第三章

非线性方程(组)的数值解法

（1）

第一节 引 言

求 $f(x)=0$ 的根

- 数学物理中的许多问题常常归结为解函数方程$f(x)=0$。
- 方程$f(x)=0$的解x^*称作它的根，或称为$f(x)$的零点。

零点定理：设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且$f(a)f(b)<0$，根据连续函数的性质可知方程$f(x)=0$在区间$[a,b]$内一定有实根，这时称(a,b)为方程$f(x)=0$的有根区间 。

第二节 二分法/* Bisection Method */

➢ 2.1 二分法

二分法的思想：将有根区间折半搜索，即对有根区间(a,b)，取中点$x_1=\frac{a+b}{2}$将它分为两半 ，检查$f(x_1)$与$f(a)$是否同号，如果确系同号，说明所求的根x^*在x_1的右侧，这时令$a_1=x_1, b_1=b$；否则x^*在x_1的左侧，这时令 $a_1=a, b_1=x_1$ ，不管出现哪一种情况，新的有根区间仅为原来的一半.

终止条件：$b_k-a_k<\varepsilon$ 或 $f(x_k)<\varepsilon$

➢ 2.2 二分法的误差分析

分析：

第1步产生的$x_1=\frac{a+b}{2}$，有误差$|x_1-x^*|\le\frac{b-a}{2}$

第k步产生的x_k，有误差$|x_k-x^*|\le\frac{b-a}{2^k}$

对于给定的精度ε, 可估计二分法所需的步数k：

$$\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon\Rightarrow k>\frac{[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]}{\ln 2}$$

① 简单;

② 对$f(x)$要求不高.

① 无法求复根及偶重根；

② 收敛慢.

例1.求方程$f(x)=x^3-x-1$在$[1.0,1.5]$区间内的一个实根，并准确到小数点后的第2位，若$x^*=1.324717\cdots$，求结果的有效数字。

解：二分过程解题过程见下表：$a=1.0,\ f(a)<0,\ b=1.5,\ f(b)>0$

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0	1.5	1.25	$-$
1	1.25		1.375	$+$
2		1.375	1.3125	$-$
3	1.3125		1.3438	$+$
4		1.3438	1.3281	$+$
5		1.3281	1.3203	$-$
6	1.3203		1.3242	$-$

$x^*=0.1324717\cdots\times10^1,\quad \|x^*-x_k\|=0.0517\times10^{-2}<0.5\times10^{1-3}$

故有效数字为3位

例2： 求方程 $f(x) = x^3 - e^{-x} = 0$的一个实根。

解：$f(0) < 0, f(1) > 0.$

故有根区间为$(0, 1)$.

令$(a, b) = (0, 1)$

取$x_{10} = 0.7729$,

误差为$|x^* - x_{10}| \le \frac{1}{2^{11}}$.

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1	0.5	−
1	0.5		0.75	−
2	0.75		0.875	−
3		0.875	0.8125	+
4		0.8125	0.7812	+
5		0.7812	0.7656	+
6	0.7656		0.7734	−
7		0.7734	0.7695	+
8	0.7695		0.7714	−
9	0.7714		0.7724	−
10	0.7724		0.7729	+

第三节 迭代法及其收敛性

/* Iterative Method and Convergent */

➢ 2.1 不动点迭代法 /* *Fixed-Point Iteration* */

$$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$$

$f(x)=0$ 的根 $\Longleftrightarrow$ $\varphi(x)$的不动点

思路

从一个初值 x_0 出发，计算 $x_1=\varphi(x_0),\cdots,x_{k+1}=\varphi(x_k),\cdots$,若$\{x_k\}$收敛，即存在 x^* 使得$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，且$\varphi(x)$连续，则由极限的性质可知 $x^*=\varphi(x^*)$，即x^* 是$\varphi(x)$ 的不动点，也就是$f(x)=0$的根。

例1. 设$f(x)=x^3+4x^2-10=0$(此方程在$[1,2]$中有唯一根)，用不同的方法将它变换成等价的方程。

解：(1). $x=\varphi_1(x)=x-x^3-4x^2+10$,

(2). $x=\varphi_2(x)=\left(\frac{10}{x}-4x\right)^{\frac{1}{2}}$,　　(3). $x=\varphi_3(x)=\frac{1}{2}(10-x^3)^{\frac{1}{2}}$,

(4). $x=\varphi_4(x)=x-\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$,

对所选取的$\varphi_i(x), i=1,2,3,4$，取初始近似值$x_0=1.5$，迭代法计算结果列入下表：

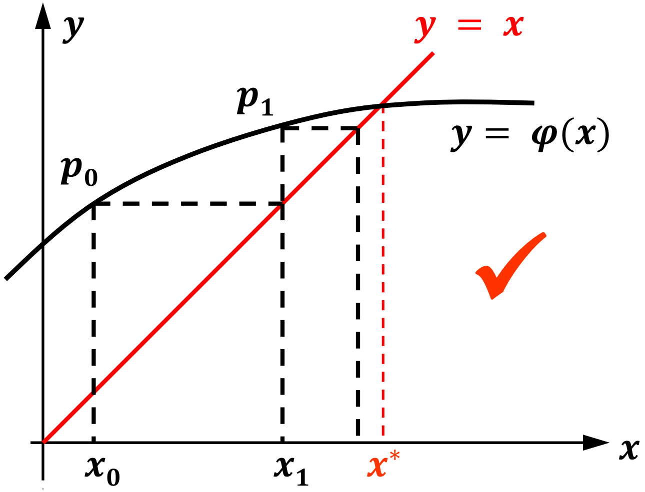
k	（1）	（2）	（3）	（4）
0	1.5	1.5	1.5	1.5
1	−0.875	0.8165	1.28695377	1.37333333
2	6.732	2.9969	1.40254080	1.36526201
3	−469.4	$(-8.65)^{1/2}$	1.34545838	1.36523001
4	1.03×10^{8}		1.37517025	
5			1.36009419	
6			1.36784697	
7			1.36388700	
8			1.36591673	
9			1.36487822	
10			1.36541006	
11			1.36522368	
12			1.36523024	
13			1.36522998	
14			1.36523001	

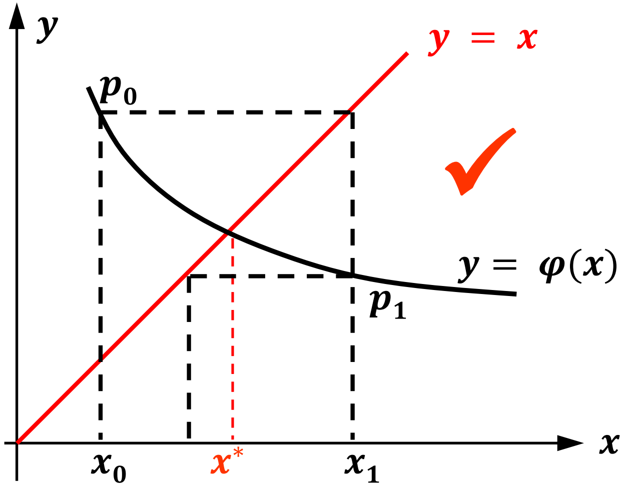
迭代过程发散

迭代过程中出现
负数开方，发散

迭代过程收敛

迭代过程的收敛性





需要讨论如下问题：

1）如何选取合适的迭代函数$\varphi(x)$?

2）迭代函数$\varphi(x)$应满足什么条件，序列$\{x_k\}=\{\varphi(x_{k-1})\}$收敛?

3）怎样加速序列$\{x_k\}$的收敛？

定理1. 方程$x=\varphi(x)$，若$\varphi(x)\in C[a,b]$，且满足

（I） 当$x\in[a,b]$时，$\varphi(x)\in[a,b]$；

（II） 对$\forall x\in[a,b]$，$\exists 0\le L<1$使得$|\varphi'(x)|\le L<1$；

则任取$x_0\in[a,b]$，由$x_{k+1}=\varphi(x_k)$得到的序列$\{x_k\}$收敛于$\varphi(x)$在$[a,b]$上的唯一不动点x^*。并且有误差估计式：

$$|x^*-x_k|\le\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|,$$

且存在极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=\varphi'(x^*)$

停机准则

绝对误差估计

证明： ① $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上存在不动点？

令$f(x)=\varphi(x)-x \quad \because a\le\varphi(x)\le b$

$\therefore \ f(a)=\varphi(a)-a\ge 0\ ,f(b)=\varphi(b)-b\le 0 \ \Rightarrow f(x)$有根. ✓

② 不动点唯一？ 反证：若不然，设还有$\tilde{x}=\varphi(\tilde{x})$，则

$x^*-\tilde{x}=\varphi(x^*)-\varphi(\tilde{x})=\varphi'(\xi)(x^*-\tilde{x})$, ξ介于x^*和$\tilde{x}$之间.

$\Rightarrow (x^*-\tilde{x})\big(1-\varphi'(\xi)\big)=0$，又因为$\varphi'(\xi)<1$, 所以$x^*=\tilde{x}$. ✓

③ 当$k\to\infty$时，x_k收敛到x^*？

$$|x^*-x_k|=|\varphi(x^*)-\varphi(x_{k-1})|=|\varphi'(\xi_{k-1})|\cdot|x^*-x_{k-1}|$$

$$\le L|x^*-x_{k-1}|\le\cdots\le L^k|x^*-x_0|\to 0$$ ✓

④ $|x^* - x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$?

可用$|x_{k+1} - x_k|$
来控制收敛精度

$$|x_{k+1} - x_k| \ge |x^* - x_k| - |x^* - x_{k+1}| \ge |x^* - x_k| - L|x^* - x_k|$$ ✓

⑤ $|x^* - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$?

L越小，收敛越快

$$|x_{k+1} - x_k| = |\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})| = |\varphi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})|$$

$$\le L|x_k - x_{k-1}| \le \ldots\ldots \le L^k|x_1 - x_0|$$ ✓

⑥ $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \varphi'(x^*)$?

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x^* - x_{k+1}}{x^* - x_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\varphi'(\xi_k)(x^* - x_k)}{x^* - x_k} = \phi'(x^*)$$ ✓

例：设$f(x)=x^3+4x^2-10=0$(此方程在$[1,2]$中有唯一根)，考察

$$a: x_{k+1}=\varphi(x_k)=\left(\frac{10}{4+x_k}\right)^{1/2} \text{和} b: x_{k+1}=\varphi(x_k)=\frac{1}{2}\left(10-x_k^3\right)^{1/2}$$

的收敛性，当$x_0=1.5$，$|x_k-x^*|<10^{-5}$时，确定收敛时的迭代次数k。

解 对于迭代过程a，迭代函数$\varphi(x)=\left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$，于是当$x\in[1,2]$时，

$$\varphi(x)\in(1,2) \quad |\varphi'(x)|=\left|\frac{-5}{\sqrt{10}(4+x)^{\frac{3}{2}}}\right|\le\frac{5}{\sqrt{10}(5)^{\frac{3}{2}}}<0.15=L$$

因此，迭代函数$\varphi(x)$在$[1,2]$上满足定理条件，故迭代过程b收敛。

由$|x_k-x^*|\le\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|<10^{-5}=\varepsilon$，又$x_1=1.34839972$，得

$$k>\frac{\lg\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{|x_1-x_0|}\right)}{\lg L}=\frac{\lg\left(\frac{10^{-5}(1-0.15)}{|1.34839972-1.5|}\right)}{\lg(0.15)}=5.1599\text{，所以要迭代6次。}$$

对于迭代过程b, 迭代函数$\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(10-x^3\right)^{1/2}$,于是当$x\in[1,2]$时,

$\varphi'(x)=-\frac{3x^2}{4\sqrt{10-x^3}}<0$，当$x\in[1,2]$时，$\varphi''(x)<0$，所以$\varphi'(x)$单调递减,

故$|\varphi'(x)|\le|\varphi'(2)|=2.12$. 因此，迭代函数$\varphi(x)$在$[1,2]$上不满足

定理条件，故迭代过程a发散。

注：若考虑区间$[1,1.7]$，$|\varphi'(x)|\le|\varphi'(1.7)|=0.96<1$.

因此，迭代函数$\varphi(x)$在$[1,1.7]$上满足定理条件，则迭代收敛。

所以，迭代函数的收敛性与有根区间的选择有关。

改进

定理1条件非必要条件，可将有根区间$[a,b]$缩小，定义局部收敛性：若在x^*的某δ领域$R=\{x||x-x^*|\le\delta\}$有$\varphi\in C^1[a,b]$且$|\varphi'|<1$，则由$\forall x_0\in R$开始的迭代收敛。即调整初值可得到收敛的结果。

➤ 2.2 局部收敛性和收敛阶

定义1. 若存在x^*的某邻域$R: |x - x^*| \le \delta$，使迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$对于任意初值$x_0 \in R$均收敛，则称迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$在根x^*邻近具有局部收敛性。

定理2. 设x^*为方程$x = \varphi(x)$的根，$\varphi'(x)$在x^*的邻域内连续，且

$$|\varphi'(x)| < 1,$$

则迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$具有局部收敛性。

定义2. 设$x_{k+1}=\varphi(x_k)$收敛到$\varphi(x)$的不动点x^*,设$e_k=x_k-x^*$，

若$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C>0$,则称该迭代为**$p$阶收敛**，其中 C 称为**渐近误差常数**。

注：$p=1$，称迭代线性收敛，$p=2$，称迭代平方收敛.

定理3. 设 x^* 为$x=\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi\in C^p(R(x^*))$，使得当$p\geq 2$时，有$\varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$，且$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0$，则 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在$R(x^*)$内 p 阶收敛。

证明： $x_{k+1}=\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\varphi'(x^*)(x_k-x^*)+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p\,!}(x_k-x^*)^p$