Seria dhe transformimi Furie

Nje klas shum e gjere e sijaleve mund te shprehet si shume apo integral I sinusoideve me frekuenc te ndryshme dhe ne keto raste thuhet se sinjali praqitet permes spektrit te tij dhe vriabla e tij eshte frekuenca(ω).

H(ω0) ne rastin e pergjithshem eshte madhesi komplekse dhe me rendesi eshte te verehet se ai nga h(t) por per nje ω0 te caktur ka vler konstante.

Nese marim nje sinjal period te qfar doshem x(t+T)=x(t) ateher mund ta shprehim si nje shum te te peshuar te sinusoideve komplekse te trajtes :

$$e_n(t) = e^{jn\omega_0 t}, \quad -\infty < n < \infty$$

N paarqet rendin e sinusoides komplekse qe lidhet ne frekuencen e saj.

Nese e1(t) eshte sinusoide me frekuenca themelore ω0 ateher komponenti I zberthimit en(t) me frekunec nω0 paraqet harmonin e n-te te sinjalin dhe kjo quhet analiza harmonike.

Sinjali si shum komplekse harmonike zberthete me kete formul :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

p.s (e^jnω0t)

Cn paraqet koeficionetin oesh te zberthimit.

- **Përcaktimi i formulës për llogaritjen e koeficienteve peshë**
- Zbërthimi: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$
- Shumëzojmë dy anët me $e_k(t) = e^{-jk\omega_0 t}, \quad -\infty < k < \infty$

  integrojmë brenda një periode *T* dhe rezultatin e pjesëtojmë me *T*.

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-k)\omega_0 t}dt$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(n-k)\omega_0 t}dt = \frac{1}{j(n-k)T\omega_0} e^{j(n-k)\omega_0 t}\Big|_{t=-T/2}^{t=T/2}$$

$$= \frac{1}{j(n-k)T\omega_0}\left[e^{j(n-k)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}} - e^{-j(n-k)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}}\right] = \underbrace{\frac{\sin\left[\pi(n-k)\right]}{\pi(n-k)}}_{\delta[n-k]} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta[n-k] = c_k$$

- Barazimi i fundit e jep formulën për llogaritjen e koeficienteve c_n.
- Sinjali periodik $x(t)$ mund të zbërthehet në seri Furie sipas formulave

Seria Furie	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$	Sinteza
Koeficientet e serisë Furie	$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$	Analiza

Sinjale&Sisteme Ligj. 5 8

Kushtet e Dirichlet-it

Kushtet e Dirichlet-it

- Për të qenë një sinjal i zbërthyeshëm në seri Furie duhet të plotësohen tri kushtet e Dirichlet-it.

1⁰ Sinjali $x(t)$ duhet të jetë i integrueshëm sipas vlerës absolute

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|\,dt < \infty$$

2⁰ Brenda një periode sinjali $x(t)$ duhet të jetë i kufizuar dhe të ketë numër të fundmë të minimumeve dhe maksimumeve.

3⁰ Brenda një periode sinjali $x(t)$ duhet të ketë numër të fundmë të diskontinuiteteve dhe amplitudat e kërcimeve të sinjalit në pikat e këtyre diskontinuiteteve duhet të jenë të fundme.

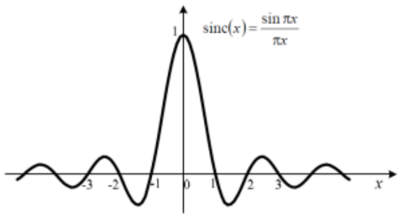
Sinjale&Sisteme Ligj. 5 9

Formula per frekuencen themelore :

Frekuenca themelore: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Sink funksioni ose funksioni sink(sinc(x)):

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad -\infty < x < \infty$$



$$c_n = \frac{2}{n\omega_0 T}\sin\frac{n\omega_0}{2},\ \ n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots \qquad \frac{n\omega_0}{2} = \pi x \ \Rightarrow\ x = \frac{n\omega_0}{2\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\omega_0}{2\pi}\right) \quad \text{Spektri amplitudor:} \quad |c_n| = \frac{1}{T}\left|\mathrm{sinc}\left(\frac{n\omega_0}{2\pi}\right)\right|$$

Spektri I sinjalit periodik eshte diskret.

Spektri amplitudor I sinjalevereal ka vartesi qifte nga frekuenca nω0 ndersa spektri fazor vartesi teke.

Kur spektri percaktohet vetem per frekuenca pozitive te cilave u epet nje interpretim fizik themi e sinjali eshte shprehur si seri trigonometrike:

- Trajta e serisë trigonometrike.

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n),\ \ A_0 = c_0,\ A_n = 2|c_n|$$

Teorema e Parseval-it ose ndryshe edhe fuqia e sinjalit periodik:

Teorema e Parseval-it: $$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Transformimi Furie dhe vetit e tij

$$\lim_{T\to\infty} Tc_n = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = X(\omega)$$

- $X(\omega)$ paraqet transformimin Furie (spektrin) e sinjalit $x(t)$.

- **Si do të riměkëmbet sinjali $x(t)$ nga spektri i tij $X(\omega)$?**
- Nisemi nga formula për sinjale periodike: $x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$
- Në përputhje me qasjen e deritashme marrim se vlen:

$$\lim_{T\to\infty} c_n T = X(\omega), \Rightarrow c_n = \lim_{T\to\infty}\frac{X(\omega)}{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\omega_0}{2\pi}X(\omega) = \frac{X(\omega)}{2\pi}d\omega$$

- Nga supozimi $n\omega_0=\omega$ rrjedhë edhe:

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty}$$

- Me këtë arrijmë edhe deri te formula e sintezës (riměkëmbjes):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

që quhet transformimi i kundërt Furie i $X(\omega)$.

Sinjale&Sisteme Ligj. 6 5

Ngjshem sikur tek sinjalet periodike edhe tek ato aperiodike per te pasur sinjalei transformim Furie(TF) duhet ti plotesoj kushtet e Dirichlet-it.

- **Përmbledhje:**
- Transformimi Furie: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
- Transformimi i kundërt Furie: $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$
- Çifti transformues Furie: $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$
- Spektri amplitudor: $|X(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[X(\omega)] + \mathrm{Im}^2[X(\omega)]}$
- Spektri fazor: $\theta(\omega) = \arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}[X(\omega)]}{\mathrm{Re}[X(\omega)]}\right\}$
- Trajta polare e transformimit $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$

Zbatimet e transformimit Furie

Modulimi amplitudor

Spektri i sinjalit me amplitudë të moduluar përcaktohet me:

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$$

Modulimi I amplitudes se pilseve-Mostrimi

Te modulimi I amplitudes se pulseve sinjali I informacionit eshte I permbajtur ne amplitudat e vargut te pulseve me kohezgjatjen shum te shkurter dhe period T.

Shkurtesa per kete lloj te modulimit eshte PAM.

PAM sinjali mund të shtrohet në trajtën:

$$x_{PAM}(t)=x(t)\cdot\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

Për të fituar njohuri më të thellë për këtë sinjal të moduluar nevojitet që vargu periodik i delta impulseve të shprehet në domen frekuencor.

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_m t}$$

Ku:

$$\omega_m=\frac{2\pi}{T}$$ paraqet frekuencën e mostrimit

dhe c_n paraqesin koeficientet Furie të vargut periodik $\delta_T(t)$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jn\omega_m t}dt=\frac{1}{T}e^{-jn\omega_m\cdot 0}=\frac{1}{T}$$

Kjo do të thotë se vlen:

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{jn\omega_m t}$$

Më këtë modifikim PAM sinjali mund të shprehte edhe si:

$$x_{PAM}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-nT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)e^{jn\omega_m t}$$

Në shprehjen e sipërme zbatojmë transformimin Furie, duke pasur parasysh vetinë e shumëzimit me sinusoidë komplekse

$$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(t)e^{jn\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_m)$$

Përfundojmë se spektri i PAM sinjalit është zgjerim periodik i spektrit të sinjalit $x(t)$, me periodë në domenin frekuencor ω_m.

Pergjigjja frekuencore e sistemit

- $H(\omega)$ paraqet transformimin Furie të përgjigjes impulsive dhe quhet përgjigje frekuencore e sistemit dhe përkufizohet me

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

- $H(\omega)$ mund të përcaktohet edhe si raport i spektrit të sinjalit dalës ndaj atij hyrës.

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

- $H(\omega)$ mund të paraqitet në trajtë polare.

$$H(\omega)=\left|H(\omega)\right|e^{j\theta(\omega)}=A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

- ku

$$A(\omega)=\left|H(\omega)\right|=\sqrt{\mathrm{Re}^2\{X(\omega)\}+\mathrm{Im}^2\{X(\omega)\}}$$

$$\theta(\omega)=\arctan\frac{\mathrm{Im}\{X(\omega)\}}{\mathrm{Re}\{X(\omega)\}}$$

Sinjale&Sisteme Ligj. 7 13

Filtrimi dhe filtrat ideal

Filtrat jane sisteme qe vendosen ne shtegun e sinjalit me qellim qe permes tyre te formesohet spektri I sinjalit.

Filtrat ideal konsiderohet ai sistem I cilio percjell pa asnje ndryshim permbajtjen spektrale te sinjalit ne brez te caktuar frekuencor.

Kemi 4 lloje te filtrave ulet-leshues, lart-leshues, brez-leshues, brez-penues.

- **Filtri ideal ulët-lëshues**
- Karakteristika amplitudore e këtij filtri është e përkufizuar si

$$A_{ul}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<\omega_c\\ 0, & |\omega|>\omega_c\end{cases}$$

- ku ω_c parqet frekuencën e prerjes.

- **Filtri ideal lartë-lëshues**

$$A_{ll}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|>\omega_c\\ 0, & |\omega|<\omega_c\end{cases}$$

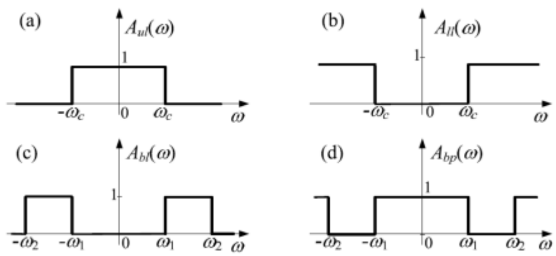
- **Filtri ideal brez-lëshues**

$$A_{bl}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega_1<|\omega|<\omega_2\\ 0, & \omega \text{ të tjera}\end{cases}$$

- **Filtri ideal brez-pengues**

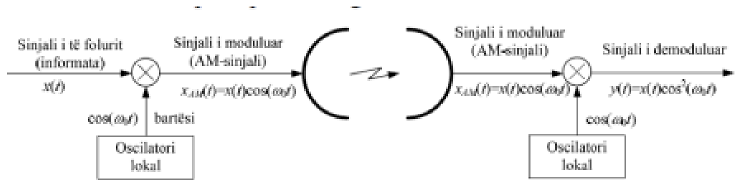
$$A_{bp}(\omega)=\begin{cases}0, & \omega_1<|\omega|<\omega_2\\ 1, & \omega \text{ të tjera}\end{cases}$$

- Karakteristikat amplitudore të filtrave idealë janë paraqitur në figurën vijuese.



Demodulimi dhe rimekembja

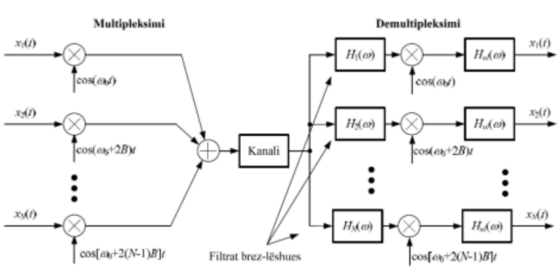
Veqimi I sinjalit te informacionit nga sinjali I moduluar quhet demodulim



Multipleksimi I sinjalit ne frekuenc

Neper nje kanal mund te transmetohen njekohesisht me shume sinjale te informacioi nese spektrat e tyre palosen ne frekuenc dhe kjo quhet multipleksim frekuencor.

- Skema parimore e multipleksimit dhe demlutipleksimit



Rimekembja e sinjalit PAM

$$x_{PAM}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\, p_{\varepsilon}(t - kT)$$

$$X_{PAM}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(\omega - k\omega_m)$$

Rimekembja behet duke vequar spektrin e sinjalit ne brezin themelor permes nje filtri ulet-leshues

- Rast i veçantë

$$B = \frac{\omega_m}{2}, \quad BT = \pi$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\ \mathrm{sinc}\left[\frac{\omega_m}{2\pi}(t - kT)\right]$$