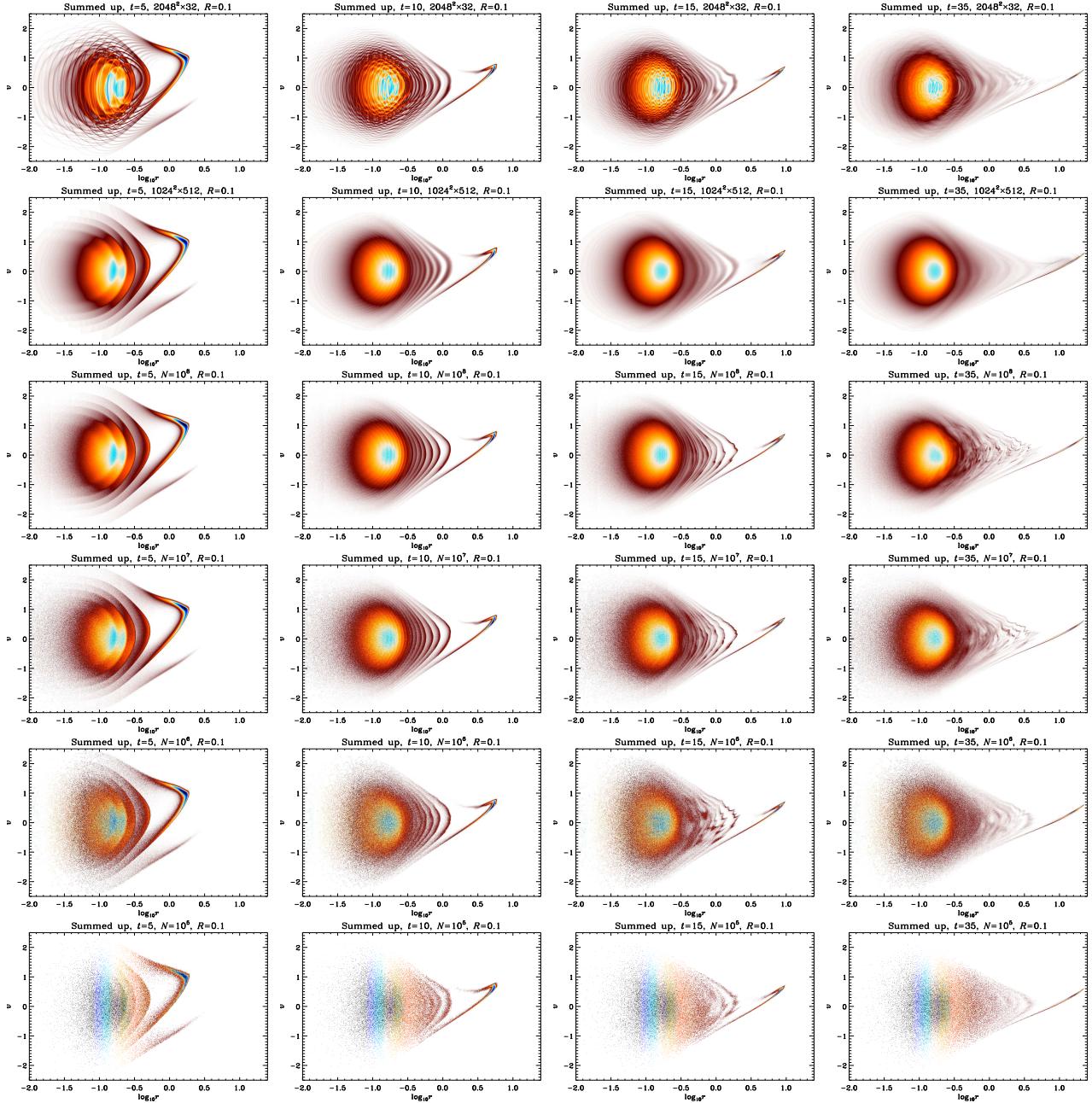
To perform a more accurate analysis, one can try to quantify to which extent the particle distribution in the  $N$ -body simulations can be considered as a local Poisson process of the phase-space density calculated in the semi-Lagrangian code. To do so, we use, in addition to entropic measurements described further, the following correlators,

$$C_k \equiv \frac{\mu_k}{\kappa_k}, \quad (12)$$

$$\mu_k = \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N [f(\Omega_i)]^k, \quad (13)$$

$$\kappa_k = \int [f(\Omega)]^{k+1} d\Omega, \quad (14)$$

where  $k$  is a positive integer,  $f$  the **Vlasolve** phase-space density,  $M$  the total mass,  $d\Omega \equiv 2\pi dr \times dv \times jdj$  and  $\Omega_i = (r_i, v_i, j_i)$  where  $r_i$ ,  $v_i$  and  $j_i$  are respectively the radial position, radial velocity and angular momentum of each particle of the **Gadget** simulation. For a point set randomly sampling a smooth density distribution  $g$ , the probability density  $p(\Omega)$  of having a given particle at phase-space posi-



**Figure 5.** Same as in Fig. 3, but for  $R = 0.1$  and with the additional  $N$ -body simulation with  $N = 10^8$ .

tion  $\Omega$  is independent from the rest of the particle distribution and is simply proportional to  $g(\Omega)$ :

$$p(\Omega)d\Omega = \frac{g(\Omega)}{M}d\Omega. \quad (15)$$

The density probability of having  $N$  particles at respective positions  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_N$  is given by

$$\mathcal{P}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) = \prod_{i=1}^N p(\Omega_i). \quad (16)$$

Ensemble averaging of  $\mu_k$  under the law  $g$  then reads

$$\langle \mu_k \rangle_g = \frac{M}{N} \int \sum_{i=1}^N [f(\Omega_i)]^k \mathcal{P}(\Omega_1, \dots, \Omega_N) d\Omega_1 \cdots d\Omega_N, \quad (17)$$

$$= \frac{M}{N} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \frac{1}{M} [f(\Omega_i)]^k g(\Omega_i) d\Omega_i, \\ \times \prod_{j \neq i} \int_{\Omega_j} \frac{g(\Omega_j)}{M} d\Omega_j \quad (18)$$

$$= \int [f(\Omega)]^k g(\Omega) d\Omega, \quad (19)$$

and

$$\langle C_k \rangle_g = \frac{\int [f(\Omega)]^k g(\Omega) d\Omega}{\int [f(\Omega)]^{k+1} d\Omega}. \quad (20)$$

Hence, if the distributions  $g$  and  $f$  coincide, i.e., in our case, if **Gadget** actually Poisson samples the **Vlasolve** phase-space density, one obtains  $\langle C_k \rangle_{g=f} = 1$  after ensemble averaging.

When increasing  $k$ , more weight is given to regions in phase-space corresponding to larger values of  $f$ . For a point process totally anticorrelated with  $f$ ,  $C_k$  cancels, while its largest possible value is given by  $C_k = (M \max f^k)/\kappa_k > 1$ , when all the points stay in the region where  $f$  is maximal.

An important issue is to compute properly the origin of coordinates in the **Gadget** simulations, which do not necessarily conserve total momentum. In order to do this, we find the origin of coordinates which *maximizes*  $C_1$ , even though the result of such a procedure can potentially lead to  $C_1 > 1$ , to optimize the match between concentrations of particles and local extrema of  $f$ .

The variance of  $C_k$  can also be calculated in an analogous way to  $\langle \mu_k \rangle_g$ :

$$\Delta C_k^2 \equiv \langle C_k^2 \rangle_g - \langle C_k \rangle_g^2 \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\kappa_k^2} \left[ \frac{M}{N} \langle \mu_{2k} \rangle_g - \frac{1}{N} \langle \mu_k \rangle_g^2 \right], \quad (22)$$

which reduces to  $\Delta C_k^2 = (M/N)(\kappa_{2k}/\kappa_k^2) - 1/N$  when  $f$  and  $g$  coincide. In practice, we shall use the following estimator for this statistical error:

$$\Delta C_k^2 \simeq \frac{1}{\kappa_k^2} \left[ \frac{M}{N} \mu_{2k} - \frac{1}{N} \mu_k^2 \right], \quad (23)$$

where  $\mu_{2k}$  and  $\mu_k$  are directly estimated from the  $N$ -body simulation.

The log-likelihood that the **Gadget** particle distribution locally Poisson samples the **Vlasolve** phase-space density  $f$  can be written, following the reasoning that lead to equation (16),

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \ln \left[ \frac{f(\Omega_i)}{M} \right]. \quad (24)$$

However, the region  $\mathcal{D}$  where  $f > 0$  being of finite extent, one expects  $\ln \mathcal{L} = -\infty$  as soon as a particle escapes  $\mathcal{D}$ , which is very likely, due for instance to  $N$ -body relaxation. Furthermore, the Vlasov solver does not guaranty the positivity of  $f$ . To take into account in a fair way both the defects of the  $N$ -body and the Vlasov simulations, it is better to restrict to a region  $\mathcal{D}_{\text{th}}$  where  $f$  is strictly positive:

$$D_{\text{th}} \equiv \{\Omega \text{ such that } f(\Omega) \geq f_{\text{th}}, f_{\text{th}} > 0\}. \quad (25)$$

The log-likelihood of having  $Q \leq N$  particles in the region  $\mathcal{D}_{\text{th}}$  and the rest outside it (leaving the freedom of the remaining particles to span all the space outside  $\mathcal{D}_{\text{th}}$ ) is given by a binomial law

$$\ln \mathcal{L}_b(Q, \nu) = \ln \left[ \frac{N!}{(N-Q)!Q!} \nu^M (1-\nu)^{N-Q} \right], \quad (26)$$

where  $\nu$  is the fractional mass inside  $\mathcal{D}_{\text{th}}$  in the **Vlasolve** simulation. Hence, equation (24) simply becomes

$$\ln \mathcal{L} = \sum_{\Omega_i \in \mathcal{D}_{\text{th}}} \ln \left[ \frac{f(\Omega_i)}{M_{\text{th}}} \right] + \ln \mathcal{L}_b(Q_{\text{th}}, \nu), \quad (27)$$

where  $Q_{\text{th}}$  is the number of particles of the **Gadget** simulation inside  $\mathcal{D}_{\text{th}}$  and  $M_{\text{th}} = \int_{\mathcal{D}_{\text{th}}} d\Omega f(\Omega)$ .

Note that the distribution of particles which maximizes the first term in equation (27) corresponds again to the case where all the particles of  $\mathcal{D}_{\text{th}}$  stay in the region where  $f$  is maximal, similarly to the case when the correlator  $C_k$  is equal to its maximum possible value. Clearly, this situation is not typical, but it is in fact the most likely to consider when it can take place: this is why we maximize  $C_1$  to estimate the center of the  $N$ -body system, even though it might turn to be larger than unity.

The expectation value of the log-likelihood  $\ln \mathcal{L}$  under the law  $f$  can be obtained by ensemble averaging:

$$S(f_{\text{th}}) \equiv -\frac{1}{\nu N} \langle \ln \mathcal{L} \rangle_f = S_f(f_{\text{th}}) + S_b(f_{\text{th}}), \quad (28)$$

$$S_f(f_{\text{th}}) \equiv - \int_{\mathcal{D}_{\text{th}}} \frac{f(\Omega)}{M_{\text{th}}} \ln \left[ \frac{f(\Omega)}{M_{\text{th}}} \right] d\Omega, \quad (29)$$

$$S_b(f_{\text{th}}) \equiv -\frac{1}{\nu N} \sum_{Q=0}^N \mathcal{L}_b(Q, \nu) \ln \mathcal{L}_b(Q, \nu). \quad (30)$$

In the limit  $f_{\text{th}} \rightarrow 0$ , the quantity  $S_f(f_{\text{th}})$  reduces to the Gibbs entropy of the system, which explains the choice of notations. Moreover, if  $N \gg 1$  and if the fractional mass  $\nu$  inside the domain of interest  $\mathcal{D}_{\text{th}}$  is of order of unity, which is the case for our analyses, the term  $S_b(f_{\text{th}})$  is in practice negligible compared to  $S_f(f_{\text{th}})$ , so  $S(f_{\text{th}})$  depends only weakly on the total number of particles, as expected.

The variance of  $\ln \mathcal{L}$  can be calculated likewise

$$\sigma_L^2 \equiv \frac{1}{(\nu N)^2} [\langle \ln \mathcal{L}^2 \rangle_f - \langle \ln \mathcal{L} \rangle_f^2] \quad (31)$$

$$\simeq \frac{1}{\nu N} \left\{ \int_{\mathcal{D}_{\text{th}}} \frac{f(\Omega)}{M_{\text{th}}} \ln^2 \left[ \frac{f(\Omega)}{M_{\text{th}}} \right] d\Omega - \nu [S(f_{\text{th}})]^2 \right\}, \quad (32)$$

where we have neglected, following the arguments developed earlier, the contributions of  $S_b$  to the error.

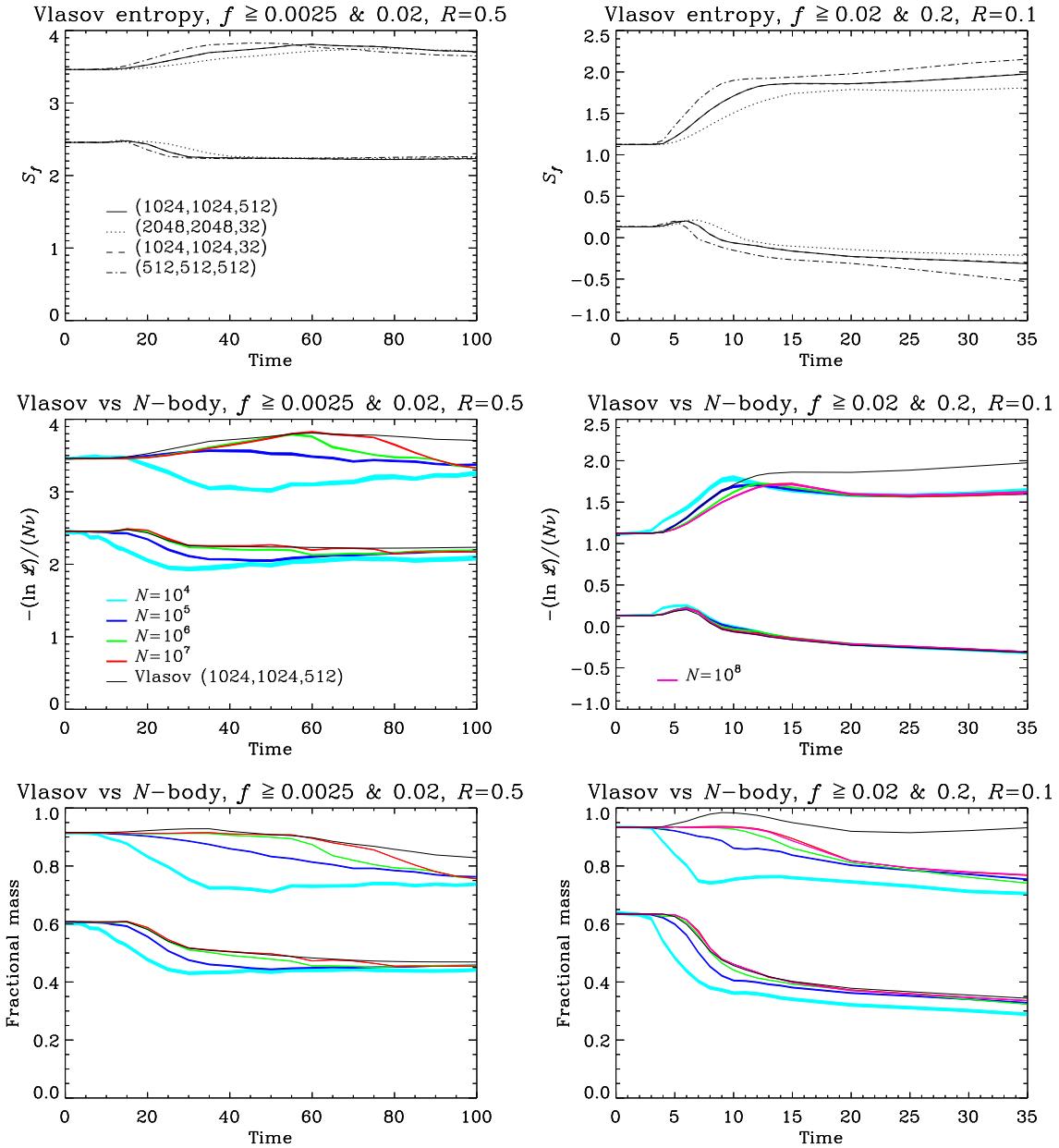
To understand better the interest of using the statistics given by equation (27), one can introduce the difference between the measured value of the log-likelihood and its expectation under the law  $f$ :

$$\delta S = \frac{1}{\nu N} [\langle \ln \mathcal{L} \rangle_f - \ln \mathcal{L}], \quad (33)$$

where  $\mathcal{L}$  is given by expression (27) calculated for  $\Omega_i$  extracted from a **Gadget** simulation. The quantity  $\delta S$  estimates the magnitude of the difference between the underlying smooth phase-space density  $g$  sampled by **Gadget** and the **Vlasolve** phase space density,  $f$ : its ensemble average other many **Gadget** realizations indeed reads, when neglecting the binomial term in equation (27),

$$\langle \delta S \rangle_g \simeq \int_{f \geq f_{\text{th}}} \frac{1}{M_{\text{th}}} [g(\Omega) - f(\Omega)] \ln \left[ \frac{f(\Omega)}{M_{\text{th}}} \right] d\Omega. \quad (34)$$

Under the assumption that the  $N$ -body simulation Poisson samples the distribution  $f$ , the magnitude of  $\delta S$  should be of the same order of  $\sigma_L$ .



**Figure 6.** Entropic measurements: effects of **Vlasolve** resolution (top two panels) and **Gadget** number of particles (four bottom panels). The left and right panels correspond respectively to  $R = 0.5$  and  $0.1$ . On the *top panels*, the quantity  $S_f(f_{\text{th}})$  given by equation (29) is plotted as a function of time for the Vlasov simulations and for two values of  $f_{\text{th}}$  indicated on each panel corresponding to approximately initially keeping 90 and 60 percent of the mass inside the excursion. Each curve corresponds to a given resolution as indicated on each panel (the dashes are nearly superposed to the solid line). The top/bottom group of four curves correspond to a smaller/larger value of  $f_{\text{th}}$ . On the *middle panels*, the solid line is the same as on the top panels, while the colored curves display, for each value of the particle number  $N$  in the **Gadget** simulations, the quantity  $-\ln \mathcal{L}/(Nv)$  as a function of time, where  $\ln \mathcal{L}$  is given by equation (27). If the  $N$ -body simulations would Poisson sample the **Vlasolve** phase-space density, the ensemble average of this quantity over many **Gadget** realizations should match the solid line (except for a negligible correction due to the  $S_b$  term in equation 29). Finally, the *bottom panels* show the fractional mass as a function of time for the two values of  $f_{\text{th}}$  considered. On the two bottom right panels, there is an additional purple curve nearly indistinguishable from the red one, corresponding to the additional simulation with 100 millions particles we performed for  $R = 0.1$ . In the four bottom panels, the thickness of each colored curve takes into account statistical errors (equation 32 for  $\ln \mathcal{L}$ ). In addition, for the middle panels, systematic errors due to the interpolation of the phase-space distribution function in the **Vlasolve** simulations also contribute to the estimated errors. In the latter case, we compute  $f(\Omega_i)$  both using nearest grid point and linear interpolation from the values of  $f$  on the computational mesh. The difference between the two interpolating methods adds to the thickness of the curves. Note that we use the (1024, 1024, 512) **Vlasolve** simulation to perform the comparison to  $N$ -body results, to minimize the effects of interpolation.

## 6.2 Correlators and entropic estimators: measurements

Top panels of Fig. 6 show the quantity  $S_f(f_{\text{th}})$  as a function of time for the various **Vlasolve** simulations we performed and two values of  $f_{\text{th}}$  chosen such that approximately 90 percent and 60 percent of the total mass is initially inside the excursion  $D_{\text{th}}$ , respectively. The quantity  $S_f(f_{\text{th}})$  is a Casimir invariant—that is an integral over a function of  $f$ —and should thus be conserved during runtime if the code was perfect. This is not the case because of diffusion and aliasing effects in  $(r, v)$  space: deviation from conservation of  $S_f$  happens shortly after collapse time. Then there is a strong mixing phase during which  $S_f$  increases, then possibly decreases, according to the value of  $f_{\text{th}}$ , and finally reaches an approximate plateau. Deviation from conservation of  $S_f$  naturally happens sooner when resolution in  $(r, v)$  space is smaller. Resolution in  $j$  space does not have much influence on  $S_f$  because angular momentum is an invariant of the dynamics. However, as clearly shown in previous section for  $R = 0.1$ , we already know that sparse sampling in  $j$  space is not recommended since it can introduce some instabilities in the dynamics, even though this effect does not affect much our likelihood measurements.

Middle panels of Fig. 6 show the quantity  $-\ln \mathcal{L}/(N\nu)$  measured in **Gadget** from the particles belonging to the excursion  $D_{\text{th}}$  as a function of time, where  $\ln \mathcal{L}$  is given by equation (27). For a given value of the threshold  $f_{\text{th}}$ , if the **Gadget** simulations would actually behave like Poisson realizations of the **Vlasolve** ones, all the colored curves should be close to the solid line, which corresponds to  $S_f$ . This is clearly not the case for small  $f_{\text{th}}$  (upper group of curves), except at early times. Increasing the number of particles in the  $N$ -body simulation improves the agreement with the Vlasov code in the  $R = 0.5$  case, except at the latest times, but does not seem to have a convincing impact in the  $R = 0.1$  case: for  $f_{\text{th}} = 0.02$ , all the  $N$ -body simulations converge to the same plateau somewhat below the Vlasov code result. On the contrary, for  $f_{\text{th}} = 0.2$ , the agreement between **Gadget** and **Vlasolve** is striking at all times, except may be for the  $N = 10^4$  simulation during the strong mixing phase.

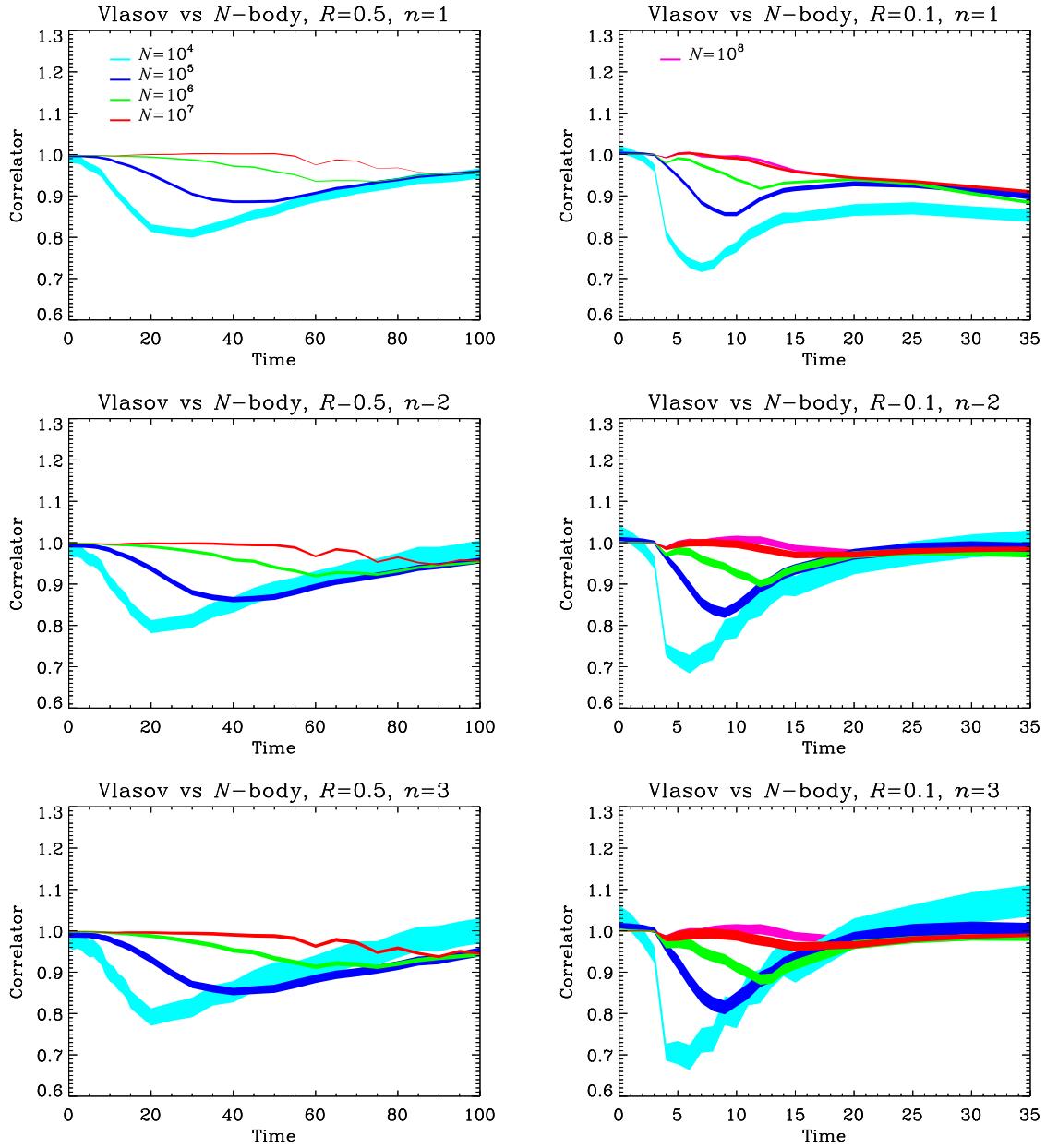
To complete the analyses and understand better the results obtained for the log-likelihood, the fractional mass inside the excursions  $f \geq f_{\text{th}}$  is shown in bottom panels of Fig. 6. Again, this quantity is a Casimir, so it should not change with time in the idealistic case. In practice, aliasing might artificially increase or decrease the **Vlasolve** mass inside  $D_{\text{th}}$ , while diffusion effects decrease it, especially by dilution of filamentary structures that build up during the course of dynamics. In the  $R = 0.5$  case, most of the disagreement between **Gadget** likelihood and its expectation given by **Vlasolve** can be understood in terms fractional mass: defects related to the discrete nature of the  $N$ -body simulations seem to eject particles outside  $D_{\text{th}}$ . However, even though they seem spectacular in terms of fractional mass in the excursion, these defects are in practice subtle because they do not affect significantly the projected density  $\rho(r)$  (that we do not show here, for simplicity), even for  $N = 10^4$ . Remind however that we noticed, during visual inspection of Fig. 3 some possible smearing of the dynamics in the  $N$ -body simulations similar to diffusion effects in the Vlasov code.

In the  $R = 0.1$  case, the interpretation of the results is slightly more complicated. For  $f_{\text{th}} = 0.2$ , the **Gadget** fractional mass inside the excursion  $D_{\text{th}}$ , which is simply proportional to the number of particles inside it, behaves similarly as in the  $R = 0.5$  case as a function of particle number. On the other hand, when examining the quantity  $-\ln \mathcal{L}/(N\nu)$ , which is a sum of terms proportional to  $\ln f(\Omega_i)$  over particle positions  $\Omega_i \in D_{\text{th}}$ , the  $N$ -body measurements converge with each other and with **Vlasolve** much better, especially after relaxation. This means that particles inside the excursion tend to concentrate in regions where  $f$  is larger to compensate for particles sent outside the excursion, a possible signature of collisional relaxation. But it could also be attributable to non trivial collective effects related to particle Poisson noise already discussed in § 5. Remind however, that in the  $N = 10^4$  case, deviation from spherical symmetry is significant and certainly contributes to the mass loss inside the excursion. For  $f_{\text{th}} = 0.02$ , even the  $N = 10^8$  **Gadget** sample disagrees with the **Vlasolve** simulation. Clearly, the Vlasov simulation becomes quickly defective in regions where  $f$  is small. However, convergence of the **Gadget** simulations at late times might be misleading, as we noticed from visual inspection of Figs. 4 and 5 that some instabilities appeared in all of them as soon as  $t \gtrsim 15$ , although later when  $N$  is larger. Interestingly, the measurements in the  $N = 10^7$  and  $N = 10^8$  simulations are nearly indistinguishable from each other, which is a sign that we are close to numerical convergence.

Entropic measurements of Fig. 6 are confirmed, at least partly, by Fig. 7. In particular, a depression of which the depth depends on the number of particles in the  $N$ -body simulation appears on all the curves. When increasing  $N$ , the amplitude of the depression decreases and the occurrence of its maximum amplitude is delayed, independently of the actual dynamical state of the physical system. Again, it can certainly be attributed to collisional relaxation or to collective effects due to Poisson noise. Overall agreement between  $N$ -body and Vlasov codes improves when increasing the number of particles in the  $N$ -body simulation. For  $R = 0.5$ , this is rather independent of  $k$  in equation (12), i.e. of the fact of putting more or less weight to overdense regions in phase-space. In the  $R = 0.1$  case, putting aside the depression of which the depth depends on the number of particles, the correlator  $C_1$  starts to decrease with time at  $t \sim 10$ . This can be mainly attributed to defects in the Vlasov simulation in underdense regions as discussed earlier. For  $k \geq 2$ , which gives more weight to higher values of the phase-space density, the correlator stays steady as a function of time (again putting aside the  $N$ -dependent depression). However, one notices for  $k = 3$  a net increase with time of the correlator for the simulation with  $N = 10^4$  particles, suggesting possible effects of collisional relaxation at late times, but recall that this simulation presents significant deviations from spherical symmetry.

## 7 CONCLUSION

In this paper we have compared the phase-space distribution function traced by the particle distribution in **Gadget** simulations to the results obtained with a Vlasov code relying on an improved version of the splitting algorithm of Fujiwara



**Figure 7.** Correlators as functions of time between *Vlasolve* and *Gadget*. These quantities, defined in equations (12), (13) and (14), are plotted for  $k = 1, 2, 3$  increasing from top to bottom, while left and right panels correspond to  $R = 0.5$  and  $0.1$ , respectively. The thickness of the curves, analogously to Fig. 6, takes into account statistical errors (according to eq. 23, using the measured value of  $\nu_{2k}$  and  $\nu_k$ ) and systematic errors due to the interpolation of the phase-space density in the *Vlasolve* samples. Note that there is an additional purple curve on each panel of the right column corresponding to the 100 millions particles simulation.

(1983). To conduct the comparison, we used apodized Hénon spheres, which are known to be insensitive to radial orbit instability and in particular to preserve the spherical nature of the system even when simulated with three-dimensional  $N$ -body codes. Two values of the initial virial ratio  $R = 0.5$  and  $R = 0.1$  were considered, corresponding respectively to a “warm” and a “cold” configuration.

We performed a detailed visual inspection of the phase-space distribution function as well as a quantitative analysis by introducing two new statistical tools. The first one is of

entropic nature and corresponds to the log-likelihood quantifying to which extent the  $N$ -body results represent a local Poisson sampling of the Vlasov phase-space density. The second tool is a correlator of order  $k$ , proportional to the integral over phase-space of the product between the Vlasov phase-space density raised to the power  $k$  and the particle distribution function.

The main results of our paper are as follows:

- Visual inspection of the phase-space distribution shows a remarkable agreement between the Vlasov and the  $N$ -body

codes. In the warm case,  $R = 0.5$ , even details related to nonlinear instabilities developing in phase-space during the course of dynamics match. In the colder case,  $R = 0.1$ , although still good at the coarse level, the agreement between **Vlasolve** and **Gadget** at small scales worsens after a few dynamical times. This is mainly due to collective effects induced by the shot noise of the particles in the  $N$ -body simulations (and not to close particle encounters). Even with  $N = 10^8$  particles, we are not sure to have proved convergence of the  $N$ -body results. This proof is however rendered difficult by the fact that the Vlasov code is significantly diffusive, which might prevent the development of a variety of physical unstable modes.

- While the statistical tools do not provide, in fact, as rich information as visual inspection, they can evidence subtle effects not visible by eye. In particular, when taking into account general trends due to diffusion in the Vlasov code, significant for  $R = 0.1$ , we notice that the match between **Gadget** and **Vlasolve** worsens with time, then improves. The amplitude of the mismatch and the time of its appearance respectively augment and decrease when reducing the number of particles in the  $N$ -body simulation. Again, this could be imputed to collective effects due to the shot noise of the particles, however close encounters could in this case also play a role. Yet, the nearly perfect match between the **Gadget** simulations with  $N = 10^7$  and  $N = 10^8$  particles suggests that convergence is nearly reached in terms of number of particles and information theory, even if it is not fully proven.

It is worth mentioning again that the collective effects mentioned above are not related to  $N$ -body relaxation, but rather result from random Poisson fluctuations. This can be formulated as follows (Aarseth, Lin, & Papaloizou 1988): a given particle at some distance  $r$  from the center of the system feels a force proportional to the number  $N_{\text{in}}$  of particles inside the sphere of radius  $r$ . Poisson fluctuations imply thus that there is a relative error of order of  $1/\sqrt{N_{\text{in}}}$  on this force. Importantly, the inner number of particles  $N_{\text{in}}$  changes with time with random fluctuations around the mean behavior: these fluctuations can be considered as a (correlated) random walk. Indeed, because of the finite velocity dispersion, particles cross both inwards and outwards the frontier of the sphere of radius  $r$ .

Therefore, a coherent flow of particles will tend to fuzz radially because of the fluctuations of the force. This is probably the effect we noticed for low  $N$  during the visual inspection of Fig. 3. According to Aarseth, Lin, & Papaloizou (1988), this *collective* effect is dominant over  $N$ -body relaxation, and, as confirmed by our detailed numerical tests in Appendix B, is not significantly influenced by softening. This effect is probably also at the origin of instabilities observed in the  $R = 0.1$   $N$ -body simulations. It could as well be at the origin of the deviations between **Vlasolve** and **Gadget** observed when measuring the statistical estimators defined in this paper, but it is again not obvious how much close encounters actually contribute to these deviations.

Note as well that shot noise creates anisotropies in the system, i.e. deviations from spherical symmetry that can get eventually amplified. Aarseth, Lin, & Papaloizou (1988) argue that this effect is subdominant compared to the radial component of the noise induced perturbation. Although their calculation are performed only prior to collapse and in

the cold case, we believe that the general conclusions still stand here.

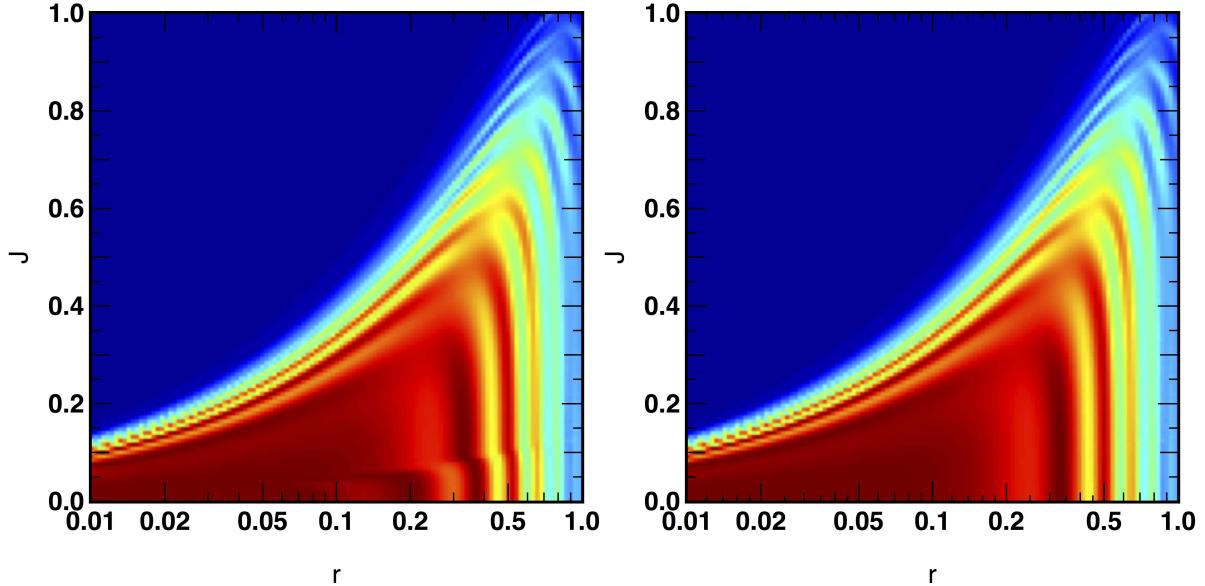
Clearly, this collective effect is a real problem for simulations of close to cold spherical systems when it comes to examine fine structures of the phase-space density. We could not prove convergence of the phase-space density in the  $R = 0.1$  case even for a 100 millions particles simulation. This might, by extension, have non trivial consequences on the fine structure of simulated dark matter halos, where numerical convergence in terms of number of particles might not have been reached yet despite the numerous convergence studies existing. Indeed, convergence toward the continuous limit might be much slower than expected, hence giving the false impression that it is achieved.

## ACKNOWLEDGEMENTS

We thank Jérôme Perez for useful discussions. This work has been funded in part by ANR grant ANR-13-MONU-0003.

## REFERENCES

- Aarseth S. J., Lin D. N. C., Papaloizou J. C. B., 1988, ApJ, 324, 288  
 Alard C., Colombi S., 2005, MNRAS, 359, 123  
 Barnes E. I., Lanzel P. A., Williams L. L. R., 2009, ApJ, 704, 372  
 Bertschinger E., 1998, ARA&A, 36, 599  
 Besse N., Sonnendrücker E., 2003, JCoPh, 191, 341  
 Besse N., Latu G., Ghizzo A., Sonnendrücker E., Bertrand P., 2008, JCoPh, 227, 7889  
 Binney J., 2004, MNRAS, 350, 939  
 Campos Pinto M., 2011, arXiv, arXiv:1112.1859  
 Cheng C. Z., Knorr G., 1976, JCoPh, 22, 330  
 Colombi S., 2001, NewAR, 45, 373  
 Colombi S., Touma J., 2008, CNSNS, 13, 46  
 Colombi S., Touma J., 2014, MNRAS, 441, 2414  
 Crouseilles N., Latu G., Sonnendrücker, E., 2009, JCoPh, 228, 1429  
 Crouseilles N., Mehrenberger M., Sonnendrücker E., 2010, JCoPh, 229, 1927  
 Dehnen W., Read J. I., 2011, EPJP, 126, 55  
 Dolag K., Borgani S., Schindler S., Diaferio A., Bykov A. M., 2008, SSRv, 134, 229  
 Filbet F., Sonnendrücker E., Bertrand P., 2001, JCoPh, 172, 166  
 Fujiwara T., 1981, PASJ, 33, 531  
 Fujiwara T., 1983, PASJ, 35, 547  
 Gott, J.R. III , 1973, ApJ, 186, 481  
 Güçlü Y., Christlieb A. J., Hitchon W. N. G., 2014, JCoPh, 270, 711  
 Hahn O., Abel T., Kaehler R., 2013, MNRAS, 434, 1171  
 Hénon M., 1964, AnAp, 27, 83  
 Melott A. L., 2007, arXiv, arXiv:0709.0745  
 Melott A. L., Shandarin S. F., Splinter R. J., Suto Y., 1997, ApJ, 479, L79  
 Moore B., Governato F., Quinn T., Stadel J., Lake G., 1998, ApJ, 499, L5  
 Nishida M. T., Yoshizawa M., Watanabe Y., Inagaki S., Kato S., 1981, PASJ, 33, 567



**Figure 8.** Comparison between the reflecting central sphere method (left panel) and our improved delayed central sphere implementation (right panel). A simulation of a Hénon sphere with  $(N_r, N_v, N_j) = (200, 200, 200)$  and a virial ratio  $R = 0.5$  is shown at  $t = 30$  in the  $(r, u = 0, j)$  plane. The systematic artificial speed increase undergone by orbits that penetrate the central region compared to their higher angular momentum counterparts can clearly be observed at low  $j$  on the left panel where a reflective sphere is used, while the distribution function does not exhibit such spurious features when a delayed kernel is used (right panel).

- Power C., Navarro J. F., Jenkins A., Frenk C. S., White S. D. M., Springel V., Stadel J., Quinn T., 2003, MNRAS, 338, 14  
 Rossmannith J. A., Seal D. C., 2011, JCoPh, 230, 6203  
 Roy F., Perez J., 2004, MNRAS, 348, 62  
 Shandarin S., Habib S., Heitmann K., 2012, PhRvD, 85, 083005  
 Shoucri M. M., Gagne R. R. J., 1978, JCoPh, 27, 315  
 Sonnendrücker E., Roche J., Bertrand P., Ghizzo A., 1999, JCoPh, 149, 201  
 Springel V., 2005, MNRAS, 364, 1105  
 Springel V., et al., 2008, MNRAS, 391, 1685  
 Springel V., Yoshida N., White S. D. M., 2001, NewA, 6, 79  
 Stadel J., Potter D., Moore B., Diemand J., Madau P., Zemp M., Kuhlen M., Quilis V., 2009, MNRAS, 398, L21  
 Umeda T., 2008, EP&S, 60, 773  
 van Albada T. S., 1982, MNRAS, 201, 939  
 Watanabe Y., Inagaki S., Nishida M. T., Tanaka Y. D., Kato S., 1981, PASJ, 33, 541  
 Yoshikawa K., Yoshida N., Umemura M., 2013, ApJ, 762, 116

## APPENDIX A: VLASOV SOLVER: DETAILS ON THE ALGORITHM

### A1 Reflecting boundaries with time delay

In this appendix, we explain how reflecting boundaries conditions with time delay are implemented in **Vlasolve**.

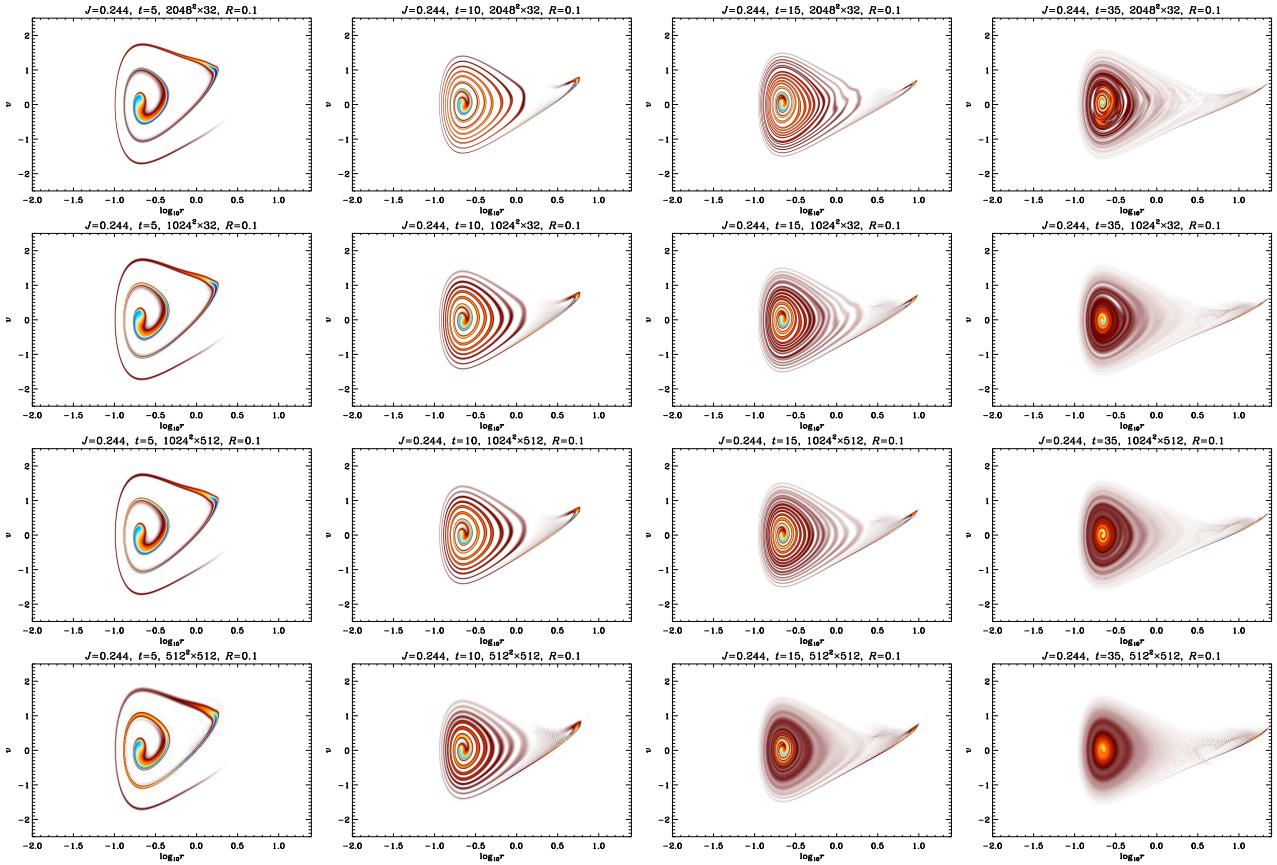
If the mass inside the sphere of radius  $R_{\min}$  is neglected, the trajectories followed by each test particle associated to a grid site that penetrates the sphere are fixed and do not depend on time. This property, combined with the fact that we

use a constant time step, allows us to pre-compute these trajectories once and for all. The delayed central sphere method is then implemented by associating a linked list to each grid site whose associate test particle radial position  $r$  half a time step backward in time are such that  $r \leq R_{\min}$ . Each linked list contains as many elements as the number of time steps needed for the particle to travel a distance of  $2R_{\min}$  and the  $n^{\text{th}}$  element in the list stores the coordinates of the test particle  $n$  time steps backward in time. Before starting the simulation, we initialize each element coordinate and the corresponding value of the initial distribution function. For each time step, the value of each element is then simply updated by assigning to it the value of its successor while the last element value, whose coordinates fall inside the computing domain,  $r \geq R_{\min}$ , is interpolated. A comparison of the results obtained with the reflective central sphere to our improved delayed central sphere is shown on figure 8. The improvements are unquestionable.

### A2 Parallelization issues

We implemented a hybrid shared and distributed memory version of **Vlasolve** via the OpenMP and MPI libraries, respectively.

Shared memory parallelism is relatively straightforward to achieve in the spherically symmetric case, by taking advantage of the fact that the angular momentum  $j$  is a conserved quantity. Spline interpolations, which represent the most expensive part of the code, can thus be computed independently for each slice of constant  $j$ . We therefore easily reach an almost perfect parallelization up to a number of tasks equal to the grid resolution  $N_j$  of angular momentum space, which is typically larger than the number of available cores on a shared memory system.



**Figure A1.** Effect of resolution in the Vlasov code: phase-space density for  $R = 0.1$  and  $j = 0.244$ . Each column of panels corresponds to a given value of time  $t$ , increasing from left to right, while each line correspond to a given resolution,  $(N_r, N_v, N_j) = (2048, 2048, 32)$ ,  $(1024, 1024, 32)$ ,  $(1024, 1024, 512)$  and  $(512, 512, 512)$  from top to bottom, as indicated on each panel. The pictures show only the  $f \geq 0$  part of the phase-space density, while it can actually become negative because of aliasing. However, this choice of representation does not hide aliased regions. The prominent one corresponds to the textured zone above the large  $r$  tail of the system on the right panels.

Distributed memory parallelization via MPI is not as simple. Indeed, spline interpolations are intrinsically non-local, which makes the parallelization along dimensions other than  $j$  non trivial. Sticking with the trivial parallelization described above unfortunately limits the maximum total number of processes running in parallel to  $N_j$ , which is suboptimal. We overcome this limitation by performing MPI domain decomposition in  $(r, v)$  space, following the approach of Crouseilles & al. (2009), who propose to localize the cubic spline interpolation to each domain by using Hermite boundary conditions between the domains with an ad hoc reconstruction of the derivatives.

### A3 Effects of resolution

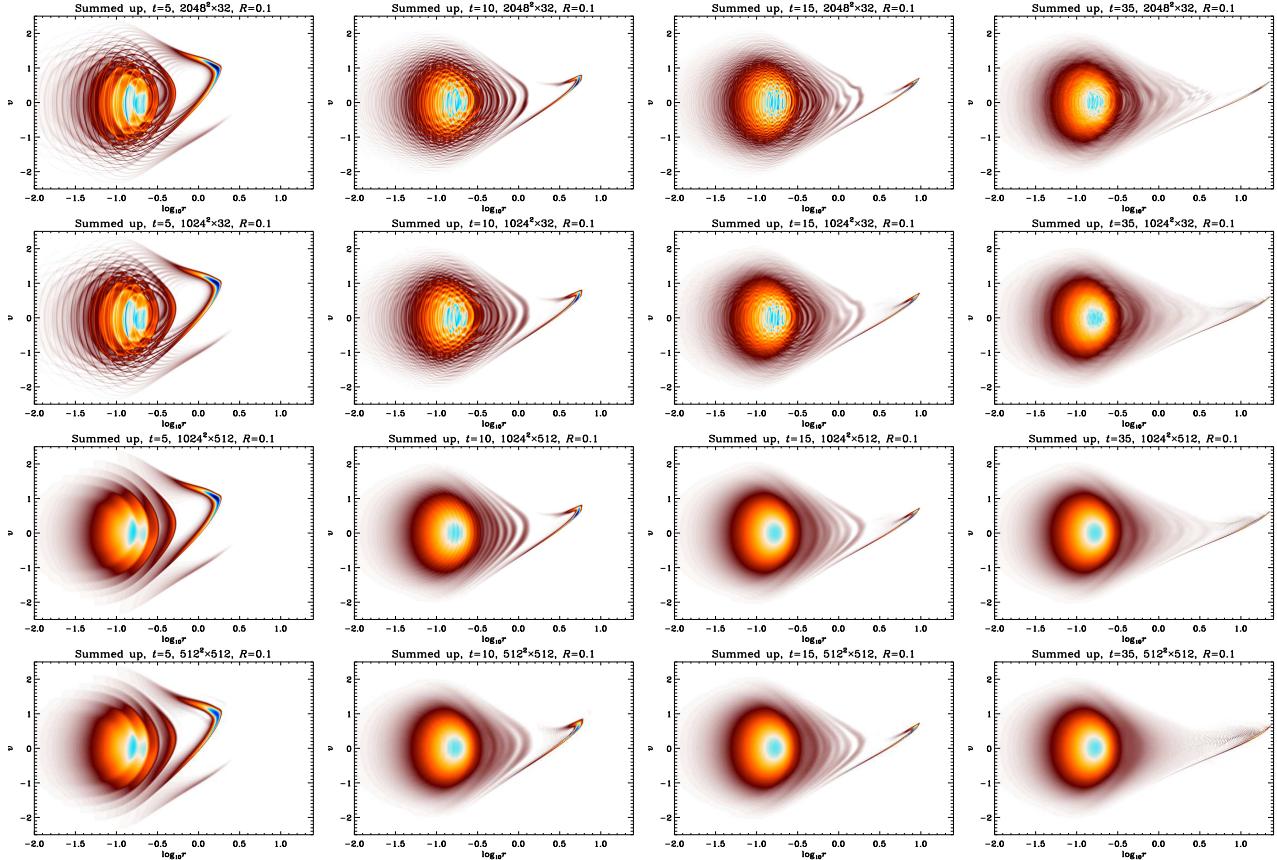
Figures A1 and A2 show, respectively for  $j = 0.244$  and integrated over angular momentum, the phase-space distribution function measured in `Vlasolve` simulations with different resolutions. These simulations have been performed for a Hénon sphere with initial virial ratio  $R = 0.1$ . Beside the very good global agreement between the various runs, these figures bring out three effects, which increase when the resolution of the phase-space grid is reduced:

- Diffusion smearing out fine details that build up in

phase-space during the course of dynamics, for instance clearly visible when one compares top to bottom middle panels of Fig. A1. One concern with diffusion is that it might prevent the appearance of unstable modes. However, we did not perform any simulation in this work that would prove this.

- Aliasing due to artificial oscillations in the spline interpolation: for the problem studied here, aliasing becomes particularly visible after relaxation in the region above the large  $r$  tail, but this does not have significant impact on the dynamics.

• Aliasing due to undersampling angular momentum space: it is visible at all time when one examines the phase-space distribution function integrated over angular momentum (top panels of Fig. A2) and can have dramatic consequences on the dynamics. The two top lines of panels of Fig. A1 and A2, corresponding to a sparse sampling in  $j$  space with only 32 slices, indeed show the appearance of an instability, which presents, on the third column of these figures, the same pattern whether  $(N_r, N_v) = (2048, 2048)$  or  $(1024, 1024)$ . This instability is not present in the simulations with higher resolution in  $j$ , as shown by the two bottom lines of panels. Note that the presence of this instability depends on initial conditions: for  $R = 0.5$ , we did not



**Figure A2.** Same as in Fig. A1, but the phase-space distribution function has now been summed up over the whole available range of values of  $j \in [0, J_{\max} = 1.6]$ , where  $J_{\max}$  is the maximum sampled value of  $j$ .

notice it for the time coverage considered,  $t \leq 100$  (upper line of panels of Figs. 2 and 3).

## APPENDIX B: $N$ -BODY SIMULATIONS: EXPLORATION OF THE CONTROL PARAMETER SPACE

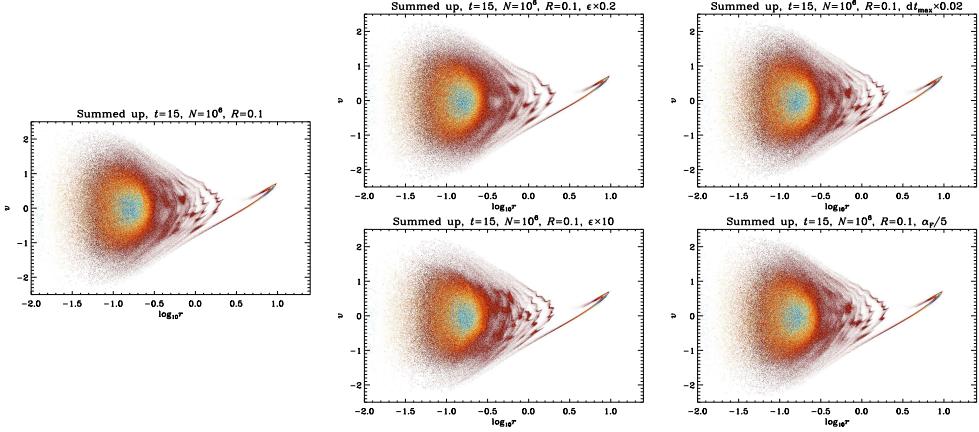
In § 5 we noticed the presence of an instability in the  $R = 0.1$   $N$ -body simulations. One aim of this appendix is to confirm that this instability is related to the number of particles used in the simulations and not to any other control parameter of the `Gadget` code. In the same time, it is of course an opportunity to check that our fiducial choice of the `Gadget` control parameters, given in § 3, is correct.

Figure B1 illustrates the main results of the tests we performed for simulations with  $10^6$  particles. These tests consisted in changing the softening length of the force, the maximum time step value and the tolerance parameter  $\alpha_F$  controlling the errors on the force. Improving the accuracy of the force calculation or dividing the maximum time step  $dt_{\max}$  by a factor 50, which corresponds to imposing  $dt \leq 2 \times 10^{-4}$ , does not change the results. This is confirmed as well by the measurements of the correlators  $C_k$  introduced in § 6, that we do not show here for simplicity. Only the value of the softening parameter of the force  $\epsilon$  have an impact on the dynamics for the tests we did. Re-

ducing  $\epsilon$  by a factor 5 seems to slightly blur the phase-space density, although this effect is difficult to decipher, while increasing  $\epsilon$  by a factor 10 sharpens the fine structures of the phase-space density. Since  $\epsilon$  controls the intensity of close encounters between particles, this is not surprising. Note that increasing  $\epsilon$  by a factor 10 is probably an exaggeration, because it *worsens dramatically* the match during the mixing phase between the  $N$ -body simulation and the Vlasov code when examining the correlators  $C_k$ , a sign that  $\epsilon$  is probably getting too close to a physical characteristic scale of the system.<sup>2</sup> We indeed noticed that increasing  $\epsilon$  only by a factor 5 does not have any impact, on the other hand, on  $C_k$ . However, all these effects do not affect the amplitude of the large scale irregularities on the pattern of  $f(r, v, j)$ , which are present whatever value of  $\epsilon$ . This is also a strong indication that close particle encounters are not at the origin of these irregularities.

We can therefore only conclude that these irregularities and the associated nonlinear instability are the result of non trivial collective effects related to particle shot noise. This argument is also supported by the fact that in addition, the moment of their appearance is particle number dependent, as discussed in § 5.

<sup>2</sup> Increasing  $\epsilon$  by a factor ten gives  $\epsilon = 0.02$ , to be compared for example to the size of the core of the system after relaxation,  $R_c \simeq 0.1$ .



**Figure B1.** Effect of changing the important control parameters in *Gadget*. The phase-space density is shown at  $t = 15$  for *Gadget* simulations with the same initial conditions corresponding to the Hénon sphere with  $R = 0.1$  and involving  $N = 10^6$  particles. In each of the simulations, one control parameter was changed compared to the fiducial simulation shown on left panel and which uses the settings of § 3. On top-left and top-right panels, the softening length of the force was decreased by a factor 5 and increased by a factor 10, respectively. In bottom-left panel, the maximum possible time step was divided by a factor 50, while in the bottom-right panel, the tolerance parameter  $\alpha_F$  defined in § 3 was divided by a factor 5.