第六章

数值微积分(5 – 6)

第五节　复化求积公式

第六节　龙贝格Remberg算法

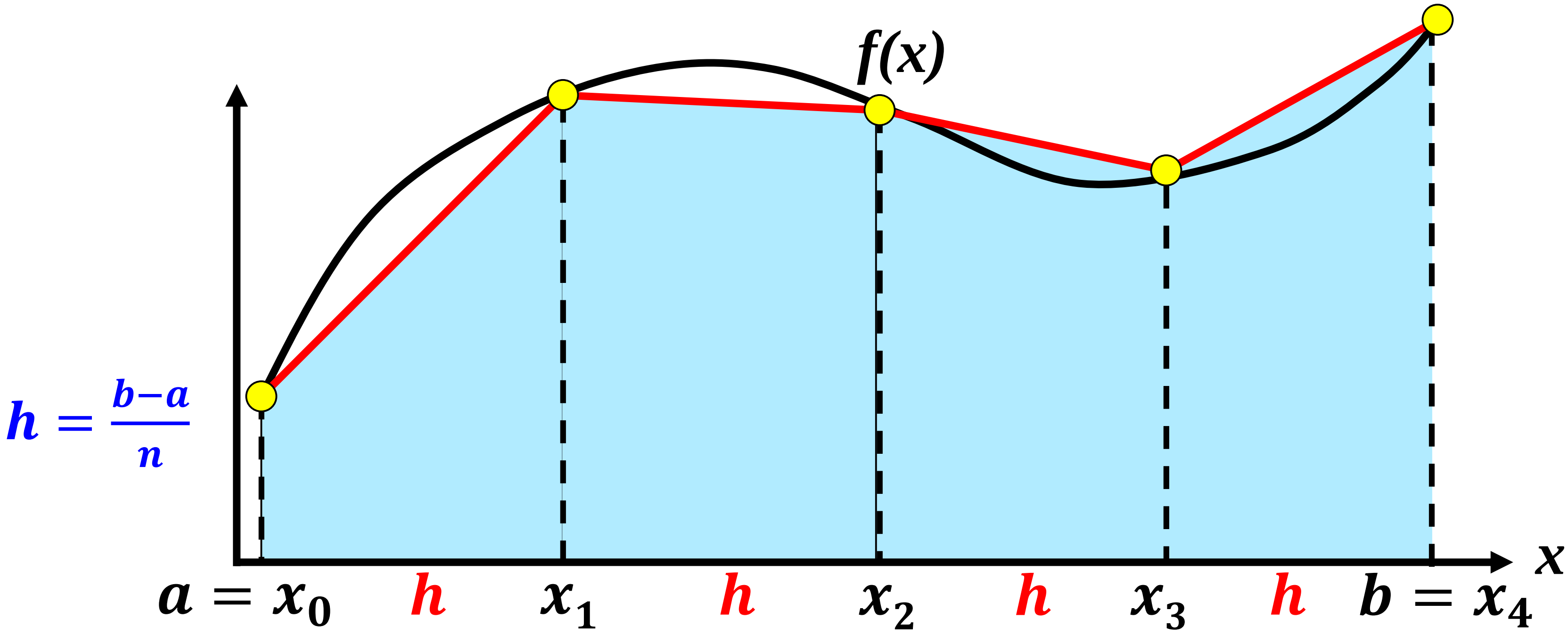
第5节 复化求积公式

➢ 5.1 复化求积的背景

高次插值有Runge 现象，高阶Newton-Cotes公式会出现数值不稳定，低阶Newton-Cotes公式有时又不能满足精度要求. 解决这个矛盾的办法是将积分区间$[a,b]$分成若干小区间，在每个小区间上用低阶求积公式计算，然后将它们加起来，这就是复化求积方法.

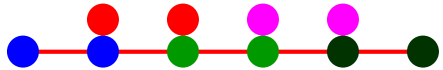
➢ 5.2 复化梯形公式

被积函数$f(x)$用分段线性插值函数代替



将区间$[a,b]$进行n等分$h=\frac{b-a}{n}$， 记$x_k=a+kh\ \ (k=0,1,\cdots,n)$,

在每个$[x_k,\ x_{k+1}]$上用梯形公式



$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]=T_n$$

如果$f(x)\in C^{(2)}[a,b]$，其截断误差为

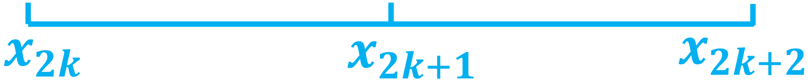
$$R_T(f)=\int_a^b f(x)dx-\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$

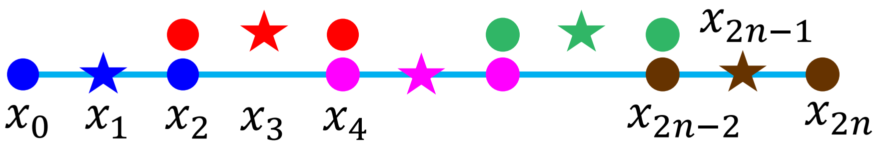
$$=\sum_{k=0}^{n-1}[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)]=-\frac{h^2}{12}(b-a)\frac{\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)]}{n}=-\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$$

➢ 5.3 复化辛普森公式

将区间$[a,b]$进行$2n$等分$h=\frac{b-a}{2n}$，记$x_k=a+kh\ (k=0,1,\cdots,2n)$，

$[x_{2k},\ x_{2k+2}]$上，$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})]$





$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1})+2\sum_{k=0}^{n-2} f(x_{2k+2})+f(b)\right]=S_n$$

截断误差：$R[f]=-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)=-\frac{(b-a)^5}{2880\cdot n^4}f^{(4)}(\xi)$

➢ 5.4 复化柯特斯公式

将区间$[a,b]$进行$4n$等分$h=\frac{b-a}{4n}$， 记$x_k=a+kh$ $(k=0,1,\cdots,n)$,

$$\int_a^b f(x)dx \approx C_n = \frac{4h}{90}\left[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{4k+1}) + 12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{4k+2}) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{4k+3}) + 14\sum_{k=1}^{n-2} f(x_{4k+4}) + 7f(b)\right]$$

截断误差为： $R_4^{(n)} = R_4[f] = -\frac{2(b-a)}{945}h^6 f^{(6)}(\eta),\ \eta \in (a,b)$

例1 用复化梯形和复化辛普森公式及下表计算积分$I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$.

x	$f(x)$
0	1
1/8	0.9973978
1/4	0.9896158
3/8	0.9767267
1/2	0.9588510
5/8	0.9361556
3/4	0.9088516
7/8	0.8771925
1	0.8414709

解 将积分区间[0,1]划分为8等份，复化梯形

$$T_8=\frac{1/8}{2}\left[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{7}f\left(\frac{k}{8}\right)\right]=0.945609$$

将区间[0,1]划分为4等份，复化辛普森法

$$S_4=\frac{1/4}{6}\left[f(0)+4\sum_{k=0}^{3}f\left(\frac{2k+1}{8}\right)+2\sum_{k=1}^{3}f\left(\frac{k}{4}\right)+f(1)\right]$$

$$=0.9460832$$

真实值$I=0.9460831$

例2 分别用复化梯形公式与复化辛普森公式计算积分$I=\int_0^1 e^x\,dx$的近似值，要求其截断误差小于等于$\frac{1}{2}\times 10^{-4}$，问各需取多少个节点?

解：$f(x)=e^x, f''(x)=f^{(4)}(x)=e^x$

在区间$[0,1]$上，$max|f''(x)| = max|f^{(4)}(x)| = e$

用复化梯形公式求积时，有$|R_N[f]| \le \frac{e}{12}h^2 \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$

由此得$h \le 0.0149$，则$N=\frac{1}{h} > 67.6$，需取$N+1=69$个节点。

用复化辛普森公式，有$|R_N[f]| \le \frac{e}{180}(h)^4 \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}$

由此得$h=\frac{1-0}{2N} \le 0.2399$，则$N > 2.0842$，需取个$2N+1=7$节点。

第6节 龙贝格(Lemberg)积分

➢ 6.1 变步长积分法

变步长的梯形法 在区间$[a,b]$上取$n+1$个等距节点, 记$h=\frac{b-a}{n}$

由复化梯形公式, 得

$$T_n=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})] \qquad (1)$$

若精度不够, 把各个小区间再对分, 插进节点 $x_{k+\frac{1}{2}}=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$

再由复化梯形公式得

$$T_{2n}=\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+2f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})] \qquad (2)$$

$T_n=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$ $T_{2n}=\frac{h}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+2f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right)+f(x_{k+1})\right]$

记 $H_n=h\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})$，则得递推公式：$T_{2n}=\frac{1}{2}(T_n+H_n)$

误差估计：

$$\frac{I-T_n}{h^2}=-\frac{1}{12}\sum_{k=0}^{n-1}hf''(\xi)\xrightarrow{n\to+\infty}-\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)\,dx=-\frac{1}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

同理可知 $\frac{I-T_{2n}}{(h/2)^2}\xrightarrow{n\to+\infty}-\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)\,dx=-\frac{1}{12}[f'(b)-f'(a)]$

故 $\frac{I-T_n}{I-T_{2n}}\approx 4$，即$I\approx T_{2n}+\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$.

注：若要使得$|I-T_{2n}|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{3}|T_{2n}-T_n|<\varepsilon$即可。

对于Simpson公式，则有

$$I \approx S_{2n} + \frac{1}{4^2-1}(S_{2n} - S_n) = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$$

注：若要使得$|I - S_{2n}| < \varepsilon$，只要 $\frac{1}{15}|S_{2n} - S_n| < \varepsilon$即可。

对于Cotes公式，则有

$$I \approx C_{2n} + \frac{1}{4^3-1}(C_{2n} - C_n) = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$

注：若要使得$|I - C_{2n}| < \varepsilon$，只要 $\frac{1}{63}|C_{2n} - C_n| < \varepsilon$即可。

例 若要求用辛普森方法计算积分$=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$的近似值，使误差不超过$0.5\times 10^{-6}$。($I=0.94608315$)

解 可先算出$S_1=\frac{1}{6}\left(\frac{\sin 0}{0}+\frac{4\sin(0.5)}{0.5}+\frac{\sin 1}{1}\right)=0.94614588$，

将区间分半（即二等分），并计算$S_2=0.94608693$

$$S_2=\frac{1}{12}\left(\frac{\sin 0}{0}+\frac{4\sin(0.25)}{0.25}+\frac{2\sin(0.5)}{0.5}+\frac{4\sin(0.75)}{0.75}+\frac{\sin 1}{1}\right),$$

将区间分半（即四等分），并计算$S_4=0.94608331,$

$$S_4=\frac{1}{24}\left(\frac{\sin 0}{0}+\frac{4\sin(0.125)}{0.125}+\frac{2\sin(0.25)}{0.25}+\frac{4\sin(0.375)}{0.375}+\frac{2\sin(0.5)}{0.5}\right.$$
$$\left.+\frac{4\sin(0.625)}{0.625}+\frac{2\sin(0.75)}{0.75}++\frac{4\sin(0.875)}{0.875}+\frac{\sin 1}{1}\right),$$

$|I-S_4|=0.16\times 10^{-6}<0.5\times 10^{-6}$ 因此S_4满足要求。

例3：计算椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的周长,使结果具有5位有效数字.

解：令$x=2\cos\theta, y=\sin\theta$

$$l=\int_L ds=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin^2\theta+1}\,d\theta$$

令$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3\sin^2\theta+1}\,d\theta$,利用变步长梯形公式计算,$f=\sqrt{1+3\sin^2\theta}$

$T_1=\frac{\pi}{4}(1+2)=2.3561945$, $T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{\pi}{4}f(\frac{\pi}{4})=2.4192078$,

$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{\pi}{8}\left(f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)=2.42210310$,

$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{\pi}{16}(f(\frac{\pi}{16})+f(\frac{3\pi}{16})+f(\frac{5\pi}{16})+f(\frac{7\pi}{16}))=2.42211206$

$\frac{1}{3}|T_8-T_4|=0.299\times10^{-7}<0.5\times10^{1-6}$ 故有6位有效数字。

$l\approx 4T_8\approx 9.6884$

利用变步长Simpson公式计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin^2\theta + 1}\, d\theta$

$$S_1 = \frac{\pi}{12}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2.4411628,$$

$$S_2 = \frac{\pi}{24}\left(f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2.4228305$$

$$S_4 = \frac{\pi}{48}\left[f(0) + 4f\left(\frac{\pi}{16}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{8}\right) + 4f\left(\frac{3\pi}{16}\right)\right.$$
$$\left. + 2f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 4f\left(\frac{5\pi}{16}\right) + 2f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 4f\left(\frac{7\pi}{16}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 2.4221150$$

$\frac{1}{15}|S_4 - S_2| = 0.477 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{1-5}$，故有5位有效数字。

$$l = 4I \approx 4 \times 2.42211 \approx 9.6884$$

➢ 6.2 龙贝格(Lemberg)积分

设$T_1 = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big), T_2 = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + b\right)$

$$\frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1 = \frac{b-a}{3}\left(f(a) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{b-a}{6}\big(f(a) + f(b)\big)$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = S_1$$

从而可推得$S_{2^k} = \frac{4}{3}T_{2^{k+1}} - \frac{1}{3}T_{2^k}, k = 0, 1, 2, \cdots$

设$S_1=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$

$$S_2=\frac{b-a}{12}\left(f(a)+4f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+4f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+f(b)\right)$$

$$\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1=\frac{b-a}{45}\left(4f(a)+16f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+8f\left(\frac{a+b}{2}\right)+16f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+4f(b)\right)$$

$$-\frac{b-a}{90}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

$$=\frac{b-a}{90}\left(7f(a)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7f(b)\right)=C_2$$

从而可推得$C_{2^k}=\frac{4}{3}S_{2^{k+1}}-\frac{1}{3}S_{2^k},k=0,1,2,\cdots$

记号$R_{2^k}=\frac{64}{63}C_{2^{k+1}}-\frac{1}{63}C_{2^k}, k=0,1,2,\cdots$

定义 将区间$[a,b]$进行$2^k(k=0,1,2,\cdots)$等分，T_{2^k},S_{2^k},C_{2^k}分别表示第k次等分时，进行的梯形积分公式，辛普森公式，柯特斯公式，则称下表定义的积分算法为**龙贝格算法**：

k	梯形	辛普森	柯斯特	龙贝格
0	T_{2^0}			
1	T_{2^1}	S_{2^0}		
2	T_{2^2}	S_{2^1}	C_{2^0}	
3	T_{2^3}	S_{2^2}	C_{2^1}	R_{2^0}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$S_{2^{k-1}}=\frac{4}{3}T_{2^k}-\frac{1}{3}T_{2^{k-1}}$$

$$C_{2^{k-2}}=\frac{16}{15}S_{2^{k-1}}-\frac{1}{15}S_{2^{k-2}}$$

$$R_{2^{k-3}}=\frac{64}{63}C_{2^{k-2}}-\frac{1}{63}C_{2^{k-3}}$$

例4 用龙贝格方法计算积分$\int_1^2 e^{1/x}\mathrm{d}x$的近似值。

解：计算如下表

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}} = \frac{4}{3}T_{2^k} - \frac{1}{3}T_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}} = \frac{16}{15}S_{2^{k-1}} - \frac{1}{15}S_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}} = \frac{64}{63}C_{2^{k-2}} - \frac{1}{63}C_{2^{k-3}}$
0	2.183501550			
1	2.065617795	2.026323210		
2	2.031892868	2.020651226	2.020273094	
3	2.023049868	2.020102201	2.020065599	2.020062306
4	2.020808583	2.020058773	2.020058773	2.020058665

$$S_{2^{k-1}}=\frac{4}{3}T_{2^k}-\frac{1}{3}T_{2^{k-1}}\qquad C_{2^{k-2}}=\frac{16}{15}S_{2^{k-1}}-\frac{1}{15}S_{2^{k-2}}$$

$$R_{2^{k-3}}=\frac{64}{63}C_{2^{k-2}}-\frac{1}{63}C_{2^{k-3}}$$

为了更好的描述龙贝格算法，记号$T_{2^k}=T^0_{2^k}$，$S_{2^k}=T^1_{2^k}$，

$C_{2^k}=T^2_{2^k},R_{2^k}=T^3_{2^k},\cdots,T^m_{2^k},\cdots$，从而有

$$T^1_{2^{k-1}}=\frac{4}{3}T^0_{2^k}-\frac{1}{3}T^0_{2^{k-1}},\quad T^2_{2^{k-2}}=\frac{16}{15}T^1_{2^{k-1}}-\frac{1}{15}T^1_{2^{k-2}},$$

$$\cdots,T^m_{2^{k-m}}=\frac{4^m}{4^m-1}T^{m-1}_{2^{k-m+1}}-\frac{1}{4^m-1}T^{m-1}_{2^{k-m}},\cdots$$

例5 对区间[0, 1]进行5次等分，计算积分$\int_0^1 x^{3/2}\mathrm{d}x$的近似值。

解：$T_{2^{k-m}}^{m}=\dfrac{4^m}{4^m-1}T_{2^{k-m+1}}^{m-1}-\dfrac{1}{4^m-1}T_{2^{k-m}}^{m-1}$，

$$T_2^5=\frac{1024}{1023}T_4^2-\frac{1}{1023}T_2^2=0.400002$$

k	2^k	$T_{2^k}^0$	$T_{2^{k-1}}^1$	$T_{2^{k-2}}^2$	$T_{2^{k-3}}^3$	$T_{2^{k-4}}^4$	$T_{2^{k-5}}^5$
0	1	0.500000					
1	2	0.426777	0.402369				
2	4	0.407018	0.400432	0.400302			
3	8	0.401812	$\boxed{0.400077}$	0.400054	0.400050		
4	16	0.400463	0.400014	0.400009	$\boxed{0.400008}$	0.400008	
5	32	0.400118	0.400002	0.400002	0.400002	0.400002	$\boxed{0.400002}$

$$T_4^1=\frac{4}{3}T_8^0-\frac{1}{3}T_4^0=0.400077$$

$$T_2^3=\frac{64}{63}T_4^2-\frac{1}{63}T_2^2=0.400008$$