第六章

数值微积分(7)

第七节 Gauss型求积公式

第7节 Gauss型求积公式

7.1 Gauss型求积的背景

采用等距节点插值求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$

如果插值节点为n个，则该公式精度最大达到$n+1$次.

问题：求积公式的精度最多达到多少次？

因为公式中 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 中含有$2n+2$个参数x_k, A_k，所以

假设$f(x) = 1, x, x^2, \cdots, x^{2n+1}$等式严格成立，如果可以解出$x_k, A_k$，

从而代数精度可达到$2n+1$, 能否有更高的代数进精度呢？

令$f(x)=[(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)]^2$—$2n+2$次多项式，

显然$\int_a^b f(x)dx>0$，

但是$\sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)=\sum\limits_{k=0}^{n} A_k[(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_n)]^2=0$，

故$\int_a^b f(x)dx\approx\sum\limits_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$的精度最多达到$2n+1$次.

定义1. 称代数精度达到$2n+1$次的求积公式为**Gauss求积公式**，

称积分节点$x_k, k=0,1,2,\cdots,n$为**Gauss点**。

➢ 7.2 高斯求积公式中Gauss点的求法

方法一 建立非线性方程组求解.

令 $\int_a^b x^m dx = \sum_{k=0}^{n} A_k (x_k)^m, m = 0, 1, \cdots, 2n+1$

注：由于方程组通常是非线性的，求解非常困难。

方法二 Gauss求积法.

1. 取带权积分$\int_a^b \rho(x) f(x) dx$，$\rho(x)$为权函数；

2. 令$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$；

定理1. 设求积公式为$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$，则

求积公式节点$x_k, k=0,1,\cdots,n$是Gauss点 $\Leftrightarrow$

$\omega_{n+1}(x)$与任意不超过n次多项式$q(x)$在$[a,b]$上带权$\rho(x)$正交.

结论1： Gauss点$\{x_k\}_{k=0}^{n} \Leftrightarrow [a,b]$上带权$\rho(x)$的正交多项式系$\{\varphi_0(x),$

$\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\varphi_{n+1}(x),\cdots\}$中的$n+1$次多项式$\varphi_{n+1}(x)$的$n+1$个实根.

因为$\int_a^b \rho(x)\varphi_{n+1}(x)\varphi_l(x)=0$，令$\varphi_{n+1}(x)=\omega_{n+1}(x)$.

例1 求高斯求积公式$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$的Gauss点.

解 在5.3节例1中，已知区间$[-1,1]$上带权$\rho(x)=x^2$的正交多项式组为

$$g_0(x)=1,\quad g_1(x)=x,\quad g_2(x)=x^2-\frac{3}{5},\quad g_3(x)=x^3-\frac{5}{7}x.$$

求$g_3(x)$的根，得

$$x_1=-\frac{\sqrt{35}}{7},\quad x_2=0,\quad x_3=\frac{\sqrt{35}}{7}.$$

故$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f\left(-\frac{\sqrt{35}}{7}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right).$

➢ 7.3 Gauss型求积公式中求积系数的求法

根据插值求积公式中求积系数的求法，可得

$$A_k=\int_a^b \rho(x)l_k(x)\mathrm{d}x\,,k=0,1,2,\cdots,n\text{，其中}l_k(x)=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}.$$

或令 $\int_a^b x^m dx=\sum\limits_{k=0}^{n}A_k(x_k)^m, m=0,1,\cdots,n$，建立方程组求解$A_k$.

➢ 7.4 Gauss型求积公式的误差

$f(x)\in C^{(2n+2)}[a,b]$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$R(f)=\int_a^b \rho(x)f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)\ =\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}^2(x)dx$$

例1 求高斯求积公式$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$.

解： $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f\left(-\frac{\sqrt{35}}{7}\right) + A_1 f(0) + A_2 f\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right)$.

$$A_0 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{x(x-\sqrt{35}/7)}{(-\sqrt{35}/7-0)(-\sqrt{35}/7-\sqrt{35}/7)}\mathrm{d}x = \frac{7}{25},$$

$$A_1 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\mathrm{d}x = \frac{8}{75},$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\mathrm{d}x = \frac{7}{25},$$

故$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{7}{25} f\left(-\frac{\sqrt{35}}{7}\right) + \frac{8}{75} f(0) + \frac{7}{25} f\left(\frac{\sqrt{35}}{7}\right)$.

➢ 7.5 几种常用的Gauss型求积公式

(1). Gauss－Legendre求积公式

$[-1,1]$上带权函数$\rho(x)\equiv 1$的Gauss型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

几个低次的Legendre多项式为： $g_0(x)=1,\ g_1(x)=x-\frac{\int_{-1}^{1}1\cdot x dx}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1 dx}\cdot 1 = x,$

$$g_2(x)=x^2-\frac{\int_{-1}^{1}1\cdot x^2 dx}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1 dx}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^{1}x\cdot x^2 dx}{\int_{-1}^{1}x\cdot x dx}x = x^2-\frac{1}{3}$$

$$g_3(x)=x^3-\frac{\int_{-1}^{1}1\cdot x^3 dx}{\int_{-1}^{1}1\cdot 1 dx}\cdot 1-\frac{\int_{-1}^{1}x\cdot x^3 dx}{\int_{-1}^{1}x\cdot x dx}x-\frac{\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^3 dx}{\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^2 dx}=x^3-\frac{3}{5}x$$

1 两点公式

Gauss点：令$g_2(x)=x^2-\frac{1}{3}=0$，得$x_0=-\frac{1}{\sqrt{3}}$， $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Gauss求积系数：$A_0=\int_{-1}^{1}\frac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}}dx=1$，$A_1=\int_{-1}^{1}\frac{x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}dx=1$

高斯型求积公式中的两点公式：$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}})+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2 三点公式

Gauss点：令$g_3(x)=x^3-\frac{3}{5}x=0$，得$x_0=-\frac{\sqrt{15}}{5}, x_1=0, x_2=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Gauss求积系数：$A_0=A_2=0.5555556$，$A_1=0.8888889$.

三点公式：$\int_{-1}^{1}f(x)dx\approx A_0f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+A_1f(0)+A_2f(\frac{\sqrt{15}}{5})$.

例2 用三点辛普森公式与三点高斯-勒让德计算积分$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\mathrm{d}x$.

解 用三点辛普森公式计算，得

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\frac{2}{6}\left[\sqrt{1+(-1)}+4\sqrt{1+0}+\sqrt{1+1}\right]=1.80473785.$$

用三点高斯-勒让德公式计算，有

$$A_0=A_2=0.5555556,\quad A_1=0.8888889,\quad f(x)=\sqrt{1+x}$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=A_0f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+A_1f(0)+A_2f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)=1.89272584.$$

精确值为$I=1.88561808.$

例3 用两点与三点高斯-勒让德计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

区间$[a,b]$上的积分，用变量替换处理：令$x=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)dt \approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_k\right)$$

其中t_k为$[-1,1]$上高斯求积公式的高斯点。

解 由于Legendre公式的区间为$[-1,1]$, 因此考虑区间的平移

两点公式

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)dt \approx \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$=0.94604114.$$

三点公式 $A_0 = A_2 = 0.5555556$, $A_1 = 0.8888889$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)dt$$

$$\approx \frac{1}{2}\left[A_0 f\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right) + A_1 f(1+0) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right)\right]$$

$$= 0.94608314.$$

准确值$I = 0.94608307.$

例3 用两点与三点高斯—勒让德计算积分$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

方法二，取两点公式，以权函数$\rho(x)=1$, 求高斯点

$$g_0(x)=1,\ g_1(x)=x-\frac{\int_0^1 1\cdot x dx}{\int_0^1 1\cdot 1 dx}\cdot 1=x-\frac{1}{2},$$

$$g_2(x)=x^2-\frac{\int_0^1 1\cdot x^2 dx}{\int_0^1 1\cdot 1 dx}\cdot 1-\frac{\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2 dx}{\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

令$g_2(x)=0$, 得高斯点为$x_0=\frac{3-\sqrt{3}}{6}, x_1=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$,

$$A_0=\int_0^1\frac{x-x_1}{x_0-x_1}dx=\int_0^1\frac{x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}}{-\frac{2\sqrt{3}}{6}}dx=\frac{1}{2},\quad A_1=\int_0^1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}dx=\int_0^1\frac{x-\frac{3+\sqrt{3}}{6}}{\frac{2\sqrt{3}}{6}}dx=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)=\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}f(x_1)=0.94604114$$