第五章

数据拟合和函数逼近(3 – 4)

第三节　正交多项式

第四节　最佳平方逼近

第3节 正交多项式

最小二乘法是对给定的**数据点进行多项式拟合**。

接下来我们要考虑的是对给定的**函数进行逼近**，在高等数学我们学习过**Taylor**展开，

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

利用$p_n(x) \approx f(x)$. 该方法适合x_0点附近的函数逼近，但是偏离x_0点时，逼近效果就不好了。

➢ 3.1 正交多项式的概念与性质

权函数

定义1. 在区间(a,b)上, 若非负函数$\rho(x)$满足

(1) 对一切整数$n\geq 0$, $\int_a^b x^n\rho(x)\mathrm{d}x$存在;

(2) 对(a,b)上的非负连续函数$f(x)$, 若$\int_a^b \rho(x)f(x)\mathrm{d}x=0$,

则在区间(a,b)上$f(x)\equiv 0$.

那么, 称 $\rho(x)$为(a,b)上的**权函数**.

常见的权函数： $\rho(x) \equiv 1,\ a \le x \le b,$

$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1,\quad \rho(x) = \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1,$

$\rho(x) = e^{-x},\ 0 \le x < \infty,\qquad \rho(x) = e^{-x^2},\ -\infty < x < \infty.$

内积

定义2. 给定 $f(x), g(x) \in C[a,b]$，$\rho(x)$是(a,b)上的权函数,称

$$(f,g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x)\,\mathrm{d}x$$

为f,g 在$[a,b]$上的**内积**.

内积的性质

(1). $(f,g)=(g,f)$;

(2). $(kf,g)=(f,kg)=k(f,g)$，k为常数;

(3). $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$;

(4). 若在$[a,b]$上 $f(x)$不恒等于0, 则 $(f,f)>0$.

正交

定义3. 若内积$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x=0$，则称$f,g$ 在

在$[a,b]$上带权$\rho(x)$的正交.

正交函数系

定义4. 若函数系$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots\}$满足

$$(\varphi_i,\varphi_j)=\int_a^b \rho(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & i\neq j\\ a_i>0, & i=j\end{cases}$$

则称$\{\varphi_n(x)\}$是$[a,b]$上带权 $\rho(x)$的**正交函数系.**

例如：三角函数族 $\{1,cosx\,,sinx,cos2x,sin2x,\cdots\}$

是$[-\pi,\pi]$上的正交函数系.

幂函数系的正交化

只要给定区间$[a,b]$及权函数$\rho(x)$，幂函数系$\{x^k\}$经下面的正交化方法，总可化为正交多项式系$\{\varphi_k(x)\}$，其中$\varphi_k(x)$是最高项系数为1的k次多项式。

正交化法：
$$\begin{cases} \varphi_0(x) \equiv 1 \\ \varphi_{k+1}(x) = x^{k+1} - \sum_{j=0}^{k} \frac{(x^{k+1},\varphi_j)}{(\varphi_j,\varphi_j)} \varphi_j(x) \end{cases} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

其中$(x^{k+1},\varphi_j) = \int_a^b \rho(x) x^{k+1} \varphi_j(x) \mathrm{d}x$，$(\varphi_j,\varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_j^2(x) \mathrm{d}x$

例1. $\rho(x)=x^2$, 构造$[-1,1]$上正交多项式系 $\{\varphi_k(x)\}, k=0,1,2,3.$

解：取$\varphi_0(x)\equiv\boxed{1},$ 令$\varphi_1(x)=x-\dfrac{(x,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)=\boxed{x}$

$$令\varphi_2(x)=x^2-\frac{(x^2,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\frac{(x^2,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)=x^2-\frac{3}{5}-0=\boxed{x^2-\frac{3}{5}}$$

$$(x^2,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^2\cdot 1dx=\frac{2}{5},\quad (\varphi_0,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot 1\cdot 1dx=\frac{2}{3},$$

$$(x^2,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^2\cdot xdx=0,\quad (\varphi_1,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot x\cdot xdx=\frac{2}{5}.$$

$$令\varphi_3(x)=x^3-\frac{(x^3,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)-\frac{(x^3,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)-\frac{(x^3,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\varphi_2(x)$$

$$=x^3-0-\frac{5}{7}x-0=\boxed{x^3-\frac{5}{7}x}$$

➢ 3.2 常见的几种正交多项式

1、勒让德 (Legendre) 多项式

$$\begin{cases} L_0(x) \equiv 1, \\ L_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n], \ n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

- **勒让德多项式性质**

(1) $\{L_n(x)\}$是$[-1,1]$上的正交多项式, 权函数$\rho(x) = 1$.

(2) 当$n \geq 1$时, $L_n(x)$有递推关系式:

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)$$

2、切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \le x \le 1.$$

- **切比雪夫多项式性质**

（1）$\{T_n(x)\}$是$[-1,1]$上的正交多项式, 权函数$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

（2）当$n \ge 1$时，$T_n(x)$有递推关系式:

$$\begin{cases} T_0(x) \equiv 1, \qquad T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \end{cases}$$

3、拉盖尔 (Laguerre) 多项式

$$U_n(x) = e^x \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

- **拉盖尔多项式性质**

(1) $\{U_n(x)\}$是$[0, +\infty)$上的正交多项式, 权函数$\rho(x) = e^{-x}$.

(2) 当$n \geq 1$时, $U_n(x)$有递推关系式:

$$\begin{cases} U_0(x) \equiv 1; \qquad U_1(x) = 1 - x; \\ U_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)U_n(x) - n^2 U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

4. 埃米特(Hermite) 多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

- 埃米特多项式性质

（1）$\{H_n(x)\}$是$(-\infty, +\infty)$上的正交多项式, 权函数$\rho(x) = e^{-x^2}$.

（2）当$n \geq 1$时, $H_n(x)$有递推关系式:

$$\begin{cases} H_0(x) \equiv 1; \quad H_1(x) = 2x; \\ H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

第4节 函数的最佳平方逼近

➢ 4.1 函数的最佳平方逼近的概念

函数的逼近

设$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots \varphi_n(x)\} \in C[a,b]$, 它们线性无关.

给定 $f(x) \in C[a,b]$, 求 $p^*(x) \in H_n = Span\{\varphi_0(x), \ldots \varphi_n(x)\}$,

使得 $f(x) - p^*(x)$ 在某种意义下最小.

函数的最佳平方逼近

定义1. 若内积$(f-p^*, f-p^*) = \min\limits_{p \in H_n}\{(f-p, f-p)\}$, 称$p^*$为$f(x)$

的最佳平方逼近。

➢ 4.2 函数的最佳平方逼近的性质

定理 设$f(x)\in C[a,b]$，$p^*(x)\in H_n=Span\{\varphi_0(x),\ldots\varphi_n(x)\}$，则

p^*是$f(x)$最佳平方逼近的函数 $\Leftrightarrow$ $(f-p^*,\varphi_j)=0, j=0,\cdots,n.$

➢ 4.3 函数的最佳平方逼近的求解

设$p^*(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k^*\varphi_k(x)$，由于$(f-p^*,\varphi_j)=0$，故对$\forall j\in N$

$$0=(f-p^*,\varphi_j)=(f,\varphi_j)-\sum_{k=0}^{n}c_k^*(\varphi_k,\varphi_j)\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}c_k^*(\varphi_k,\varphi_j)=(f,\varphi_j)$$

这是一个以 $c_0^*,c_1^*,\cdots,c_n^*$为未知数的线性方程组.

称以上方程为法方程或正规方程.

法方程的矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}_0^* \\ c_1^* \\ \vdots \\ c_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ \vdots \\ (f,\varphi_n) \end{bmatrix}$$

由于$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots\varphi_n(x)$线性无关，可以推得上系数阵是非奇异的．故方程组有唯一解$\{c_j^*\}$. （证明略）

例1 定义内积$(f,g)=\int_0^1 f(x)g(x)dx$，试在$H_1=Span\{1,x\}$中寻求对于$f(x)=\sqrt{x}$的最佳平方逼近函数$p(x)$.

解：法方程为
$$\begin{pmatrix}(1,1) & (1,x)\\ (x,1) & (x,x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1^*\\ c_2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1,\sqrt{x})\\ (x,\sqrt{x})\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\int_0^1 1\cdot 1\mathrm{d}x & \int_0^1 1\cdot x\mathrm{d}x\\ \int_0^1 x\cdot 1\mathrm{d}x & \int_0^1 x\cdot x\mathrm{d}x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1^*\\ c_2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_0^1 1\cdot \sqrt{x}\mathrm{d}x\\ \int_0^1 x\cdot \sqrt{x}\mathrm{d}x\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1^*\\ c_2^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\ 2/5\end{pmatrix}$$ 解得 $c_0=\frac{4}{15}$， $c_1=\frac{4}{5}$

所求的最佳平方逼近函数为 $p(x)=\frac{4}{15}+\frac{4}{5}x.\quad 0\le x\le 1$

如果$\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots\varphi_n(x)$为正交多项式，则法方程为

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_0^*\\ c_1^*\\ \vdots\\ c_n^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\varphi_0)\\ (f,\varphi_1)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c_k=\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)},\quad k=0,1,2,\cdots,n$$

则$p^*(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k(x).$

例2 求$f(x)=e^x$在$[-1,1]$上的勒让德三次最佳平方逼近多项式.

解: 前4个Legendre多项式为

$$\varphi_0(x)\equiv 1,\quad \varphi_1(x)=x,\quad \varphi_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\quad \varphi_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x).$$

$$(f,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}1\cdot e^x\cdot 1\,dx=2.3054,\quad (f,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}e^x\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx=0.1431,$$

$$(f,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}1\cdot e^x\cdot x\,dx=0.7358,\quad (f,\varphi_3)=\int_{-1}^{1}e^x\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)dx=0.02013,$$

$$(\varphi_i,\varphi_i)=\int_{-1}^{1}1\cdot\varphi_i(x)\cdot\varphi_i(x)\,dx=\frac{2i+1}{2},i=0,1,2,3$$

则$p^*(x)=\frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\varphi_0(x)+\frac{(f,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\varphi_1(x)+\frac{(f,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\varphi_2(x)+\frac{(f,\varphi_3)}{(\varphi_3,\varphi_3)}\varphi_3(x)$

$$=0.9963+0.9979x+0.5367x^2+0.1761x^3.$$

➤ 4.4 内积下的最小二乘法

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \sum_{i=1}^{n} x_i{}^{m+2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m y_i \end{pmatrix}$$

令$\varphi_i(x) = x^i, i = 0, 1, \cdots, m,\quad (\varphi_i, f) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot x_k^i \cdot y_k, i = 0, 1, \cdots, m$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot x_k^i \cdot x_k^j = \sum_{k=0}^{n} x_k^{i+k}, \qquad i, j = 0, 1, \cdots, m$$

则最小二乘法 $\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_m) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_m, \varphi_0) & (\varphi_m, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_m, \varphi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_m) \end{bmatrix}$

例3 用$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$拟合

x	1	2	3	4
y	4	10	18	26

解 取$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$

$(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot 1 = 4$ $\quad (\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot x_i^2 = 100$

$(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot x_i = 10$ $\quad (\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30$

$(\varphi_0, \varphi_2) = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot x_i^2 = 30$ $\quad (\varphi_2, \varphi_2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 354$

$(\varphi_0, y) = \sum_{i=1}^{4} 1 \cdot y_i = 58$ $\quad (\varphi_1, y) = 182$ $\quad (\varphi_2, y) = 622$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 182 \\ 622 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = -\frac{3}{2},\ a_1 = \frac{49}{10},\ a_2 = \frac{1}{2}$$

$$y = P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{49}{10}x - \frac{3}{2}$$