第六章

数据拟合和函数逼近(3 – 4)

第三节　数值积分的基本概念

第四节　Newton-Cotes积分

第3节 数值积分的一般概念

➢ 3.1 数值积分的背景

使用牛顿–莱布尼茨公式求积分，需要被积函数的原函数，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

但在实际问题计算中, 原函数很难求.

例如：下列积分都不能通过解析的方法来求解.

$$\int_a^b \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_a^b e^{-x^2} dx,$$

必须使用数值的方法去计算这些积分.

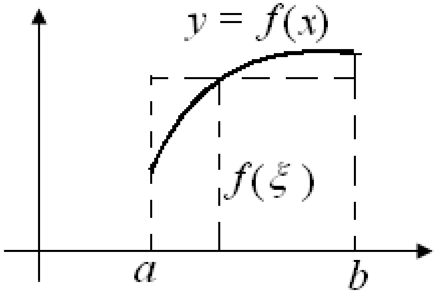
- **矩形公式** 依积分中值定理知，有$\xi\in[a,b]$，使

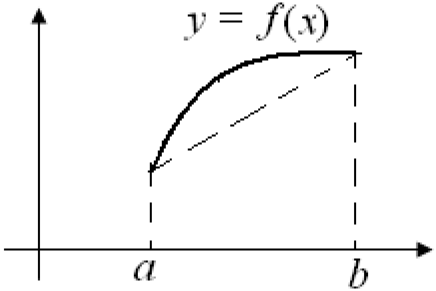
$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$$

只要对平均高度$f(\xi)$给出一种算法，可得积分值的一种算法.

- **梯形公式** 若用$\frac{f(a)+f(b)}{2}$作为平均高度$f(\xi)$的近似值，则有

$$\int_a^b f(x)dx=T=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$





➢ 3.2 求积公式及其代数精度

一、数值求积公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \triangleq I_n$$

式中$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$叫求积节点，它们满足

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

A_k 叫做求积系数，它与被积函数无关，用求积公式计算。

二、截断误差 (余项)

$$R_n = I - I_n = \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

三、m次代数精度

定义1 当 $f(x)$ 为任何次数不高于m的多项式$p_l(x), 0 \le l \le m$时，

$$\int_a^b p_l(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k p_l(x_k)$$

对某个$m+1$次多项式$p_{l+1}(x)$时，

$$\int_a^b p_{l+1}(x)dx \neq \sum_{k=0}^{n} A_k p_{l+1}(x_k)$$

则称此求积公式有m次代数精度.

四、判别求积公式代数精度的方法

命题1. 若当$f(x)$分别为$1, x, \cdots, x^m$时, 求积公式都成为等式, 则当$f(x)$为任何次数不高于m的多项式时, 求积公式必为等式.

证明：设$\int_a^b 1dx = \sum_{k=0}^{n} A_k, \int_a^b xdx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k, \cdots, \int_a^b x^m dx = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m$

则$\int_a^b (a_0 + a_1 x + \cdots + a_l x^l) dx = a_0 \sum_{k=0}^{n} A_k + a_1 \sum_{k=0}^{n} A_k x_k + \cdots + a_l \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^l$

$$= \sum_{k=0}^{n} (a_0 A_k + a_1 A_k x_k + \cdots + a_l A_k x_k^l) = \sum_{k=0}^{n} A_k (a_0 + a_1 x_k + \cdots + a_l x_k^l)$$

例1. 求梯形公式$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$的代数精确度。

解：逐次检查公式是否精确成立

代入$P_0=1$：$\int_a^b 1\,dx = b-a = \frac{b-a}{2}[1+1] = \frac{b-a}{2}[P_0(a)+P_0(b)]$

代入$P_1=x$：$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b-a}{2}[a+b] = \frac{b-a}{2}[P_1(a)+P_1(b)]$

代入$P_2=x^2$：$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3} \neq \frac{b-a}{2}[a^2+b^2]$

代数精度 $=1$

例2.设有求积公式$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \omega_0 f(-1)+\omega_1 f(0)+\omega_2 f(1)$试确定系数$\omega_0,\omega_1,\omega_2$，使上述求积公式的代数精度尽量高，并指出该求积公式所具有的代数精度。

解：令求积公式依次对$f(x)=1$，x，x^2都精确成立，即系数$\omega_0,\omega_1,\omega_2$满足

$$\begin{cases} \omega_0+\omega_1+\omega_2=\int_{-1}^{1} 1dx=2 & [f(-1)=f(0)=f(1)=1] \\ -\omega_0 \qquad +\omega_2=\int_{-1}^{1} xdx=0 & [f(-1)=-1,f(0)=0,f(1)=1] \\ \omega_0 \qquad +\omega_2=\int_{-1}^{1} x^2\,dx=\frac{2}{3} & [f(-1)=1,f(0)=0,f(1)=1] \end{cases}$$

解得：$\omega_0=\frac{1}{3}$，$\omega_1=\frac{4}{3}$，$\omega_2=\frac{1}{3}$

又因为$\int_{-1}^{1} x^3\,dx=0=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+\frac{4}{3}\cdot 0^3+\frac{1}{3}\cdot(1)^3$,

但是$\int_{-1}^{1} x^4\,dx=\frac{2}{5}\neq\frac{1}{3}\cdot(-1)^4+\frac{4}{3}\cdot 0^4+\frac{1}{3}\cdot(1)^4=\frac{2}{3}$，所以代数精度为3.

➢ 3.3 插值型求积公式

- **思路** 利用**插值多项式** $p_n(x) \approx f(x)$ 则积分易算。

☞ 在$[a,b]$上取 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$，做$f(x)$的$n$次 插值多项式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$$

A_k

从而得到

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = I_n$$

$$A_k = \int_a^b l_k(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \prod_{j\neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \mathrm{d}x$$

插值型求积公式

其中，A_k 由节点决定与 $f(x)$ 无关。

插值型求积公式(1)截断误差为:

$$R_n[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$$

$$=\int_a^b[f(x)-L_n(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b \boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}\mathrm{d}x$$

拉格朗日插值余项

其中， $\xi=\xi(x)\in(a,b)$.

例2. 给定求积节点$x_0=\frac{1}{4}$，$x_1=\frac{3}{4}$,试推出计算积分$\int_0^1 f(x)dx$的插值型求积公式，并写出它的截断误差.

解：由公式计算求积系数 $A_0=\int_0^1 l_0(x)dx=\int_0^1 \frac{x-3/4}{1/4-3/4}dx=\frac{1}{2}$,

$A_1=\int_0^1 l_1(x)dx=\int_0^1 \frac{x-1/4}{3/4-1/4}dx=\frac{1}{2}$,

故求积公式为$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]$;

截断误差为$R_1=\int_0^1 \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{1}{4})(x-\frac{3}{4})dx, \xi=\xi(x)\in(0,1)$

定理1 $n+1$个节点的求积公式$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$

至少有 n 次代数精度充要条件是求积公式是插值型的. 证明

第4节 Newton-Cotes 求积公式

➢ 4.1 等距节点插值积分

将积分区间$[a,b]$划分为n等份，步长为$\frac{b-a}{n}$，

选等距节点$x_k=a+kh$，构造出的插值求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)$$

其中$C_k^{(n)}=\frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!(n-k)!n}\int_0^n\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(t-j)dt$

公式推导

称为Newton-Cotes求积公式，式中$C_k^{(n)}$称为Cotes系数.

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{1 \cdot k!\,(n-k)!\,n} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (t-j)\,dt$$

当$n=1$时，$I_1 = (b-a)[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)]$ **梯形公式**

$$C_0^{(1)} = \frac{(-1)^1}{1\cdot 0!(1-0)!} \int_0^1 (t-1)\,dt = \frac{1}{2}, \quad C_1^{(1)} = \frac{(-1)^0}{1\cdot 1!(1-1)!} \int_0^1 (t-0)\,dt = \frac{1}{2},$$

当$n=2$时，$I_2 = (b-a)[\frac{1}{6} f(a) + \frac{2}{3} f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{6} f(b)]$

辛普森(Simpson)公式

$$C_0^{(2)} = \frac{(-1)^2}{2\cdot 0!(2-0)!} \int_0^2 (t-1)(t-2)\,dt = \frac{1}{6},$$

$$C_1^{(2)} = \frac{(-1)^1}{2\cdot 1!(2-1)!} \int_0^2 (t-0)(t-2)\,dt = \frac{4}{6},$$

$$C_1^{(2)} = \frac{(-1)^0}{2\cdot 2!(2-2)!} \int_0^2 (t-0)(t-1)\,dt = \frac{1}{6},$$

当$n=3$时，$I_3=(b-a)[\frac{1}{8}f(a)+\frac{3}{8}f\left(\frac{a+b}{3}\right)+\frac{3}{8}f\left(\frac{2a+2b}{3}\right)+\frac{1}{8}f(b)]$

$$C_0^{(3)}=\frac{(-1)^3}{3\cdot 0!(3-0)!}\int_0^3(t-1)(t-2)(t-3)dt=\frac{1}{8},$$

$$C_1^{(3)}=\frac{(-1)^2}{3\cdot 1!(3-1)!}\int_0^3(t-0)(t-2)(t-3)dt=\frac{3}{8},$$

$$C_2^{(3)}=\frac{(-1)^1}{3\cdot 2!(3-2)!}\int_0^3(t-0)(t-1)(t-3)dt=\frac{3}{8},$$

$$C_3^{(3)}=\frac{(-1)^0}{3\cdot 3!(3-3)!}\int_0^3(t-0)(t-1)(t-2)dt=\frac{1}{8}.$$

当$n=4$时，$x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{4},i=0,1,\cdots,4$ $\boxed{\text{Cotes公式}}$

$$I_4=\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

Cotes 系数表

	$C_k^{(n)}$							
$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$					
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$			
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$		
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$	
7	$\frac{715}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{715}{17280}$

例1 用Newton—Cotes公式计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

解：$I_1=(b-a)[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)]=\frac{1-0}{2}\left(1+\frac{\sin 1}{1}\right)=0.92703549.$

$I_2=(b-a)[\frac{1}{6}f(a)+\frac{2}{3}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{6}f(b)]$

$=\frac{1-0}{6}\left(1+4\frac{\sin 0.5}{0.5}+\frac{\sin 1}{1}\right)=0.94613588.$

$I_3=(b-a)[\frac{1}{8}f(a)+\frac{3}{8}f\left(\frac{a+b}{3}\right)+\frac{3}{8}f\left(\frac{2a+2b}{3}\right)+\frac{1}{8}f(b)]$

$=\frac{1-0}{8}\left(1+3\frac{\sin(1/3)}{1/3}+3\frac{\sin(2/3)}{2/3}+\frac{\sin 1}{1}\right)=0.94611092.$

$I_4=\frac{b-a}{90}[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$

$=0.94608300.$

定理 当n为奇数时, Newton-Cotes公式至少有n 次代数精度;
当n为偶数时, Newton-Cotes公式至少有$n+1$次代数精度.

证明：因为$N-C$公式是插值型的，所以$n+1$点至少n次精度。

当n为偶数时, 令$f(x)=x^{n+1}$, 则 $f^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$

$$R_n[f]=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)dx=\int_a^b\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)dx$$

$$\xlongequal[x=a+th]{} h^{n+2}\int_0^n\prod_{k=0}^{n}(t-k)dt \xlongequal[n=2m]{} h^{2m+2}\int_0^{2m}\prod_{k=0}^{2m}(t-k)dt$$

$$\xlongequal[t=u+m]{} h^{2m+2}\int_{-k}^{k}\prod_{k=0}^{2m}(u+m-k)du=0$$

因此n为偶数时, $N-C$公式至少具有$n+1$次代数精度.