合肥工业大学研究生考试试卷

课程名称 数值分析 考试日期 2019. 01.16 学院 全校 2018 级研究生 姓名____ 年级____ 班级____ 学号____ 得分____

装

订

线

一、计算题 (每小题 5 分，满分共 30 分)

1. 已知近似值 x^* 的相对误差限是 0.03%，问 x^* 至少有几位有效数字？

2. 设 $\boldsymbol{x}=(2,1,-3,4)^{\mathrm{T}}$，求 $\|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_2, \|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

3. 证明：$\sum_{j=0}^{n} 2x_j^k l_j(x) \equiv 2x^k$， $k=0,1,\cdots,n$，其中 $l_j(x)$ $(j=0,1,\cdots,n)$ 为 Lagrange 插值基函数。

4. 设 $S(x)=\begin{cases} S_0(x), & -1\le x<0; \\ S_1(x), & 0\le x\le 1 \end{cases}$ 是函数 $f(x)$ 在区间[-1, 1]上满足第一类边界条件的三次样条，问 $S(x)$ 在结点 $x=0$ 处的连续性条件是什么？并求 $f'(-1)$、$f'(1)$.

5. 设函数 $f(1.39)=5.4706,\ f(1.40)=5.7978,\ f(1.41)=6.1653$，用三点数值微分公式计算 $f'(1.40)$ 的近似值。 答案：34.735.

6. 设 $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$. 已知 $f(1)+f(2)=4$，用 $n=3$（即将积分区间 [0, 3] 分成 3 段）的复化梯形求积公式计算 I 的结果与用 Simpson 求积公式计算 I 的结果相同，求 $f(1.5)$.

二、(本题满分 10 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} -4x_1+x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+5x_2-x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-1. \end{cases}$$

(1) 分别写出求解上述方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss–Seidel 迭代格式的迭代矩阵 B_J 和 B_G .

(2) 计算范数 $\|B_J\|_1$ 和 $\|B_G\|_1$，判断求解上述方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss–Seidel 迭代格式是否收敛？

三、(本题满分 10 分) 用下列表中的数据求次数不超过 3 次的插值多项式 $p_3(x)$，使之满足 $p_3(x_i) = f(x_i)$， $i = 0,1,2$， $p_3'(x_1) = f'(x_1)$.（要求写出差商表）

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	2	3	7
$f'(x_i)$		2	

四、(本题满分 10 分) 求拟合下列表中数据的线性最小二乘多项式 $p_1(x)$，取权 $\rho_i = 1$，$i = 0,1,2,3,4$，并计算总误差 Q .

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.3	2.5	3.9	5.1	6.4

五、(本题满分 10 分) 试确定 x_0, x_1, A_0, A_1，使数值求积公式

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

为 Gauss 型数值求积公式。

六、(本题满分 10 分) 设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的单根，由 Newton 迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad (k=0,1,2,\cdots)$$

产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*. 证明：$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{x_k-x_{k-1}}{(x_{k-1}-x_{k-2})^2}=-\dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

七、(本题满分 10 分) (1) 写出改进的 Euler 格式。 (2) 证明改进的 Euler 方法是收敛的。

八、（本题满分 10 分） 设 $f(x)=p_n(x)$ 是 n 次多项式，$k\le n$，证明：

$$f[x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{k-1},\ x]=q_{n-k}(x),$$

其中 $q_{n-k}(x)$ 是 $n-k$ 次多项式。