



RAPPORT DE STAGE DE RECHERCHE

SUJET : Investigation du double-double pour le dimensionnement de peau composite de réservoir cryogénique.



Réalisé par : DONFACK SIEWE Elton

Tuteur de stage : **MICHEL Laurent**

Encadrants : **MICHEL Laurent, Jose NAVARRO MARTIN**

Liste des Figures

Figure 1: exemple de matériau composite	4
Figure 2:Fibre et matrice dans les composites	5
Figure 3:Exemple d'empilement des plis sur un composite	5
Figure 4:Exemple de sandwich.....	6
Figure 5:Matériau isotropique.....	6
Figure 6: Matériau orthotrope.....	7
Figure 7:Double-Double	15
Figure 8: QUAD VS DD [9].....	17
Figure 9:Homogénéisation des DD [10]	17
Figure 10: enveloppe de rupture pour les 0° et 90°	19
Figure 11:Enveloppe de rupture Omni FPF pour le T800/Cytec.....	20
Figure 12:Modele de dégradation progressive d'un stratifié	21
Figure 13:PFA pour un Quad en traction simple ; à gauche courbe contrainte -déf , à droite historique des RF et en dessous historique de rupture	24
Figure 14 : PFA pour un stratifié QUAD en compression simple plus historique des RF et en dessous historique de dégradation	25
Figure 15: PFA pour un QUAD en traction simple plus historique des RF et en dessous historique des dégradations.	26
Figure 16: PFA sur un QUAD en compression simple plus historique des RF et en dessous historique de dégradation	27
Figure 17: Omni LPF	28
Figure 18: Unit circle et Omni LPF pour le T300/5208	29
Figure 19: Calcul d'épaisseur d'un stratifié en utilisant l'OMNI FPF	34
Figure 20:PFA sur du [0 90] en traction simple avec TSAI WU	56
Figure 21:PFA sur du [0 90] en compression avec TSAI WU	57
Figure 22: PFA sur du [0 90] en compression avec TSAI Hill	58

Table des matières

Introduction	4
1. Formation en structures composites	4
1.1 Rappel sur les composites et procédure de dimensionnement.....	4
1.1.1 Généralité sur les composites	4
1.1.2 Principaux avantages des matériaux composites	5
1.1.3 Types de matériaux composites structuraux	6
1.1.4 Comportement des plis dans le matériau	8
1.1.5 Théorie classique des stratifiés	9
1.1.6 Critères de rupture des matériaux composites.....	10
1.1.7 Procédure de dimensionnement des composites (QUAD).....	12

1.2	Applications. (Voir annexe tutoriel 1 et 2)	14
2.	Etude bibliographique	14
3.	Etude des stratifiés QUAD et Double-Double	15
3.1	Les stratifiés QUAD	15
3.2	Double-Double	15
3.4	Lois de comportement et matrices de rigidité des stratifiés DD	18
3.5	Critères de dimensionnement des stratifiés utilisés	18
3.5.1	Critère de dimensionnement en FPF (First ply Failure)	18
3.5.2	Critère de dimensionnement en LPF (Last ply Failure)	21
4	Dimensionnement par optimisation	30
4.1	Dimensionnement en FPF	30
4.1.1	Optimisation par le critère de TSAI-Hill et TSAI-WU	31
4.4.2	Optimisation en utilisant l'enveloppe omni FPF	34
4.2	Dimensionnement par optimisation en LPF	39
4.2.1	PFA	39
4.2.2	Omni LPF	39
5	Résultats et comparaisons	39
5.1	Résultats en FPF	41
5.2	Résultats en LPF	43
5.3	Interprétation	44
	Conclusion	45
	Annexe	46
1.	Annexe 1 : Tutoriel 1	46
1.	Exercice 1	46
1.	Exercice 2	49
2.	Exercice 3	50
2.	Annexe 2 : Tutoriel 2	51
3.	Annexe 3 : Code Matlab associé	55
4.	Annexe 4 : Résultats PFA sur du [0 90]	56
	Reference	59

Introduction

Dans le souci de faire une initiation à la recherche à la fin de notre 2 -ème année de cycle ingénieur à l'isae-superaero, J'ai effectué un stage de recherche au sein du département de structure et matériaux de l'isae-superaero pendant la période du 8 MAI 2022 au 04 Août 2022. Le sujet du stage étant : Investigation du double-double pour le dimensionnement de peau composite de réservoir cryogénique. Ce stage a pour but de commencer par effectuer une recherche bibliographique sur la théorie classique des stratifiés et les critères de rupture des composites ensuite de faire une analyse d'une nouvelle méthode de dimensionnement des stratifiés (Double-Double) tout en proposant des algorithmes d'optimisation des structures et en fin de faire une comparaison avec les méthodes existantes sur un cas d'application et de proposer des alternatives. Ce rapport est un compte rendu qui présente les critères de rupture des composites, les algorithmes d'optimisation conçus et les résultats obtenus sur un cas d'application.

1. Formation en structures composites

1.1 Rappel sur les composites et procédure de dimensionnement

1.1.1 Généralité sur les composites

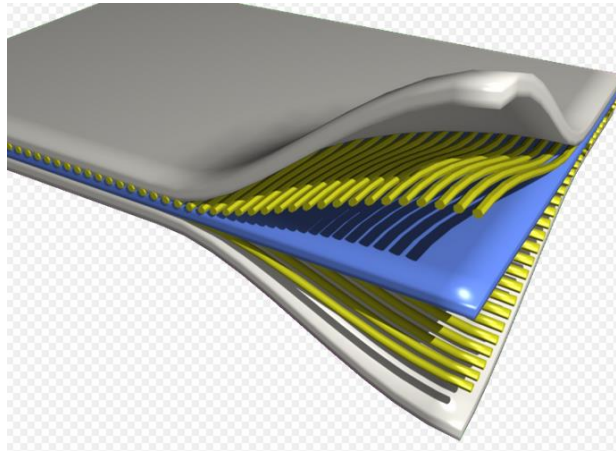


Figure 1: exemple de matériau composite

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux composants non miscibles (mais ayant une forte capacité de pénétration) dont les propriétés se complètent. Le nouveau matériau ainsi constitué, hétérogène, possède des propriétés que les composants seuls ne possèdent pas. Il est constitué de différentes phases nommées renforts (fibre) et matrice.

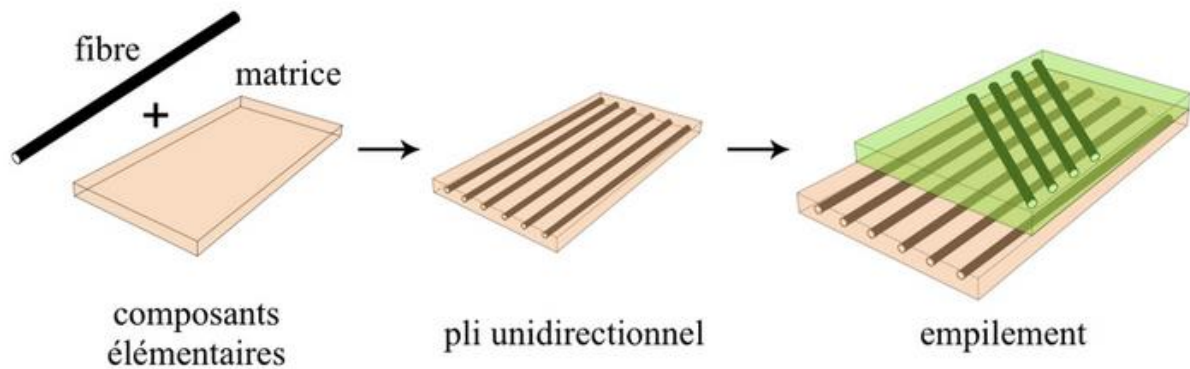


Figure 2: Fibre et matrice dans les composites

Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure. Nous étudions plus particulièrement les matériaux composites à renfort fibre longue continue utilisés dans l'industrie nautique, automobile, aéronautique et spatiale. Les pièces structurales sont réalisées par empilement de nappes en optimisant les directions des renforts en fonction des charges qu'elles doivent subir. La nature de la résine ou du renfort est choisie en fonction de l'application finale visée.

Sur un matériau composite on a la liberté d'orienter les fibres en fonction des caractéristiques que l'on veut obtenir.

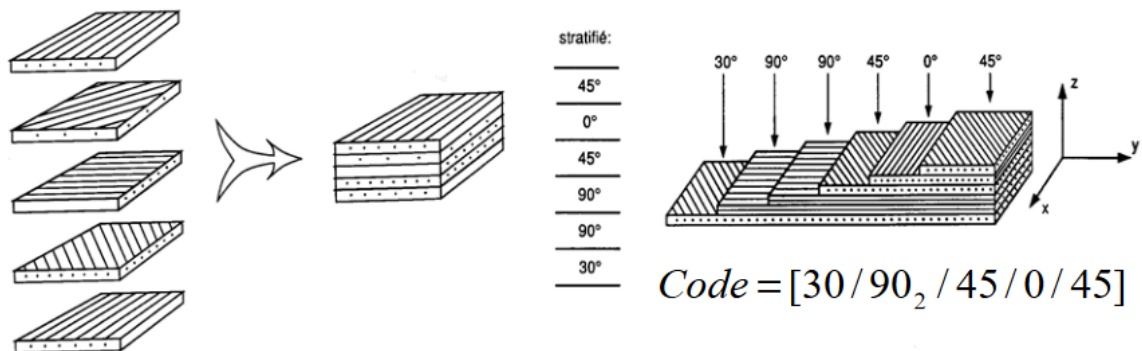


Figure 3: Exemple d'empilement des plis sur un composite

1.1.2 Principaux avantages des matériaux composites

L'un des principaux avantages des matériaux composites est leur aptitude à être conçus à la carte. Ainsi, nous pouvons concevoir des matériaux avec une forte anisotropie. Cet avantage permet de concevoir la pièce en tenant compte des sollicitations mécaniques qu'elle va subir. Un autre principal avantage des matériaux composites est leur masse volumique très faible, ils permettent ainsi un allègement des structures en industrie aéronautique et spatiale.

1.1.3 Types de matériaux composites structuraux

- ❖ Composites à fibres courtes : fibres dispersées dans une matrice isotrope, généralement sans orientation préférentielle ; comportement macroscopique isotrope.
- ❖ Composites à fibres longues : fibres longues noyées dans une matrice isotrope avec orientation établie ; comportement macroscopique anisotrope.
- ❖ Stratifiés : superposition de plis en composite diversement orientés ; le comportement macroscopique doit être conçu selon les besoins.
- ❖ Sandwich : panneaux ou coques conçus pour des sollicitation de flexion ; généralement, le comportement dans le plan est isotrope.

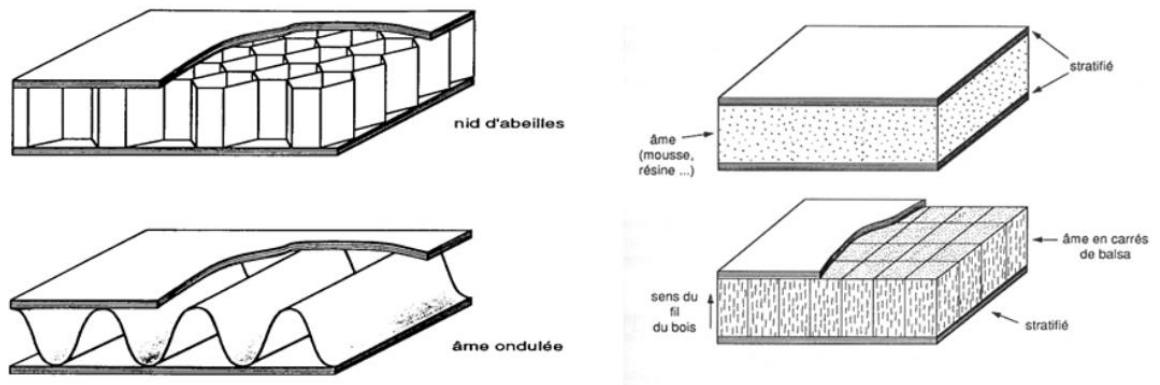


Figure 4: Exemple de sandwich

1.4 Loi de comportement des composites

De manière générale Les relations entre les contraintes et les déformations dans un composite sont :

$$\{\sigma\} = [C] * \{\epsilon\} \text{ et } \{\epsilon\} = [S] * \{\sigma\}$$

Avec $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}^T$ et $\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2 * \epsilon_{23}, 2 * \epsilon_{13}, 2 * \epsilon_{12}\}^T$ donnés dans le repère global de la plaque.

$[S]$ et $[C]$ sont des matrices symétriques dépendant des propriétés du matériaux.

- ❖ Pour un matériau isotrope on a :

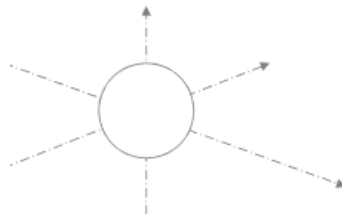


Figure 5: Matériau isotropique

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix}$$

- ❖ Pour un matériau orthotrope : un matériau est **orthotrope** s'il possède trois plans de symétrie orthogonaux entre eux. Son comportement élastique est alors défini par neuf modules d'élasticité, son comportement thermique par trois constantes thermiques.

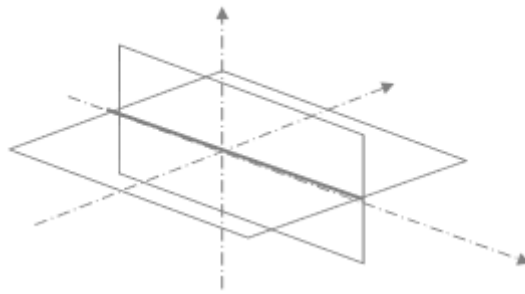


Figure 6: Matériau orthotrope

On a alors pour ce type :

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{31}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

- ❖ Matériau isotrope transversal

Ce matériau est défini par un milieu orthotrope + 1 axe de révolution.

$$S_{IJ} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & \frac{1}{E_{22}} & -\frac{\nu_{32}}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} & -\frac{\nu_{23}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\left(\frac{1+\nu_{32}}{E_{22}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

1.1.4 Comportement des plis dans le matériau

Pour dimensionner une structure composite il est nécessaire de connaître comment chaque pli se comporte (contrainte et déformation). La connaissance de ce comportement se fait sous plusieurs hypothèses qui sont :

- Le pli de base de la couche ou du tissu unidirectionnel
- Comportement homogène dans l'épaisseur du pli
- Matériau orthotrope et généralement isotrope transversalement
- Nappe travaillant généralement en état de contraintes quasi-planes : $\sigma_3 = 0$

Le pli étant considéré comme une plaque, sa loi de comportement est identique à la loi précédente. Le pli étant unidirectionnel il est considéré comme orthotrope. Dans le repère local de ce matériau on obtient alors

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_3 \\ \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \\ \bar{\sigma}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{C}_{13} & \bar{C}_{23} & \bar{C}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \\ \bar{e}_4 \\ \bar{e}_5 \\ \bar{e}_6 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\bar{\sigma}_3 = 0 = \bar{C}_{13}\bar{e}_1 + \bar{C}_{23}\bar{e}_2 + \bar{C}_{33}\bar{e}_3$$

Dans la référence d'orthotropie on a :

Avec :

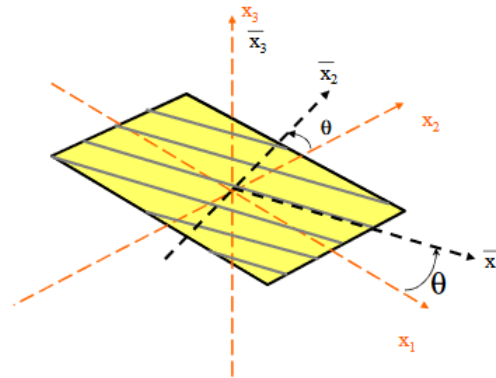
$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha.E_l & \alpha.\nu_{lt}.Et & 0 \\ \alpha.\nu_{tl}.El & \alpha.Et & 0 \\ 0 & 0 & Glt \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{ij} = \bar{C}_{ij} - \frac{\bar{C}_{i3}\bar{C}_{j3}}{\bar{C}_{33}} \dots (i, j = 1, 2)$$

$$\bar{Q}_{ii} = \bar{C}_{ii} \dots (i, j = 4, 5, 6)$$

- Forces exercées en dehors des axes d'orthotropie

Soient les repères $((0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3))$ et $((0, x_1, x_2, x_3))$ de la figure suivante



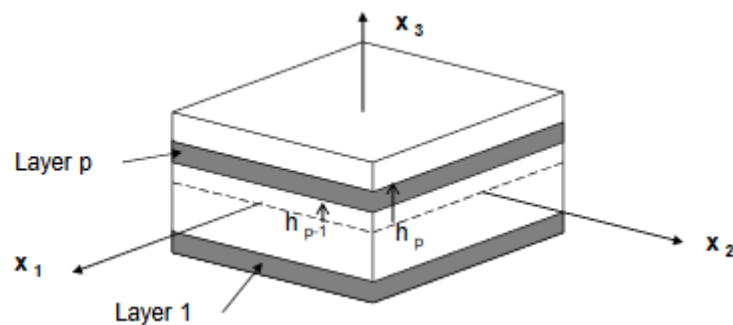
Soit $P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ la matrice de passage de $((0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3))$ à $((0, x_1, x_2, x_3))$.

Les relations entre les contraintes, les déformations et les matrices de rigidité dans les deux repères sont :

- ❖ Contraintes : $\sigma = P^t * \bar{\sigma} * P$
- ❖ Déformations : $\varepsilon = P^t * \bar{\varepsilon} * P$
- ❖ Rigidités : $S = N * \bar{S} * N^t$ et $Q = M * \bar{Q} * M^t$ avec $M_R = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$

1.1.5 Théorie classique des stratifiés

Soit la structure suivante :



- ❖ Les déplacements moyens du composite sont donnés par :

Ce qui permet d'avoir les déformations suivantes :

$$u_1 = u_1^0 - x_3 \cdot \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1}$$

$$u_2 = u_2^0 - x_3 \cdot \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2}$$

$$u_3 = u_3^0$$

$$e_i = e_i^0 + x_3 \cdot k_i^0 \dots i = 1, 2, 6$$

avec

$$k_1^0 = -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \dots k_2^0 = -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \dots k_3^0 = -2 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2}$$

❖ Les matrices de rigidité d'une de la couche stratifiée précédente sont données par :

$$A_{ij} = \sum_{p=1}^N Q_{ij}^p \cdot (h_p - h_{p-1})$$

$$B_{ij} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} Q_{ij}^p \cdot (h_p^2 - h_{p-1}^2)$$

$$C_{ij} = D_{ij} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{3} Q_{ij}^p \cdot (h_p^3 - h_{p-1}^3)$$

pour $i = 1, 2, 6$

1.1.6 Critères de rupture des matériaux composites

❖ Détermination de la rupture du premier pli :

Il existe deux types de critères de rupture des composites. Dans ces critères les Contraintes et les déformations sont exprimées dans le repère d'orthotropie du pli de base (local)

- Critères du mode de défaillance
- ✓ Déformations maximales

$$-\frac{X_c}{E_l} \leq \epsilon_{ll} \leq \frac{X_t}{E_l}$$

$$-\frac{Y_c}{E_t} \leq \epsilon_{tt} \leq \frac{Y_t}{E_t}$$

$$|\gamma_{lt}| \leq \frac{S}{G_{lt}}$$

- ✓ Contraintes maximales

$$-X_c \leq \sigma_{ll} \leq X_t$$

$$-Y_c \leq \sigma_{tt} \leq Y_t$$

$$|\sigma_{lt}| \leq S$$

✓ Critère de Hashin

	Rupture des Fibres	Rupture de la matrice
Tension	$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 \leq 1$	$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 \leq 1$
Compression	$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_c}\right)^2 \leq 1$	$\left(\frac{\sigma_{22}}{2R}\right)^2 + \left(\left(\frac{Y_c}{2R}\right)^2 - 1\right) \left(\frac{\sigma_{12}}{Y_c}\right) + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 \leq 1$

$\tau_{12} \rightarrow S$
 $\tau_{23} \rightarrow R$

- Critères généraux :

La forme générale de ce critère est : $F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + F_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \dots = 1$

Où F est un tenseur.

❖ Tsai-Wu criterion:

$$F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1$$

$$F_{\alpha}\sigma_{\beta} + F_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} = 1$$

En 2D nous avons:

$$F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 = 1$$

Traction/Compression

at 0°

$$F_{11} = \frac{1}{X_c X_t}$$

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}$$

at 90°

$$F_{22} = \frac{1}{Y_c Y_t}$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}$$

Shear

$$F_{66} = \frac{1}{S^2}$$

Biaxial test

$$F_{12}$$

❖ Tsai-Hill criterion en 2D:

$$\frac{\sigma_1^2}{X_{C/T}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_{C/T}^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_{C/T}^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1$$

where $\sigma_1 > 0 \Rightarrow X_{C/T} = X_T \dots \sigma_1 < 0 \Rightarrow X_{C/T} = X_C$

$\sigma_2 > 0 \Rightarrow Y_{C/T} = Y_T \dots \sigma_2 < 0 \Rightarrow Y_{C/T} = Y_C$

Un composite dimensionné en QUAD doit respecter les règles suivantes :

- Au moins 10 % d'épaisseur pour chaque direction.
- Avoir un $\Delta\theta \leq 45$ entre deux plis successifs.
- Utiliser les quatre orientations : 0 ; ± 45 ; 90.
- Pas plus de 4 plis dans la même direction.
- Symétrie Miroir.
- Un nombre pair de plis pour les couches a + 45 et -45.
- % plis à θ_i : proportionnel à l'effort qu'ils reprennent

La rupture des autres plis s'obtient en dégradant progressivement les propriétés du matériau et d'appliquer les mêmes critères de rupture.

1.1.7 Procédure de dimensionnement des composites (QUAD)

Le dimensionnement d'un matériau composite en QUAD se fait de la manière suivante :

- ❖ Identification des charges appliquées à la structure : $N = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$.
- ❖ En se fixant une épaisseur de 1 mm pour la couche, on calcul % plis à θ_i (0,45,-45,90) qui est proportionnel à l'effort qu'il reprend.

Orientation	0	90	± 45
Pourcentage	$\text{Max}(10\%, \frac{100 \cdot N_{xx}}{N_{xx} + 2N_{xy} + N_{yy}} \%)$	$\text{Max}(10\%, \frac{100 \cdot N_{yy}}{N_{xx} + 2N_{xy} + N_{yy}} \%)$	$\text{Max}(1 - \%(0) - \%(90), 10\%)$

- ❖ Après on calcul la contrainte local dans chaque groupe de pli en suivant la procédure suivante :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ T_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{[A]^{-1}} \begin{bmatrix} e_1^0 \\ e_2^0 \\ e_6^0 \end{bmatrix} \xrightarrow{[N_x]_\theta^T} \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_6 \end{bmatrix}_\theta \xrightarrow{[\bar{Q}]} \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{bmatrix}_\theta$$

- ❖ Ensuite on applique le critère de Tsai-Hill 2D sur chaque couche. Cela nous permet de calculer le TSAI de chaque couche qui est tout simplement donné par

$$TSAI = \frac{\sigma_1^2}{X_{C/T}^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_{C/T}^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_{C/T}^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2}$$

Etant parti de 1 mm le maximum des \sqrt{TSAI} va juste correspondre à l'épaisseur de notre couche.

Donc $H_{initiale} = \max(\sqrt{TSAI})$.

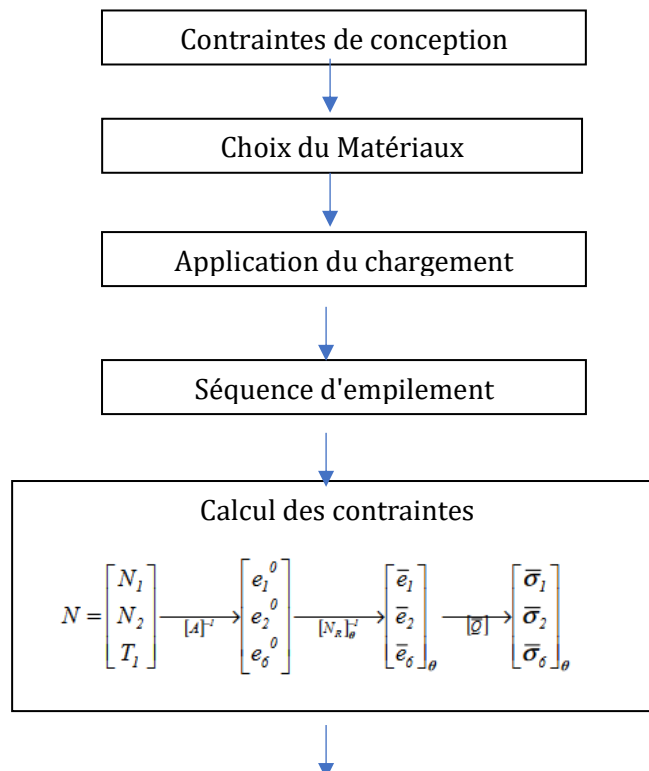
Remarque : Il s'agit ici d'un dimensionnement en statique. Pour le dimensionnement en flambage on applique la même procédure mais au niveau du critère de rupture on applique un critère de rupture de flambage.

- ❖ Avec cette épaisseur on calcul simplement l'épaisseur de chaque couche en faisant ep_plis à $\theta_i = (\% \text{ plis à } \theta_i) * H_Initiale$
- ❖ Le nombre de couche élémentaire à θ_i vaut $N_i = E \left(\frac{ep_plis \text{ à } \theta_i}{Ep_pli \text{ élémentaire}} \right) + 1$.

On doit avoir un N_i pair pour les plis à $\pm 45^\circ$.

- ❖ Finalement $épaisseur_finale = ep_pli_elementaire * \sum_i N_i$.

Récapitulatif :



Calcul de l'épaisseur de la structure en
utilisant le TSAI

1.2 Applications. (Voir annexe tutoriel 1 et 2)

2. Etude bibliographique

Durant ce stage nous avons utilisé plusieurs articles et documents afin de faire une analyse approfondie des stratifiés et de proposer des perspectives.

Nous avons commencé par le document [8] qui présente les stratifiés de manière Générale : la théorie classique des stratifiés, les lois de comportements des composites, les lois de mélange pour retrouver les propriétés des plis. L'auteur de ce document présente des approches pour calculer les propriétés des plis dans un stratifié après rupture selon le mode de rupture (fibre ou matrice). Avec cela il propose une approche de PFA pour atteindre la rupture du dernier pli dans un stratifié. Nous avons implémenté cette approche dans la suite de ce document afin de dimensionner les composites en LPF (Last ply Failure).

L'article [2] présente une nouvelle approche basée sur les invariants pour décrire les propriétés élastiques et la défaillance des plis et stratifiés composites est proposée. L'approche est basée sur la trace de la matrice de rigidité des contraintes planes en tant que propriété du matériau, qui peut être utilisée pour réduire le nombre d'essais et simplifier la conception des stratifiés. Les enveloppes omni de rupture de déformation sont proposées comme enveloppe de rupture interne minimale dans l'espace de déformation, qui définit la rupture d'un matériau composite donné pour toutes les orientations de plis. L'approche proposée est démontrée à l'aide de divers composites carbone/époxy et offre une mise à l'échelle radicalement nouvelle pour améliorer la conception et fabrication.

Les articles [2] et [5] proposent une procédure de conception basée sur les invariants utilisant une matrice de rigidité de contrainte plane normalisée et un cercle unitaire. Le critère de défaillance du polymère renforcé de fibres de carbone (CFRP) est présenté et comparé aux traditionnelles approches de conception. En utilisant l'approche de conception basée sur les invariants, la solution de stratification optimale basée sur la rigidité est indépendante du matériau et donc valable pour tout CFRP. Ensuite, la trace de la matrice de rigidité des contraintes planes est la seule propriété matérielle nécessaire pour la mise à l'échelle de la déformation. Les résultats montrent que l'approche de conception basée sur les invariants simplifie grandement la procédure de conception des structures CFRP Composants.

L'article [6] quant à lui présente une nouvelle famille de stratifiés composites (Double-Double) qui pourrait révolutionner les structures composites en les rendant plus légères, plus solides, plus faciles à comprendre et à concevoir, et plus rapides et moins coûteuses à fabriquer. Cette nouvelle famille de stratifiés appelée double-double (DD), basée sur deux paires de plis angulaires, peut plutôt réorienter la tendance vers la simplicité et la rationalité. Les avantages permis par DD

incluent l'homogénéisation, l'effilement pour gagner du poids, le placement des chutes de plis pour améliorer la qualité et le glissement de la carte pour simplifier l'empilement des plis.

3. Etude des stratifiés QUAD et Double-Double

3.1 Les stratifiés QUAD

Les stratifiés Quad sont basés sur une collection de plis discrets de 0, 45, 90 degrés. Ce qui facilite le calcul de $[A]$ car alors le stratifié $[A]$ est égal à la rigidité du pli en % 0, % 45 et % 90. Le Quad commence avec quatre plis. Si l'orthotrope est souhaitée, des plis doivent être ajoutés. Avec un nombre élevé de plis, l'optimisation devient impossible, et la conception et la fabrication deviennent si complexes qu'elles ne sont pas bien comprises. DD est totalement différent avec un champ plus sophistiqué de deux ensembles de plis d'angle dans $[\pm\theta/\pm\Psi]$. Le bloc de construction est 1/10 aussi épais que le quad et peut facilement être homogénéisé pour permettre une conception et une fabrication aussi simples, sinon plus simples que les métaux.

3.2 Double-Double

L'émergence du double-double sous forme de $[\pm\Phi / \pm\Psi]$ pour remplacer le traditionnel QUAD sous forme de $[0, \pm45, 90]$ repose sur un certain nombre d'étapes innovantes dans la modélisation des stratifiés composites.

❖ C'est quoi un Double-Double ?

C'est un stratifié sous la forme générale de $[\pm\Phi / \pm\Psi]_n$.

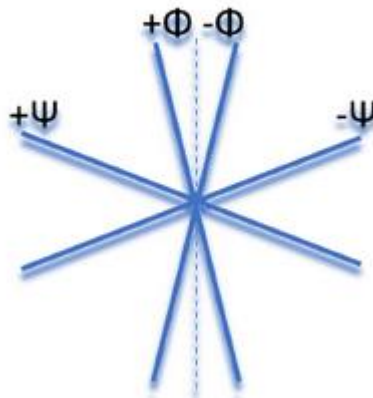


Figure 7: Double-Double

Φ et Ψ sont des orientations de stratifié de 0° à 90° et couvrent de manière continue tout le spectre possible de rigidité et de résistance. Le sous-stratifié est très simple et toujours le même dans toute la structure. La fabrication est rendue si simple ! La variation d'un point à l'autre ne se fera que sur l'épaisseur qui est le n répété. L'homogénéisation est rendue possible à partir seulement 10 blocs de construction de DD

La séquence d'empilement de Φ et Ψ n'a pas d'effet considérable sur les propriétés du DD où pour QUAD le nombre de permutations est si élevé par milliers que l'optimisation est impossible.

Contrairement au QUAD avec le DD on arrive à fabriquer et réparer rapidement les composites :

- Toujours le même simple sous-stratifié 4 plis $\pm\Phi/\pm\Psi$.
- $\pm\Phi$ et $\pm\Psi$ peuvent être prédéfinis pour accélérer le taux de dépôt à l'aide de tissus non sertis, c'est-à-dire C-PlyTM

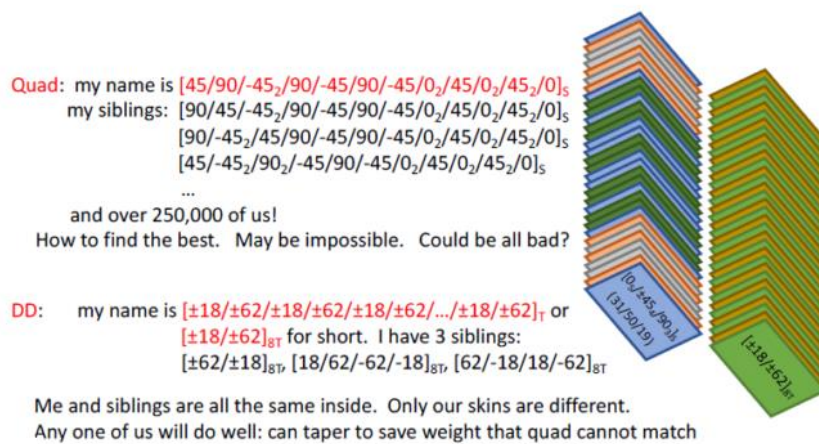
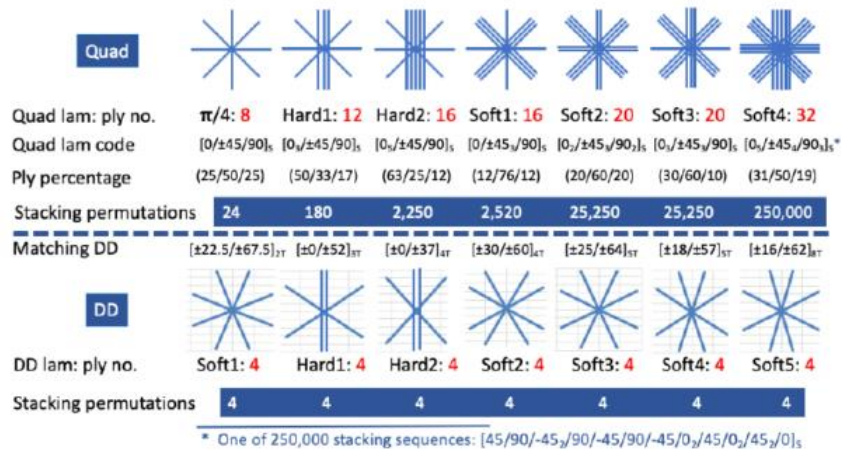


Figure 8: QUAD VS DD [9]

Les DD atteint l'homogénéisation à une épaisseur inférieure grâce à son épaisseur minimale constante de 4 plis

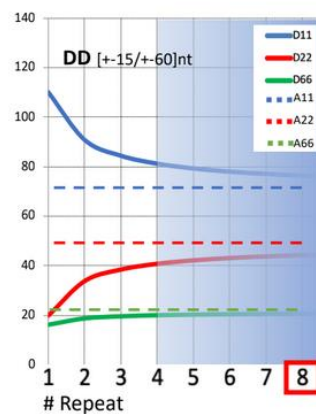


Figure 9: Homogénéisation des DD normalisés [10]

3.4 Lois de comportement et matrices de rigidité des stratifiés DD

Nous rappelons que la théorie classique des stratifiés vue en I.1.1 s'applique également sur les stratifiés DD. L'avantage avec les DD est que le calcul des matrices de rigidité pour un DD est plus simple.

Ainsi pour un DD $[\pm \Phi / \pm \Psi]_{2N}$, on peut facilement calculer ses matrices de rigidité par les formules suivantes :

$$A_{ij} = 2Ne(Q_{ij}^{+\phi} + Q_{ij}^{-\phi} + Q_{ij}^{+\psi} + Q_{ij}^{-\psi})$$

$$C_{ij} = D_{ij} = a * Q_{ij}^{+\phi} + b * Q_{ij}^{-\phi} + b * Q_{ij}^{+\psi} + a * Q_{ij}^{-\psi}$$

$$a = \sum_{i=1}^N \frac{e^3}{3 \cdot 4^3} [(4i)^3 - (4i-1)^3 + (4i-3)^3 - (4i-4)^3]$$

$$b = \sum_{i=1}^N \frac{e^3}{3 \cdot 4^3} [(4i)^3 - (4i-1)^3 - (4i-3)^3]$$

Avec e=épaisseur d'un pli.

$$B_{ij} = \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} Q_{ij}^p \cdot (h_p^2 - h_{p-1}^2)$$

De même, les termes de la matrice B se calculent par la formule

3.5 Critères de dimensionnement des stratifiés utilisés

3.5.1 Critère de dimensionnement en FPF (First ply Failure)

Afin de chercher la meilleure procédure dans le but d'obtenir l'épaisseur la plus faible et de simplifier les calculs, nous avons utilisés plusieurs critères de rupture des composites.

Critère de TSAI-Hill

C'est un critère 2D et quadratique en contraintes, il est Basé sur le calcul des contraintes dans chaque pli, et exprimé dans le repère local du pli. il doit être vérifié pour toutes les couches du stratifié,

Il est donné par : $H_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1$ / i,j=1,2,6

Les coefficients de la matrice [H] dépendent des propriétés du matériau. Cette matrice vaut :

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{1}{X_c/t^2} & -\frac{1}{2X_c/t^2} & 0 \\ -\frac{1}{2X_c/t^2} & \frac{1}{Y_c/t^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{S^2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 > 0 \Rightarrow X_{C/T} = X_T \dots \sigma_1 < 0 \Rightarrow X_{C/T} = X_C$$

$$\sigma_2 > 0 \Rightarrow Y_{C/T} = Y_T \dots \sigma_2 < 0 \Rightarrow Y_{C/T} = Y_C$$

Ce critère est valable pour tous les stratifiés (QUAD, DD).

Critère de TSAI-Wu en déformation

C'est un critère 2D, quadratique et linéaire en déformation, il est Basé sur le calcul des déformations dans chaque pli, et exprimé dans le repère local du pli. il doit être vérifié pour toutes les couches du stratifié.

Il s'exprime par : $G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j + G_i\varepsilon_i = 1$.

$[G]$ et $\{G\}$ dépendent du matériau et sont définies par :

$$[G] = Q * [F]$$

$$\{G\} = Q * \{F\} * Q$$

Avec

$$F_1 = \left(\frac{1}{X_1^T} - \frac{1}{X_1^C} \right), F_2 = \left(\frac{1}{X_2^T} - \frac{1}{X_2^C} \right), F_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{X_1^T * X_1^C} * \frac{1}{X_2^T * X_2^C}},$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_1^T X_1^C}, F_{22} = \frac{1}{X_2^T X_2^C}, F_6 = \left(\frac{1}{X_{12}^T} - \frac{1}{X_{12}^C} \right), F_{66} = \frac{1}{X_{12}^T * X_{12}^C}$$

Cette relation doit être vérifiée pour chaque couche dans le stratifié.

Ce critère est valable pour tous les stratifiés (QUAD, DD).

Enveloppe de rupture Omni FPF ([4], [8])

❖ C'est quoi une enveloppe de rupture ?

Courbe s'appuyant sur un critère de rupture pour décrire les zones de rupture d'un pli. Partant du critère de rupture pour un pli, on parcourt toutes les valeurs possibles des paramètres du critère (contrainte ou déformation) et on obtient une enveloppe permettant de décrire la rupture de ce pli. Dans notre cas Le Critère de rupture utilisé pour définir cette enveloppe est le critère de TSAI-WU en déformation : $G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j + G_i\varepsilon_i = 1$.

La figure suivante présente les enveloppes de ruptures des plis à 0° et à 90° pour le T800/Cytec en espace de déformation.

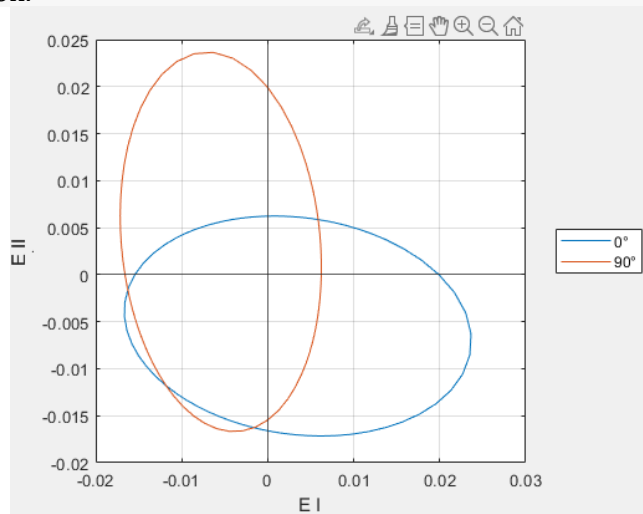


Figure 10: enveloppe de rupture pour les 0° et 90°

❖ Omni FPF

L'enveloppe Omni FPF est l'enveloppe minimal des enveloppes de rupture de tous les plis. Elle est obtenue en traçant les enveloppes de tous les plis (0° à 90°) et en extrayant la plus petite enveloppe contenue dans tous ces enveloppes. Cette enveloppe est indépendante de la composition du layup car elle couvre tous les contrôles plis de 0 à 2π . Ainsi, l'enveloppe de rupture par déformation omni est un Invariant qui peut représenter n'importe quel stratifié construit avec ce Matériel.

Dans la Fig. 12, montre l'enveloppe cette enveloppe pour le T800/Cytec

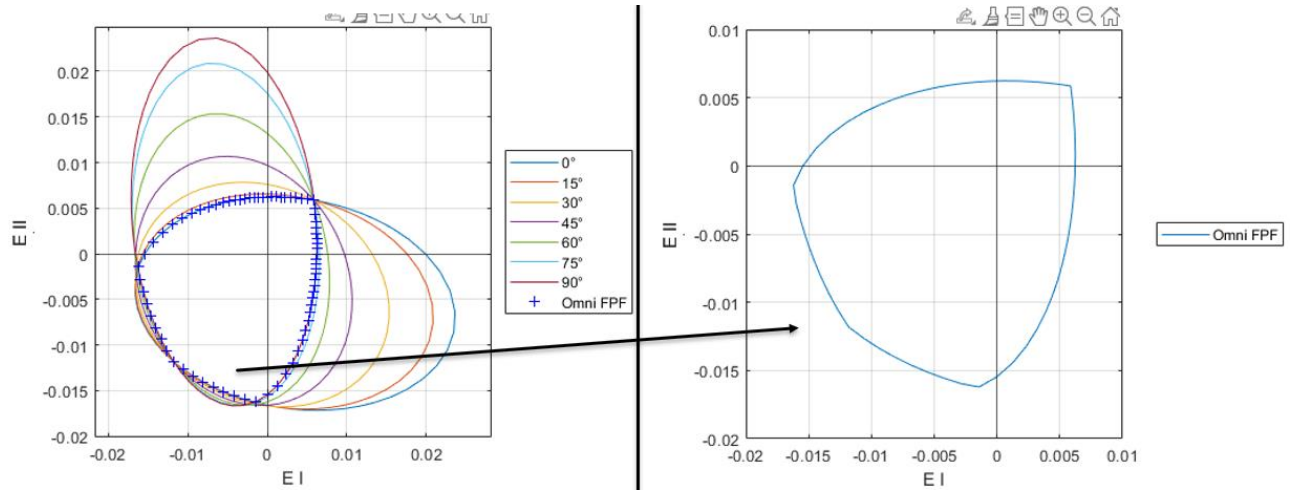


Figure 11: Enveloppe de rupture Omni FPF pour le T800/Cytec

❖ Comment obtenir analytiquement cette enveloppe Omni FPF ?

Les enveloppes individuelles des plis de la Fig. 12 sont définies en espace de déformation normale tandis que l'enveloppe omni FPF est donnée en espace déformation principale. Étant donné que tous les angles de pli sont couverts, l'enveloppe omni est invariante, c'est-à-dire qu'il reste le même pour tous les angles de transformation.

Alors, les coordonnées de déformation normale ε_1 et ε_2 peuvent être remplacées par leurs principales composantes de déformation ε_I et ε_{II} . Pour un état de tension à cisaillement non nul, les déformations principales peuvent être déterminées par rotation du système de coordonnées de référence.

Avec cette invariance on peut annuler le terme ε_6 dans le critère de TSAI-WU pour déterminer l'enveloppe de rupture pour un pli.

Ainsi pour un pli P on reste donc avec

$$G_{11}\varepsilon_1\varepsilon_1 + G_{22}\varepsilon_2\varepsilon_2 + G_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + G_1\varepsilon_1 + G_2\varepsilon_2 = 1$$

En coordonné polaire on a (r_p, θ_p) :

$$(G_{11} + G_{22} + G_{12} \cos(\theta_p) \sin(\theta_p)) * r_p^2 + (G_1 * \cos(\theta_p) + G_2 \sin(\theta_p)) * r_p = 1$$

La courbe de l'enveloppe Omni FPF s'obtient par la formule :

$$r_{omni}(\theta) = \min_p \{r_p(\theta)\}$$

3.5.2 Critère de dimensionnement en LPF (Last ply Failure)

PFA ([8])

➤ Critère

Une méthodologie d'analyse de défaillance progressive a été développée pour prédire la réponse non linéaire et la défaillance des structures composites stratifiées. L'analyse de rupture progressive est basée sur la théorie classique de la stratification pour calculer les contraintes dans le plan. Plusieurs critères de rupture, dont le critère de déformation maximale, le critère de Hashin et le critère de Christensen, sont utilisés pour prédire les mécanismes de rupture.

La rupture du premier pli d'un stratifié est facilement déterminée par superposition. Les matériaux contenus dans le FPF sont intacts, linéaires et indépendants de l'historique de Joad. Le FPF dans l'espace des contraintes est exactement le même que dans l'espace des déformations. Le comportement du stratifié au-delà du FPF est basé sur des **plis dégradés**. Les stratifiés ne sont plus linéaires et leur comportement dépend de la charge.

Le modèle de rupture étudié ici est celui proposé dans [8] et le critère utilisé est le critère de TSAI-Wu en déformation. Ce modèle consiste à une analyse de résistance pli par pli pour la prédiction de la résistance post-FPF. Un organigramme pour le critère traditionnel et son extension pour inclure la dégradation est illustré à la Figure 12. La résistance ultime est atteinte après dégradation progressive de tous les plis.

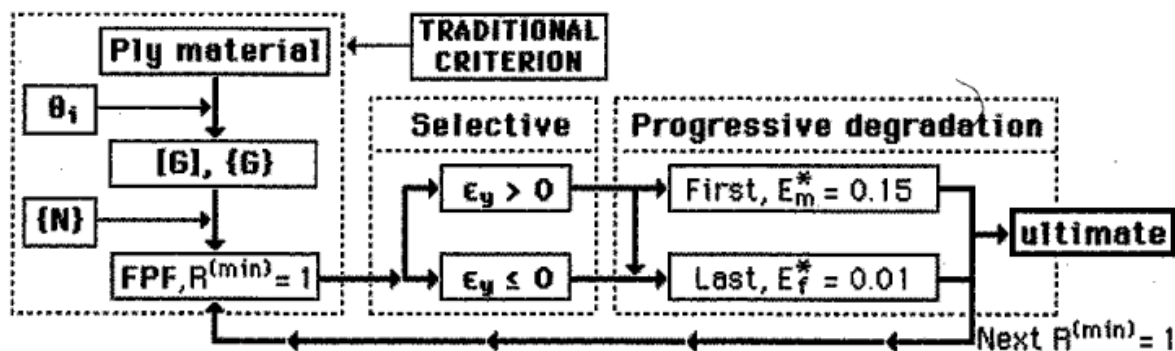


Figure 12: Modèle de dégradation progressive d'un stratifié

Lorsqu'un pli est chargé au-delà du FPF, il perd en rigidité pour refléter la présence de microfissures et de défaillance des fibres. Sur la Figure 12, deux modes de dégradation sont possibles, à sélectionner par la déformation transversale du pli :

- a. Si la déformation transversale des plis est positive, les plis peuvent se dégrader deux fois :
 - D'abord par des microfissures où la rigidité de la matrice est réduite mais la rigidité de la fibre est retenue. Les expressions des propriétés des plis après dégradation de la matrice sont données par :

$$E_x^{\text{degraded}} = E_x^{\text{intact}}, \quad v_x^{\text{degraded}} = E_m^* v_x^{\text{intact}}$$

$$\frac{1}{E_y^{\text{degraded}}} = \frac{1}{(1 + v_y^*)} \left[\frac{1}{E_{fy}} + \frac{1}{E_m^*} \frac{v_y^*}{E_m} \right]$$

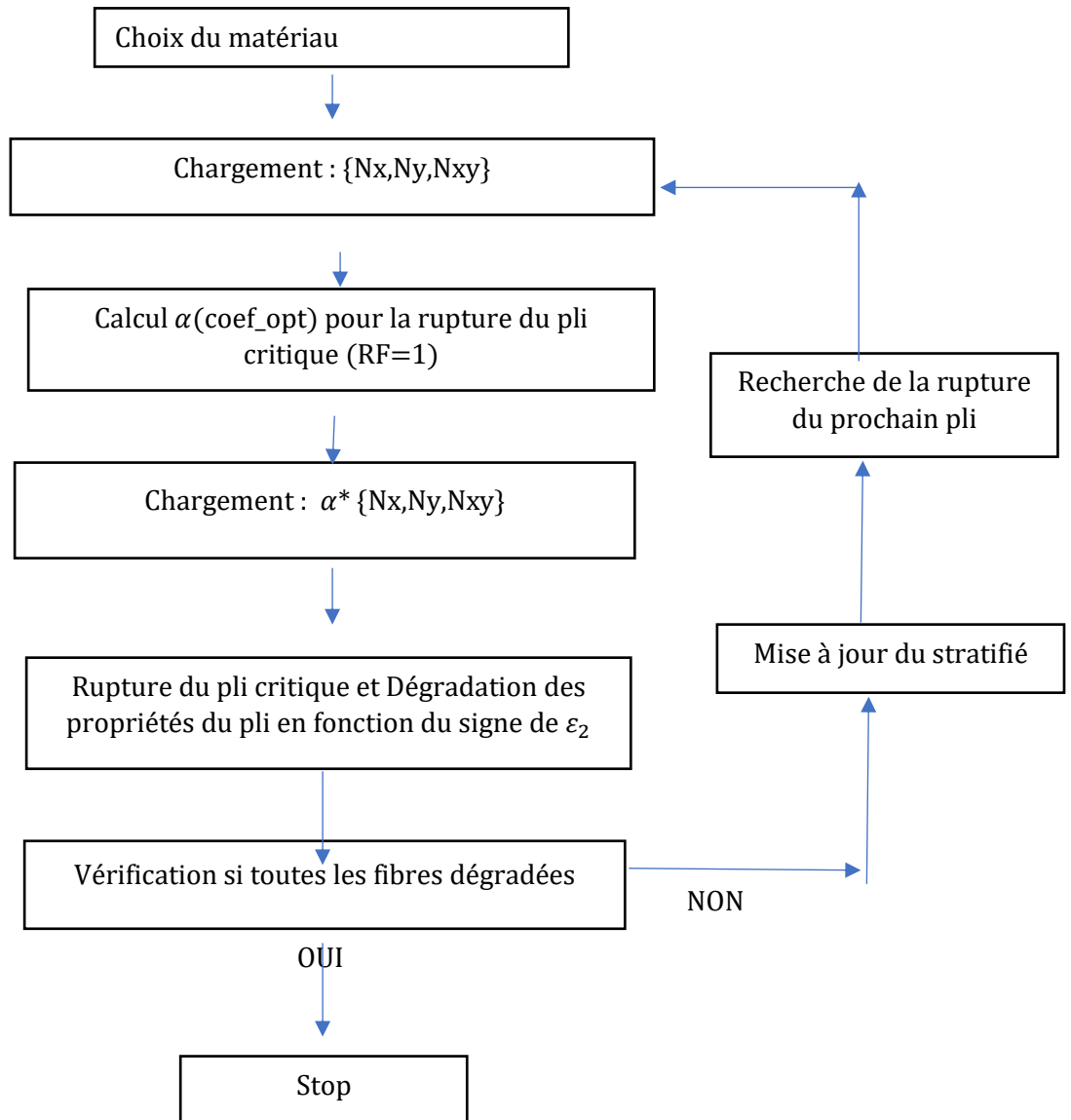
$$\frac{1}{E_s^{\text{degraded}}} = \frac{1}{(1 + v_s^*)} \left[\frac{1}{G_{fx}} + \frac{1}{E_m^*} \frac{v_s^*}{G_m} \right]$$

↑
matrix degradation factor

- Deuxièmement, par la rupture des fibres où tous les modules de pli sont réduits à près de zéro. Pour obtenir les propriétés du matériau après dégradation de la fibre on utilise les mêmes formules que celle de la dégradation de la matrice mais cette fois ci en multipliant les propriétés de la fibre par la E_f^* .
- b. Si la déformation transversale des plis est nulle ou négative, les plis ne peuvent se dégrader qu'une seule fois. Étant donné que la dégradation de la matrice n'est pas autorisée, le seul mode est la défaillance de la fibre.

➤ Implémentation

Nous avons implémenté la PFA en utilisant les critères de TSAI-Hill et TSAI-WU en déformation. Pour un stratifié donné le but est de partir d'un flux de charge initial (N_x, N_y, N_{xy}), ensuite de déterminer les coefficients multiplicatif α de ce flux de charge pour rompre progressivement les plis du stratifié. La méthodologie pour ces deux critères est la même.



➤ Calcul de α :

- TSAI-Hill :

Pour le flux de charge initial $N_i = \{N_x, N_y, N_{xy}\}$ on calcul les RF de tous les plis par la

$$\text{formule RF} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{X_{C/T}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_{C/T}^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_{C/T}^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2}}}$$

Le pli critique étant le pli ayant le RF faible (Min (RF)). Pour Avoir Min (RF)=1 il faut que $\alpha = \text{Min}(\text{RF})$.

- TSAI-WU :

On part toujours du flux de charge initial $N_i = \{N_x, N_y, N_{xy}\}$. puis on calcule les RF de tous les plis par la formule $\text{RF} = \frac{1}{G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j + G_i\varepsilon_i}$. On identifie le pli critique qui est celui ayant RF la plus faible $\text{RFc} = \text{Min}(\text{RF})$.

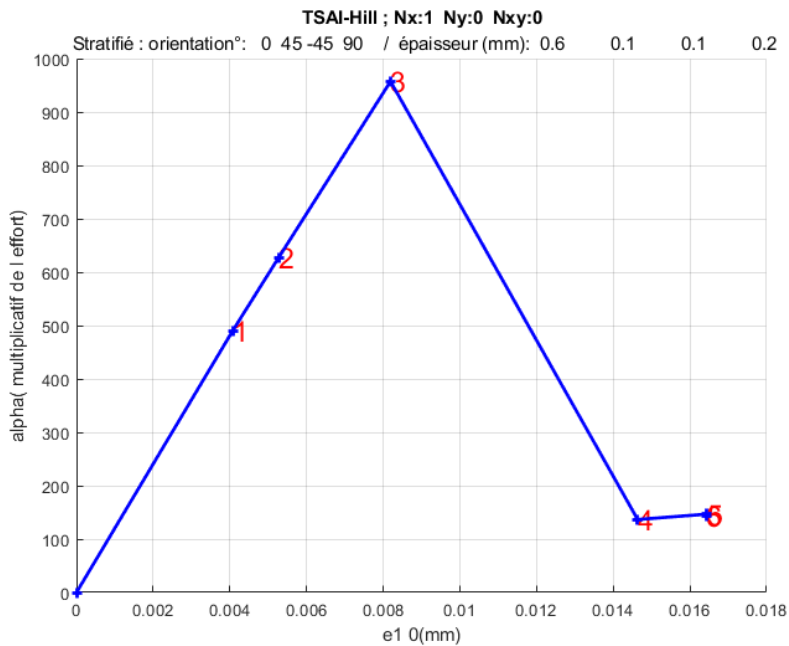
La multiplication du flux de charge initial par α permet d'obtenir pour ce pli critique

$$RF_c = \frac{1}{G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j * \alpha^2 + G_i\varepsilon_i * \alpha}$$

La rupture est atteinte pour α solution positive de l'équation $G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j * \alpha^2 + G_i\varepsilon_i * \alpha = 1$

➤ Résultat sur du QUAD :

TSAI-Hill :



'Points'	'0'	'45'	'-45'	'90'
'1'	'2.0071'	'1.2974'	'1.2974'	'1'
'2'	'1.5463'	'1'	'1'	'2.7881'
'3'	'1'	'2.0267'	'2.0267'	'1.7712'
'4'	'55.6708'	'1.1237'	'1.1237'	'1'
'5'	'49.562'	'1'	'1'	'Inf'
'6'	'49.5802'	'Inf'	'1'	'Inf'

Figure 13:PFA pour un Quad en traction simple ; à gauche courbe contrainte -déf, à droite historique des RF et en dessous historique de rupture

'Points'	'0'	'45'	'-45'	'90'
'1'	'Intact'	'Intact'	'Intact'	'Matrice dégradée'
'2'	'Intact'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'
'3'	'Fibre dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'
'4'	'Fibre dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice et Fibbre dégradées'
'5'	'Fibre dégradée'	'Matrice et Fibbre dégradées'	'Matrice dégradée'	'Matrice et Fibbre dégradées'
'6'	'Fibre dégradée'	'Matrice et Fibbre dégradées'	'Matrice et Fibbre dégradées'	'Matrice et Fibbre dégradées'

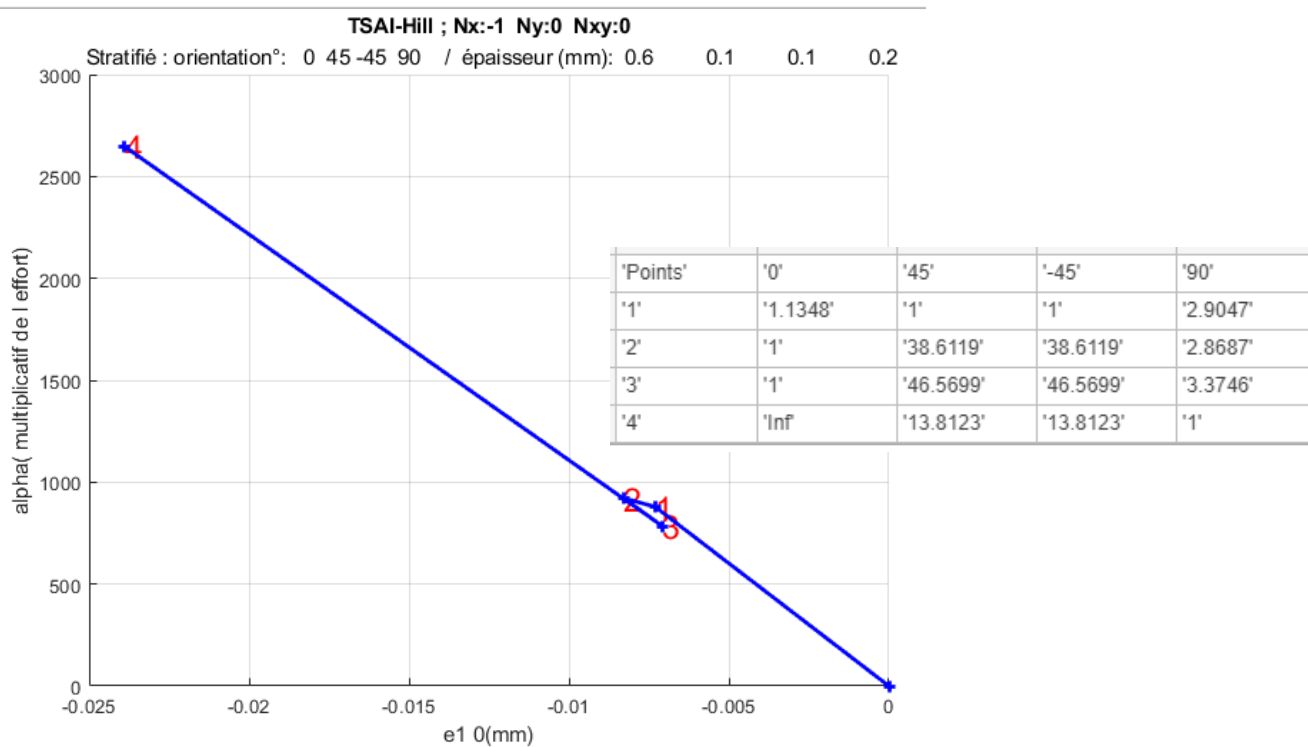


Figure 14 : PFA pour un stratifié QUAD en compression simple plus historique des RF et en dessous historique de dégradation

'Points'	'0'	'45'	'-45'	'90'
'1'	'Intact'	'Fibre dégradée'	'Fibre dégradée'	'Intact'
'2'	'Matrice dégradée'	'Fibre dégradée'	'Fibre dégradée'	'Intact'
'3'	'Matrice et Fibbre dégradées'	'Fibre dégradée'	'Fibre dégradée'	'Intact'
'4'	'Matrice et Fibbre dégradées'	'Fibre dégradée'	'Fibre dégradée'	'Fibre dégradée'

TSAI-WU :

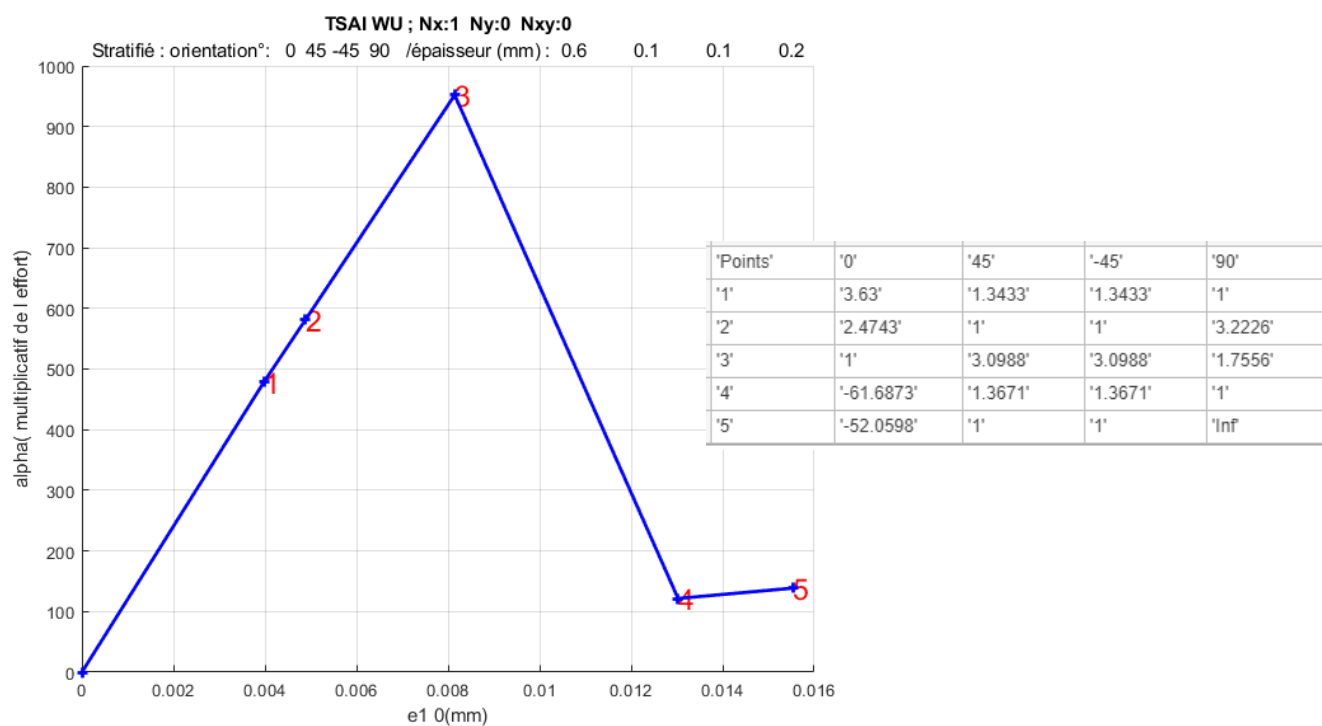


Figure 15: PFA pour un QUAD en traction simple plus historique des RF et en dessous historique des dégradations.

'Points'	'0'	'45'	'-45'	'90'
'1'	'Intact'	'Intact'	'Intact'	'Matrice dégradée'
'2'	'Intact'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'
'3'	'Fibre dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'
'4'	'Fibre dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice dégradée'	'Matrice et Fibre dégradées'
'5'	'Fibre dégradée'	'Matrice et Fibre dégradées'	'Matrice et Fibre dégradées'	'Matrice et Fibre dégradées'

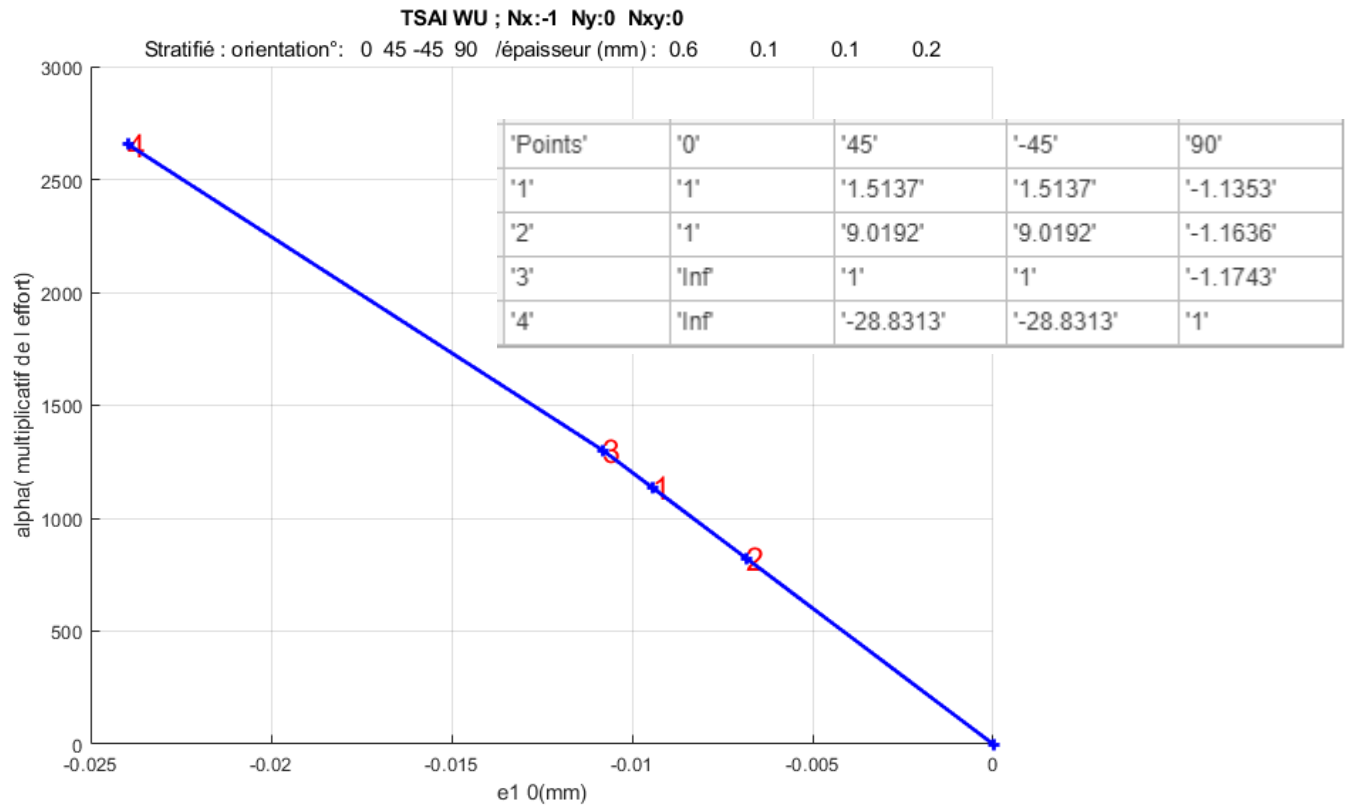


Figure 16: PFA sur un QUAD en compression simple plus historique des RF et en dessous historique de dégradation

'Points'	'0'	'45'	'-45'	'90'
'1'	'Matrice dégradée'	'Intact'	'Intact'	'Intact'
'2'	'Matrice et Fibre dégradées'	'Intact'	'Intact'	'Intact'
'3'	'Matrice et Fibre dégradées'	'Fibre dégradée'	'Fibre dégradée'	'Intact'
'4'	'Matrice et Fibre dégradées'	'Fibre dégradée'	'Fibre dégradée'	'Fibre dégradée'

Les résultats de la PFA sur d'autres stratifiés sont donnés en annexe (4)

- Commentaire des résultats de la PFA sur du QUAD (figure 13,14,15 et 16) :

Les résultats obtenus par ce PFA en traction simple pour les deux critères sont similaires et sont très proches du résultat proposé par TSAI dans [8]. Mais par contre les résultats en compression simples ne sont pas très satisfaisants.

En effet pour les deux critères (TSAI-Hill et TSAI-Wu) en compression simple on se rend compte qu'après la rupture des propriétés de la matrice des plis, le stratifié supporte moins de charge, dans d'autres cas après la rupture des propriétés des fibres des plis le stratifié supporte plus de charge ce qui ne devrait pas être le cas (figure 14). En plus sur la figure 14 et 16 pour les deux critères de rupture le stratifié supporte une charge deux fois plus grande que les limites de rupture en compression des plis. Le matériau utilisé dans ce cas a les propriétés suivantes : **Xc=1500Mpa** et **Yc=245 MPA**. Les PFA des figures 14 et 16 nous montre que le stratifié peut supporter jusqu'à **2800 MPA** ce qui n'est pratiquement pas possible.

Omni LPF [4]

La construction de l'enveloppe de rupture du dernier pli (LPF) omni-strain suit la même procédure que celle décrite pour le FPF omni-strain [4]. Sur la base d'un critère de défaillance donné, tel que Tsai-Wu ou déformation maximale, les enveloppes de rupture sont générées dans l'espace de déformation pour un stratifié avec toutes les orientations de plis, de 0 à 90. Alors que pour les enveloppes de rupture omni souche FPF sont obtenues à l'aide de plis intacts propriétés, les enveloppes LPF omni souche sont définies à l'aide des propriétés dégradées des plis.

Les propriétés dégradées des plis sont une approche largement acceptable pour tenir compte de la diminution des composants de rigidité dominés par la matrice et des contraintes de rupture accrues, dues à la présence de micro-fissures.

La figure 17 montre l'enveloppe de déformation omni LPF pour **T700/2508**. Dans ce cas, les enveloppes de rupture pour les plis individuels ont été générées en utilisant le critère de défaillance Tsai-Wu avec un terme d'interaction normalisé $F_{xy}^* = 1/2$ et facteur de dégradation de la matrice $E_m^* = 0,15$. Simultané la dégradation des plis a été prise en compte avec des propriétés de matériau dégradées calculé selon des relations présentées dans la partie précédente (PFA).

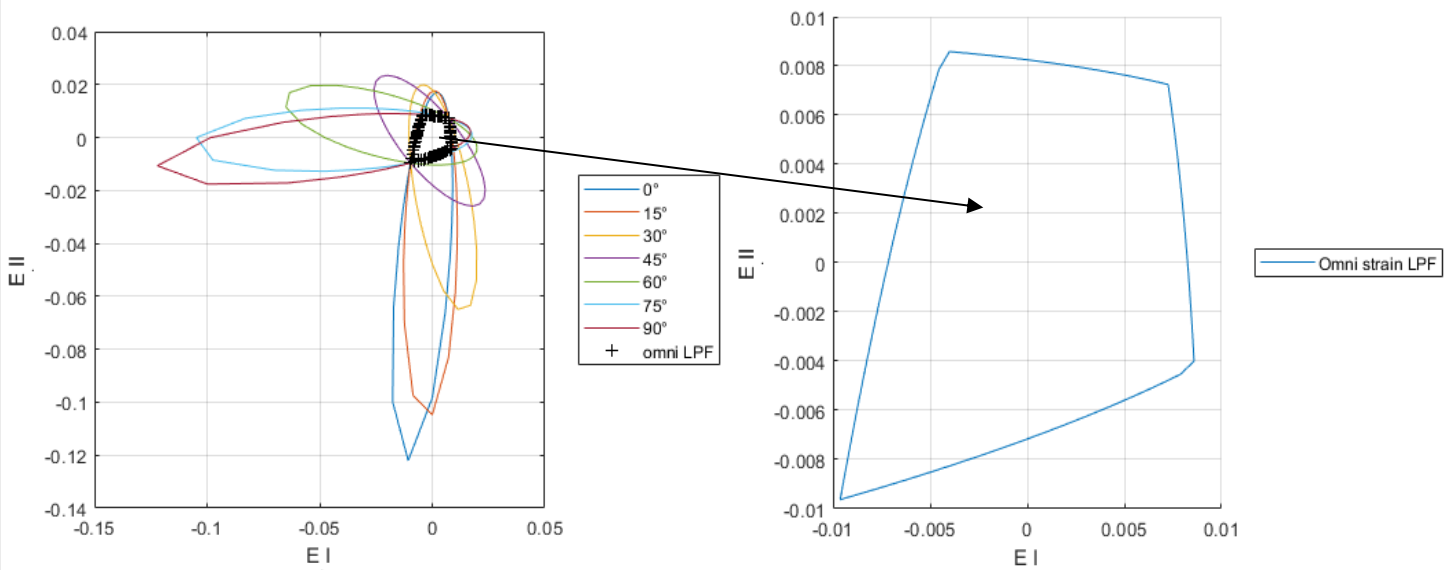


Figure 17: Omni LPF

Unit circle [4]

L'article [4] présente une approche pour la construction du cercle unitaire. Cet article nous montre qu'à partir de 4 points d'encrages obtenus avec les propriétés du matériau non dégradé on obtient une enveloppe qui se trouve à l'intérieur de l'enveloppe OMNI LPF. L'enveloppe OMNI LPF est obtenue à partir des propriétés du matériau dégradé. Nous avons tracé ces deux enveloppes (Unit circle à partir des points d'encrages et l'enveloppe OMNI LPF). Mais l'enveloppe obtenue à partir du cercle unitaire n'est pas incluse dans l'omni LPF (Figure 18). En effet cela est dû au fait que les points d'encrages sont obtenus avec les propriétés du matériaux non dégradées et l'enveloppe OMNI LPF est obtenue à partir des propriétés du matériaux dégradées. S'il faut dégrader les propriétés du matériau pour avoir les points d'encrages alors dans ce cas le cercle unitaire n'a pas d'intérêt puisqu'on dispose déjà de l'omni LPF.

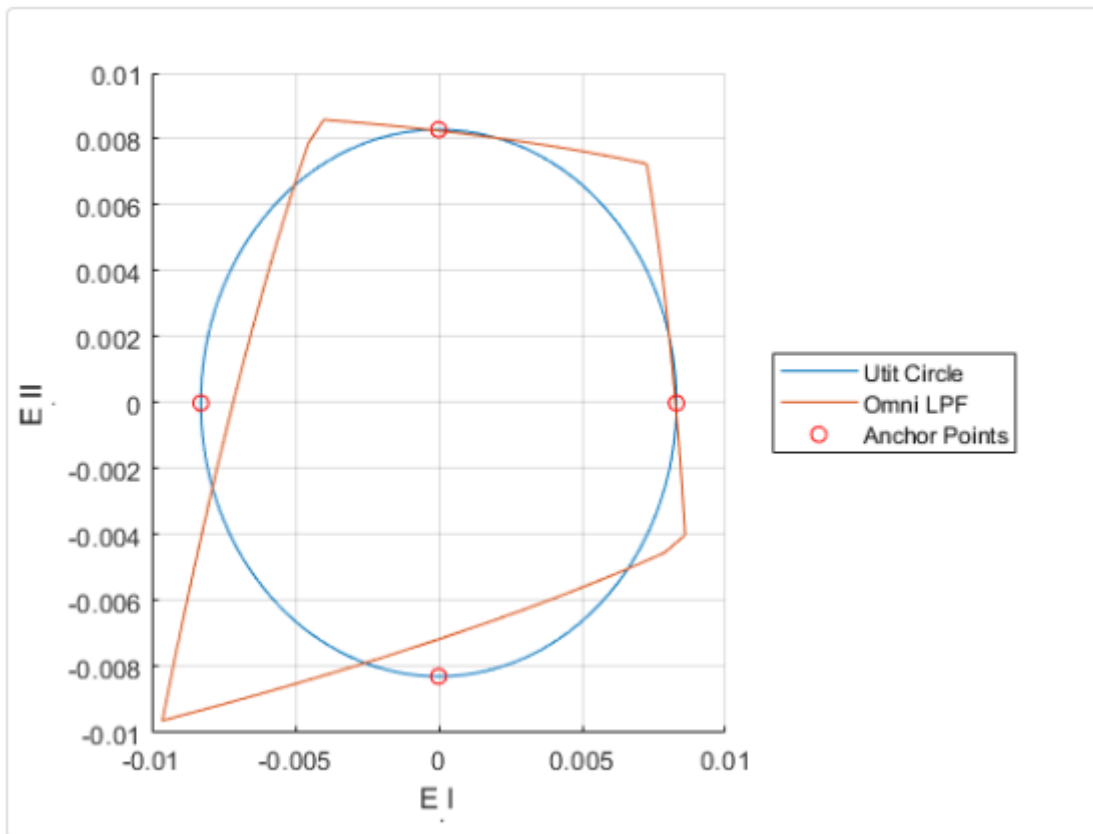


Figure 18: Unit circle et Omni LPF pour le T300/5208

4 Dimensionnement par optimisation

4.1 Dimensionnement en FPF

Nous avons utilisé des algorithmes d'optimisation pour dimensionner les panneaux de composites sous plusieurs cas de charge. Pour chaque critère de rupture nous avons utilisé la fonction « fmincon » de Matlab pour une optimisation locale et « GlobalSearch » pour une optimisation globale. Afin de faire une comparaison nous avons conçu ces algorithmes pour les DD et les QUAD.

Pour concevoir un stratifié QUAD on a besoin des trois paramètres suivants :

- ✓ P_0° (pourcentage de pli à 0°),
- ✓ P_{45}° (pourcentage de pli à 45°)
- ✓ L'épaisseur totale du stratifié

Sachant que $(-45)^\circ = p_{45}^\circ$ et $p_{90}^\circ = 1 - p_0^\circ - 2 \cdot p_{45}^\circ$.

Le but de l'optimisation pour un QUAD est de déterminer pour un flux de chargement donné les P_0° et P_{45}° qui permettent d'avoir la plus faible épaisseur du stratifié.

Cependant pour les stratifiés DD on a besoin des trois paramètres suivants :

- ✓ Φ
- ✓ Ψ
- ✓ L'épaisseur totale du stratifié (e)

Les proportions des orientations dans le stratifié étant connues 0.25%, l'optimisation des stratifiés DD consiste à déterminer pour un flux de chargement donné les angles Φ et Ψ qui permettent d'avoir la plus faible épaisseur du stratifié.

4.1.1 Optimisation par le critère de TSAI-Hill et TSAI-WU

Ici on cherche un vecteur $x = [\text{épaisseur } P0^\circ \ P45^\circ]$ pour les QUAD et $x = [\text{épaisseur(mm)} \ \Phi \ \Psi]$ pour les DD avec pour objectif de minimiser l'épaisseur.

L'algorithme est le suivant :

- ✓ - Choix du matériau

```
Nxx=-3333.33*2/4;
Nyy=0;
Nxy=-250;|
Effort=[Nxx,Nyy,Nxy]
```

- ✓ - Application du chargement $N=\{Nxx,Nyy,Nxy\}$:
- ✓ - Prédimensionnement pour déterminer le point de départ :

$X0 = [1 \ P0^\circ \ P45^\circ]$ en QUAD et $X0 = [1 \ 0 \ 90]$ En DD

- ✓ - Optimisation :

```
[x,fr]=OptPcomp(x0,Nx,Ny,Nxy); %QUAD
```

```
[x,fr]=OptPcomp_DD(x0,Nxx,Nyy,Nxy); DD
```

- ✓ - Post-traitement passage pli entier
- ✓ - Préparation pour passage à la génération du lay-up quad en imposant un nombre de pli pair :

```
n=ceil(t/(2*e)) %arrondi au pli entier supérieur
Np=[0,n(1);45,n(2);-45,n(4);90,n(3)]
[RES] = GenSeq1(Np)
```

-Pour les DD :

```
pli_elementaire=0.125;
Nbre_pli=x(1)/pli_elementaire;
mod(floor(Nbre_pli),4)
Hfinal=(floor(Nbre_pli)-
mod(floor(Nbre_pli),4)+4)*pli_elementaire
```

Fonction optPcomp pour le QUAD

```
function [x,fr]= OptPcomp (x0,Nx,Ny,Nxy)

    %définition des variables globales
    global N fr Compt
    N=[Nx,Ny,Nxy];
    fr=[];
    Compt=1;

    % x0 = [1.,.25,.25];      % Make a starting guess at the solution
    lb=[0.1,0.10,0.10];
    ub=[inf,0.70,0.40];
    %contrainte d'inégalité linéaire
    A=[0,1,2];
    b=0.9;
    options = optimset('LargeScale','off');
    %
    [x,fval,exitflag,output] = fmincon (@objfun,x0,A,b,[],[],lb,ub,@confun,options)
    fval

    output
function f= objfun(x)
    %FONCTION OBJECTIF
    f=x(1);
return
function [c, ceq] = confun(x)
    % Nonlinear inequality constraints
    global N fr Compt
    t=x(1)*[x(2),x(3),1-x(2)-2*x(3),x(3)];
    mat=4; %choix du matériau du COURS
    [RF,ind,RF0,RF90,RF45,RF135] = RF_memb(N(1),N(2),N(3),t,mat);
    c = 1-min([RF0,RF90,RF45,RF135]);
    fr(:,Compt)=[RF0,RF45,RF90,RF135,t]';    %c;%
    Compt=Compt+1;
    % Nonlinear equality constraints
    ceq = [];
return
```

Fonction OptPcom_DD pour les DD

```

function [x,fr]= OptPcomp_DD(x0,Nx,Ny,Nxy)
    %définition des variables globales
    global N fr Compt
    N=[Nx,Ny,Nxy];
    fr=[];
    Compt=1;
    lb=[0.1,0,0];
    ub=[50,90,90];
    %contrainte d'inégalité linéaire
    A=[0,1,-1];
    b=[-1];
    options = optimset('LargeScale','off');
    rng default % For reproducibility
    gs = GlobalSearch;
    problem = createOptimProblem('fmincon','x0',x0,...
    'objective',@objfun,'Aineq', A, 'bineq', b,'lb',lb,'ub',ub,'nonlcon', @confun);
    [x,fval,exitflag,output] = run(gs,problem);
    output;
end
function f= objfun(x)
    %FONCTION OBJECTIF
    f=x(1);
    return
end
function [c, ceq] = confun(x)
    mat=zeros(3,9);
    % 1 : IM7/977-3 // 2 : T700 C-Ply 55 // 3: T800/Cytec
    %      1      2      3      4      5      6      7      8      9
    %      Ex      Ey      Nuxy      Gxy      Xt      Xc      Yt      Yc      S      en GPa
    mat(1,:)= [191  9.94  0.35  7.79  3.25  1.6  0.062  0.098  0.075]; % IM7/977-3
    mat(2,:)= [162  9.0  0.40  5.0  3.77  1.66  0.056  0.150  0.098]; % T800/Cytec
    mat(3,:)= [121  8.0  0.30  4.7  2.53  1.70  0.066  0.220  0.093]; % T700 C-Ply 55
    % Nonlinear inequality constraints
    global N fr Compt
    t=x(1)*[0.25,0.25,0.25,0.25];
    ind_mat=11; %choix du matériau du COURS
    [RF,ind,RFang1,RFang_1,RFang2,RFang_2] = RF_memb_DD(N(1),N(2),N(3),mat(ind_mat,:),x);
    c = 1-min([RFang1,RFang_1,RFang2,RFang_2]);
    fr(:,Compt)=[RFang1,RFang_1,RFang2,RFang_2,t,x(2),x(3)]'; %c;%
    Compt=Compt+1;
    % Nonlinear equality constraints
    ceq = [];
    return
end

```

EN modifiant le critère de rupture (TSAI-Hill en TSAI-WU) on obtient l'algorithme d'optimisation pour le critère de TSAI-WU.

4.4.2 Optimisation en utilisant l'enveloppe omni FPF

- Calcul d'épaisseur d'un stratifié en utilisant l'enveloppe omni FPF

L'utilisation de cette enveloppe simplifie grandement les calculs par le fait qu'il n'est pas nécessaire de calculer les contraintes et déformations eu niveau de chaque couche du stratifié. Pour un stratifié donné sous un flux de charge le calcul simple des déformations du plan moyen du stratifié permet d'obtenir l'épaisseur direct du stratifié.

En effet pour le calcul de l'épaisseur pour un stratifié donné (DD ou QUAD) d'épaisseur de base 1 mm sous un flux de charge $N=\{N_x, N_y, N_{xy}\}$. L'épaisseur nécessaire pour supporter ce flux est donnée par : $h = \frac{\varepsilon_I}{A}$ avec A et ε_I définis dans la figure suivante

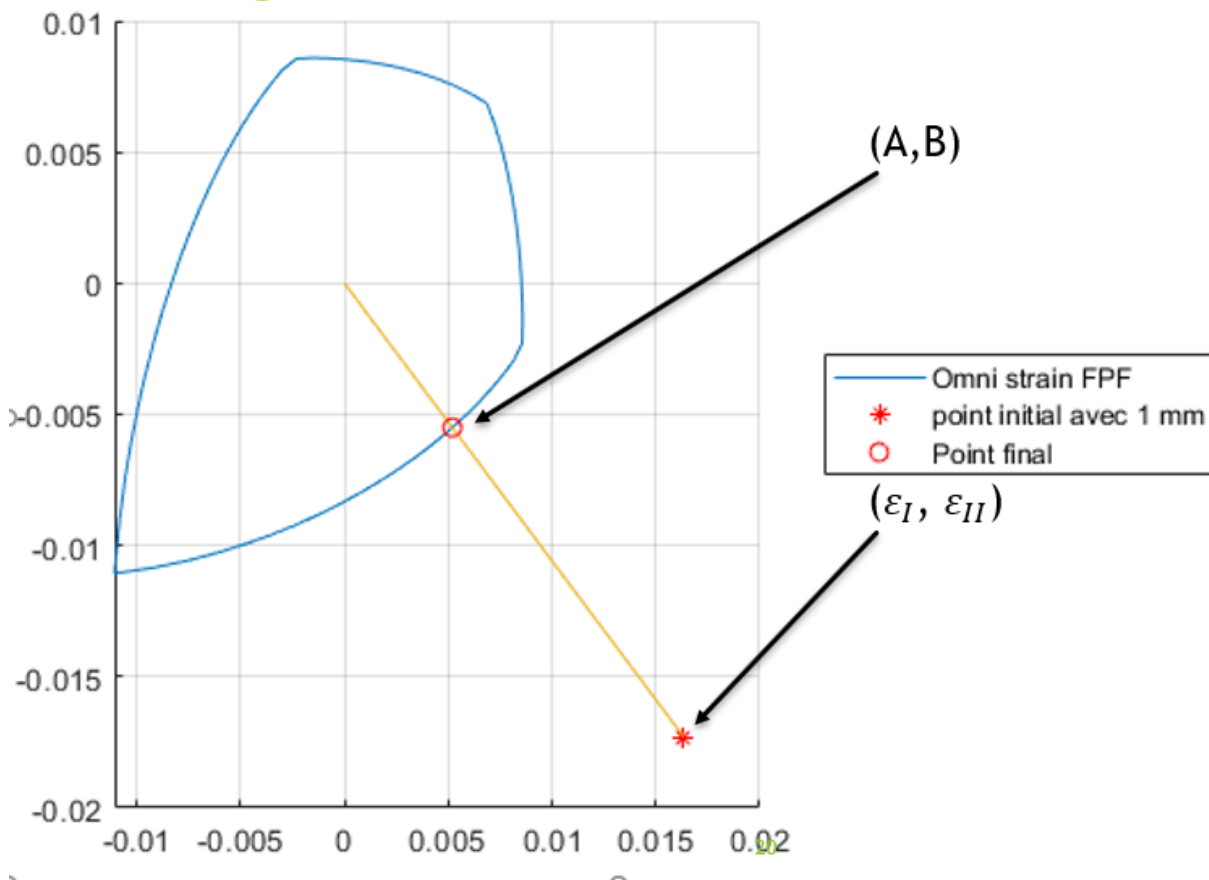


Figure 19: Calcul d'épaisseur d'un stratifié en utilisant l'OMNI FPF

Cette stratégie réduit considérablement le temps de calcul de l'optimisation et elle permet d'enlever l'épaisseur dans les paramètres mais l'objectif étant toujours de déterminer le vecteur x qui minimise l'épaisseur.

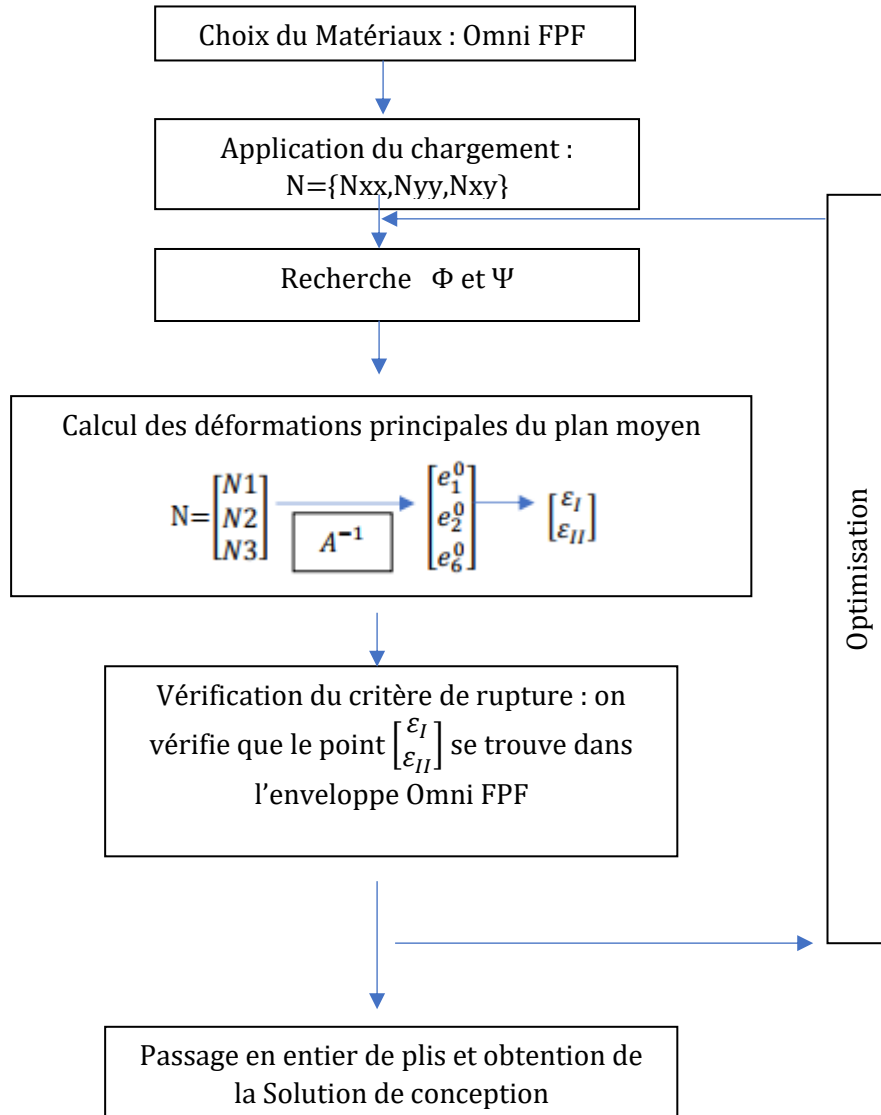
- Dimensionnement par optimisation en utilisant l'enveloppe Omni.

La procédure d'optimisation est la suivante :

- Choix du matériau : ce qui permet directement de tracer l'enveloppe Omni FPF pour ce matériau.
- Application du flux de chargement $N = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix}$.

- c. En suite se fixe une épaisseur de 1 mm pour le stratifié et on cherche les deux angles Φ et Ψ qui permettrons d'avoir le point (en espace de déformation) le plus proche de l'enveloppe Omni FPF. En étant le plus proche possible de cette enveloppe on réduit l'épaisseur finale du stratifié qui n'est que le rapport entre la déformation du point initial (avec 1 mm) et la déformation (ε_I) du point final (qui est l'intersection de la droite linéaire passant par le point initial et l'enveloppe omni).
- d. Avec ces deux angles on déduit l'épaisseur du stratifié.

En récapitulatif on a :



Les paramètres d'optimisation pour les QUAD et les DD restent les mêmes mais prise en compte de l'épaisseur dans le vecteur d'état.

Sous Matlab nous avons :

- ✓ Choix du matériau

```
Nxx=-3333.33*2/4;
Nyy=0;
Nxy=-250;
Effort=[Nxx,Nyy,Nxy]
```

- ✓ Application du chargement $N=\{N_{xx},N_{yy},N_{xy}\}$:
- ✓ Prédimensionnement pour déterminer le point de départ :

$X0 = [P0^\circ P45^\circ]$ en QUAD et $X0 = [0 \ 90]$ En DD

- ✓ Optimisation :

```
[x,fr]=OptPcomp_omni(x0,Nx,Ny,Nxy); %QUAD
```

```
[x,fr]=OptPcomp_DD_omni(x0,Nxx,Nyy,Nxy); %DD
```

- ✓ Post-traitement passage pli entier
- ✓ Préparation pour passage à la génération du lay-up quad en imposant un nombre de pli pair :

```
n=ceil(t/(2*e)) %arrondi au pli entier supérieur
```

```
Np=[0,n(1);45,n(2);-45,n(4);90,n(3)]
```

```
[RES] = GenSeq1(Np)
```

-Pour les DD :

```
pli_elementaire=0.125;
```

```
Nbre_pli=x(1)/pli_elementaire;
```

```
mod(floor(Nbre_pli),4)
```

```
Hfinal=(floor(Nbre_pli)-
```

```
mod(floor(Nbre_pli),4)+4)*pli_elementaire
```


Fonction optPcomp_omni pour le QUAD

```
function [x,fr]= OptPcomp_DD_Omni(x0,Nx,Ny,Nxy,int)

%définition des variables globales
global N fr Compt in
N=[Nx,Ny,Nxy]; in=int;fr=[];Compt=1;
% x0 = [1.,.25,.25]; % Make a starting guess at the solution
lb=[0,0]; ub=[90,90]; A=[1,-1];b=[-1];
% %-----optimisation globale
rng default % For reproducibility
gs = GlobalSearch;
problem = createOptimProblem('fmincon','x0',x0,...
'objective',@objfun,'Aineq', A, 'bineq', b,'lb',[0,0],'ub',[90,90]);
[x,fval,exitflag,output] = run(gs,problem);
% %-----
output
end
function f= objfun(x)
%FONCTION OBJECTIF
mat=zeros(3,9);
% 1 : IM7/977-3 // 2 : T700 C-Ply 55 // 3: T800/Cytec
%      1      2      3      4      5      6      7      8      9
%      Ex      Ey      Nuxy      Gxy      Xt      Xc      Yt      Yc      S      en GPa
mat(1,:)= [191  9.94  0.35  7.79  3.25  1.6  0.062  0.098  0.075]; % IM7/977-3
mat(2,:)= [162  9.0  0.40  5.0  3.77  1.66  0.056  0.150  0.098]; % T800/Cytec
mat(3,:)= [121  8.0  0.30  4.7  2.53  1.70  0.066  0.220  0.093]; % T700 C-Ply 55
% choix materiaux
i=11;
global N in fr Compt
[X_env,Y_env,Ang,r]=Omni(mat(i,:));
[E1,E2] = DEF_principale(x(1),x(2),N(1),N(2),N(3),1,mat(i,:));
m=max(X_env); xd=0:E1/100:2*max(m,E1);y=xd*(E2/E1);
% on commence par verifier si un point est déjà dans l'enveloppe
[A,B]=intersections(X_env,Y_env,xd,y,1);
if (in==1)
% on cherche à se rapprocher de l'origine dans le cas ou un point se trouve déjà dans l'enveloppe
f=sqrt(E1*E1+E2*E2);
end
if(in==0)
% on cherche à se rapprocher de l'enveloppe si non
f=max(E1/A,E2/B);
end
fr(:,Compt)=[f,x(1),x(2)]';
Compt=Compt+1;
return
end
function [c, ceq] = confun(x)
% Nonlinear inequality constraints
global N fr Compt
c = [];fr(:,Compt)=[objfun(x),x(1),x(2)]'; %c;%
Compt=Compt+1;
% Nonlinear equality constraints
ceq = [];
return
end
```

Fonction optPcomp_DD_omni pour le DD

```
function [x,fr]= OptPcomp_QUAD_Omni(x0,Nx,Ny,Nxy,int)

%définition des variables globales
global N fr Compt in
N=[Nx,Ny,Nxy]; in=int;fr=[]; Compt=1;
lb=[0.1,0.10,0.10];ub=[inf,0.70,0.40];

%contrainte d'inégalité linéaire
A=[1,2] ; b=0.9;

%-----optimisation locale
options = optimset('LargeScale','off');
[x,fval,exitflag,output] = fmincon(@objfun,x0,A,b,[],[],lb,ub,@confun,options);
fval;

%-----
output
end

function f= objfun(x)

%FONCTION OBJECTIF
mat=zeros(3,9);

% 1 : IM7/977-3 // 2 : T700 C-Ply 55 // 3: T800/Cytec
%      1   2   3   4   5   6   7   8   9
%      Ex  Ey  Nuxy Gxy Xt  Xc  Yt  Yc  S   en GPa
mat(1,:)= [191  9.94  0.35  7.79  3.25  1.6  0.062  0.098  0.075]; % IM7/977-3
mat(2,:)= [162  9.0  0.40  5.0  3.77  1.66  0.056  0.150  0.098]; % T800/Cytec
mat(3,:)= [121  8.0  0.30  4.7  2.53  1.70  0.066  0.220  0.093]; % T700 C-Ply 55

% choix matériaux
i=11;
global N in fr Compt
[X_env,Y_env,Ang,r]=Omni(mat(i,:));
[E1,E2] = DEF_principale(x(1),x(2),N(1),N(2),N(3),1,mat (i,:));
if E1<0
    xd=2*min(E1,min(X_env)):abs(E1)/100:0;
    y=xd*(E2/E1);
end
if E1>0
    m=max(X_env);
    xd=0:E1/100:2*max(m,E1);
    y=xd*(E2/E1);
end

% on commence par verifier si un point est déjà dans l'enveloppe
[A,B]=intersections(X_env,Y_env,xd,y,1);
if (in==1)
    f=sqrt(E1*E1+E2*E2); % on cherche à se rapprocher de l'origine dans le cas ou un point se trouve déjà dans l'enveloppe
end
if(in==0)
    f=max(E1/A(1),E2/B(1)); % on cherche à se rapprocher de l'enveloppe si non
end
fr(:,Compt)=[f,x(1),x(2)]'; Compt=Compt+1;
return
end

function [c, ceq] = confun(x)
global N fr Compt
c = []; ceq = [];
return
end
```

4.2 Dimensionnement par optimisation en LPF

4.2.1 PFA

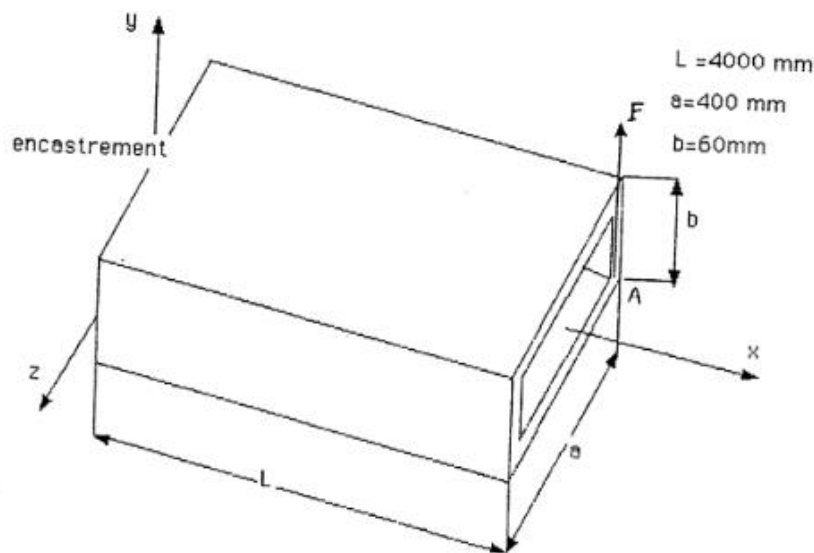
Dans cette partie il était question d'utiliser la PFA présentée plus haut afin de chercher le point de rupture (contrainte max) du dernier pour un stratifié. Mais étant donné que cette PFA ne donne pas des résultats satisfaisants dans les autres cas de charges autres que la traction simple, nous ne pouvons l'utiliser pour dimensionner des structures ayant plusieurs cas de charge.

4.2.2 Omni LPF

Après avoir tracé de l'enveloppe OMNI LPF comme montré dans II.4.1, La procédure d'optimisation pour les QUAD et les DD est la même que celle de l'omni FPF dans toutes les étapes. On refait juste l'optimisation avec L'omni FPF en modifiant juste l'enveloppe de rupture en Omni LPF.

5 Résultats et comparaisons

L'objectif est de parvenir à la préconception finale d'un caisson de voilure de torsion en panneaux de matériaux composites. Les dimensions globales de la boîte sont données dans le croquis ci-dessous. Cette boîte est entièrement encadrée sur le côté gauche, alors que son côté droit libre est soumis à un concentré vertical (suivant y) force $F = 10000 \text{ N}$ appliquée au point A.



Le dimensionnement de ce caisson se fera sous deux cas de charges :

- Le premier cas (**CAS 1**) en prenant en compte juste l'effort $F = 10000 \text{ N}$.

Cela génère les contraintes suivantes dans les parties de la structure.

CAS 1	σ_{xxMax}	τ_1
Upper Panel	$-\frac{F * L}{a * b * eh}$	$\frac{F}{4*b*eh} + \frac{F}{2*b*eh}$
Lower panel	$\frac{F * L}{a * b * eh}$	$-\frac{F}{4*b*eh} - \frac{F}{2*b*eh}$
Vertical panel(z>0)	0	$-\frac{F}{4 * b * ev} + \frac{F}{2 * b * ev}$
Vertical panel (z<0)	0	$\frac{F}{4 * b * ev} + \frac{F}{2 * b * ev}$

En application numérique avec un coefficient de sécurité de 2 on a :

CAS 1	σ_{xxMax} (N/mm)	τ_1 (N/mm)
Upper Panel	-3333.33	250
Lower panel	3333.33	-250
Vertical panel(z>0)	0	83.33
Vertical panel (z<0)	0	250

- Et le second cas (**CAS 2**) en plus de l'effort **F=10000N**, on prendra en compte la pression interne de carburant de **P=2 bars (0.2 N/mm²)** ce qui va générer des efforts **N_{yy}** dans tous les panneaux du caisson.

De même dans les panneaux on a (avec un coefficient multiplicatif de 2) :

CAS 2	σ_{xxMax} (N/mm)	τ_1 (N/mm)	σ_{yyMax} (N/mm)
Upper Panel	-3333.33	250	12
Lower panel	3333.33	-250	12
Vertical panel(z>0)	0	83.33	80
Vertical panel (z<0)	0	250	80

Dans la suite nous allons dimensionner les panneaux de manière à avoir une même épaisseur pour les panneaux verticaux et une même épaisseur pour les panneaux horizontaux. L'épaisseur du pli de base est fixée à 0.125 mm

Le matériau utilisé pour dimensionner en FPF a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 E_l &= 140 \text{ GPa} & E_t &= 5 \text{ GPa} & \nu_{lt} &= .35 & G_{lt} &= 5 \text{ GPa} \\
 X_t &= 1200 \text{ MPa} & X_c &= 1000 \text{ MPa} \\
 Y_t &= 50 \text{ MPa} & X_c &= 120 \text{ MPa} & S &= 65 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

5.1 Résultats en FPF

Dans un premier temps nous allons dimensionner les panneaux en gardant l'épaisseur constante sur chaque panneau et nous allons considérer une épaisseur de **pli= 0.125 mm**.

➤ Panneaux horizontaux

- CAS 1 ($N_x=3333.33 \text{ N/mm}$; $N_{xy}=-250 \text{ N/mm}$; $N_y=0 \text{ N/mm}$)

Critères	DD			QUAD (pli= 0.125mm)	
	Epaisseur (mm)		Orientation	[Epaisseur(mm) P0 P45]	Un des séquencements possibles
	Pli=0.125 mm	Pli=0.01 mm			
TSAI-Hill	5	4.56	[±0/±12.7]	[5 0.7 0.1]	[0 ₂ /-45/0 ₄ /45/ 0 ₄ /-45/ 0 ₄ /45/90 ₂] _s .
TSAI-WU	5.5	5.04	[±6.12/ ±7.12]	[5 0.7 0.1]	[0 ₂ /-45/0 ₄ /45/ 0 ₄ /-45/ 0 ₄ /45/90 ₂] _s .
Omni FPF	5.5	5.32	[±0/±10]	[5 0.7 0.1]	[0 ₂ /-45/0 ₄ /45/ 0 ₄ /-45/ 0 ₄ /45/90 ₂] _s .

- CAS 2 ($N_x=3333.33 \text{ N/mm}$; $N_{xy}=-250 \text{ N/mm}$; $N_y=12 \text{ N/mm}$)

Critères	DD			QUAD (pli= 0.125mm)	
	Epaisseur (mm)		Orientation	[Epaisseur(mm) P0 P45]	Un des séquencements possibles
	Pli=0.125 mm	Pli=0.01 mm			
TSAI-Hill	5	4.64	[±0/±12.2]	[5 0.7 0.1]	[0 ₂ /-45/0 ₄ /45/ 0 ₄ /- 45/ 0 ₄ /45/90 ₂] _{s.}
TSAI-WU	5.5	5.16	[±6/±7]	[5 0.7 0.1]	[0 ₂ /-45/0 ₄ /45/ 0 ₄ /- 45/ 0 ₄ /45/90 ₂] _{s.}
Omni FPF	5.5	5.44	[±0/±10.5]	[5 0.7 0.1]	[0 ₂ /-45/0 ₄ /45/ 0 ₄ /- 45/ 0 ₄ /45/90 ₂] _{s.}

L'épaisseur des panneaux horizontaux étant grande (pour les DD et les QUAD), nous avons séquencé ces panneaux en 4 sous panneaux .se faisant les efforts supportés par les panneaux seront différents et cela permet de gagner en épaisseur. On aura donc pour chaque partie (**pli = 0.125 mm**) :

$N = [-3333.33 ; 12 ; 250]$ $[-2500 ; 12 ; 250]$ $[-1666.7 ; 12 ; 250]$ $[-833.33 ; 12 ; 250]$



Les résultats des critères d'optimisation étant proches, nous avons utilisé l'enveloppe Omni FPF pour ce dimensionnement par partie.

Dans un premier temps nous calculons les DD équivalents pour chaque partie en utilisant séparément l'algorithme d'optimisation en OMNI FPF et nous avons obtenu :

[5.5 mm, 0°, 10.8°]

[4.5mm, 0°, 13.54°]

[3.5 mm, 0°, 59.8°]

[2.5 mm, 0°, 52°]

Avec cette stratégie on gagne beaucoup en épaisseur et donc en masse, mais par contre les angles étant différents sur tout le panneau, il y aura une discontinuité des couches sur le panneau ce qui peut causer un problème de transmission d'efforts dans le panneau.

Pour résoudre ce problème de discontinuité nous avons conservé les mêmes orientations de DD sur le panneau tout en minimisant $H=ep1+ep2+ep3+ep4$. Pour cela nous avons conçu un algorithme d'optimisation (en **Annexe 3**) ayant pour but de minimiser $H= ep1+ep2+ep3+ep4$ en utilisant le l'enveloppe Omni FPF pour gagner en temps de calcul.

Après calcul nous avons obtenu avec une épaisseur de pli=0.125 mm :

- DD :

6.5 mm

5 mm

3.5 mm

2.5 mm

[±0/±62.2]

Avec cette stratégie on obtient $H=ep1+ep2+ep3+ep4 = 17.5$ contre 16. Mais on obtient un panneau qui est bien plus homogène que le précédent.

- QUAD : ici on donnera [épaisseur(mm) nombre_pli_0 nombre_pli_45 nombre_pli_90]

[5mm 28 4 4]

[4.5mm 24 4 4]

[3.5mm 16 4 4]

[2.5mm 10 4 2]

Avec cette approche on obtient un panneau qui supporte les efforts de départ mais avec moins de masse. Cela permet de faire un gain énorme en masse.

➤ Panneaux verticaux

- CAS 1 ($N_x=0$ N/mm ; $N_{xy}=250$ N/mm ; $N_y=0$ N/mm)

Critères	DD			QUAD (pli= 0.125mm)	
	Epaisseur (mm)		Orientation	[Epaisseur(mm) P0 P45]	Un des séquencements possibles
	Pli=0.125 mm	Pli=0.01 mm			
TSAI-Hill	1	0.56	[±44.5/±45.5]	[1.5 0.1 0.4]	[-45 ₂ /90/45/ 0/45] _s
TSAI-WU	1	0.64	[±44.5/±45.5]	[1.5 0.1 0.4]	[-45 ₂ /90/45/ 0/45] _s

Omni FPF	1	0.68	$[\pm 44.5/\pm 45.5]$	$[1.5 \ 0.1 \ 0.4]$	$[-45_2/90/45/0/45]_s$
----------	---	------	-----------------------	---------------------	------------------------

- CAS 2 ($N_x=0 \text{ N/mm}$; $N_{xy}=250 \text{ N/mm}$; $N_y=80 \text{ N/mm}$)

Critères	DD			QUAD (pli= 0.125mm)	
	Epaisseur (mm)		Orientation	[Epaisseur(mm) P0 P45]	Un des séquençements possibles
	Pli=0.125 mm	Pli=0.01 mm			
TSAI-Hill	1	0.72	$[\pm 37.5/\pm 58.3]$	$[1.5 \ 0.1 \ 0.4]$	$[-45_2/90/45/0/45]_s$
TSAI-WU	1	0.8	$[\pm 38.7/\pm 58.5]$	$[1.5 \ 0.1 \ 0.4]$	$[-45_2/90/45/0/45]_s$
Omni FPF	1	0.84	$[\pm 40/\pm 59.5]$	$[1.5 \ 0.1 \ 0.4]$	$[-45_2/90/45/0/45]_s$

5.2 Résultats en LPF

Pour étudier le LPF nous avons besoin de dégrader les propriétés des matériaux. Pour cela il nous fallait avoir plus de détail sur les propriétés des matériaux (propriété de la matrice et de la fibre des matériaux). Nous n'avions à notre disposition ces données que pour un seul matériau qui est le T300/5208 et c'est ce matériau qui a été utilisé pour le dimensionner en LPF.

Données [3] :

```
% Ex Ey Nuxy Gxy Xt Xc Yt Yc S en GPA
mat=[181 10.3 0.28 7.17 1.5 1.5 0.040 0.246 0.068]; % T300/5208
```

Les propriétés de la matrice et de la fibre de ce matériau sont :

```
% Ex vf Nuxy Efx Em ny Efy ns Gfx Gxy
mat_m_f=[181 0.70 0.28 258.57 3.40 0.5161 18.69 0.3162 19.68 7.17] ;%
T300/52
```

➤ Panneaux horizontaux

- CAS 1 ($N_x=-3333.33 \text{ N/mm}$; $N_{xy}=250 \text{ N/mm}$; $N_y=0 \text{ N/mm}$)

Critères	DD			QUAD (pli= 0.125mm)	
	Epaisseur (mm)		Orientation	[Epaisseur(mm) P0 P45]	Un des séquençements possibles
	Pli=0.125 mm	Pli=0.01 mm			
Omni LPF	4	3.96	$[\pm 0/\pm 13.6]$	$[4.5 \ 0.7 \ 0.1]$	$[90/-45/04/45/90/-45/0_4/45/0_4]_s$

- CAS 2 ($N_x=3333.33 \text{ N/mm}$; $N_{xy}=-250 \text{ N/mm}$; $N_y=12 \text{ N/mm}$)

Critères	DD			QUAD (pli= 0.125mm)	
	Epaisseur (mm)		Orientation	[Epaisseur(mm) P0 P45]	Un des séquencements possibles
	Pli=0.125 mm	Pli=0.01 mm			
Omni LPF	4	4	$[\pm 0/\pm 13.3]$	[4.5 0.7 0.1]	$[90/-45/04/45/90/-45/04/45/04]_s$

➤ Panneaux verticaux

- CAS 1 ($N_x=0$ N/mm ; $N_{xy}=250$ N/mm ; $N_y=0$ N/mm)

Critères	DD			QUAD (pli= 0.125mm)	
	Epaisseur (mm)		Orientation	[Epaisseur(mm) P0 P45]	Un des séquencements possibles
	Pli=0.125 mm	Pli=0.01 mm			
Omni LPF	0.5	0.52	$[\pm 44.4/\pm 45.5]$	[1 0.1 0.4]	$[90/-45/0/45]_s$

- CAS 2 ($N_x=0$ N/mm ; $N_{xy}=250$ N/mm ; $N_y=80$ N/mm)

Critères	DD			QUAD (pli= 0.125mm)	
	Epaisseur (mm)		Orientation	[Epaisseur(mm) P0 P45]	Un des séquencements possibles
	Pli=0.125 mm	Pli=0.01 mm			
Omni LPF	1	0.6	$[\pm 34.6/\pm 55.6]$	[1 0.1 0.4]	$[90/-45/0/45]_s$

5.3 Interprétation

Les résultats précédents en FPF montrent que les résultats des critères de dimensionnement sont similaires. Mais les temps de calcul des critères sont différents.

En effet les temps de calcul des critères de TSAI-HILL et TSAI-WU sont égaux mais celui de l'enveloppe OMNI FPF est bien réduit car avec cette enveloppe on n'a pas besoin de faire les calculs des contraintes et des déformations de tous les plis du stratifié. Il suffit juste d'avoir les déformations du plan moyen et avec cela on retrouve directement l'épaisseur nécessaire pour supporter le flux de charge donné. Cela réduit grandement le temps de calcul et réduit les paramètres d'optimisation.

En LPF pour l'OMNI LPF nous avons la même conclusion qu'en OMNI FPF car la procédure de calcul est la même pour ces deux critères.

S'agissant des DD et des QUAD, lorsqu'on utilise les plis à 125 mm on obtient des résultats presque proches pour les deux dans le cas des panneaux horizontaux, pour les panneaux verticaux on a un gain de 0.5 mm en utilisant les DD à la place du QUAD. L'utilisation des plis à 0.01 mm sur les DD permet de gagner en épaisseur sur tous les panneaux. Avec ces plis à 0.01 mm sur les DD le nombre de répétition du bloc $[\pm \Phi / \pm \Psi]$ augmente considérablement (on quitte de 2 répétitions sur les panneaux verticaux à 21 répétitions en OMNI FPF cas 2 par exemple). Ce nombre très grand de

répétition permet d'avoir des stratifiés homogènes avec des termes de raideurs de couplage qui tendent vers 0.

Conclusion

Arrivé ainsi à la fin de ce rapport de stage de recherche où l'objectif était de faire une analyse d'une nouvelle méthode dimensionnement des composites en commençant une recherche bibliographique sur la théorie classique des stratifiés et les critères de rupture des composites, et après de proposer des algorithmes d'optimisation des structures sur du QUAD et du Double-Double en utilisant plusieurs critères de rupture en First Ply Failure et Last Ply Failure. Nous avons commencé par analyser les critères de dimensionnement proposés pour tout type de stratifié (TSAI-Hill, TSAI-Wu, OMNI FPF, PFA, unit circle et OMNI LPF). Les résultats obtenus en FPF avec TSAI-Hill, TSAI-WU et omni FPF sont assez proches, et en LPF nous avons utilisé pour dimensionner qu'un seul critère (OMNI LPF) car les autres critères en LPF (Unit circle et PFA) n'ont pas été valides d'après l'analyse et les tests numériques que nous avons effectué.

Avec ces critères nous avons conçu des algorithmes d'optimisation (qui sont donnés en Annexe 3) pour les DD et les QUAD que nous avons utilisé pour dimensionner un cas de Caisson de voilure. De manière générale sur les résultats obtenus, nous avons eu des gains (épaisseur et donc la masse) et des avantages (homogénéisation, annulation des termes de raideurs de couplage et facilité de conception) en utilisant les DD avec des épaisseurs de pli très fins à la place des QUAD. Ces avantages sont surtout du au fait qu'avec les plis fins sur du DD le nombre de répétition du bloc $[\pm \Phi / \pm \Psi]$ est grand (>18 dans notre cas). Comme l'étude préalable du DD (partie 3.2) l'a montrée avec ce nombre de répétition le DD est bien plus efficace que le QUAD.

S'agissant des points de ce stage qui n'ont pas donné des résultats valides (PFA et Unit circle), et nous espérons que les prochaines études permettront de comprendre les raisons de ces résultats.

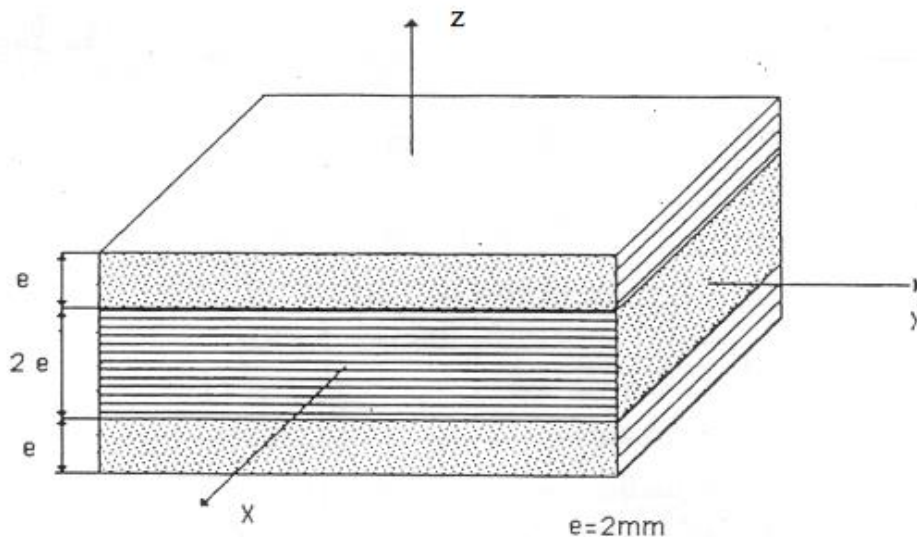
Nous tenons à remercier nos professeurs et chercheurs pour le temps et la patience accordée lors de ce stage de recherche passionnant.

Annexe

1. Annexe 1 : Tutoriel 1

1. Exercice 1

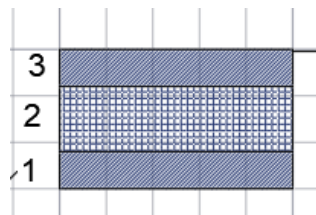
Prenons une plaque en matériau composite composée d'un empilement de 3 couches de plis Carbone/Epoxy UD. Pour les couches supérieure et inférieure, les fibres sont orientées à 0° de la direction x , et pour la couche intermédiaire à 90° c'est-à-dire selon la direction y .



Données :

$$\begin{aligned} E_l &= 140 \text{ GPa} & E_t &= 5 \text{ GPa} & \nu_{lt} &= .35 & G_{lt} &= 5 \text{ GPa} \\ X_t &= 1200 \text{ MPa} & X_c &= 1000 \text{ MPa} \\ Y_t &= 50 \text{ MPa} & X_c &= 120 \text{ MPa} & S &= 65 \text{ MPa} \end{aligned}$$

- a. Calculer les différents termes de la matrice A , B , C et D reliant les charges internes dans le plan et hors du plan de la plaque à ses déformations et courbures dans le plan.



Nous allons donner l'expression de ces matrices dans le repère global.

- ❖ Les couches étant symétriques par rapport à $(0, x, y)$ on a directement $B=0$.

$$\begin{aligned} \text{❖ On a } A_{ij} &= \sum_{p=1}^3 Q^p_{ij} (h_p - h_{p-1}) = Q^1_{ij} * e + Q^2_{ij} * 2e + Q^3_{ij} * e \\ &\Rightarrow A = 2e * (Q^1 + Q^2) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 * e * \alpha(E_t + E_l) & \alpha v_{lt} E_t & 0 \\ \alpha v_{tl} E_l & 2 * e * \alpha(E_t + E_l) & 0 \\ 0 & 0 & G_{tl} \end{bmatrix} = 10e5 * \begin{bmatrix} 5.8255 & 0.1406 & 0 \\ 0.1406 & 5.8255 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

❖ On a aussi $C_{ij} = D_{ij} = \sum_{p=1}^3 \frac{1}{3} Q_{ij}^p (h_p^3 - h_{p-1}^3) = \frac{1}{3} [Q_{ij}^1 * 9 * e^3 + Q_{ij}^2 * 2 * e^3 + Q_{ij}^3 * 7 * e^3]$

$$\Rightarrow C = D = \frac{e^3}{3} (16Q^1 + 2Q^2) = 10e6 * \begin{bmatrix} 5.2764 & 0.0750 & 0.0 \\ 0.0750 & 0.9374 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2133 \end{bmatrix}$$

b. *Peut-on considérer que cette plaque présente un comportement orthotrope et homogène ? Si oui, veuillez déterminer ses caractéristiques équivalentes.*

On peut considérer que ce matériau a un comportement orthotrope mais pas homogène. Il est orthotrope à cause de la nullité des coefficients A_{16} et A_{26} de la matrice A.

❖ Caractéristiques équivalentes de notre matériau.

$$\text{On a } \varepsilon = S\sigma \text{ avec } S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E1} & -\frac{v_{21}}{E2} & 0 \\ -\frac{v_{12}}{E1} & \frac{1}{E2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

Or nous avons la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} N1 \\ N2 \\ T1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma1 * h \\ \sigma2 * h \\ \sigma3 * h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A11 & A12 & 0 \\ A12 & A22 & 0 \\ 0 & 0 & A66 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} e1^0 \\ e2^0 \\ e3^0 \end{pmatrix} \text{ avec } h=4e$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e1^0 \\ e2^0 \\ e3^0 \end{pmatrix} = h * \begin{bmatrix} A11 & A12 & 0 \\ A12 & A22 & 0 \\ 0 & 0 & A66 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} \sigma1 \\ \sigma2 \\ \sigma3 \end{pmatrix}$$

On déduit donc l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E1} & -\frac{v_{21}}{E2} & 0 \\ -\frac{v_{12}}{E1} & \frac{1}{E2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} = h * \begin{bmatrix} A11 & A12 & 0 \\ A12 & A22 & 0 \\ 0 & 0 & A66 \end{bmatrix}^{-1}$$

Après calcul on obtient :

$$E_l = \frac{A11 * A22 - A12 * A21}{h * A22} = 72.776 * 10^3 \text{ MPA}$$

$$E_t = \frac{A11 * A22 - A12 * A21}{h * A11} = 72.776 * 10^3 \text{ MPA}$$

$$G_{12} = \frac{A66}{h} = 5 * 10^3 \text{ MPA}$$

$$\text{et } v_{12} = \frac{A12}{A22} = 0.0241.$$

- c. Cette plaque est chargée par une force de traction normale N_x selon la direction x . Calculez les contraintes dans chaque couche. À l'aide du critère de Tsai-Hill, déterminer la contrainte normale moyenne maximale σ_{xx} qui peut être appliquée à cette assiette. Calculer la valeur maximale de la contrainte σ_{yy} .

$$\text{Chargement : } \begin{cases} N1 = N_x = 1000N \\ T1 = 0 \\ A1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a } \sigma = \begin{pmatrix} N_x/h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \Rightarrow k_i = 0 \text{ avec } i=1,2,6$$

$$\text{On a donc : } \begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_2^0 \\ e_6^0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E1} & -\frac{\nu_{21}}{E2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E1} & \frac{1}{E2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} N_x \\ h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1^0 = \frac{N_x}{E1 \cdot h} \\ e_2^0 = -\frac{\nu_{12} \cdot N_x}{E1 \cdot h} \\ e_6^0 = 0 \end{cases} \text{ et comme } k_i=0 \text{ on aura } \begin{cases} e_1^0 = e_1^1 = e_1^3 = 1.7 \mu m \\ e_2^0 = e_2^1 = e_2^3 \cong 0 \mu m \\ e_6^0 = e_6^1 = e_6^3 = 0 \mu m \end{cases}$$

Pour avoir les contraintes dans chaque plaque on revient en repère local :

$$\sigma^1 = \sigma^3 = Q^1 * e^1 = \begin{pmatrix} 2.41 \\ 2.81 \\ 0 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

$$\text{et } \sigma^2 = Q^2 * e^2 = \begin{pmatrix} -2.81 \\ 8.55 \\ 0 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

❖ Calcul de la contrainte normale moyenne σ_{xx} à l'aide du critère de TSAI-WU.

Pour cela nous allons juste déterminer σ_{xx} qui satisfait l'équation suivante :

$$\frac{\sigma_1^2}{X_{C/T}^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_{C/T}^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y_{C/T}^2} + \frac{\sigma_6^2}{S^2} = 1$$

Avec $\sigma_1 = \sigma_{xx}, \sigma_2 = \sigma_{yy} = 0$ et $\sigma_6 = 0$.

Après itérations on obtient : $\sigma_{xx} = 601.6250 \text{ MPA}$

❖ Calcul de la contrainte normale moyenne σ_{yy} à l'aide du critère de TSAI-WU.

De même que précédemment, on cherche σ_{yy} qui satisfait l'équation précédente avec

$\sigma_1 = \sigma_{xx} = 0, \sigma_2 = \sigma_{yy}$ et $\sigma_6 = 0$.

Après itérations on obtient $\sigma_{yy} = 601.6250 \text{ MPA}$

- d. En supposant que toutes les couches sont dans un état de tension 1D, déterminer le module de Young équivalent dans la direction Ox puis les contraintes dans chaque couche sous une force de traction N_x . Comparez les résultats obtenus avec ceux des questions 2 et 3.

Dans ce cas on néglige l'effet du coefficient de poisson du matériau ($\nu=0$). On refait le calcul de la même manière.

On obtient donc

- $E_x = 72.5$ MPA
- Pour les Couches 1 et 3 :

$$\sigma^1 = \sigma^3 = Q^1 * e^1 = \begin{pmatrix} 241.37 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour couche 2 on a

$$\sigma^2 = Q^2 * e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8.62 \\ 0 \end{pmatrix} \text{MPA}$$

Comparaisons :

		1D	2D	Erreurs relatives
	Ex(MPA)	72.77	72.5	0.37%
Couches 1 et 3	Sigma1	241.37	241	0.15%
	Sigma2	0	2.81	
	Sigma6	0	0	
Couche 2	Sigma1	0	-2.81	
	Sigma2	8.62	8.55	0.82%
	Sigma6	0	0	

On se rend compte que l'hypothèse de travailler en 1D n'a pas vraiment un impact sur les résultats.

1. Exercice 2

Considérons les deux structures suivantes :

- Une plaque sandwich (A) formée de deux peaux en alliage léger d'épaisseur e et d'un Nida (nid d'abeille) âme d'épaisseur H .
- Une plaque homogène en alliage léger d'épaisseur $2e$. Les caractéristiques du Nida sont considérées comme négligeables.

Déterminer le rapport de rigidité en flexion de ces 2 plaques en fonction de H , e et des caractéristiques du matériau en alliage léger (E , ν)

❖ On a pour le sandwich :

$$D_{ij} = \sum_{p=1}^3 \frac{1}{3} Q^p_{ij} (h_p^3 - h_{p-1}^3)$$

$$= \frac{1}{3} [Q^1_{ij} * ((-0.5H)^3 - (-0.5H - e)^3) + Q^2_{ij} * ((0.5H)^3 - (-0.5H)^3) + Q^3_{ij} * ((0.5H + e)^3 - (-e)^3)]$$

Avec $Q^2 = 0$ (car il s'agit du vide)

Après développement nous obtenons

$$D_s = \frac{Q}{2} * H^2 * e * \left[\frac{4}{3} * \left(\frac{e}{H}\right)^2 + 1 + 2 * \frac{e}{H} \right] \cong \frac{Q}{2} * H^2 * e \text{ car } H \gg e.$$

❖ Pour la structure initiale on a :

$$D = \frac{Q}{12} * e^3$$

Le rapport des coefficients de ces matrices donne donc :

$$\frac{D_{sand_{ij}}}{D_{ij}} = 6 * \left(\frac{H}{e}\right)^2.$$

On constate que plus l'épaisseur du nida est grande la rigidité de la structure sandwich augmente. Ce qui donne à cette structure une très bonne résistance en flambage.

2. Exercice 3

Prenons 4 plaques laminées référencées dans le tableau ci-dessous, composées de plis UD de Carbone/Epoxy et Nida, qui est encore de caractéristiques mécaniques négligeables).

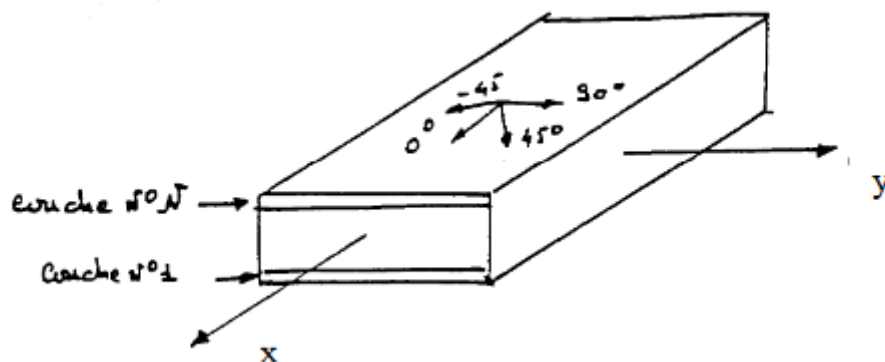


Plate No. ->	1	2	3	4
Layer No.				
1	0°	0°	+45°	0°
2	90°	90°	-45°	0°
3	Nida (H=20mm)	90°	-45°	0°
4	90°	0°	+45°	0°
5	0°			

Sans effectuer de calculs, indiquez :

a. La plaque la plus rigide en flexion.

La 1 ère plaque car à cause du nida elle aura un coefficient de rigidité en flexion très grand.

b. La plaque qui a la plus grande rigidité en termes de tension selon x.

La 4 -ème plaque car tous les plis de cette plaque sont orientés à 0° (selon l'axe x).

c. La plaque qui a la plus grande rigidité en cisaillement dans le plan xy.

La 3 -ème plaque par ce qu'elle ne possède que les plis orientés à +-45°.

d. Le rapport entre la rigidité membranaire des plaques 1 et 2

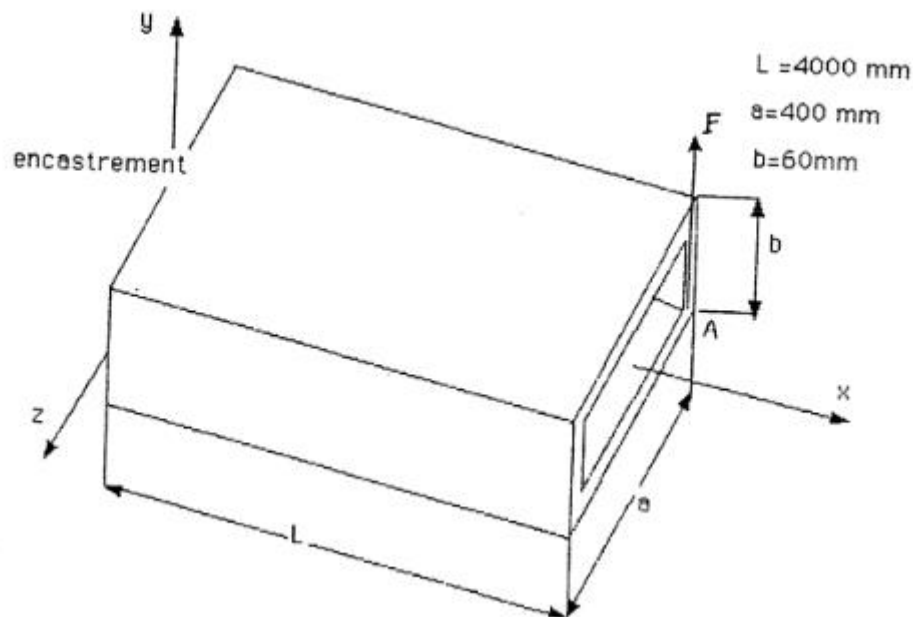
Il vaut 1 car la présence du nida dans la 1 ère plaque n'a pas d'impact sur la matrice de rigide en membrane

- e. Si les plaques sont appuyées sur leurs 4 côtés et soumises à un effort de compression N_x , quelle plaque aura la meilleure résistance au flambage.

La 1 ère plaque à cause de la présence du Nida. En effet une épaisseur H du Nida multiplie la matrice de rigide en flexion de la structure d'un facteur $(\frac{H}{e})^2$. Ce facteur étant très grand il permet de gagner en rigidité de flexion. Ceci permet d'augmenter les contraintes critiques de flambages.

2. Annexe 2 : Tutoriel 2

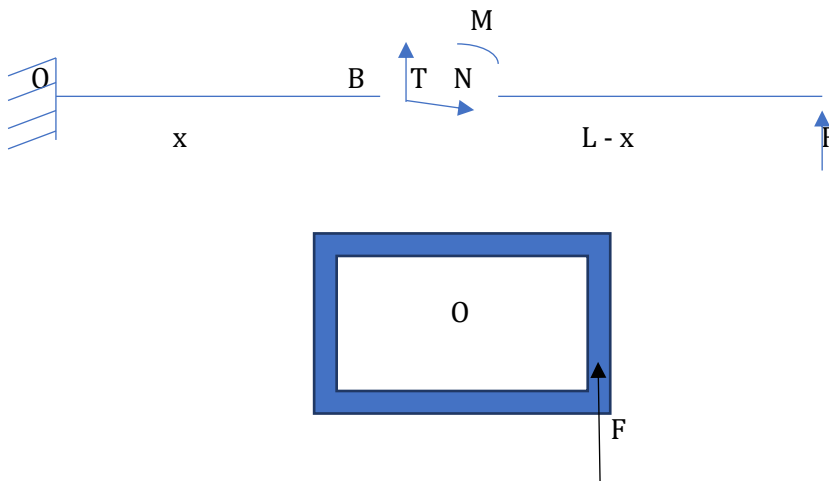
L'objectif est de parvenir à la préconception finale d'un caisson de voilure de torsion en panneaux de matériaux composites. Les dimensions globales de la boîte sont données dans le croquis ci-dessous. Cette boîte est entièrement encastree sur le côté gauche, alors que son côté libre droit est soumis à une force concentrée verticale (suivant y) $F=10000\text{ N}$ appliquée au point A.



Les panneaux horizontaux supérieur et inférieur sont fixés pour être identiques en termes de lay-up. Une même condition est définie pour les panneaux verticaux.

- a. Considérant cette boîte comme une structure de type poutre, déterminez les charges internes pour chaque section.

Soit un point B situé sur l'axe du panneau a une distance x de l'origine des axes.



En utilisant les équations d'équilibre obtient les résultats suivants :

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = F = 10 \text{ KN} \\ M_{zz}(x) = F * (L - x) \\ Mt = 0.5 * F * a \end{cases} \text{ Avec } x \in [0 ; L]$$

b. Les épaisseurs des panneaux sont censées être suffisamment fines pour que ce caisson soit considéré comme une poutre de section à âme mince. Ainsi chaque panneau se comporte comme une plaque sous charges planes :

- Le moment de flexion est entièrement supporté par les panneaux supérieur et inférieur et se traduit par un flux de charge normal pur
- La charge de cisaillement est entièrement supportée par des panneaux verticaux, et le flux de charge de cisaillement dans le plan est supposé être uniforme tout le long d'eux
- Le couple est supporté par la section fermée à travers un flux de charge de cisaillement uniforme sur tous les panneaux.

Déterminer les charges normales et de cisaillement dans le plan supporté par les quatre panneaux.

❖ Contrainte normale dans les plaques supérieure et inférieure :

L'équation d'équilibre en effort normal dans chaque plaque nous donne :

$$2 * N * b / 2 = M_{zz}(x) = F * (L - x)$$

$$\Rightarrow N(x) = \frac{F * (L - x)}{b}$$

$$\Rightarrow N_{Max} = \frac{F * L}{b}$$

$$\Rightarrow \sigma_{Max} = \frac{F * L}{a * b * e}$$

❖ Contrainte de cisaillement dans les plaques verticales due à l'effort tranchant :

$$\text{On a } \tau_1 = \frac{0.5 * T}{s} = \frac{F}{2 * b * e}$$

❖ Contrainte de cisaillement dans les plaques due au moment de torsion :

En supposant un flux de cisaillement constant dans les plaques et en utilisant ma relation de Bredt on obtient :

$$M_t = 2 * A * \phi = F * 0.5 * a \quad \text{avec } \phi = e * \tau_2$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{F}{4 * b * e}$$

Finalement nous avons :

	σ_{Max}	τ_1
Upper Panel	$-\frac{F * L}{a * b * eh}$	$\frac{F}{4 * b * eh} + \frac{F}{2 * b * eh}$
Lower panel	$\frac{F * L}{a * b * eh}$	$-\frac{F}{4 * b * eh} - \frac{F}{2 * b * eh}$
Vertical panel(z>0)	0	$-\frac{F}{4 * b * ev} + \frac{F}{2 * b * ev}$
Vertical panel (z<0)	0	$\frac{F}{4 * b * ev} + \frac{F}{2 * b * ev}$

En AN on a :

	$e * \sigma_{Max} \text{ (N/mm)}$	$e * \tau_1 \text{ (N/mm)}$
Plaque supérieure	-1666.67	125
Plaque inferieure	1666.667	-125
Plaque verticale (z>0)	0	41.667
Plaque verticale (z<0)	0	125

c. Dimensionnement de notre structure.

Nous allons utiliser le critère de TSAI-WHU pour dimensionner notre structure.

Nous commençons par un pré dimensionnement et pour cela nous commençons par fixer l'épaisseur de notre plaque a 1 mm, en suite on va déterminer pour chaque plaque la proportion de chaque contrainte par rapport à la contrainte totale dans la plaque afin d'obtenir le pourcentage des fibres dans chaque direction. Ceci se fait tout en respectant les consignes suivantes :

- Au moins 10 % pour chaque couche
- Avoir un $\Delta\theta \leq 45$ entre deux plis successifs.
- Utiliser les quatre orientations 0 ; ± 45 ; 90.
- Pas plus de 4 plis dans la même direction
- Symétrique

j. Un nombre pair de plis pour les couches a + 45 et -45

Ensuite nous allons calculer le TSAI de chaque couche. La hauteur de notre couche va correspondre à la racine carrée du maximum des TSAI obtenus.

Après cela nous allons utiliser les proportions préalablement définies pour avoir les épaisseurs (e_i) de chaque couche.

Pour avoir le nombre de plis de chaque couche on va juste chercher l'entier naturel (n) directement supérieur à $e_i/0,125$. L'épaisseur finale de la couche i sera donc cette entier $n \cdot 125$.

Nous rappelons que nous avons multiplié les efforts calculés par 2 pour avoir une marge de sécurité.

Les résultats que nous avons obtenus sont directement présentés dans le tableau suivant :

❖ Plaques supérieure et inférieure :

Plaques sup et inf.						
Orientation	%_init	sqrt(TSAI)	ep_init(mm)	Nombre_pli(mm)	nb_pli_entier	ep_finale
90	5%	2.39	0.23843	1.90744	2	0.25
45	5%	3.32	0.23843	1.90744	2	0.25
-45	5%	4.47	0.23843	1.90744	2	0.25
0	70%	4.7686	3.33802	26.70416	28	3.5
-45	5%	4.47	0.23843	1.90744	2	0.25
45	5%	4.32	0.23843	1.90744	2	0.25
90	5%	3.32	0.23843	1.90744	2	0.25
Ep_totale_statique(mm)						5

Nous avons ensuite obtenu l'empilement suivant pour les plaques supérieure et inférieure :

$$[0_2/-45/0_4/45/0_4/45/0_4/90_2]_s.$$

❖ Plaques verticales ($z > 0$ et $z < 0$) :

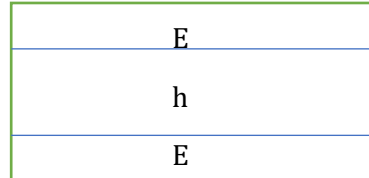
Plaques verticales						
Orientation	%_init	sqrt(TSAI)	ep_init(mm)	Nombre_pli(mm)	nb_pli_entier	ep_finale
0	5%	0.6536	0.032905	0.26324	1	0.125
45	20%	0.6581	0.13162	1.05296	2	0.25
-45	20%	0.5106	0.13162	1.05296	2	0.25
90	10%	0.6536	0.06581	0.52648	2	0.25
-45	20%	0.5106	0.13162	1.05296	2	0.25
45	20%	0.6581	0.13162	1.05296	2	0.25
0	5%	0.6536	0.032905	0.26324	1	0.125
Ep_totale_statique(mm)						1.5

Nous avons ensuite obtenu l'empilement suivant pour ces plaques :

$$[0_1/45_2/-45_2/90_1]_s$$

- d. Pour stabiliser les panneaux sous flambement, la conception en sandwich est choisie. Déterminez l'épaisseur du nid d'abeille requise pour le panneau sous charge de compression. (Les propriétés de cisaillement du Honeycomb sont négligées).

Pour ce faire nous allons conserver l'épaisseur que nous avons obtenu en statique pour les plaques sup et inf. et nous allons chercher l'épaisseur minimal du Nida pour avoir un facteur de flambage ≥ 1 . La structure recherchée est la suivante :



Pour trouver l'épaisseur du Nida, nous avons exprimé la matrice de rigidité en flexion de la structure sandwich en fonction de H. Ceci par ce que les contraintes critiques de flambage de la structure dépendent des coefficients de cette matrice.

$$\text{Ainsi on a } D = \frac{Q}{2} * H^2 * e * \left[\frac{4}{3} * \left(\frac{e}{H} \right)^2 + 1 + 2 * \frac{e}{H} \right]$$

Avec Q la matrice de raideur équivalente de la structure initiale et e la moitié de l'épaisseur de la structure initiale soit e=2.5mm.

Après des itérations nous avons obtenu : H=8 mm et $\lambda = 1.21$

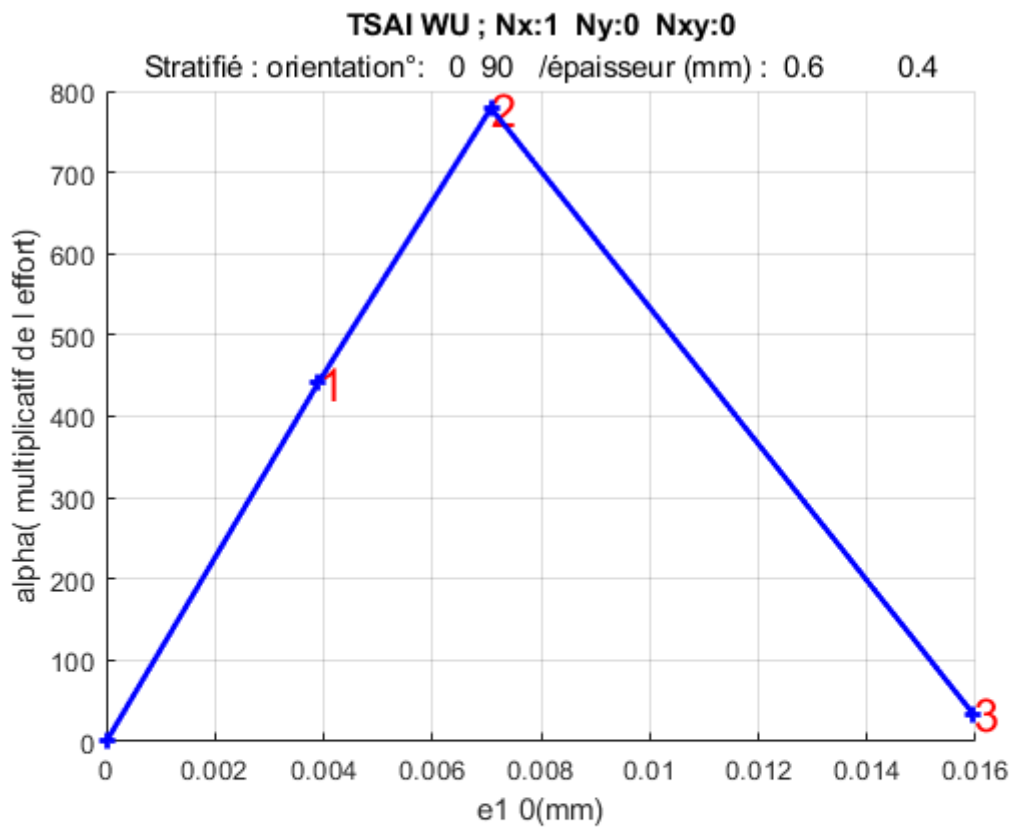
Finalement pour cette plaque nous avons e_totale =13 mm

3. Annexe 3 : Code Matlab associé

Le tableau suivant donne les noms des fichiers des algorithmes d'optimisation que nous avons conçus.

Critère		DD/	QUAD/
FPF	TSAI-Hill	Opt_DD_TSAI_Hill	Opt_QUAD_TSAI_HILL
	TSAI-WU	Opt_DD_Deformation	Opt_QUAD_Deformation
	Omni FPF	FPF_DEFORMATION	QUAD_FPF_DEFORMATION
Optimisation multi épaisseur sur un panneau		Opt_DD_multi_ep	
LPF	PFA	PFA_final	
	Omni LPF	LPF_DEFORMATION/Omni_LPF	QUAD_LPF_Omni
	Unit circle	LPF_DEFORMATION/Unit_circle	

4. Annexe 4 : Résultats PFA sur du [0 90]



Hist = 4×3 cell

Points	'0'	'90'
'1'	'Intact'	'Matrice dégradée'
'2'	'Fibre dégradée'	'Matrice dégradée'
'3'	'Fibre dégradée'	'Matrice et Fibbre dégradée...'

Hist_RF = 4×3 cell

Points	'0'	'90'
'1'	'2.5653'	'1'
'2'	'1'	'2.4478'
'3'	'-129.727'	'1'

Figure 20:PFA sur du [0 90] en traction simple avec TSAI WU

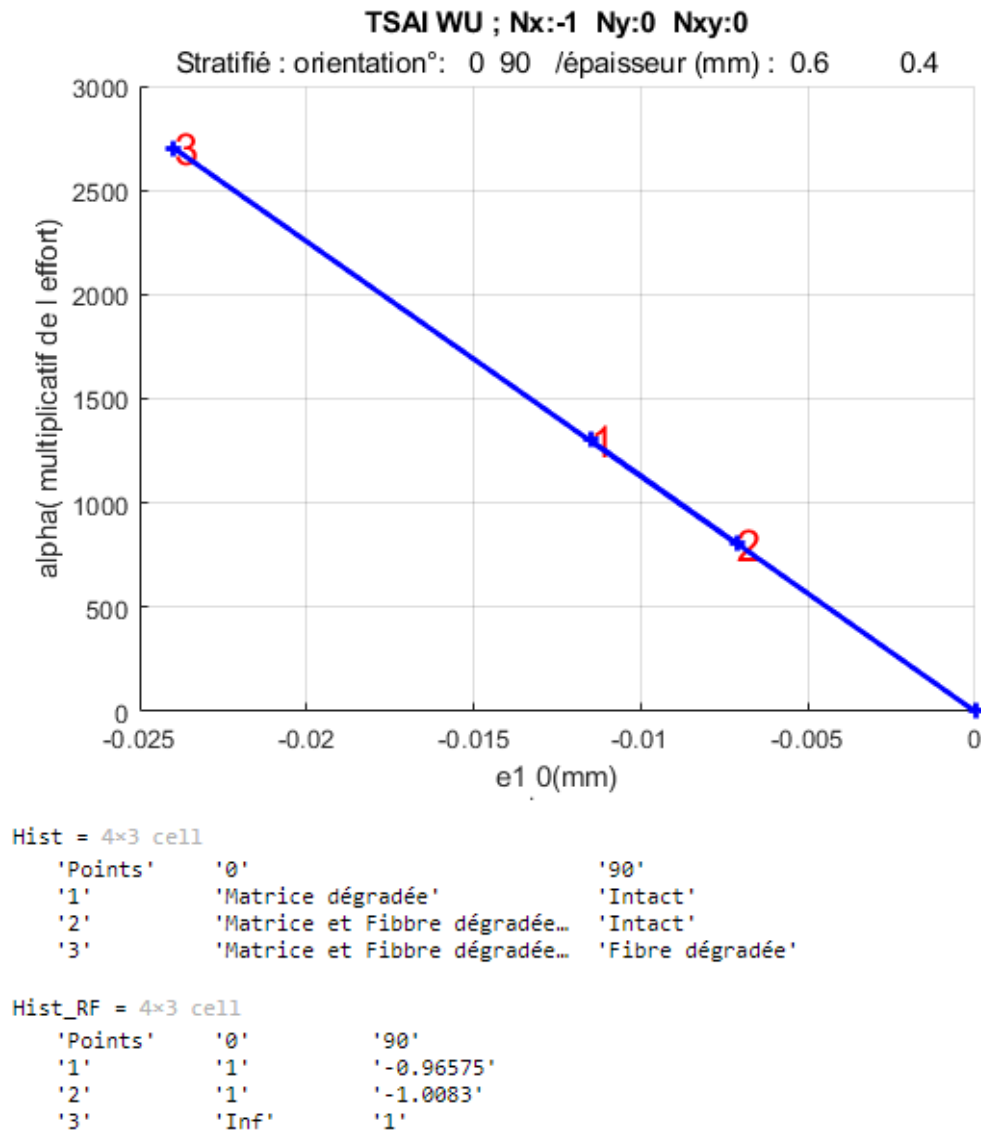
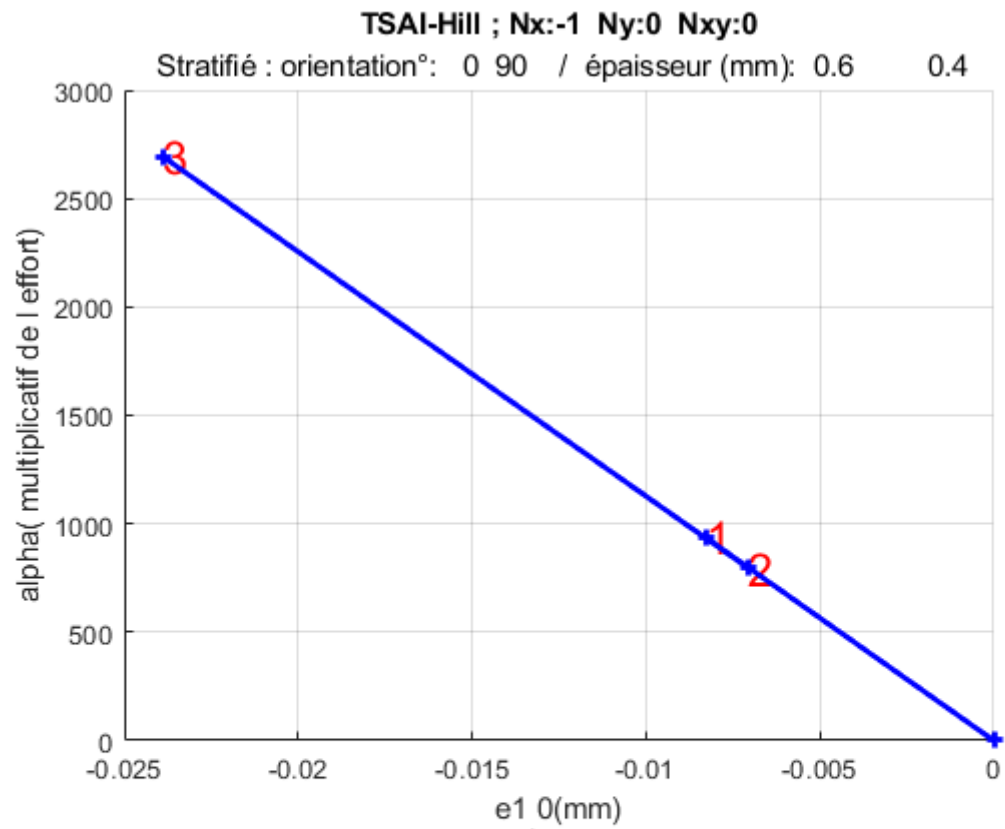


Figure 21:PFA sur du [0 90] en compression avec TSAI WU



Hist = 4×3 cell

Points	'0'	'90'
'1'	'Matrice dégradée'	'Intact'
'2'	'Matrice et Fibbre dégradée...	'Intact'
'3'	'Matrice et Fibbre dégradée...	'Fibre dégradée'

Hist_RF = 4×3 cell

Points	'0'	'90'
'1'	'1'	'2.8809'
'2'	'1'	'3.3743'
'3'	'Inf'	'1'

Figure 22: PFA sur du [0 90] en compression avec TSAI Hill

Reference

- [1] Sachin S, Naresh S, Tsai W, Mohite P. [“D and DD-drop layup optimization of aircraft wing panels under multi-load case design environment”](#). In ELSEVIER
- [2] Tsai SW, Melo JDD. “An invariant-based theory of composites”. Compos Sci Technol 2014;100:237-43”
- [3] [Tsai SW, WU EM. A general theory of strength for anisotropic materials. J Compos Mater 1971;5:58-80](#)
- [4] Tsai SW, Melo JDD. [“A unit circle failure criterion for carbon fiber reinforced polymer composites”](#)
- [5] Melo JDD, Jing B, Tsai WU. [“A novel invariant-based design approach to carbon fiber reinforced laminates”](#).
- [6] Tsai WU. [“Double-Double: New Family of Composite Laminates”](#). In AIAA.
- [7] Vermes B, Tsai WU, Riccio A, Caprio FD, Roy S. [“Application of the Tsai’s modulus and double-double concepts to the definition of a new affordable design approach for composite laminates”](#).
- [8] Tsai SW, Melo. “Composite materials Design and Testing”. 2015. chap 8, P 253-278
- [9] <https://doi.org/10.2514/1.J060659>