合肥工业大学研究生考试试卷

课程名称 数值分析 考试日期____ 学院 全校 2017 级研究生 姓名____ 年级____ 班级____ 学号____ 得分____

装

订

线

一、计算题 (每小题 5 分，满分共 30 分)

1. 已知近似值 $x^*=0.a_1a_2\cdots a_n\times10^m$ 有 5 位有效数字，试求其相对误差限。

P22 练习 6.(1)(2)

设 $x^*=\pm0.a_1a_2\cdots a_n\times10^m$，

$$\frac{|x^*-x|}{|x^*|}\le\frac{0.5\times10^{m-l}}{|x^*|}\le\frac{0.5\times10^{m-l}}{0.a_1\times10^m}=\frac{1}{2a_1}\times10^{-l+1}$$

$$=\frac{1}{2a_1}\times10^{-4}\le0.5\times10^{-4}，其中 l=5.$$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$，求 $\mathrm{Cond}(A)_\infty$.

$$\|A\|_\infty=6, A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1/2\\ -2 & -3/2\end{pmatrix}, \|A^{-1}\|_\infty=\frac{7}{2};$$

$$\mathrm{Cond}(A)_\infty=\|A\|\|A^{-1}\|=6\times\frac{7}{2}=21$$

3. 设 $f(x)=(-3x^2+5)^2$，求函数 $f(x)$ 的差商 $f[2^0,2^1,2^2,2^3,\pi]$.

$f[2^0,2^1,2^2,2^3,\pi]=9$

4. 设 $f(x)=x^4$.用 Lagrange 余项公式求 $f(x)$ 关于节点 -1, 0, 1, 2 的 3 次 Lagrange 插值多项式 $p_3(x)$.

p143,用 Lagrange 余项公式，例如求 $f(x)=x^4$ 关于节点 -2 -1, 0, 1 的 3 次 Lagrange 插值多项式 $p_3(x)$.

法 1: $r_3(x)=f(x)-p_3(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\omega_3(x)=(x+1)x(x-1)(x-2)$

$$p_3(x)=f(x)-r_3(x)=x^4-(x+1)x(x-1)(x-2)$$

$$=x^4-(x^4-2x^3-x^2+2x)=2x^3+x^2-2x$$

法 2:

$$y_i=x_i^4=1,0,1,16; i=0,1,2,3; l_0(x)=-\frac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$l_1(x)=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)(x-2), l_2(x)=-\frac{1}{2}(x+1)x(x-2),$$

$$l_3(x)=\frac{1}{6}(x+1)x(x-1),$$

$$p_3(x)=\sum_{i=0}^{3}y_il_i(x)=\omega_4(x)\sum_{i=0}^{3}\frac{x_i^4}{(x-x_i)\omega'(x_i)}=2x^3+x^2-2x,$$

5. 设函数 $f(0.9)=1.4706$, $f(1.0)=2.3257$, $f(1.1)=-0.1653$,用三点数值微分公式计算 $f''(1.0)$ 的近似值。

$$f''(1.0)=\frac{1}{h^2}(y_0-2y_1+y_2)=-334.61$$

6. 用 2 点古典 Gauss 求积公式计算 $I=\int_{-1}^{1}\sin x^2\,\mathrm{d}x$ 的近似值(保留 4 位小数)。

$$I=\int_{-1}^{1}\sin x^2\,\mathrm{d}x=1\times\sin(-\frac{\sqrt{3}}{3})^2+1\times\sin(\frac{\sqrt{3}}{3})^2\approx 0.6544\text{；}$$

二、**(本题满分 10 分)** 对下列方程组建立收敛的 Jacobi 迭代格式和 Gauss-Seidel 迭代格式，并说明收敛的理由。

$$\begin{cases}7x_1-x_2+9x_3=1,\\-10x_1+4x_2+3x_3=1,\\x_1+8x_2-6x_3=1.\end{cases}\quad\begin{cases}-10x_1+4x_2+3x_3=1,\\x_1+8x_2-6x_3=1,\\7x_1-x_2+9x_3=1.\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}-10&4&3\\1&8&-6\\7&-1&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\7&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10&0&0\\0&8&0\\0&0&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&4&3\\0&0&-6\\0&0&0\end{pmatrix}=L+D+U,\ b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$Ax=b\Rightarrow x^{(k+1)}=B_Jx^{(k)}+f_J$,

其中 $B_J=E-D^{-1}A=\begin{pmatrix}0&4/10&-3/10\\-1/8&0&6/8\\-7/9&1/9&0\end{pmatrix}$, $f_J=D^{-1}b$, $\|B_J\|_\infty=\frac{8}{9}<1$,

故收敛. $Ax=b\Rightarrow x^{(k+1)}=-(D+L)^{-1}Ux^{(k)}+(D+L)^{-1}b$,

$x^{(k+1)}=B_Gx^{(k)}+f_G$, $(D+L)^{-1}=\begin{pmatrix}-1/10&0&0\\1/80&1/8&0\\19/240&1/72&1/9\end{pmatrix}$,

其中 $B_G=-(D+L)^{-1}U=-\begin{pmatrix}0&-0.4&-0.3\\0&0.05&-0.7125\\0&1/180&-0.4\end{pmatrix}$, $f_G=(D+L)^{-1}b=\begin{pmatrix}-1/10\\11/80\\49/240\end{pmatrix}$，两者迭代矩阵均为对角占优矩阵，故均收敛。

三、**(本题满分 10 分)** 用下列表中的数据求次数不超过 4 次的插值多项式 $p(x)$，使之满足 $p(x_i)=f(x_i)$，$i=0,1,2$，和 $p'(x_0)=f'(x_0)$, $p'(x_1)=f'(x_1)$.(要求写出差商表)

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	3	−2
$f'(x_i)$	1	−2	

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4}]$
0	1				
0	1	1			
1	3	2	1		
1	3	−2	−4	−5	
2	−2	−5	−3	0.5	2.75

$$p_4(x)=1+x+x^2-5x^2(x-1)+2.75x^2(x-1)^2$$

$$=1+x+8.75x^2-10.5x^3+2.75x^4$$

四、**(本题满分 10 分)** 求拟合下列表中数据的形如 $y=a\mathrm{e}^{bx}$ 最小二乘函数，并计算总误差 Q.

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	2.1	1.3	1.0	0.7	0.5

P199-200 例 5.2.3

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.5	1	1.5	2
y_i	2.1	1.3	1.0	0.7	0.5
$\ln y_i$	0.7419	0.2624	0	−0.3567	−0.6931

$m=4, n=1$

$\ln y=bx+\ln a$, $\alpha_0=\ln a$, $\alpha_1=b$, $s=\ln y$, $t=x$,

$\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x$， $\varphi_0=(1,1,1,1,1), \varphi_1=(0,0.5,1,1.5,2)$，

$S=(0.7419, 0.2624, 0, -0.3567, -0.6931)$，

$(\varphi_0,\varphi_0)=5, (\varphi_0,\varphi_1)=5, (\varphi_0,S)=-0.0455,$

$(\varphi_1,\varphi_0)=5, (\varphi_1,\varphi_1)=7.5, (\varphi_1,S)=-1.79005,$

$$\begin{cases}5\alpha_0+5\alpha_1=-0.0455\\ 5\alpha_0+7.5\alpha_1=-1.79005\end{cases} \text{解得} \begin{cases}\alpha_0=0.68872\approx 0.6887\\ \alpha_1=-0.69782\approx -0.6978\end{cases}$$

$\alpha_0=\ln a$，$a=e^{\alpha_0}=1.9911$，$b=\alpha_1=-0.6978$，

$y=1.9911\mathrm{e}^{-0.6978x}$

$\overline{y}_0=1.9911, \overline{y}_1=1.4046, \overline{y}_2=0.9909, \overline{y}_3=0.6991, \overline{y}_4=0.4932$

$$Q=\sum_{i=0}^{4}(y_i-ae^{bx_i})^2=\sum_{i=0}^{4}(y_i-\overline{y}_i)^2=0.02293$$

五、(本题满分 10 分) (1) 验证梯形求积公式的代数精度是 1；

(2) 设 $I=\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x$.已知 $f(1)=f(4)=a$ (a 未知), $f(2)=3$, $f(3)=4$,

用 $n=3$ (即将积分区间 [1, 4] 分成 3 段)的复化梯形求积公式计算 I，得 6；用 Simpson 求积公式计算 I，得 5.5，求 a 和 $f(2.5)$.

$f(x)=1, x, x^2$；

$$T=\frac{b-a}{2}(1+1)=b-a=\int_a^b 1\,\mathrm{d}x,$$

$$T=\frac{b-a}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)=\int_a^b x\mathrm{d}x$$

$$T=\frac{b-a}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}(b-a)(a^2+b^2)$$

$$\neq\int_a^b x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(b-a)(a^2+ab+b^2)$$

所以梯形求积公式的代数精度是 1；

$$I=T_3=\frac{1}{2}[2a+2(f(2)+f(3))]=6, a+f(2)+f(3)=6;$$

$$I=S_1=\frac{3}{6}[2a+4f(2.5)]=5.5, a+2f(2.5)=5.5,$$

解得 $a=-1$，$f(2.5)=\dfrac{11}{4}$.

六、(本题满分 10 分) (1) 用 Newton 迭代法求方程 $x(x+1)^2-1=0$ 在 0.4 附近的实根 x^* 的近似值 x_3 (取初值 $x_0=0.4$)。

(2) 用弦截法求方程 $x(x+1)^2-1=0$ 在 0.4 附近的实根 x^* 的近似值 x_3 (取初值 $x_0=0.4$，$x_1=0.45$)。P118,例 3.5.1 用弦截法求方程的实根

$f(x)=x^3+2x^2+x-1$，$f'(x)=3x^2+4x+1$；

$$\varphi(x)=x-\frac{x^3+2x^2+x-1}{3x^2+4x+1}, x_{k+1}=\varphi(x_k)$$,得 $x_1=0.4701$， $x_2=0.4656$，

$x_3=0.4656$；

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}), k=1,2,\cdots$$

得 $x_2=0.4666$， $x_3=0.4656$

七、(本题满分 10 分) (1) 写出 Euler 方法和改进的 Euler 方法的增量函数。

(2) 用改进的 Euler 方法求解下列初值问题，取步长 $h = 0.5$.

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) - 2t\big/ y(t), \quad 0 < t \le 1, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$\varphi(t,y,h) = f(t,y), \varphi(t,y,h) = \frac{1}{2}\left[f(t,y) + f\left(t+h, y+hf(t,y)\right)\right];$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h[f(t_k, y_k) + f(t_k + h, y_k + hf(t_k, y_k))]$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}\times 0.5[f(0,1) + f(0.5, 1+0.5f(0,1))]$$

$$= 1 + \frac{1}{4}[(f(0,1) + f(0.5,1.5)] = 1 + \frac{1}{4}(1+0.8333)$$

$$= 1.4583;$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}h[f(t_1, y_1) + f(t_1 + h, y_1 + hf(t_1, y_1))]$$

$$= 1.4583 + \frac{1}{2}\times 0.5[f(0.5,1.4583) + f(1,1.4583+0.5f(0.5,1.4583))]$$

$$= 1.4583 + \frac{1}{4}[0.7726 + f(1,1.4583+0.5\times 0.7726)]$$

$$= 1.4583 + \frac{1}{4}(0.7726 + 0.7604) = 1.8415;$$

八、(本题满分 10 分) (1) 设 $S(x)$ 是 $[0,2]$ 上的三次样条：

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 2x^3 - 3x + 4, & 0 \le x < 1, \\ S_1(x) = (x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + 3, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

求 b, c.

(2) 若迭代函数 $\varphi(x)$ 在有限区 $[a,b]$ 上满足下列两个条件:

(i) 对任意的 $x \in [a,b]$，有 $\varphi(x) \in [a,b]$；

(ii) $\varphi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，且 $\varphi'(x) \ne 0$, $|\varphi'(x)| \le L < 1$，

证明：对任意初值 $x_0 \in [a,b]$，由迭代格式 $x_k = \varphi(x_{k-1})$ $(k = 1,2,\cdots)$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 收敛到方程 $x = \varphi(x)$ 的根 x^*.

P99 定理 3.3.1 证明

$S_0'(x) = 6x^2 - 3$, $S_0''(x) = 12x$, $S_1'(x) = 3(x-1)^2 + 2b(x-1) + c$,

$S_1''(x) = 6(x-1) + 2b$, $S_0'(1-0) = 3 = c = S_1'(1+0)$,

$S_0''(1-0) = 12 = 2b = S_1''(1+0)$,

解得 $b = 6, c = 3$；

$a \le \varphi(x) \le b$，令 $f(x) = \varphi(x) - x$，

$f(a) = \varphi(a) - a \ge 0$，$f(b) = \varphi(b) - b \le 0$，

故 $\exists x^* \in [a,b]$，使 $f(x^*) = \varphi(x^*) - x^* = 0$，即 $x^* = \varphi(x^*)$，

由于 $\varphi'(x) \ne 0$，所以 x^* 唯一；

对 $\forall x_0 \in [a,b]$，由 $x_k = \varphi(x_{k-1}), k = 1,2,\cdots$，得 $\{x_k\}$，

则 $\left|x^* - x_k\right| = \left|\varphi(x^*) - \varphi(x_{k-1})\right| = \varphi'(\xi)\left|x^* - x_{k-1}\right|$

$\le L\left|x^* - x_{k-1}\right| \le L^k \left|x^* - x_0\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$.