合肥工业大学研究生考试试卷

课程名称 ______数值分析______考试日期__2016年1月13日__学院 __全校2015级研究生___姓名__________年级 _________班级 _________学号 _______________得分__________

装

订

线

一、填空题 (每空2分，共20分)

1. 设 $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -4 & 8\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty =$ __12__，$\mathrm{Cond}(A)_1 =$ __39__.

2. 函数 $f(x)=(-2x+5)^4$ 的差商 $f[1,2,3,4,5]=$ __16____.

3. 设 $x_i\ (i=0,1,2,3)$ 是互异的点，$l_i(x)\ (i=0,1,2,3)$ 是 Lagrange 插值基函数，则

$$\sum_{i=0}^{3} x_i(x_i-1)^2 l_i(x) = \underline{x(x-1)^2.}$$

4. 设函数 $f(x)=\cos 2x$，$p_3(x)$ 是以 $-1, 0, 1, 2$ 为节点的 $f(x)$ 的 3 次 Lagrange 插值多项式，则余项 $f(x)-p_3(x)=\underline{\dfrac{2\cos 2\xi}{3}(x+1)x(x-1)(x-2).}$

5. 设函数 $f(1.39)=5.4706,\ \ f(1.40)=5.7978,\ \ f(1.41)=6.1653$，用三点数值微分公式计算 $f'(1.40)$ 的近似值是__34.735__，用三点数值微分公式计算 $f''(1.40)$ 的近似值是 _403___.

6. 设 $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$. 已知 $f(0)+f(2)=4$，用 $n=2$（即将积分区间 $[0,2]$ 分成 2 段）的复化梯形求积公式计算 I 的结果与用 Simpson 求积公式计算 I 的结果相同，则 $f(1)=$ __2__.

7. 求解初值问题 $y'=f(t,y),\ \ y(0)=1\ \ (a\le t\le b)$ 的改进的 Euler 方法的增量函数

$$\varphi(t,y,h)=\underline{\frac{1}{2}\left[f(t,y)+f(t+h,y+hf(t,y))\right]}$$

8. 解常微分方程初值问题的三阶 Runge-Kutta 方法的局部截断误差是 $\underline{O(h^4)}$，其中 h 是步长。

二、(本题满分 12 分) (1) 对下列方程组建立收敛的 Gauss-Seidel 迭代格式，并说明理由。

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+10x_3=15,\\ -10x_1-4x_2+x_3=5,\\ 2x_1+10x_2-7x_3=8.\end{cases}$$

(2) 要达到精度 $\varepsilon=10^{-5}$，试估计上述所建立的收敛的 Gauss-Seidel 迭代格式需要的迭代步数：取初值 $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},x_3^{(0)})^{\mathrm T}=(0,\ 0,\ 0)^{\mathrm T}$. (**注：**向量范数都用 l_∞ 范数)

解 (1) 调整上述方程组的次序，得

$$\begin{cases}-10x_1-4x_2+x_3=5,\\ 2x_1+10x_2-7x_3=8,\\ 3x_1+2x_2+10x_3=15.\end{cases}\qquad (*)$$

据此建立 Gauss–Seidel 迭代公式

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{1}{10}\left(-4x_2^{(k)}+x_3^{(k)}-5\right),\\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{10}\left(-2x_1^{(k+1)}+7x_3^{(k)}+8\right),\\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{10}\left(-3x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}+15\right).\end{cases}$$

因为调整后的方程组的系数矩阵是严格对角占优的，所以据此建立的 Gauss–Seidel 迭代公式所产生的序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 都收敛。

(2) 因为方程组(*)的系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-10 & -4 & 1\\ 2 & 10 & -7\\ 3 & 2 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10&0&0\\0&10&0\\0&0&10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-4&1\\0&0&-7\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{U},$$

所以求解上述方程组的 Jacobi 迭代格式的迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_G=-(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}0&-2/5&1/10\\0&2/25&17/25\\0&13/125&-83/500\end{bmatrix}.$$

$$q=\|\boldsymbol{B}_G\|_\infty=\max\{|0|+|-2/5|+|1/10|,\ |0|+|2/25|+|17/25|,\ |0|+|13/125|+|-83/500|\}=19/25=0.76$$

用 Gauss-Seidel 迭代法迭代一次得： $\boldsymbol{x}^{(1)}=(-0.5,\ 0.9,\ 1.47)^{\mathrm{T}}$，

$$\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty=\max\{|-0.5-0|,\ |0.9-0|,\ |1.47-0|\}=1.47$$

$$k>\ln\frac{\varepsilon(1-q)}{\|\boldsymbol{x}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(0)}\|}\Big/\ln q=\ln\frac{10^{-5}(1-19/25)}{1.47}\Big/\ln\frac{19}{25}\approx 48.56$$

故需要迭代 49 次。

三、(本题满分 12 分) 用下列表中的数据求次数不超过 3 次的插值多项式 $p_3(x)$，使之满足 $p_3(x_i)=f(x_i)$，$i=0,1,2$，和 $p_3'(x_1)=f'(x_1)$．（要求写出差商表）

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	2	3	7
$f'(x_i)$		2	

解 根据表中的数据建立差商表

$x_0=0$ $\quad f(x_0)=2$

$x_1=1$ $\quad f(x_1)=3$ $\quad f[x_0,x_1]=1$

$x_1=1$ $\quad f(x_1)=3$ $\quad f[x_1,x_1]=2$ $\quad f[x_0,x_1,x_1]=1$

$x_2=2$ $\quad f(x_2)=7$ $\quad f[x_1,x_2]=4$ $\quad f[x_1,x_1,x_2]=2$ $\quad f[x_0,x_1,x_1,x_2]=0.5$

则所求插值多项式为

$$\begin{aligned}p(x)&=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_1](x-x_0)(x-x_1)+f[x_0,x_1,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)^2\\&=2+x+x(x-1)+0.5x(x-1)^2\\&=2+0.5x+0.5x^3.\end{aligned}$$

四、(本题满分 10 分) 求拟合下列表中数据的线性最小二乘多项式 $p(x)$，取权 $\rho_i=1$，$i=0,1,2,3,4$，并计算总误差 Q．

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
y_i	1.409	1.507	1.738	1.845	2.011

解 根据题意，得

$$m=3,\quad n=1,\quad \varphi_0(x)=1,\quad \varphi_1(x)=x,\quad \rho_i\equiv 1\ (i=0,1,2,3)$$

$$x_0=1,\quad x_1=2,\quad x_2=3,\quad x_3=4;\quad x_4=5;$$
$$y_0=1.409,\quad y_1=1.507,\quad y_2=1.738,\quad y_3=1.845,\quad y_4=2.011.$$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}1\times 1=5,\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}1\times x_i=15,\quad (\varphi_0,f)=\sum_{i=0}^{4}1\times y_i=8.51,$$
$$(\varphi_1,\varphi_0)=\sum_{i=0}^{4}x_i\times 1=15,\quad (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=0}^{4}x_i\times x_i=55,\quad (\varphi_1,f)=\sum_{i=0}^{4}x_i\times y_i=27.072.$$

得法方程组

$$\begin{bmatrix}5&15\\15&55\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0\\c_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.51\\27.072\end{bmatrix}.$$

解得 $c_0=1.2394,\quad c_1=0.1542.$ 于是，所求多项式为

$$p_1(x)=1.2394+0.1542x.$$

总误差为

$$Q=\sum_{i=0}^{m}[y_i-p_1(x_i)]^2=\sum_{i=0}^{4}[y_i-(1.2394+0.1542x_i)]^2=0.0033236.$$

五、(本题满分 12 分) (1) 确定 x_1, x_2, A_1, A_2，使下列求积公式为 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

(2) 用(1)中所得的求积公式计算 $I=\int_{-1}^{1} e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$ 的近似值（保留 4 位小数）。

解 (1) 因为两点 Gauss 型求积公式具有 3 次代数精度，所以上述求积公式若是 Gauss 型求积公式，则当 $f(x)=1,\ x,\ x^2,\ x^3$ 时，上述求积公式应准确成立，由此得：

$$\begin{cases} 2 = A_1 + A_2, \\ 0 = A_1x_1 + A_2x_2, \\ 2/3 = A_1x_1^2 + A_2x_2^2, \\ 0 = A_1x_1^3 + A_2x_2^3, \end{cases} \qquad \text{解得} \qquad \begin{cases} x_1 = -1/\sqrt{3}, \\ x_2 = 1/\sqrt{3}, \\ A_1 = 1, \\ A_2 = 1. \end{cases}$$

故所求两点 Gauss 型求积公式为 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(2) 因为 $f(x)=e^{2x}\sin 3x$，所以用上述两点 Gauss 公式计算 $I=\int_{-1}^{1} e^{2x}\sin 3x\,\mathrm{d}x$ 的近似值为：

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 2.82084.$$

六、(本题满分 12 分) (1) 设 $f \in C^2[a,b]$， x^* 是方程 $f(x)=0$ 的 m 重根 $(m \ge 2)$。写出求 x^* 的改进的 Newton 迭代格式；并证明求 x^* 的改进的 Newton 迭代法至少是平方收敛的。

(2) 用弦截法求方程 $x(x+1)^2-1=0$ 在 0.4 附近的实根 x^* 的近似值 x_3.（取初值 $x_0=0.4,\ x_1=0.45$.）

(1) **证明**

(2) **解** 弦截法格式为

$$x_k = x_{k-1} - \frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{f(x_{k-1})-f(x_{k-2})} f(x_{k-1})$$

$$= x_{k-1} - \frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{\left[x_{k-1}(x_{k-1}+1)^2-1\right]-\left[x_{k-2}(x_{k-2}+1)^2-1\right]}\left[x_{k-1}(x_{k-1}+1)^2-1\right], \quad k=2,3,\cdots.$$

取初值 $x_0=0.4,\ x_1=0.45$，代入上式计算得： $x_2=0.466615,\quad x_3=0.465555$.

七、(本题满分 12 分) (1) 证明 Euler 方法是 1 阶方法；并解释在研究微分方程数值解法的误差时，为什么可以用局部截断误差代替整体截断误差。

(2) 用改进的 Euler 方法求解下列初值问题，取步长 $h=0.5$.

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t)\big(1+t\,y(t)\big), \quad 0 \le t \le 1, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

(1) **证明** 设 $y_n = y(t_n)$，则 $y'(t_n) = f(x_n, y(t_n))$. 将 $y(t_{n+1})$ 在 t_n 处作 Taylor 展开

$$y(t_{n+1}) = y(t_n+h) = y(t_n) + h\cdot y'(t_n) + \frac{h^2}{2!}y''(\xi), \quad t_n < \xi < t_{n+1}$$

由 Euler 方法得

$$y_{n+1} = y_n + h\cdot f(t_n, y_n) = y(t_n) + h\cdot f(t_n, y(t_n)) = y(t_n) + h\cdot y'(t_n).$$

上面两式相减得

$$y(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2}y''(\xi) = O(h^2),$$

于是 $p+1=2 \ \Rightarrow\ p=1$，即 Euler 方法具有 1 阶精度。

(2) **解** 记

$$f(t,y) = -y\big(1+t\,y\big), \quad y_0=1, \quad t_0=0, \quad h=0.5,$$

则 $t_1=0.5,\ t_2=1$，且改进的 Euler 格式为

$$\begin{cases}\overline{y}_{n+1} = y_n + h\cdot f(t_n, y_n),\\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \overline{y}_{n+1})\right],\\ y_0 = 1,\end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y_p = y_n + h\cdot f(t_n, y_n),\\ y_c = y_n + h\cdot f(t_{n+1}, y_p),\\ y_{i+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c),\\ y_0 = 1.\end{cases}$$

于是

$$\begin{cases}\overline{y}_1 = y_0 + h\times f(t_0, y_0) = 1 - 0.5\times 1\times(1+0\times 1) = 0.5,\\ y_1 = y_0 + \dfrac{h}{2}\times[f(t_0, y_0) + f(t_1, \overline{y}_1)] = 1 - \dfrac{0.5}{2}\times[1\times(1+0\times 1) + 0.5\times(1+0.5\times 0.5)] \approx 0.59375,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{y}_2 = y_1 + h\times f(t_1, y_1) \approx 0.59375 - 0.5\times 0.59375\times\left(1+0.5\times 0.59375\right) \approx 0.20874,\\ y_2 = y_1 + \dfrac{h}{2}\times[f(t_1, y_1) + f(t_2, \overline{y}_2)]\\ \quad = 0.59375 - \dfrac{0.5}{2}\times\left[0.59375\times\left(1+0.5\times 0.59375\right) + 0.20874\times\left(1+1\times 0.20874\right)\right] \approx 0.338167.\end{cases}$$

八、(本题满分 10 分) 设 $S(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上满足第一类边界条件的三次样条：

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2x^3 - 3x + 4, & 0 \le x < 1,\\ S_1(x) = (x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + 3, & 1 \le x \le 2.\end{cases}$$

求 $f'(0),\ f'(2)$.

解 因为 $S(x)$ 是 $[0, 2]$ 上的三次样条，所以有

$$\begin{cases} S_0'(1-0) = S_1'(1+0),\\ S_0''(1-0) = S_1''(1+0),\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 3 = c,\\ 12 = 2b.\end{cases}$$

解得 $c = 3,\ b = 6$；代入 $S(x)$，得

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2x^3 - 3x + 4, & 0 \le x < 1,\\ S_1(x) = (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 3(x-1) + 3, & 1 \le x \le 2.\end{cases}$$

因为 $S(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上满足第一类边界条件的三次样条，所以

$$f'(0) = S'(0) = S_0'(0) = 4 \quad \text{和} \quad f'(2) = S'(2) = S_1'(2) = 13.$$