合肥工业大学研究生考试试卷(A)

课程名称 数值分析 考试日期 2020 年 1 月 7 日 学院 全校 2019 级研究生 姓名＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 得分＿＿＿＿

装

订

线

一、计算题 (每小题 5 分，满分共 30 分)

1. 设 $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$，求 $\mathrm{Cond}(A)_1$.

2. 设 S 是函数 f 在区间 $[0,2]$ 上的三次样条：

$$S(x)=\begin{cases}1+2x-x^3, & 0\le x\le 1;\\ 2+b(x-1)+c(x-1)^2+(x-1)^3, & 1\le x\le 2.\end{cases}$$

求 b、c.

3. 设函数 $f(2.0)=1.3673$，$f(2.2)=1.6797$，$f(2.4)=1.3046$，用三点数值微分公式计算 $f'(2.2)$、$f''(2.2)$.

4. 直接验证梯形求积公式具有 1 次代数精度。

5. 证明：求解初值问题 $\begin{cases}y'(t)=f(t,y), & a\le t\le b;\\ y(a)=\alpha\end{cases}$ 的 Euler 方法是 1 阶方法。

6. 设 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 是区间 $[a,b]$ 中彼此互异的点，且 $f(x)$ 是次数不超过 n 的多项式，证明：在 $x_0, x_1, \cdots x_n$ 上关于 $f(x)$ 的 lagrange 插值多项式就是 $f(x)$.

二、(本题满分 10 分)（1）设 $f \in C[a,b]$，且 $f(a)f(b) < 0$ ，x^* 是方程 $f(x) = 0$ 在区间 (a,b) 内的唯一根。若 $\{x_n\}$ 是由二分法产生的逼近 x^* 的序列，证明：$\left|x_n - x^*\right| \le \dfrac{b-a}{2^n},\ n = 1, 2, \cdots.$

（设 $[a,b] = [a_1, b_1]$ ）

（2）设 $x_{10} = 2.467053$ 是由二分法产生的 x^* 的近似值，求它至少具有几位有效数字？

三、(本题满分 10 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

(1) 分别写出求解上述方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss–Seidel 迭代格式。

(2) 分别判断求解上述方程组的 Jacobi 迭代格式和 Gauss–Seidel 迭代格式是否收敛？

四、(本题满分 10 分)（1）下表是函数 $y = f(x)$ 的差商表

$x_0 = 0.0$	$f[x_0]$		
$x_1 = 0.4$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	
$x_2 = 0.7$	$f[x_2] = 6$	$f[x_1, x_2] = 10$	$f[x_0, x_1, x_2] = 50/7$

求表中缺失的项的值。

（2）根据上述差商表，求出相应的 Newton 插值多项式。

五、(本题满分 10 分) 求拟合下列表中数据的 1 次最小二乘多项式 $p_1(x)$，取权 $\rho_i = 1$，$i = 0,1,2,3,4$，并计算总误差 Q.

i	0	1	2	3	4
x_i	2	3	5	7	10
y_i	-0.5	1.2	3.1	4.5	6.0

六、(本题满分 10 分) 用两点古典 Gauss 公式计算 $I = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{2+x} \mathrm{d}x$ 的近似值。

七、(本题满分10分) 设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的 m $(m \ge 2)$ 重根，

（1）证明：x^* 是方程 $\mu(x) = 0$ 的单根，其中 $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$。

（2）已知 x^* 方程 $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ 的唯一重根，利用（1）的结果，用Newton迭代法求 x^* 的近似值 x_1、x_2（初值 x_0=1.5）。

八、(本题满分 10 分) 用改进的 Euler 方法求下列初值问题（取步长 $h = 0.5$）

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) - t\,y^2(t), \quad 0 < t \le 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$