第二章

线性方程组的数值解法

(二)

第5节 解方程组的迭代法

/* Iterative Techniques for Solving Linear Systems */

求解 $A\vec{x} = \vec{b}$

思路

将$A\vec{x} = b$等价改写为$\vec{x} = B\vec{x} + f$形式，建立迭代$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + f$，从初始值$\vec{x}^{(0)}$出发，得到序列$\{\vec{x}^{(k)}\}$

计算精度可控，特别适用于求解系数为大型稀疏矩阵 /* sparse matrices */ 的方程组。

研究内容：

- 如何建立迭代格式？
- 收敛速度？
- 向量序列的收敛条件？
- 误差估计？

➢5.1 Jacobi迭代法 /* Jacobi Iterative Method*/

例1 求解方程组
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

解：我们分别从上面的三个方程中分离出x_1, x_2, x_3，得

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.72 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.2x_3 + 0.83 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.84 \end{cases}$$

据此可建立迭代公式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} + 0.84 \end{cases}$$

设取迭代初值$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$,下表记录了迭代结果，当迭代次数$k$增大时，迭代值$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$会越来越逼近方程组的精确解$x_1^* = 1.1, x_2^* = 1.2, x_3^* = 1.3$.

0	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.97100	1.07000	1.15000
4	1.08535	1.18534	1.28282
6	1.09834	1.19834	1.29504
8	1.09981	1.19941	1.29978
9	1.09994	1.19994	1.29992

Jacobi迭代法的向量形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2) \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases}$$

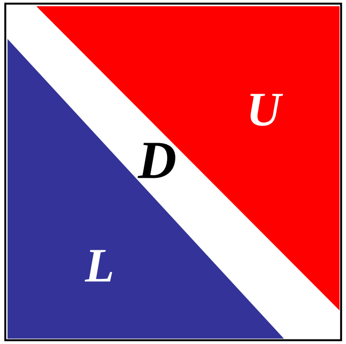
$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \qquad (1)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

定义1 称该迭代格式(1)为Jacobi迭代法的向量形式

Jacobi迭代法的矩阵形式

写成矩阵形式：$A =$



$$L = \begin{pmatrix} 0 & & \mathbf{0} \\ a_{21} & \ddots & \\ \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff (D + L + U)\vec{x} = \vec{b}$$

$$\iff D\vec{x} = -(L + U)\vec{x} + \vec{b}$$

$$\iff \vec{x} = \underbrace{-D^{-1}(L + U)}_{B}\vec{x} + \underbrace{D^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b} \quad (2)$$

定义2 称该迭代格式(2)为Jacobi迭代法的矩阵形式

➢5.2 Gauss-Seidel 迭代法 /*Gauss - Seidel Iterative Method*/

Jacobi迭代的计算一般按$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_n^{(k+1)}$的次序进行，注意到计算$x_i^{(k+1)}$时, $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$已经算好，而Jacobi迭代法并不利用这些最新的近似值计算，而仍用$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$这启发我们对Jacobi迭代进行修改。

例 对前面所举例子，作修正得

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + .72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.84 \end{cases}$$

取初值$x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$,下表为迭代结果

0	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.72000	0.90200	1.16400
2	1.04308	1.16719	1.28205
3	1.09313	1.19947	1.29972
4	1.09913	1.19947	1.29972
5	1.09989	1.19993	1.29996
6	1.09999	1.19999	1.30000

Gauss-Seidel迭代分量形式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1\right) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2\right) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left(-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3\right) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n\right) \end{cases}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

$$i = 1, 2, \cdots, n$$

定义3 称该迭代格式为高斯-赛德尔迭代法的公式

Guass-Seidel迭代的矩阵形式

写成矩阵形式：

$$A\vec{x}=\vec{b} \iff (D+L+U)\vec{x}=\vec{b}$$

$$\iff D\vec{x}=-(L+U)\vec{x}+\vec{b}$$

$$\Rightarrow D\vec{x}^{(k+1)}=-(L\vec{x}^{(k+1)}+U\vec{x}^{(k)})+\vec{b}$$

$$\iff (D+L)\vec{x}^{(k+1)}=-U\vec{x}^{(k)}+\vec{b}$$

$$\iff \vec{x}^{(k+1)}=\underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{B}\vec{x}^{(k)}+\underbrace{(D+L)^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}$$

定义4 称该迭代格式为高斯-赛德尔迭代法的矩阵形式

➢5.3 逐次松弛(*SOR*)迭代法 /* Successive Over Relaxation Method */

*SOR*迭代的向量形式

*SOR*是*Gauss − Seidel*迭代法的一种加速方法，是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一。它具有计算公式简单、程序设计容易、占用计算机内存较少等优点，但需要选择好的加速因子（最佳松弛因子）。

高斯-赛德尔迭代：$\boxed{x_i^{(k+1)}} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$

取$x_i^{(k+1)}, x_i^{(k)}$加权平均得新的$x_i^{(k+1)}$，即$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega x_i^{(k+1)}$，故

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

定义5 称该迭代格式为*SOR*迭代法的向量形式，ω称为松弛因子。

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

注1. $0 < \omega < 1$时，SOR迭代为低松弛迭代，当G-S迭代发散时，使之收敛。

$\omega > 1$时，称之为超松弛迭代，当G-S迭代收敛时，使之加速收敛。

注2. $\omega = 1$时，SOR迭代即Gauss-Seidel迭代。

SOR迭代的矩阵形式

$$\vec{x}^{(k+1)} = (1-\omega)\vec{x}^{(k)} + \omega D^{-1}(\vec{b} - L\vec{x}^{(k+1)} - U\vec{x}^{(k)})$$

$$\Rightarrow D\vec{x}^{(k+1)} = (1-\omega)D\vec{x}^{(k)} + \omega(\vec{b} - L\vec{x}^{(k+1)} - U\vec{x}^{(k)})$$

$$\Rightarrow (D+\omega L)\vec{x}^{(k+1)} = [(1-\omega)D - \omega U]\,\vec{x}^{(k)} + \omega\,\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{x}^{(k+1)} = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]\,\vec{x}^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}\vec{b}$$

定义6 称该迭代格式为SOR矩阵形式

第6节 迭代法的收敛性

思路

将$A\vec{x}=b$等价改写为$\vec{x}=B\vec{x}+f$形式，建立迭代$\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+f$，从初始值$\vec{x}^{(0)}$出发，得到序列$\{\vec{x}^{(k)}\}\xrightarrow{?}$解$\vec{x}^*$

定理1 设线性方程组由迭代$\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+f$产生的序列$\{\vec{x}^{(k+1)}\}$收敛到惟一解的**充分必要条件**是迭代矩阵$B$的谱半径$\rho(B)<1$. ◆【称$R(B)=-ln(\rho(B))$为迭代法的收敛速度】

证：$\begin{cases}\vec{x}^* &= B\vec{x}^*+f\\ \vec{x}^{(k+1)} &= B\vec{x}^{(k)}+f\end{cases}\Rightarrow \vec{x}^{(k+1)}-\vec{x}^*=B(\vec{x}^{(k)}-\vec{x}^*)=\cdots=B^{k+1}(\vec{x}_0-\vec{x}^*).$

$$\lim_{k\to\infty}(\vec{x}^{(k+1)}-\vec{x}^*)=0\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}B^{k+1}=0\Leftrightarrow \rho(B)<1.$$

例1：已知方程组$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -0.32 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$，考察解此方程组的*Jacobi*迭代法是否收敛，它的收敛速度为多少。

解：方程组的*Jacobi*迭代阵$B = -D^{-1}(L+U)$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -0.32 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0.32 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ -0.32 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -0.8, \lambda_2 = 0.8$$

因$\rho(B) = 0.8$，故方程组的*Jacobi*迭代收敛。

其渐近收敛速度$R(B) = -\ln\rho(B) = -\ln 0.8 = 0.223$

例2：已知方程组$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$，分别判断用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法解下列方程组，并判断收敛性。P91 Ex15.

解：Jacobi迭代格式$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-2x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}+1 \\ x_2^{(k+1)}=-x_1^{(k)}-x_3^{(k)}+1 \\ x_3^{(k+1)}=-2x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}+1 \end{cases}$

Gauss-Seidel迭代格式$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-2x_2^{(k)}+2x_3^{(k)}+1 \\ x_2^{(k+1)}=-x_1^{(k+1)}-x_3^{(k)}+1 \\ x_3^{(k+1)}=-2x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}+1 \end{cases}$

方程组的*Jacobi*迭代矩阵$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$|\lambda I - B_J| = \lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，所以$\rho(B_J) = 0 < 1$，格式收敛.

*Gauss-Seidel*迭代矩阵$B_G = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

易知$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，所以$\rho(B_G) = 2 > 1$，格式发散.

定理2（充分条件） 如果矩阵的某种范数$\|B\| = q < 1$,则迭代收敛，且有下列误差估计：

$$(1)\ \|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)}\| \le \frac{q}{1-q}\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\|$$ 停机准则

$$(2)\ \|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)}\| \le \frac{q^{k+1}}{1-q}\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}_0\|$$ 误差表达式及收敛速度

证明：因为$\rho(B) \le \|B\|$，所以由定理1可知，该迭代格式收敛.

$$（1）\quad \vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)} = B(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)}) = B(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)} + \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)})$$

$$\therefore\quad \|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)}\| \le \|B\| \cdot (\|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)}\| + \|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\|)$$

故：$\left\|x^* - \vec{x}^{(k+1)}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\left\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\right\| = \frac{q}{1-q}\left\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\right\|$。

(2) $||\vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)}|| \le \dfrac{q^{k+1}}{1-q}||\vec{x}^{(1)} - \vec{x}_0||$

证明（2） $\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} = B(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}) = \cdots = B^k(\vec{x}^{(1)} - \vec{x}_0)$

$$\therefore \quad ||\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}|| \le ||B||^k \cdot ||\vec{x}^{(1)} - \vec{x}_0||$$

$$||x^* - \vec{x}^{(k+1)}|| \le \frac{||B||}{1-||B||}||\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}|| \le \frac{||B||^{k+1}}{1-||B||}||\vec{x}^{(1)} - x_0||.$$

$$= \frac{q^{k+1}}{1-q}||\vec{x}^{(1)} - x_0||.$$

注1. 迭代矩阵的特征值易算时，利用谱半径判断收敛性；

注2. 迭代矩阵的特征值不易计算时，利用矩阵$\|B\|_1$或$\|B\|_\infty$判断；

注3. $\|B\|_1$或$\|B\|_\infty$越小，收敛速度越快。

例3：已知方程组$\begin{cases} -4x_1+x_2+2x_3=2 \\ 2x_1+5x_2-x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-1 \end{cases}$，分别判断用Jacobi迭代法和Gauss-Seidel迭代法解下列方程组，并判断收敛性，比较收敛速度，若收敛的精度要达到10^{-4}，初始值为{0，0，0}时，采用G-S方法，至少要迭代多少步。P91 Ex16.

解：Jacobi迭代格式
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_2^{(k)}+\frac{1}{2}x_3^{(k)}-\frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_1^{(k)}+\frac{1}{5}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{2}x_1^{(k)}+\frac{1}{3}x_2^{(k)}+\frac{1}{6} \end{cases}$$

Gauss-Seidel迭代格式
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{4}x_2^{(k)}+\frac{1}{2}x_3^{(k)}-\frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)}=-\frac{2}{5}x_1^{(k+1)}+\frac{1}{5}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)}=-\frac{1}{2}x_1^{(k+1)}+\frac{1}{3}x_2^{(k+1)}-\frac{1}{6} \end{cases}$$

方程组的Jacobi迭代矩阵$B_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

$\|B_J\|_1 = max\left\{\frac{2}{5}+\frac{1}{2},\frac{1}{4}+\frac{1}{3},\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right\} = \frac{9}{10} < 1$,所以格式收敛.

Gauss-Seidel迭代矩阵$B_G = -(D+L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{19}{120} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\|B_G\|_1 = max\left\{0,\frac{61}{120},\frac{3}{4}\right\} = 0.75 < 1$，所以格式收敛.

因为 $0.75 < 0.9$，所以Gauss-Seidel收敛速度比Jacobi迭代法快。

(4) 因为初始值为$\{0,0,0\}$，代入G-S迭代公式

$$\text{Gauss-Seidel迭代格式}\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{1}{2}x_3^{(k)} - \frac{1}{2} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{5}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{2}x_1^{(k+1)} + \frac{1}{3}x_2^{(k+1)} - \frac{1}{6} \end{cases}$$

$x^{(1)} = \{-\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{13}{60}\}$，且$\|x^{(1)} - x^0\|_1 = \sum_{i=1}^{3}(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{13}{60}) = \frac{67}{60}$

$$\left\|\vec{x}^* - \vec{x}^{(k+1)}\right\| \le \frac{q^{k+1}}{1-q}\left\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}_0\right\| = \frac{(3/4)^{k+1}}{1-3/4} \times \frac{67}{60} < 10^{-4}$$

即$(3/4)^{k+1} < \frac{15}{67} \times 10^{-4}$，解得$k+1 > 37.21$，故最少需要38次.

➢ 一些特殊方程组的迭代法收敛性判别

定理3 若矩阵A是**严格对角占优**，则Jacobi和Gauss-Seidel迭代均收敛。

如例3，严格对角占优，所以两种迭代法都是收敛的。

定理4 若矩阵A中$a_{ii} \neq 0$，则SOR迭代法收敛的必要条件是

$$0 < \omega < 2.$$

定理5 若A为**正定矩阵**，且$0 < \omega < 2$，则SOR迭代法收敛.

定理6 若矩阵A为**正定的三对角矩阵**，则Jacobi迭代和G-S迭代的迭代矩阵的谱半径满足$\rho(B_G)=\rho^2(B_J)<1$，且SOR迭代有最优松弛因子$\omega=\dfrac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}}$，并$\rho(B_\omega)=\omega-1$.

例3：已知方程组$\begin{cases}-4x_1+x_2+2x_3=2\\2x_1+5x_2-x_3=0\\3x_1-2x_2+6x_3=-1\end{cases}$，求$SOR$迭代法的最佳松弛因子。

解：Jacobi迭代矩阵$B_J=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\-\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$

$$\rho(B_J)=0.2605$$

$$\omega=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}}=1.0176$$

第7节 方程组的性态和误差分析

定义1. 若方程组$Ax=b$，由A或b的微小误差引起方程组解的很大误差，称该方程组是**病态的**，否则称为**良态的**。矩阵A也也称为病态矩阵或良态矩阵。

定义2. 设方阵A是非奇异矩阵，称

$$cond(A)_v = \|A\|_v \cdot \left\|A^{-1}\right\|_v$$

为方阵A关于范数v的条件数.

定理1 若$cond(A)_v$接近1, 则A为良态矩阵；

若$cond(A)_v \gg 1$, 则A为病态矩阵。

例4. 设$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$，求$\|A\|_1$，$cond(A)_1$

解 $\|A\|_1=\max\{|-2|+|4|,|3|+|-5|\}=8$

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & -3\\ -4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_1=\max\left\{\left|\frac{5}{2}\right|+|2|,\left|\frac{3}{2}\right|+|1|\right\}=\frac{9}{2},$$

$$cond(A)_1=8\times\frac{9}{2}=36.$$