第四章

插值法(1 – 2)—Lagrange插值

第1节 引言

已经测得在某处海洋不同深度处的水温如下：

深度(m)	466	741	950	1422	1634
水温(°C)	7.04	4.28	3.40	2.54	2.13

根据这些数据，希望合理地估计出其它深度（如500米，600米，1000米，...）处的水温？

这就是本章要讨论的“插值问题”。

插值也就是对函数的离散数据建立简单的数学模型。

➢ 1.1 插值法的定义

定义1 当精确函数$y=f(x)$非常复杂或未知时，在区间$[a,b]$上一系列互异节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$处测得函数值$y_0=f(x_0),\cdots,y_n=f(x_n)$，由此构造一个简单易算的近似函数$g(x)\approx f(x)$，满足条件

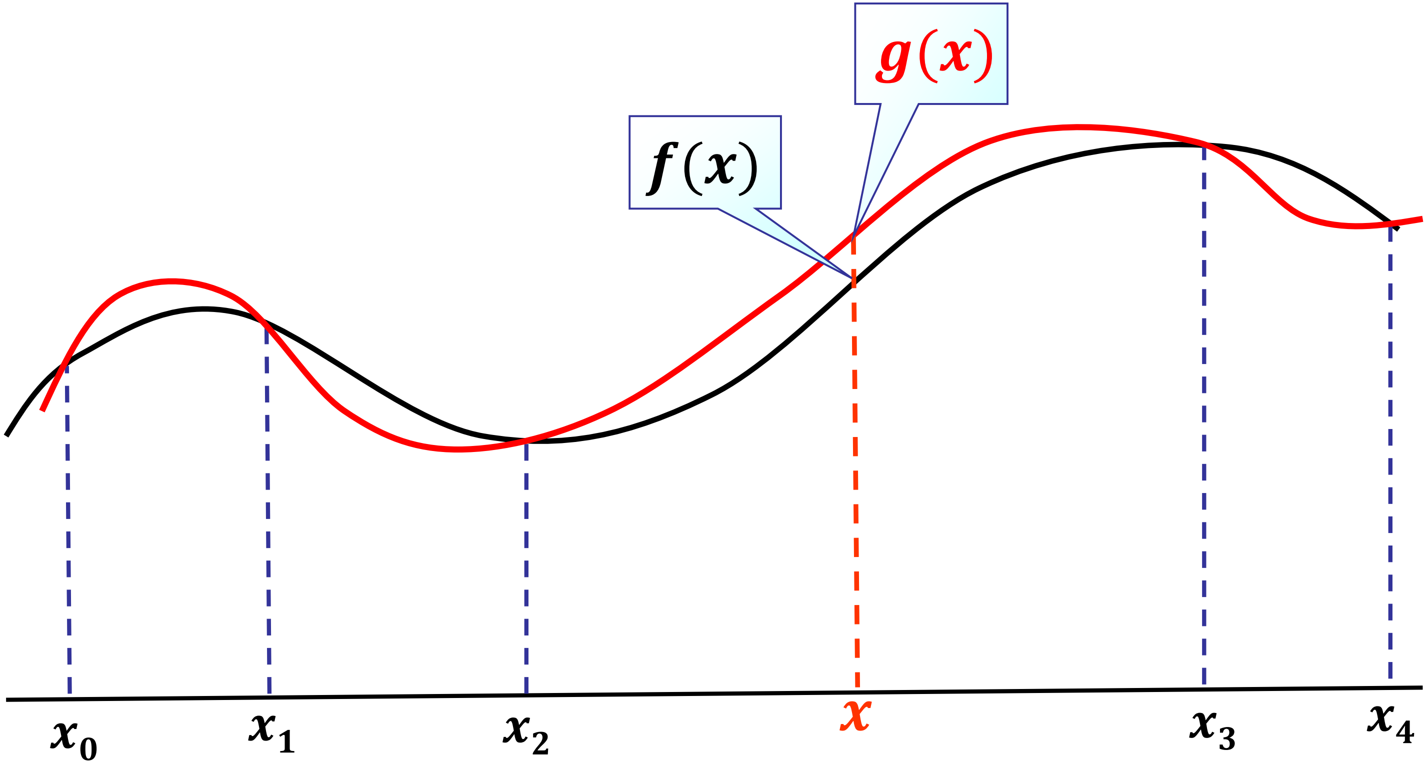
$$g(x_i)=f(x_i), i=1,2,\cdots,n \qquad (*)$$

这个问题称为“插值问题”

$g(x)$ 称为$f(x)$的插值函数。

点$x_0,x_1,\cdots,x_n$称为插值节点，$f(x)$称为被插函数，

条件$(*)$称为插值条件，区间$[a,b]$称为插值区间.


$g(x)$
$f(x)$
x_0
x_1
x_2
x
x_3
x_4

插值函数的类型有很多种

最常用的插值函数是**代数多项式**

本章主要讨论的内容

用代数多项式作插值函数的插值称为**代数插值**

插值法

插值问题 → 插值函数

代数插值

- 一、插值问题解的存在唯一性？
- 二、插值多项式的常用构造方法？
- 三、插值函数的误差如何估计？

➢ 1.2 多项式插值解的存在性和惟一性

给定区间$[a,b]$上互异的$n+1$个点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$的一 组函数值$f(x_i), i=0,1,\cdots,n$，求一个次数不超过n的多项式$p_n(x)\in P_n$，使得

$$P_n(x_i)=f(x_i)\ ,\ i=0,1,2,\cdots,n \qquad (1)$$

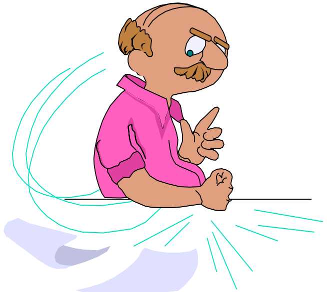
令$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \qquad (2)$

只要证明$P_n(x)$的系数$a_0,a_1,\cdots,a_n$存在，且唯一即可。

定理1 满足插值条件(1)的插值多项式(2)是存在且唯一的。

证：由插值条件(1)知$P_n(x)$的系数满足下列$n+1$个代数方程构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \cdots\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$



$a_0, a_1, \cdots, a_n$的系数行列式是Vandermonde行列式, 且

$$V(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

所以方程组的解$a_0, a_1, \cdots, a_n$存在且唯一。

注：通过解上述方程组求得插值多项式$P_n(x)$的方法并不可取．这是因为当n较大时解方程组的计算量较大，而且方程组系数矩阵的条件数一般较大(可能是病态方程组)，当阶数n越高时，病态越重．

为此我们必须从其它途径来求$P_n(x)$：

1. Lagrange插值
2. Newton插值
3. Hermite插值
4. 分段多项式插值
5. 三次样条插值

➢ 1.3 多项式插值的误差估计

定理2 设$x_0, x_1, \cdots x_n$是$[a,b]$上$n+1$互异节点，$\varphi_n(x)$是$f(x)$的过这组节点的n次插值多项式,若$f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$,则对任意的$x \in [a,b]$，有

$$R_n(x) = f(x) - \varphi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \quad \xi \in (a,b)$$

其中$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$.

第2节 Lagrange插值

➢ 2.1 Lagrange 基函数

定义1 设$x_0, x_1, \cdots, x_n$为$n+1$个不同的节点，称

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_j-x_i}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

为Lagrange插值基函数.

性质1. $l_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} j = 0, 1, \cdots, n.$

2.2 Lagrange插值多项式

定理1 设$x_0, x_1, \cdots, x_n$为$n+1$个不同的节点，$f(x)$在节点处的函数值为$f(x_i)=y_i, i=0,1,\cdots,n$，则多项式

$$\boxed{p_n(x)=f(x_0)l_0(x)+f(x_1)l_1(x)+\cdots+f(x_n)l_n(x)}$$

满足$p_n(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n.$

Lagrange插值多项式

证明：因为$l_j(x_i)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} j=0,1,\cdots,n$，所以

$$p_n(x_i)=f(x_0)l_0(x_i)+\cdots+f(x_i)l_i(x_i)+\cdots+f(x_n)l_n(x_i)$$

$$=f(x_0)\cdot 0+\cdots+f(x_i)\cdot 1+\cdots+f(x_n)\cdot 0=f(x_i).$$

➢ 2.3 Lagrange插值多项式的误差分析

余项：$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$，$\xi \in (a,b)$

其中$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

注1：若$f(x)$为n次多项式，则$f(x) = p_n(x)$.

性质2 设$l_j(x)$为Lagrange基函数，$i = 0,1,\cdots,n$，则

(1). $\sum_{j=0}^{n} l_j(x) = 1$;　　$f(x) = 1$

(2). $\sum_{j=0}^{n} x_j^m l_j(x) = x^m$;　　$f(x) = x^m$

(3). $\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^m l_j(x) = 0$，其中$m = 0,1,\cdots,n$.　　$f(x) = (x-t)^m, t = x.$

例1：$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\frac{\pi}{2}=1$,求$\sin x$的Lagrange插值多项式，并求$\sin(50^o)$及误差。

解：$l_0(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})}=-\frac{9(4x-\pi)(3x-\pi)\ (2x-\pi)}{\pi^3}$ $\quad l_1(x)=\frac{16(6x-\pi)(3x-\pi)(2x-\pi)}{\pi^3}$

$$l_2(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2})}=-\frac{9(6x-\pi)(4x-\pi)(2x-\pi)}{\pi^3}\qquad l_3(x)=\frac{(6x-\pi)(4x-\pi)(3x-\pi)}{\pi^3}$$

$$\sin x\approx p_n(x)=\frac{1}{2}l_0(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}l_1(x)+\frac{\sqrt{3}}{2}l_2(x)+1\cdot l_3(x)$$

$$=-0.0913x^3-0.1365x^2+1.0886x-0.0195$$

$\sin 50^o\approx 0.7659$ $\quad$ /* 真实值$\sin 50^o=0.7660$*/

$$|R_n(x)|=\frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\left(\frac{50\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{50\pi}{180}-\frac{\pi}{4}\right)\left|\frac{50\pi}{180}-\frac{\pi}{3}\right|\left|\frac{50\pi}{180}-\frac{\pi}{2}\right|\le 0.4987\times 10^{-5}.$$