VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

Diskrétní matematika
2015/2016

Druhá domáca úloha

Skupina č. 5

Čuba Eduard (xcubae00)
Demčák Ján (xdemca01)
Kolcún Róbert (xkolcu00)
Kučera Rudolf (xkucer91)
Kulich Jakub (xkulic03)
Kurák Ondrej (xkurak00)

17. decembra 2015

1 Úloha č. 1

1.1 Zadanie

Na intervalu $(0;1\rangle$ definujeme operaci ☺ následovně: $a☺b = \frac{ab}{a+b-ab}$. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení: Operace ☺ je asociativní na $(0,1\rangle$. Svou odpověd zdvodněte.

1.2 Riešenie

Ak $\forall x, y, z \in (0;1\rangle : (x☺y)☺z = x☺(y☺z) \Rightarrow$ Operácia je asociatívna

Podmienky: $x + y - xy \neq 0;\ x(1-y) \neq -y$ kedže vieme, že:

$$x > 0 \wedge (1-y) \geq 0 \Rightarrow x(1-y) \geq 0;\ -y < 0 \Rightarrow x(1-y) \neq -y \checkmark$$

$$L = (x☺y)☺z = \frac{xy}{x+y-xy}☺z = \frac{\frac{xyz}{x+y-xy}}{\frac{xy}{x+y-xy} + z - \frac{xyz}{x+y-xy}} = \frac{\frac{xyz}{x+y-xy}}{\frac{xy+zx+zy-xyz-xyz}{x+y-xy}} =$$
$$= \frac{xyz}{xy+zx+zy-2xyz}$$

$$P = x☺(y☺z) = x☺\frac{yz}{y+z-yz} = \frac{\frac{xyz}{y+z-zy}}{x + \frac{yz}{y+z-yz} - \frac{xyz}{y+z-zy}} = \frac{\frac{xyz}{y+z-yz}}{\frac{xy+zx+zy-xyz-xyz}{y+z-yz}} =$$
$$= \frac{xyz}{xy+zx+zy-2xyz}$$

$$L = P \checkmark$$

2 Úloha č. 2

2.1 Zadanie

Rozhodněte o pravdivosti tvrdení: $(\langle 0;1\rangle, ☺)$ je grupa. Svou odpoveď zdúvodněte

2.2 Riešenie

Aby mohla byť $(\langle 0;1\rangle, ☺)$ grupou, musí byť uzavretá, musí býť asociatívna(viď. Úloha č.1), musí mať neutrálny prvok a ku každému prvku danej operácie musí existovať inverzný prvok.

2.2.1 Komutatívnosť

Komutatívnosť nie je podstátná pri určovaní, či je daná operácia grupou, ale ak je operácia komutatívna, všetky nasledujúce dôkazy môže robiť len jednostranne.
Hovoríme, že operácia je komutatívna $\Leftrightarrow \forall x, y \in \langle 0;1\rangle : x☺y = y☺x$.

$$\frac{xy}{x+y-xy} = \frac{yx}{y+x-yx}$$
$$xy = xy$$
$$0 = 0 \checkmark$$

2.2.2 Uzavretosť grupy

Aby bola operácia uzavretá, musí platiť $\forall x, y \in \langle 0;1\rangle : x☺y \in \langle 0;1\rangle$.
Aby $\frac{xy}{x+y-xy} \in \langle 0;1\rangle$, musia platiť dve podmienky:

1. $xy > 0 \wedge x+y-xy > 0$:

$$\forall x, y \in \langle 0;1\rangle : xy > 0 \checkmark$$
$$x+y-xy > 0$$
$$x(1-y) > -y \checkmark \text{ (viď. podmienky Úloha č.1)}$$

2. $xy < x+y-xy$:

$$x+y-2xy > 0$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 - 2xy + 2\sqrt{xy} > 0$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{xy}-xy) > 0$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0 \wedge 2(\sqrt{xy}-xy) > 0 \Rightarrow x+y-xy > xy \checkmark *$$

*Pri umocňovaní čísel z intervalu $\langle 0;1\rangle$ sa umocňuje počet desatinných miest, takže čisla sa zmenšujú. Tým pádom platí, že $\sqrt{xy} > \sqrt{xy} * \sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} > xy$.

2.2.3 Neutrálny prvok

Ak $\exists e : \forall a \in (0;1\rangle : a☺e = e☺a = a$ potom e nazývame neutrálnym prvkom.

$$\begin{aligned}
a☺e &= a \\
\frac{ae}{a+e-ae} &= a \\
\frac{ae}{a+e-ae} - a &= 0 \\
\frac{ae - a^2 - ae + a^2e}{a+e-ae} &= 0 \\
\frac{-a^2 + a^2e}{a+e-ae} &= 0 \Leftrightarrow -a^2 + a^2e = 0 \\
a^2(e-1) &= 0 \Leftrightarrow e = 1 \vee a = 0;\ \ (0 \notin (0;1\rangle) \\
e &= 1\checkmark
\end{aligned}$$

2.2.4 Každý prvok má inverzný prvok

$\forall a \in (0;1\rangle : \exists a' \in (0;1\rangle : a☺a' = a'☺a = e$

$$\begin{aligned}
a☺a' &= e \\
\frac{aa'}{a+a'-aa'} &= 1 \\
a + a' - aa' &= aa' \\
a + a' - 2aa' &= 0 \\
a' &= \frac{a}{2a-1} \Rightarrow 2a - 1 \neq 0 \\
a &\neq \frac{1}{2} \Rightarrow \exists a \in (0;1\rangle : \forall a' \in (0;1\rangle : a☺a' \neq a'☺a \neq e
\end{aligned}$$

2.2.5 Výsledok

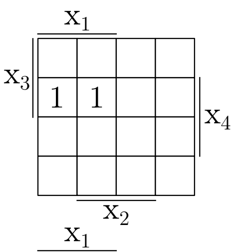
Kedže nie každý prvok operácie $((0,1\rangle, ☺)$ má iverzný prvok, môžeme povedať, že operácia $((0,1\rangle, ☺)$ nie je grupa.

3 Úloha č. 3

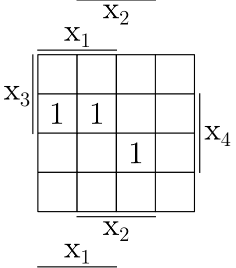
3.1 Zadanie

Pomocí metody Karnaughovy mapy minimalizujte funkci:
$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3x_4 + \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_3x_4$

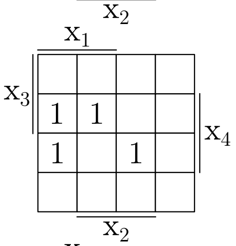
3.2 Riešenie



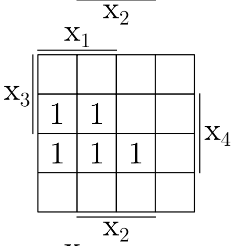
Logickú funkciu $x_1x_3x_4$ prepíšeme do karnaughovej mapy



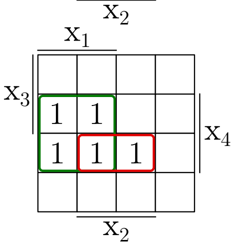
Do karnaughovej mapy pridáme funkciu $\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4$



Do karnaughovej mapy pridáme funkciu $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$



Do karnaughovej mapy pridáme funkciu $x_1x_2\overline{x}_3x_4$



Následne minimalizujeme funkciu $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Minimalizovaná funkcia je: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 + x_2\overline{x}_3x_4$

4 Úloha č. 4

4.1 Zadanie

Nad množinou prvotních formulí p, q, r je daná formule $f = (\neg p \Rightarrow q) \vee \neg r$ a množinu T tří formulí

$$T = \{(p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee (\neg q \Rightarrow \neg r)), (\neg p \rightarrow q) \vee r \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg r), \neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee r\}$$

- Je množina T splnitelná?
- Je formule f tautológie?
- Je formule f kontradikce?
- Je formule f tautologickým dusledkem množiny T ?

4.2 Riešenie

$f = (\neg p \Rightarrow q) \vee \neg r$
$f_1 = (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee (\neg q \Rightarrow \neg r))$
$f_2 = (\neg p \rightarrow q) \vee r \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge \neg r)$
$f_3 = \neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee r$

p	q	r	f_1	f_2	f_3	f	$f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \Rightarrow f$
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

T je splnitelná: $\exists[p; q; r] = [1; 1; 1] : [f_1; f_2; f_3] = [1; 1; 1]$
f nie je tautológia: $\exists[p; q; r] = [0; 0; 1] : f = 0$
f nie je kontradikce: $\exists[p; q; r] = [1; 0; 1] : f = 1$
f je tautologickým dôsledkom T: $\forall p, q, r \in \{0; 1\} : (f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \Rightarrow f) = 1$

5 Úloha č. 5

5.1 Zadanie

Dokážte, že pre každé prirodzené nenulové čislo n platí:

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + ... + \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1)$$

5.2 Riešenie

$\forall n \in N : 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + ... + \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1)$

5.2.1 Krok 1

Ak $n = 1$:

- Ľ $= 1$
- P $= 2^{1-1} + 2(1-1) = 1$
- Ľ = P ✓

5.2.2 Krok 2

Ak tvrdenie platí pre $n = k$, potom by malo platiť aj pre $n = k + 1$; $k \in N$

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + ... + \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} = 2^{1-k} + 2(k-1) \Rightarrow 1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + ... + \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} + \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} = 2^{-k} + 2k$$

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + ... + \frac{2^k - 1}{2^{k-1}} + \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} \overset{z\ IP}{=} 2^{1-k} + 2(k-1) + \frac{2^{k+1} - 1}{2^k}$$

$$2^{1-k} + 2(k-1) + \frac{2^{k+1} - 1}{2^k} = 2 * 2^{-k} + 2k - 2 + 2 - 2^{-k} = 2^{-k} + 2k$$

5.2.3 Záver

Na základe matematickej analýzy vyplýva z Kroku 1 a Kroku 2, že dané tvrdenie je pravdivé.