第三章

非线性方程(组)的数值解法

（2）

第4节 Newton迭代法

- 不动点迭代法$x_{k+1}=\varphi(x_k)$求根的关键就是构造合理的迭代函数使得迭代收敛于不动点，也即方程的根，常用的构造迭代函数有Newton迭代法，有理函数迭代法等等。

➢ 4.1 Newton迭代公式及其几何意义

取x_0作为初始近似值，将 $f(x)$在x_0做Taylor展开:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

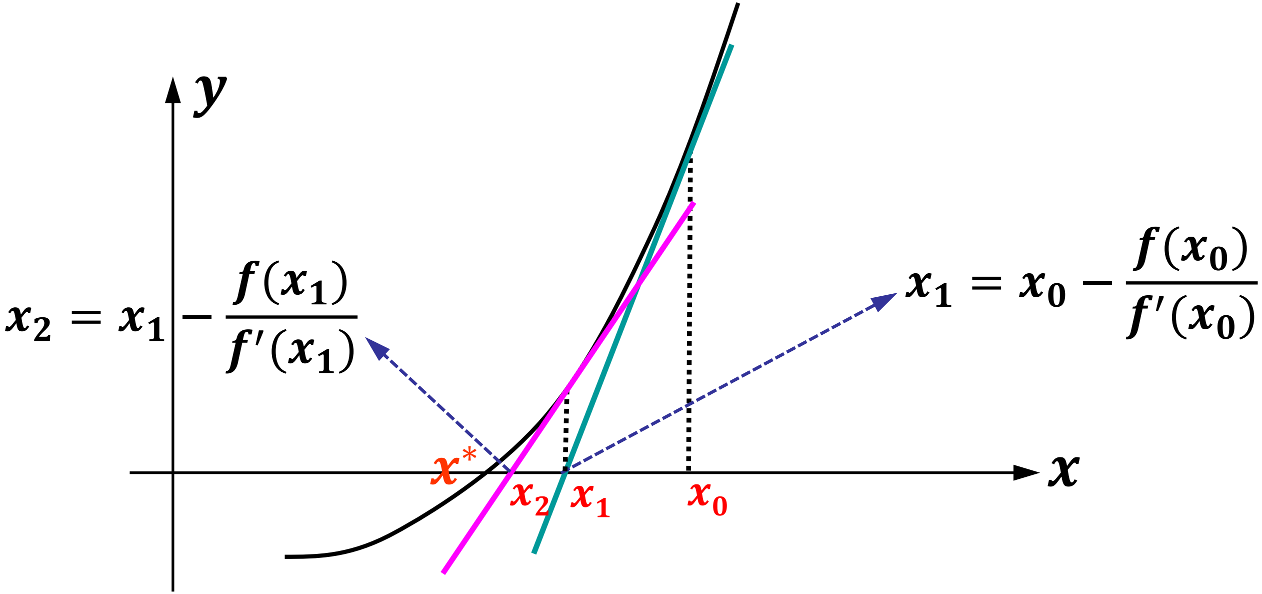
$$0 = f(x^*) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) \Rightarrow \ x^* \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$作为第一次的近似值

重复上述过程 $\Rightarrow$ $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

称为Newton迭代公式

牛顿法的几何意义 切线：$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$



牛顿法也称为切线法，迭代函数 $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

➢ 4.2 牛顿法的收敛性与收敛速度

定理1（局部收敛性定理） 设 $f(x) \in C^2[a,b]$，若 x^* 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的**单根**，即$f(x^*)=0, f'(x^*)\neq 0$，则存在 x^* 的邻域 $R(x^*)$使得任取初值$x_0 \in R(x^*)$，Newton 法产生的序列$\{x_k\}$ 收敛到 x^*，且满足

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^2}=\frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}.$$

至少平方收敛

证明： Newton迭代法是一种特殊的不动点迭代，其中$\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，则

由$f(x^*)=0$及 $\varphi'(x^*)=\dfrac{f''(x^*)f(x^*)}{f'^2(x^*)}\Rightarrow\varphi'(x^*)=0$

结合第二节定理3可知，迭代法收敛至少平方收敛。✓

证二： $0=f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\dfrac{f''(\xi_k)}{2!}(x^*-x_k)^2$

$$\Rightarrow x^*=\boxed{x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}-\frac{f''(\xi_k)}{2!\,f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

$$\Rightarrow\frac{x^*-x_{k+1}}{(x^*-x_k)^2}=-\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\Rightarrow\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^2}=\frac{|f''(x^*)|}{2|f'(x^*)|}=C.$$

例：设$f(x)=x^3+4x^2-10=0$，利用Newton迭代法求方程的根.

初始值$x_0=1.25$，要求$|x_{k+1}-x_k|<10^{-8}$。

解：$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3+4x_k^2-10}{3x_k^2+8x_k}$

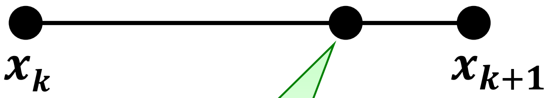
初始值$x_0=1.25$，迭代结果如表

k	x_k	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$
0	1.25	-
1	1.3723404255	0.1223⋯
2	1.3652546708	0.008⋯
3	1.3652300137	0.000024⋯
4	1.3652300134	0.3×10^{-9}

➢ 4.3 Newton下山法 /* Descent Method */

Newton下山法是一种针对**初值x_0偏离真实值x^***时的一种改进。

原理：若由x_k得到的x_{k+1}不能使$|f(x)|$减小，则在x_k和x_{k+1}之间找一个更好的点$\bar{x}_{k+1}$，使得$|f(\bar{x}_{k+1})| < |f(x_k)|$。



$\lambda x_{k+1} + (1-\lambda)x_k \;, \lambda \in [0,\ 1]$

$$\bar{x}_{k+1} = \lambda\left[x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\right] + (1-\lambda)x_k$$

$$= x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \lambda = \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2^k}$$

称$\bar{x}_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$为**Newton下山法.**

例 求方程 $x^3-x-1=0$ 在$x=1.5$附近的一个根x^*。

解1: Newton迭代法$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$

k	0	1	2	3
x_k	1.5	1.34783	1.32520	1.32472

注：若初始值取为0.6

k	0	1	2	3
x_k	0.6	17.90000	11.94680	7.98551

Newton下山法$x_{k+1}=x_k-\frac{1}{16}\times\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{1}{16}\times\frac{x_k^3-x_k-1}{3x_k^2-1}$

k	0	1
x_k	0.6	1.68125

迭代过程如果一直采用下山法未必好，
建议采用下山法与Newton迭代相结合。

➤ 4.4 Newton迭代法求重根 /* multiple root */

定义3 若x^*为方程$f(x)=0$的根，若对$x\neq x^*, f(x)$可以写成

$$f(x)=(x-x^*)^m q(x), \lim_{x\to x^*} q(x)\neq 0$$

则称x^*为$f(x)=0$的m重根。

定理4 设$f(x)\in C^m[a,b]$，则$x^*\in(a,b)$为方程$f(x)=0$的m重根的充分必要条件为

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0, f^{(m)}(x^*)\neq 0.$$

证明：由定义3和Leibniz法则易得.

定理5 设x^*为$f(x)=0$的$m(m\geq 2)$重根，则存在邻域$R(x^*)$

(a). 由**Newton迭代法**$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$得到的序列$\{x_k\}$收敛到$x^*$.

(b). 由**改进的Newton迭代法**$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$得到的序列$\{x_k\}$至少平方收敛到$x^*$.

证明：见教材$P113-114$

例 分别用Newton迭代法和改进的Newton迭代法求$f(x)=x^3-2x^2+x=0$的重根$x^*=1$附近的近似值，初始值取$x_0=2$。

解：因为$f(1)=0$，$f'(1)=0$，$f''(1)=2\neq 0$，所以$x^*=1$为2重根.

Newton迭代法$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{x_k^3-2x_k^2+x_k}{3x_k^2-2x_k-1}$

k	0	1	2	3	$\cdots$	18
x_k	2	1.6	1.347368	1.193617	$\cdots$	1.000007

改进的Newton迭代法$x_{k+1}=x_k-2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=x_k-2\frac{x_k^3-2x_k^2+x_k}{3x_k^2-2x_k-1}$

k	0	1	2	3	4
x_k	2	1.2	1.015385	1.000116	1.000000

若已知x^*为$f(x)=0$的m重根，则可用$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$迭代法求根，

若不知x^*为$f(x)=0$的m重根，如何建立迭代公式求根？

令$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-x^*)^m q(x)}{(x-x^*)^{(m-1)}[mq(x)+(x-x^*)q'(x)]}=\frac{(x-x^*)q(x)}{mq(x)+(x-x^*)q'(x)}$,

因为$q(x)$不含$(x-x^*)$的公因子，所以x^*为$u(x)$的单根。

构造求重根的Newton迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'^2(x_k)-f(x_k)f''(x_k)}$$

例 用Newton迭代法求$f(x)=x^3-2x^2+x=0$的重根$x^*=1$附近的近似值。

解：令$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{x^3-2x^2+x}{3x^2-4x-1}=\frac{x^2-x}{3x-1}$，则

$$x_{k+1}=x_k-\frac{u(x_k)}{u'(x_k)}=x_k-\frac{3x_k^2-4x_k+x}{3x_k^2-2x_k+1}$$

初始值取$x_0=2$，迭代结果如下表

k	0	1	2	3	4
x_k	2	0.888889	0.992248	0.999969	1.000000
x_k	2	1.2	1.015385	1.000116	1.000000

未知$x=1$为重根

已知$x=1$为重根

第5节 弦截法

➢ 5.1 背景

Newton迭代法：$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

1. 当初始值偏离根x^*时迭代收敛较慢，采用Newton下山法

$$x_{k+1} = x_k - \lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

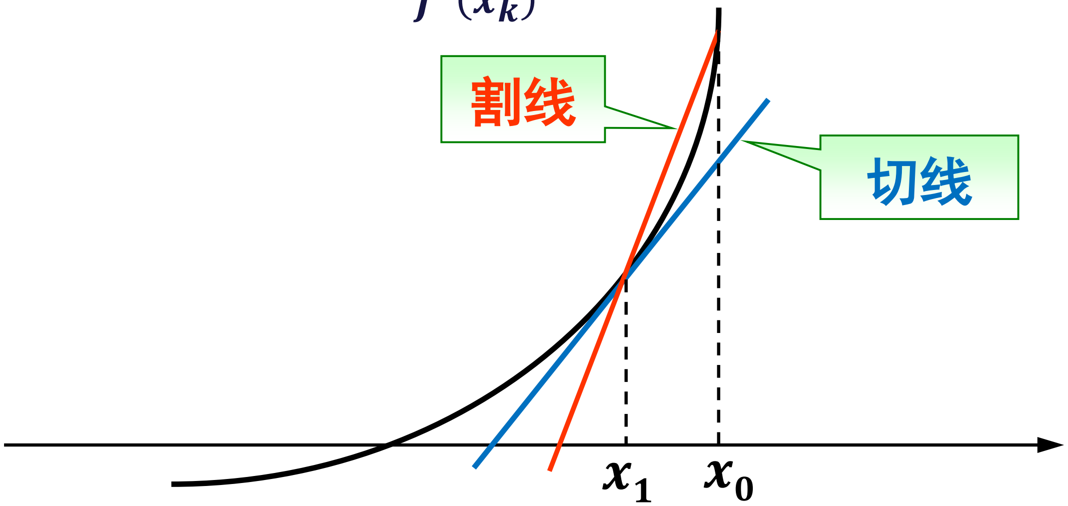
2. 当x^*为$f(x) = 0$的m重根时收敛较慢，采用改进Newton法

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \text{ 或 } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{f'^2(x_k) - f(x_k)f''(x_k)}$$

3. 以上迭代公式计算导数比较复杂，如何简化？

5.2 弦截法

Newton迭代法：$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$



令$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$得　弦截法：$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})} f(x_k)$

不同于Newton迭代法，弦截法需要两个初始点x_1, x_0。

定理1（局部收敛定理） 设$f(x)=0$，若

(1) $f(x)$在根x^*的某邻域内有**连续的二阶导数**，且$f'(x)\neq 0$；

(2) 任取x_1,x_0**属于该邻域**；

则由弦截法所得序列$\{x_k\}$ **p阶收敛**于根x^*，其中

$$P=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618.$$

证明：见教材$P116-117$

例 用弦截法求$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$的根，并使误差小于$10^{-6}$.

解：令$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})(x_k^3 + 4x_k^2 - 10)}{(x_k^3 + 4x_k^2 - 10) - (x_{k-1}^3 + 4x_{k-1}^2 - 10)}$

取初始值$x_0 = 1.25, x_1 = 1.3$,

代入$x^* = 1.3652300134140969\cdots$，得根和误差如下表

k	0	1	2	3	4	5
x_k	1.25	1.3	1.3691759244	1.3651009356	1.3652297641	1.3652300134
$\|e\|$	-	-	0.692×10^{-1}	0.408×10^{-2}	0.129×10^{-3}	0.249×10^{-6}