《数 值 分 析》

期 末 复 习

第1章 误差与有效数字

1. 记$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots \times 10^m$（其中$a_1 \neq 0$）。
若$|x - x^*| \leq 0.5 \times 10^{m-n}$，则称$x^*$为有$n$位有效数字，精确到$10^{m-n}$。

2. 已知$x = 0.a_1a_2\cdots \times 10^m$的近似值$x^*$有$n$位有效数字，则其相对误差限为：$\varepsilon_r \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$.

3. 已知x^*的相对误差限可以写成$\varepsilon_r = \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$，则$x^*$ 至少有 n 位有效数字。

1. 若相对误差限为0.5×10^{-5}, 那么近似数x^*至少有几位有效数字?

解：因为$|x-x^*|=\frac{|x-x^*|}{|x^*|}\times|x^*|=0.5\times10^{-5}\times|x^*|$

设$x^*=0.a_1\cdots\times10^m$，则

$|x-x^*|\le0.5\times10^{-5}\times0.a_1\times10^m<0.5\times10^{m-5}$,

故x^*至少有5位有效数字.

第2章　线性方程组求解

几种常用的向量范数

l_∞ –范数（最大范数）　$\|X\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$

l_1 –范数　$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$

l_2 –范数（长度）　$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

常用矩阵范数：

$||A||_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$（行范数）

$||A||_1 = \max\limits_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$（列范数）

定义2. 设方阵A是非奇异矩阵，称

$$cond(A)_v = \|A\|_v \cdot \left\|A^{-1}\right\|_v$$

为方阵A关于范数v的条件数.

2. 设$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$， 求$\|A\|_1$，$cond(A)_1$

解 $\|A\|_1 = \max\{|-2| + |4|, |3| + |-5|\} = 8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \left\|A^{-1}\right\|_1 = \max\left\{\left|\frac{5}{2}\right| + |2|, \left|\frac{3}{2}\right| + |1|\right\} = \frac{9}{2},$$

$$cond(A)_1 = 8 \times \frac{9}{2} = 36.$$

Jacobi迭代法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2\right) \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^{(k)} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}$$

Jacobi迭代矩阵$B_J = -D^{-1}(L+U)$

Gauss-Seidel迭代法

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1\right) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2\right) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3\right) \\
\qquad\qquad\vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n)
\end{cases}
$$

$$\Leftrightarrow \ \vec{x}^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}U\vec{x}^{(k)} + (D+L)^{-1}\vec{b}$$

Gauss-Seidel迭代矩阵$B_G = -(D+L)^{-1}U.$

3.已知$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -1. \end{cases}$ 分别写出求解上述方程组的Jacobi迭代格式和Gauss–Seidel迭代格式的迭代矩阵B_J和B_G.

解：$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} - \frac{1}{2}, \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{5}x_3^{(k)}, \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k)} + \frac{1}{3}x_2^{(k)} - \frac{1}{6}. \end{cases}$ $B_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} - \frac{1}{2}, \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{5}x_3^{(k)} + \frac{1}{5} = -\frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{5} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{3}x_2^{(k+1)} - \frac{1}{6} = -\frac{19}{120}x_2^{(k+1)} - \frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{3}{20}. \end{cases} \qquad B_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{19}{120} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

定理1 设线性方程组由迭代$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + f$产生的序列$\{\vec{x}^{(k+1)}\}$收敛到惟一解的**充分必要条件**是迭代矩阵$B$的谱半径

$\rho(B) < 1$.

定理2（充分条件） 如果矩阵的某种范数$\|B\| = q < 1$，则迭代收敛.

定理3 若矩阵A是**严格对角占优**，则Jacobi和Gauss-Seidel迭代均收敛。

3. 已知$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -1. \end{cases}$ 计算范数$\|B_J\|_1$和$\|B_G\|_1$，判断求解上述方程组的Jacobi迭代格式和Gauss–Seidel迭代格式是否收敛？

$$B_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad B_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{19}{120} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\|B_J\|_1 = max\left\{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right\} = \frac{9}{10} < 1$，格式收敛,

$\|B_G\|_1 = max\left\{0, \frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{19}{120}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right\} = max\left\{0, \frac{61}{120}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4} < 1$，格式收敛.

注意：此方程组主对角严格占优，所以两格式一定收敛。

第3章 非线性方程的数值解

不动点迭代法

等价变换

$f(x) = 0 \longleftrightarrow x = \varphi(x)$

$f(x) = 0$ 的根 $\longleftrightarrow$ $\varphi(x)$的不动点

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1 = \varphi(x_0), \cdots, x_{k+1} = \varphi(x_k), \cdots$,若$\{x_k\}$

收敛，即存在 x^* 使得$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，且$\varphi(x)$连续，则由极限的性质

可知 $x^* = \varphi(x^*)$，即x^* 是$\varphi(x)$ 的不动点，也就是$f(x) = 0$的根。

定理1. 方程$x=\varphi(x)$，若$\varphi(x)\in C[a,b]$，且满足

（Ⅰ） 当 $x\in[a,b]$ 时，$\varphi(x)\in[a,b]$；

（Ⅱ） 对 $\forall x\in[a,b]$，$\exists 0\le L<1$ 使得 $|\varphi'(x)|\le L<1$；

则任取 $x_0\in[a,b]$，由$x_{k+1}=\varphi(x_k)$得到的序列$\{x_k\}$收敛于$\varphi(x)$在$[a,b]$上的唯一不动点x^*。

定理2. 设x^*为方程$x=\varphi(x)$的根，$\varphi'(x)$在x^*的邻域内连续，且

$$|\varphi'(x)|<1,$$

则迭代过程$x_{k+1}=\varphi(x_k)$具有局部收敛性。

定义2. 设$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛到$\varphi(x)$的不动点x^*,设$e_k=x_k-x^*$，若$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C>0$,则称该迭代为**p阶收敛**，其中 C 称为**渐近误差常数**。

定理3. 设 x^* 为$x=\varphi(x)$的不动点，若 $\varphi\in C^p(R(x^*))$，使得当$p\geq 2$时，有$\varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$，且$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$，则 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$在$R(x^*)$内 p 阶收敛。

Newton迭代格式： $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

注：若x^*为$f(x)$的单根，则Newton迭代格式是平方收敛的，

若x^*为$f(x)$的重根，则Newton迭代格式是线性收敛的。

定理5 设x^*为$f(x) = 0$的$m(m \geq 2)$重根，则存在邻域$R(x^*)$由**改进的Newton迭代法**$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$得到的序列$\{x_k\}$至少平方收敛到$x^*$.

若x^*为$f(x)$的重根，令$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$，则$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)}$.

该格式至少平方收敛到x^*。

4 用Newton迭代法求$f(x)=x^3-2x^2+x=0$的重根$x^*=1$附近的近似值。

解：$f(x)=x(x-1)^2$，所以$x^*=1$为2重根，故

$$x_{k+1}=x_k-2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-2\frac{x^3-2x^2+x}{3x^2-4x+1}$$

也可以 令$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{x^3-2x^2+x}{3x^2-4x-1}=\frac{x^2-x}{3x-1}$，则

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}=x_k-\frac{3x_k^2-4x_k+x}{3x_k^2-2x_k+1}$$

初始值取$x_0=2$，迭代结果如下表

k	0	1	2	3	4
x_k	2	0.888889	0.992248	0.999969	1.000000
x_k	2	1.2	1.015385	1.000116	1.000000

第4章 插值法

定理1 满足插值条件$P_n(x_i)=f(x_i)$的插值多项式
$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$是存在且唯一的。

定理2 设$x_0,x_1,\cdots x_n$是$[a,b]$上$n+1$互异节点，$\varphi_n(x)$是$f(x)$的过这组节点的n次插值多项式,若$f(x)\in C^{(n+1)}[a,b]$,则对任意的$x\in[a,b]$，有

$$R_n(x)=f(x)-\varphi_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\quad \xi\in(a,b)$$

其中$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$.

定义1 设$x_0, x_1, \cdots, x_n$为$n+1$个不同的节点，称

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}, j = 0, 1, \cdots, n$$

为Lagrange插值基函数.

$$p_n(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x)$$

为Lagrange插值多项式.

性质2 设$l_j(x)$为Lagrange基函数，$i = 0, 1, \cdots, n$，$m \le n$，则

(1). $\sum_{j=0}^{n} l_j(x) = 1$; (2). $\sum_{j=0}^{n} x_j^m l_j(x) = x^m$; (3). $\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^m l_j(x) = 0$,

5. 已知$f(-1)=2, f(1)=1, f(2)=1$，求$f(x)$的拉格朗日插值插值多项式。

解：$L(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}\cdot 2+\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)((1-2)}\cdot 1+\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)}\cdot 1$

$$=\frac{1}{3}(x-1)(x-2)-\frac{1}{2}(x+1)(x-2)+\frac{1}{3}(x+1)(x-1)$$

$$=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}$$

$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$：$x_i,x_j$处的一阶差商；

$f[x_i,x_j,x_k]=\frac{f[x_j,x_k]-f[x_i,x_j]}{x_k-x_i}$：$x_i,x_j,x_k$处的二阶差商；

$f[x_i,x_j,x_k,x_l]=\frac{f[x_j,x_k,x_l]-f[x_i,x_j,x_k]}{x_l-x_i}$：$x_i,x_j,x_k,x_l$处的三阶差商；

$$\begin{cases} f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\omega'_{n+1}(x_i)},\ \text{其中}\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n). \\ f[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n]=f[x_0,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n]. \\ f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\ \text{其中}\xi\text{介于}x_0,x_1,\cdots,x_n\text{之间}. \end{cases}$$

Newton插值多项式： $x_0, x_1, \cdots, x_n$为区间$[a,b]$上的不同点

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

定理1. 记$R_n(x)$为Newton插值多项式的余项，则

$$R_n(x) = f(x) - N_n(x) = f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

6.已知函数值$f(0)=6$，$f(1)=10$，$f(3)=46$，$f(4)=82$，$f(6)=212$，求函数的各阶差商，以及Newton插值多项式.

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	6				
1	10	4			
3	46	18	14/3		
4	82	36	6	1/3	
6	212	65	29/3	11/15	1/15

$$N(x)=6+4x+\frac{14}{3}x(x-3)+\frac{1}{3}x(x-1)(x-3)+\frac{1}{15}x(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$H(x_0)=y_0, H(x_1)=y_1, H'(x_0)=y_0', H'(x_1)=y_1'.$$

两点的Hermite三次插值的重节点Newton插值格式

$$H_3(x)=f(x_0)+f[x_0,x_0](x-x_0)+f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2$$

$$+f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1)$$

定理2. 设$f(x)\in C^4[a,b]$, $x,x_0,x_1\in[a,b]$，则存在$\xi\in[a,b]$，使得

$$R_n(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2.$$

7. 求一个次数小于等于三次多项式$p(x)$，满足如下插值条件：$p(1)=2$，$p(2)=4$，$p'(2)=3$，$p(3)=12$。

解（带重节点的差商法）：据插值条件，造差商表

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	2			
2	4	2		
2	4	3	1	
3	12	8	5	2

故 $p(x)=2+2(x-1)+(x-1)(x-2)+2(x-1)(x-2)^2$

$$=2x^3-9x^2+15x-6$$

定理1. 设$f \in C^2[a,b]$，$I_h(x)$为$[a,b]$上的分段线性插值函数，

则对$\forall x \in [a,b]$有：

$$|f(x) - I_h(x)| \le \frac{h^2}{8} M,$$

其中$h = \underset{0\le k\le n-1}{Max}\{x_{k+1} - x_k\}$, $M = \underset{x\in[a,b]}{Max}|f''(x)|$.

并且$h \to 0$时，$I_h(x) \rightrightarrows f(x)$.

证明：见教材P159.

定义1 设$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 函数$s(x) \in C^2[a, b]$, 且在每个$[x_i, x_{i+1}]$上为三次多项式。若它同时还满足

$$S(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \cdots, n,$$

则称$S(x)$为$f(x)$在$x_i, i = 0, 1, 2, \cdots, n$上的三次样条插值函数 .

8. 给定区间$[0,3]$上3个点的函数值$f(0)=0$，$f(1)=2$，$f(3)=4$, 试求数a,b,c,d， 使函数$S(x)$为给定点上的三次样条插值函数．其中

$$S(x)=\begin{cases}x^2+x+d, & 0\le x\le 1\\ ax^3+bx^2+cx+1, & 1<x\le 3\end{cases}.$$

解：$s(0)=d=0$,

$$s(1^+)=S(1^-)\Rightarrow 2+d=a+b+c+1$$

$s(3)=27a+9b+3c+1=4$,

$$S'(x)=\begin{cases}2x+1, & 0\le x\le 1\\ 3ax^2+2bx+c, & 1<x\le 3\end{cases},\quad s'_-(1)=s'_+(1)\Rightarrow 2+1=3a+2b+c$$

$$S''(x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1\\ 6ax+2b, & 1<x\le 3\end{cases},\quad s''_-(1)=s''_+(1)\Rightarrow 2=6a+2b$$

答案:$a=-1$, $b=4$, $c=-2$, $d=0$.

第5章 数据拟合和函数逼近

定义1. 设$(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$为一组已知数据，$\varphi(x)$为一个近似函数，称$\delta_i = y_i - \varphi(x_i)$为**数据残差**。

求逼近函数$\varphi(x)$的常用规则：

1. $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = min$ 最小二乘法、最佳平方逼近

最小二乘法：构造一个m次多项式$\varphi_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}，\text{解方程组} A^T A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = A^T y.$$

9. 已知函数$y = f(x)$的观测数据为：

x	1	2	3	4
$f(x)$	0	-5	-6	3

用最小二乘法求形如$y = a + bx + cx^2$的数据拟合。

解：建立方程$A^TAx = A^Ty$, 其中$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

即$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -16 \\ -26 \end{pmatrix}$ 解得$a = 13.5, b = -16.7, c = 3.5$

所以拟合曲线为：$y = 13.5 - 16.7x + 3.5x^2$.

幂函数系的正交化

只要给定区间$[a,b]$及权函数$\rho(x)$，幂函数系$\{x^k\}$经下面的正交化方法，总可化为正交多项式系$\{\varphi_k(x)\}$，**其中$\varphi_k(x)$是最高项系数为1的k次多项式**。

正交化法：
$$\begin{cases} \varphi_0(x) \equiv 1 \\ \varphi_{k+1}(x) = x^{k+1} - \sum_{j=0}^{k} \frac{(x^{k+1},\varphi_j)}{(\varphi_j,\varphi_j)} \varphi_j(x) \end{cases} \qquad (k=0,1,\dots)$$

其中$(x^{k+1},\varphi_j) = \int_a^b \rho(x) x^{k+1} \varphi_j(x) \mathrm{d}x$，$(\varphi_j,\varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j^2(x) \mathrm{d}x$

9. $\rho(x)=1$，构造$[0,1]$上正交多项式系 $\{\varphi_k(x)\}$，$k=0,1,2,3.$

解：取$\varphi_0(x)\equiv 1$，令$\varphi_1(x)=x-\frac{(x,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)=x$

$$令\varphi_2(x)=x^2-\frac{(x^2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\frac{(x^2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)=x^2-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}x$$

$(x^2,\varphi_0)=\int_0^1 1\cdot x^2\cdot 1dx=\frac{1}{3}$，　$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 1\cdot 1\cdot 1dx=1$，

$(x^2,\varphi_1)=\int_0^1 1\cdot x^2\cdot xdx=\frac{1}{4}$，　$(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 1\cdot x\cdot xdx=\frac{1}{3}$.

$$令\varphi_3(x)=x^3-\frac{(x^3,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\frac{(x^3,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)-\frac{(x^3,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\varphi_2(x)$$

$$=x^3-\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\cdot x+\frac{48}{109}(x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{3})$$

第6章　数值微分和数值积分

常用的插值型求导公式

1. 两点公式　$f'(x_0)=f'(x_1)\approx\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$.

误差：$|R'(x_k)|=|f'(x_k)-L_n'(x_k)|=\left|\frac{f^{(2)}(\xi_k)}{2!}\omega_2'(x_k)\right|=\frac{h}{2}|f''(\xi)|$

2. 三点公式　$f'(x_0)\approx\frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}$, $f'(x_1)\approx\frac{-f(x_0)+f(x_2)}{2h}$,

$f'(x_2)\approx\frac{f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)}{2h}$,　$f''(x_i)\approx\frac{f(x_0)-2f(x_1)+f(x_2)}{h^2}$,

误差：$|R'(x_k)|=|f'(x_k)-L_n'(x_k)|=o(h^2)$

10：设$f(x)=e^x$，取$h=0.01$，使用三点公式计算$f'(1.8)$的近似值。

解：由$f'(x_0)$式，令$x_0=1.8, x_1=1.81, x_2=1.82$

$$f'(1.8)\approx\frac{1}{2h}[-3f(1.8)+4f(1.81)-f(1.82)]=6.0494$$

由$f'(x_1)$式，令$x_0=1.79, x_1=1.8, x_2=1.81$

$$f'(1.8)\approx\frac{1}{2h}[f(1.81)-f(1.79)]=6.0497$$

由$f'(x_2)$式，令$x_0=1.78, x_1=1.79, x_2=1.8$

$$f'(1.8)\approx\frac{1}{2h}[f(1.78)-4f(1.79)+3f(1.8)]=6.0494$$

插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = I_n$$

其中 $A_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{j=0,j\neq k}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}\mathrm{d}x$

插值型求积公式的截断误差为：设$f \in C^{(n+1)}[a,b]$，则

$$R_n[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\mathrm{d}x$$

定理 当n为奇数时，插值型求积公式至少有n 次代数精度；

当n为偶数时，插值型求积公式至少有$n+1$次代数精度.

梯形公式 $I_1 = \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$

辛普森(Simpson)公式 $I_2 = \frac{(b-a)}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

Cotes公式 $I_4 = \frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$

复化梯形公式 $$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

截断误差: $R_T[f] = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$

复化辛普森公式 $$S_n = \frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})+2\sum_{k=0}^{n-2} f(x_{2k+2})+f(b)\right]$$

截断误差：$R_S[f] = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)$

11. 用复化梯形和复化辛普森公式及下表计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

解 将积分区间[0,1]划分为8等份，复化梯形

$$T_8=\frac{1/8}{2}\left[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{7}f\left(\frac{k}{8}\right)\right]=0.945609$$

将区间[0,1]划分为4等份，复化辛普森法

$$S_4=\frac{1/4}{6}\left[f(0)+4\sum_{k=0}^{3}f\left(\frac{2k+1}{8}\right)+2\sum_{k=1}^{3}f\left(\frac{k}{4}\right)+f(1)\right]$$

$$=0.9460832$$

真实值$I=0.9460831$

x	$f(x)$
0	1
1/8	0.9973978
1/4	0.9896158
3/8	0.9767267
1/2	0.9588510
5/8	0.9361556
3/4	0.9088516
7/8	0.8771925
1	0.8414709

12. 用龙贝格方法计算积分$\int_1^2 e^{1/x}\mathrm{d}x$的近似值。

解：计算如下表

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}} = \frac{4}{3}T_{2^k} - \frac{1}{3}T_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}} = \frac{16}{15}S_{2^{k-1}} - \frac{1}{15}S_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}} = \frac{64}{63}C_{2^{k-2}} - \frac{1}{63}C_{2^{k-3}}$
0	2.183501550			
1	2.065617795	2.026323210		
2	2.031892868	2.020651226	2.020273094	
3	2.023049868	2.020102201	2.020065599	2.020062306
4	2.020808583	2.020058773	2.020058773	2.020058665

定义1. 称代数精度达到$2n+1$次的求积公式为**Gauss求积公式**，称积分节点$x_k, k=0,1,2,\cdots,n$为**Gauss点**。

高斯求积公式中Gauss点x_k和求积系数A_k的求法

方法一　建立非线性方程组求解.

令 $\int_a^b x^m dx = \sum_{k=0}^{n} A_k (x_k)^m, m=0,1,\cdots,2n+1$

方法二　Gauss积分法.

1. 根据带权求幂函数的正交多项式系的方法，求得$\varphi_{n+1}(x)$

令$\varphi_{n+1}(x)=0$，得根$x_0,x_1,\cdots,x_n$，即Gauss点。

根据插值求积公式中求积系数的求法，可得

$A_k=\int_a^b\rho(x)l_k^2(x)\mathrm{d}x\,,k=0,1,2,\cdots,n$，其中$l_k(x)=\prod\limits_{j=0,j\neq k}^{n}\dfrac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}$.

或令 $\int_a^b x^m dx=\sum\limits_{k=0}^{n}A_k(x_k)^m, m=0,1,\cdots,n$，建立方程组求解$A_k$.

Gauss型求积公式的误差

$f(x)\in C^{(2n+2)}[a,b]$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$R(f)=\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b\rho(x)\omega_{n+1}^2(x)\mathrm{d}x$$

13. 求高斯求积公式$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$的Gauss点.

解 区间$[-1,1]$上带权$\rho(x) = x^2$ 的正交多项式组为

$$g_0(x) = 1,\quad g_1(x) = x,\quad g_2(x) = x^2 - \frac{3}{5},\quad g_3(x) = x^3 - \frac{5}{7}x.$$

令$g_3(x) = 0$，得 $x_0 = -\frac{\sqrt{35}}{7},\quad x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{\sqrt{35}}{7}.$

$$A_0 = \int_{-1}^{1} x^2 \left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{7}{25},\quad A_1 = \int_{-1}^{1} x^2 \left(\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{75},$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} x^2 \left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{7}{25},$$

故$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{7}{25} f\left(-\frac{\sqrt{35}}{7}\right) + \frac{8}{75} f(0) + \frac{7}{25} f\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right).$

13. 求高斯求积公式$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$的Gauss点.

解 区间$[-1,1]$上带权$\rho(x) = x^2$的正交多项式组为

$$g_0(x) = 1,\quad g_1(x) = x,\quad g_2(x) = x^2 - \frac{3}{5},\quad g_3(x) = x^3 - \frac{5}{7}x.$$

令$g_3(x) = 0$，得$x_0 = -\frac{\sqrt{35}}{7},\quad x_1 = 0,\quad x_2 = \frac{\sqrt{35}}{7}$.

进而$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f\left(-\frac{\sqrt{35}}{7}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right)$.

令$f(x) = 1, x, x^2$，则有

$$\frac{2}{3} = A_0 + A_1 + A_2,$$

$$0 = A_0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{35}}{7}\right) + A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot \frac{\sqrt{35}}{7}$$

$$\frac{2}{5} = A_0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2 + A_1 \cdot 0^2 + A_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right)^2$$

解得$A_0 = \frac{7}{28}, A_1 = \frac{8}{75}, A_2 = \frac{7}{25}$.

第7章 常微分方程的数值解

- **欧拉公式** $y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y_n), n = 0, 1, \cdots, N-1.$

- **改进欧拉公式**

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]\ (n = 0, \ \ldots\ , N-1)}$$

$$\text{或}\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n), \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1. \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c). \end{cases}$$

定义1 先假设$y(x_k)=y_k$, 再估计误差

$$R_{k+1,h}=y(x_{k+1})-[y(x_k)+h\varphi(x_k,y(x_k),h)]$$

这种误差称为**单步迭代法**在x_{k+1}的**局部截断误差**.

定义2 误差 $e_{k+1,h}=y(x_{k+1})-[y(x_k)+h\varphi(x_k,y_k,h)]$

这种误差称为**单步迭代法**在x_{k+1}的**整体截断误差**.

注：整体截断误差$=O\left(h^{-1}\right)\times$局部截断误差。

定义3 若某种数值方法的**局部截断误差**为$O(h^{p+1})$，则称该数值方法的精度为P阶的.

1^0. Euler方法是一阶方法.

记精确值$y(x_{n+1})$的近似值为y_{n+1}，数值解$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$,

$$\boxed{y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n), \quad x_n < \xi_n < x_{n+1},}$$

Taylor展开

因为$y'(x_n) = f(x_n, y_n)$,

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow R_{n,h} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2}y''(\xi_n) = O(h^2)$$

14. 利用欧拉公式和改进欧拉公式求初值问题$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y}, 0 < x < 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$在$x = 0.2$处的函数$y(0.2)$, 步长为$h = 0.2$。

解：欧拉公式：$y_{n+1} = y_n + h\left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right)$： $y(0.2) = 1 + 0.2\left(1 - \dfrac{2*0}{1}\right) = 1.2$

改进的欧拉公式：$\begin{cases} y_p = y_n + h\left(y_n - \dfrac{2x_n}{y_n}\right) \\ y_c = y_n + h\left(y_p - \dfrac{2x_{n+1}}{y_p}\right) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$

$y(0.2)_p = 1 + 0.2\left(1 - \dfrac{2*0}{1}\right) = 1.2$, $y(0.2)_c = 1 + 0.2\left(1.2 - \dfrac{2*0.2}{1.2}\right) = 1.1733$

$$y(0.2) = \frac{1}{2}(1.2 + 1.1733) = 1.1866$$

1. 二阶$R-K$公式—中心点公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}K_0\right) \\ K_0 = f(x_n, y_n) \end{cases}$$

2. 三阶$R-K$公式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_0 + 4K_1 + K_2) \\ K_0 = f(x_n, y_n) \\ K_1 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_0\right) \\ K_2 = f(x_n + h, y_n - hK_0 + 2hK_1) \end{cases}$$

初值问题$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ 数值解$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

其中$\varphi(x,y,h)$称为**增量函数**。

欧拉公式：$\varphi(x_n, y_n, h) = f(x_n, y_n)$

增量函数$\varphi(x,y,h) = f(x,y)$。

改进的欧拉公式：

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \frac{1}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\big(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\right]$$

增量函数$\varphi(x,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(x,y) + f\big(x + h, y + hf(x,y)\big)\right]$