合肥工业大学 2009 级硕士研究生《数值分析》试卷(A)

班级______________姓名___________ 学号__________________成绩_______

一、判断题（下列各题，你认为正确的，请在题后的括号内打“✓”，错误的打“×”，每题 2 分，共 10 分）

1. 若 $f(x)=x^5-2x^3+3$，则 $f[0,1,2,3,4,5]=5!$. ( )

2. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 是插值型求积公式，则它的代数精度正好是 n. ( )

3. 若 n 阶方阵 A 是严格对角占优的，则解方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的 Jacobi 迭代法收敛。 ( )

4. 设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的根，则求 x^* 的 Newton 迭代法至少是平方收敛的。 ( )

5. 解常微分方程初值问题的二阶 Runge-Kutta 方法的局部截断误差是 $O(h^3)$，其中 h 是步长. ( )

二、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 近似数 $x^*=3.120$ 关于准确值 $x=3.12065$ 有_______位有效数字，相对误差是________.

2. 设 $x_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 是互异的节点，$l_i(x)$ 是 Lagrange 插值基函数，则

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=\_\_\_\_\_\_,\quad \sum_{i=0}^{n} x_i^k l_i(x)=\_\_\_\_\_\_\quad (k=0,1,\cdots,n).$$

3. 设函数 $f(2.6)=13.4673,\ f(2.7)=14.8797,\ f(2.8)=16.4446$，用三点数值微分公式计算 $f'(2.7)=$______________，$f''(2.7)=$_______________.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 4 & -3\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=$_____，$\|A\|_\infty=$______，$\mathrm{Cond}(A)_1=$______.

5. 设二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件是指：

____.

三（本题满分 10 分） 已知列表函数

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0	-5	-6	3

用差商法求满足上述插值条件的 Newton 插值多项式（要求写出差商表）。

四（本题满分 10 分） 求 c_0, c_1 和 x_1，使下列求积公式

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx c_0 f(0) + c_1 f(x_1)$$

具有尽可能高的代数精度。

五（本题满分 10 分） 对于下列方程组

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 3, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \end{cases}$$

建立 Gauss–Seidel 迭代公式，写出相应的迭代矩阵，并用迭代矩阵的范数判断所建立的 Gauss–Seidel 迭代公式是否收敛。

六（本题满分 10 分） 分别用两点古典 Gauss 公式及 Simpson 公式计算 $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值。

七（本题满分 10 分） 已知方程 $xe^x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 0.5$ 附近有一个实根 x^*.

(1) 取初值 $x_0 = 0.5$，用 Newton 迭代法求 x^*（只迭代两次）。

(2) 取初值 $x_0 = 0.5,\ x_1 = 0.6$，用弦截法求 x^*（只迭代两次）。

八（本题满分 10 分） 分别用 Euler 方法及改进的 Euler 方法求下列初值问题（取步长 $h = 0.5$）

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y - \dfrac{2x}{y}, \quad 0 < x \le 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

九（本题满分 10 分） 设 $s(x)$ 是 $[0,2]$ 上的三次自然样条：

$$s(x)=\begin{cases} s_0(x)=2x^3-3x+4, & 0\le x<1, \\ s_1(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+3, & 1\le x\le 2. \end{cases}$$

求 a,b,c.

合肥工业大学 2010 级硕士研究生《数值分析》试卷(A)

班级______________姓名___________ 学号__________________成绩_______

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 近似数 $x^*=2.315$ 关于准确值 $x=2.31565$ 有_______位有效数字，相对误差是________.

2. 若 $f(x)=x^7-2x^3+3$，则 $f[3^0,3^1,\cdots,3^7]=$______， $f[3^0,3^1,\cdots,3^8]=$_____.

3. 设函数 $f(0.9)=-1.2178,\ f(1)=-1,\ f(1.1)=-0.6018$，用三点数值微分公式计算 $f'(1)$ 的近似值为_______， $f''(1)$ 的近似值为__________.

4. 设 $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & -5\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=$_____， $\mathrm{Cond}(A)_\infty=$______.

5. 设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的 3 重实根，则求 x^* 的改进的 Newton 迭代公式为______________________________.

6. 设函数 $f(x)=e^{-2x}$， $p_2(x)$ 是以 $0,\ 1,\ 2$ 为节点的 $f(x)$ 的二次 Lagrange 插值多项式，则余项 $e^{-2x}-p_2(x)=$____.

二（本题满分 8 分） 对下列方程组

$$\begin{cases}2x_1+6x_2+3x_3=3,\\ x_1+2x_2+4x_3=5,\\ 4x_1-2x_2+\ \ x_3=2\end{cases}$$

建立收敛的 Jacobi 迭代公式和收敛的 Gauss–Seidel 迭代公式，并说明理由。

三（本题满分 10 分） 已知列表函数

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	-5	-6	3

用差商法求满足上述插值条件的 Newton 插值多项式（要求写出差商表）。

四（本题满分 16 分）(1)　确定 x_1，x_2，A_1，A_2，使下面的求积公式为 Gauss 型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

(2) 分别用两点古典 Gauss 公式及 Simpson 公式计算 $I = \int_{-1}^{1} e^x \sin x \,\mathrm{d}x$ 的近似值。

五（本题满分 10 分） 已知方程 $x^3 - 2x - 1 = 0$ 在 $x_0 = 1.5$ 附近有一个实根 x^*.

(1)　取初值 $x_0 = 1.5$，用 Newton 迭代法求 x^*（只迭代两次）。

(2)　取初值 $x_0 = 1.5,\ x_1 = 1.6$，用弦截法求 x^*（只迭代两次）。

六（本题满分 10 分）　求拟合下列表中数据的 1 次最小二乘多项式，取权 $\rho_i = 1$，$i = 0,1,2,3$.

i	0	1	2	3
x_i	1	2	3	4
y_i	1.3	3.5	4.2	5.0

七（本题满分 16 分）　(1) 设初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases},$$

证明 Euler 方法是求解上述初值问题的仅有一阶精度的数值方法。

(2)　用改进的 Euler 方法求下列初值问题（取步长 $h = 0.5$）

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{3y}{1+t}, \quad 0 < t \le 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

下面 2 题任意选做 1 题。

八（本题满分 10 分） 设 $S(x)$ 是 $[0,2]$ 上的三次自然样条：

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3, & 0 \le x < 1, \\ S_1(x) = 2 + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

求 b, c, d .

八（本题满分 10 分） 设迭代矩阵 M 的某种范数 $\|M\| = q < 1$，证明迭代公式

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = M\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{d}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

对任意初值 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 都收敛到线性方程组 $\boldsymbol{x} = M\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ 的解 $\boldsymbol{x}^*$，且有估计式

$$\left\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{(k)}\right\| \le \frac{q}{1-q}\left\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\right\|,$$

其中 $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$， $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{(k)}, \boldsymbol{d} \in \mathbf{R}^n$， $k = 0,1,2,\cdots$.

合肥工业大学 2011 级硕士研究生《数值分析》试卷(A)

班级______________姓名__________ 学号__________________成绩______

一、判断题（下列各题，你认为正确的，请在题后的括号内打“√”，错误的打“×”，每题 2 分，共 10 分)

1. 设函数 f 具有 5 阶导数，则 $f[0,1,2,3,4,5]=f^{(5)}(\xi)$，其中 ξ 介于 $0,1,2,3,4,5$ 之间，$f[0,1,2,3,4,5]$ 是 $f(x)$ 关于节点 $0,1,2,3,4,5$ 的 5 阶差商。 (　　)
2. 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优的，则可用 Gauss 消去法直接求解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，无须选主元素。 (　　)
3. 若 $f(a)f(b)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 内至少有一个根。 (　　)
4. 若函数 $f(x)$ 是多项式，则它的 Lagrange 插值多项式 $p(x)\equiv f(x)$. (　　)
5. 解常微分方程初值问题的四阶 Runge-Kutta 方法的局部截断误差是 $O(h^5)$，其中 h 是步长。 (　　)

二、填空题（每空 2 分，共 10 分）

1. 近似数 $x^*=3.200$ 关于准确值 $x=3.200678$ 有_______位有效数字。
2. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{Cond}(A)_1=$______.
3. 设函数 $f(2.6)=13.4673,\ f(2.7)=14.8797,\ f(2.8)=16.4446$，用三点数值微分公式计算 $f'(2.7)=$ __14.8865__.
4. 设函数 $f(x)=\sin 2x$，$p_2(x)$ 是 $f(x)$ 的以1, 2, 3 为节点的二次 Lagrange 插值多项式，则余项 $f(x)-p_2(x)=$____.
5. 二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上关于 y 满足 Lipschitz 条件是：

____.

三（本题满分 12 分）对下列方程组

$$\begin{cases}5x_1+2x_2+\ \ x_3=-12,\\ -x_1+4x_2+2x_3=20,\\ 2x_1-3x_2+10x_3=3\end{cases}$$

建立 Jacobi 迭代格式**(4 分)**和 Gauss–Seidel 迭代格式**(4 分)**，写出 Jacobi 迭代格式的迭代矩阵，并用迭代矩阵的范数判断所建立的 Jacobi 迭代格式是否收敛**(4 分)**。

四（本题满分 10 分） 已知列表函数

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	-7	-4	5	26

用差商法求满足上述插值条件的 Newton 插值多项式（要求写出差商表）。

五（本题满分 14 分）(1) 直接验证梯形求积公式具有 1 次代数精度。**(4 分)**

(2) 分别用 Simpson 公式和两点古典 Gauss 公式计算 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值。**(10 分)**

六（本题满分 12 分）. 设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的单根， $f(x)$ 是可导函数。

(1) 证明求 x^* 的 Newton 迭代法至少是平方收敛的。**(6 分)**

(2) 若 $f(x)=xe^x-1$，取初值 $x_0=0.5,\ x_1=0.6$，用弦截法求 x^*(只迭代两次)。**(6 分)**

七（本题满分 10 分） 求拟合下列表中数据的 1 次最小二乘多项式，取权 $\rho_i=1$，$i=0,1,2,3$.

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	-0.2	0.9	1.9	3.0

八（本题满分 12 分） (1) 设初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t,y), \\ y(t_0)=y_0. \end{cases},$$

证明 Euler 方法是求解上述初值问题的一阶精度的数值方法。**(6 分)**

(2) 用改进的 Euler 方法求下列初值问题（取步长 $h=0.5$）**(6 分)**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y-\dfrac{2t}{y}, \quad 0<t\le 1, \\ y(0)=1. \end{cases}$$

下面 2 题任意选做 1 题。

九（本题满分 10 分） 设 $S(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上满足第一类边界条件的三次样条：

$$S(x)=\begin{cases} S_0(x)=1+2x-x^3, & 0\le x<1, \\ S_1(x)=2+b(x-1)+c(x-1)^2+(x-1)^3, & 1\le x\le 2. \end{cases}$$

求 b, c 和 $f'(2)$.

九（本题满分 10 分） 证明复化梯形求积公式的递推公式

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h_n}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}),$$

其中积分区间为 $[a,b]$，步长 $h_n = \dfrac{b-a}{n}$， $x_i = a + i \cdot h_n,\ i = 0,1,\cdots,n$ ，$x_{i+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$，$i = 0,1,\cdots,n-1$，$T_n$ 和 T_{2n} 分别是将 $[a,b]$ n 等分和 $2n$ 等分时关于积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的复化梯形求积公式。

合肥工业大学 2012 级硕士研究生《数值分析》试卷(A)

一、填空题（每空 2 分，共 20 分）

1. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=$______，$\mathrm{Cond}(A)_\infty=$______.

2. 设 $x^*=3$ 是方程 $x^3-7x^2+15x=9$ 的 2 重实根，则求 x^* 的改进的 Newton 迭代公式为

   ________________________________.

3. 若 $f(x)=-3x^7+5x^3+7$，则 $f[0,1,2,\cdots,7]=$______， $f[0,1,2,\cdots,8]=$_____.

4. 三次样条 $S(x)=\begin{cases} S_0(x), & 0\le x<1, \\ S_1(x), & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 在结点 $x=1$ 处的连续性条件是____________

   ____.

5. 设函数 $f(0.9)=-1.2,\ f(1)=-1.0,\ f(1.1)=0.5$，用三点数值微分公式计算 $f'(1)$ 的近似值为_______.

6. 已知求积节点 $(x_i, f(x_i)),\ i=0,1,\cdots,n$，设 $I=\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x$，$I_n=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$，

   若 $I-I_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_a^b \omega_n(x)\mathrm{d}x$，其中 ξ 介于 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 之间，$\omega_n(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$；

   则求积公式 $I_n=\sum_{i=0}^{n}A_i f(x_i)$ 至少具有_____次代数精度。

7. 四阶 Runge-Kutta 方法的局部截断误差是____，其整体截断误差是_____.

二（本题满分 10 分） 已知线性方程组

$$\begin{cases} -4x_1+x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+5x_2-x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-1. \end{cases}$$

(1) 分别写出求解上述方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss–Seidel 迭代格式的迭代矩阵 B_J 和 B_G .**(4 分)**

(2) 计算范数 $\|B_J\|_1$ 和 $\|B_G\|_1$，判断求解上述方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss–Seidel 迭代格式是否收敛？**(4 分)**

(3) 若都收敛，哪个迭代格式收敛速度得更快？**(2 分)**

三（本题满分 10 分） 用下列表中的数据求插值多项式 $p(x)$，使之满足 $p(x_i)=f(x_i)$，$i=0,1,2$，和 $p'(x_0)=f'(x_0)$.（要求写出差商表）

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	3	11
$f'(x_i)$	1		

四（本题满分 12 分）(1) 设 $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$. 已知 $f(0)=f(3)=\alpha$ (α 未知), $f(1)=2$, $f(2)=2.5$, 用 $n=3$（即将积分区间 $[0,3]$ 分成 3 段）的复化梯形求积公式计算 I，得 5.5；用 Simpson 求积公式计算 I，得 5，求 α 和 $f(1.5)$. **(7 分)**

(2) 用上述 2 点古典 Gauss 公式计算 $I=\int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x$ 的近似值。**(5 分)**

五（本题满分 10 分）. 已知方程 $2x^3+3x-7=0$.

(1) 取初值 $x_0=0.8$，用 Newton 迭代法求 x_2. **(5 分)**

(2) 取初值 $x_0=0.8$, $x_1=0.9$，用弦截法求 x_3.**(5 分)**

六（本题满分 10 分） 求拟合下列表中数据的 1 次最小二乘多项式 $p_1(x)$，取权 $\rho_i=1$，$i=0,1,2,3$，并计算总误差 Q.

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
y_i	-0.5	0.6	1.4	2.5

七（本题满分 10 分） 用改进的 Euler 方法求下列初值问题（取步长 $h=0.5$）

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-y(1+ty), & 0<t\le 1,\\ y(0)=1.\end{cases}$$

八（本题满分12分） 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数，且满足；

(1) 当 $x\in[a,b]$ 时，$a\le\varphi(x)\le b$；

(2) 存在常数 $0<L<1$，对 $\forall x\in[a,b]$，都有 $|\varphi'(x)|\le L$；

证明

(1) 函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在唯一不动点 x^*； **(4分)**

(2) 对任何初值 $x_0\in[a,b]$，由迭代格式 $x_k=\varphi(x_{k-1})$ 生成的序列 $\{x_k\}$ 都收敛于 x^*;**(4分)**

(3) $|x^* - x_k| \le \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|$.**(4分)**

九（本题满分 6 分） 设函数 $f(x)=\sin 2x$， $p_2(x)$ 是 $f(x)$ 的以 0, 0.05, 0.1 为节点的二次 Lagrange 插值多项式，求 $p_2(0.03)$ 至少有几位有效数字？（ $\sin 0.06 = 0.059964\cdots$；要求用 Lagrange 插值余项公式求。）