Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ИПММ

Направление подготовки

„01.03.03. Механика и математическое моделирование"

Отчет по лабораторной работе №2

„Решение систем линейных алгебраических уравнений прямыми методами"

Выполнил студент гр. 3630103/90001 Васков Д.С.

Преподаватель Добрецова С.Б.

① Найти решение x системы вида $Ax = b$, где

$b = (b_1, b_2, \dots b_n)^T$ – вектор свободных членов

$x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ – вектор неизвестных

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – квадратная матрица коэффициентов

данной системы $n \times n$, с помощью метода Гаусса с выбором главного элемента по строке.

② Алгоритм:

а) прямой ход метода Гаусса для $k = 1 : n-1$

1) найти такое l, что $|a_{kl}| = \max_{i \in [k,n]} \{|a_{ki}|\}$, если $a_{kl} = 0$, однозначного решения нет

иначе поменять местами a_{jk} и a_{jl} при $j = 1..n$

2) вычислить коэфф. на k-том шаге:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \; ; \; b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} b_k^{(k-1)}$$

$i = k+1 \dots n$

$j = k+1 \dots n$

б) обратный ход метода Гаусса

1) сделаем обратную замену (вернемся к исходному ~~порядку~~ обозначению столбцов)

2) вычислим компоненты вектора x

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right)$$

$k = n, n-1, \dots 2, 1$

Условие применимости: если решение системы $Ax = b$ существует и единственно и все вычисления проводятся точно, на выходе алгоритма получим вектор-решение x

3. Известно, что $\exists!\, x : Ax = b \iff \det A \neq 0$.

4. При подготовке контрольных тестов создавались матрицы со знач. $\det \neq 0 \Rightarrow$ для всех условие применимости выполнено.

5. Тестовый пример для задачи малой размерности:

$$\begin{cases} a + b + 2c = -1 \\ 2a - b + 2c = -4 \\ 4a + b + 4c = -2 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{matrix}\right.\right) \end{array} \underset{\substack{\text{перестановка} \\ a \leftrightarrow c}}{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} c & b & a \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{matrix}\right.\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} c & b & a \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{matrix}\right.\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} c & b & a \end{matrix} \\ \left(\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1{,}5 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1 \\ -3 \\ 1{,}5 \end{matrix}\right.\right) \end{array}$$

$$a = \frac{1{,}5}{1{,}5} = 1; \quad b = \frac{-3-1}{-2} = 2; \quad c = \frac{-1-1{,}\cancel{8}-2}{2} = -2$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6. Подготовка контрольных тестов

Для построения зависимости нормы разности точного и вычисленного решений от числа обусловленности будем в течение ~~1000~~ 500 итераций решать $Ax = b$, на каждой итерации задавая A как матрицу с числом обусловленности $c = 10n$, где n – номер итерации; размером 35×35. Таким образом, рассмотрим матрицы с $\mathrm{cond}(A) \in [10; 5000]$ с шагом 10.

Для построения зависимости относительной ошибки в решении от относительного возмущения правой части будем брать матрицы A_1 – вещественную 6×6 с $\mathrm{cond}(A_1) = 5$ и A_2 – матрицу Гильберта 6×6. На протяжении 100 итераций вектор-столбец правой части вычисляем как
$$b(i) = b_1 + 2 \cdot 10^{-7} \cdot i \cdot \mathrm{ones}(n,1),$$
т. е. к каждой компоненте добавляем возмущение $2 \cdot 10^{-7}$ за итерацию.

⑦ Модульная структура программы

1) matrix_by_cond (n, C) – создает квадратную матрицу размера n×n с числом обусловленности C

2) gauss_elimination_by_row (A, b) – с помощью метода Гаусса с выбором главного элемента по строке решает СЛАУ $Ax = b$, возвращает вектор-решение x

3) gauss – строит зависимости норм разности $\|x - x^*\|$ от числа обусловленности и относительной погрешности

⑧ Численный анализ

Из графика 1 „Зависимость относительной ошибки от относит. возмущения правой части" видим, что в двух случаях он является линейной зависимостью. Т.к. график использует логарифмический масштаб по оси y, можем оценить отношение угловых коэфф.

$$\begin{cases} \ln y_1 = \ln(a_1 x) = \ln a_1 + \ln x \\ \ln y_2 = \ln(a_2 x) = \ln a_2 + \ln x \end{cases} \Rightarrow \ln a_1 - \ln a_2 = \ln y_1 - \ln y_2 \quad \forall x$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{10^{-2}}{10^{-7}} \approx 10^5$$

По определению числа обусловленности $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le cond(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

При равных $\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ $\left(\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\right)_{A_2} : \left(\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}\right)_{A_1} \le \frac{cond(A_2)}{cond(A_1)} = const$

Из заданных в п. 6 величин значение $\frac{cond(A_2)}{cond(A_1)} \approx 15 \cdot 10^5$, что по порядку величины соответствует значению на графике.

Из графика 2 „Зависимость норм разности $\|x - x^*\|$ от cond(A)" видим, что с ростом числа обусловленности норма $\|x - x^*\|$ возрастает от 10^{-14} при $cond(A) < 10$ до 10^{-11} при $cond(A) \ge 4500$. Из свойств числа обусловленности

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le cond\, A \frac{\|\Delta A\|}{\|A + \Delta A\|}$$

Т.к. точность представления вещественного числа с плавающей запятой ограничена 10^{-15} (numpy), $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le cond\, A \cdot 10^{-15}$, $\Rightarrow 10^{-14} \le \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le 10^{-11}$, что совпадает с интервалом, полученным на графике.

9 Вывод

Метод Гаусса с выбором главного элемента по строке прост в реализации, устойчив к погрешностям промежуточных вычислений, имеет слабое условие применимости.

Хотя метод Гаусса является прямым методом, из-за неизбежных погрешностей исходных данных и промежуточных вычислений при реальной работе с машинной арифметикой возникают погрешности решения, которое можно оценить з~~аранее~~, благодаря числу обусловленности.

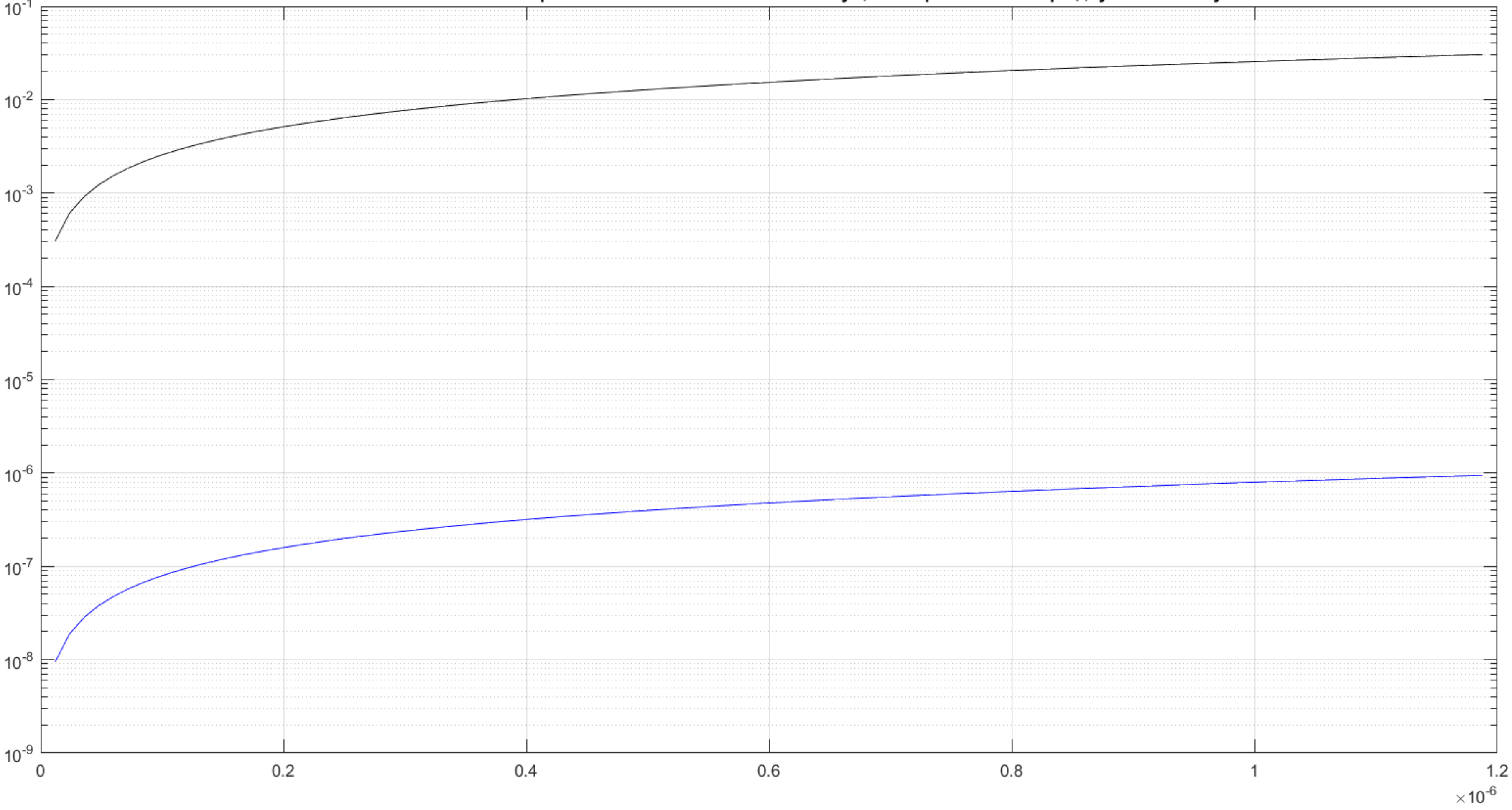

Рис. 1 Зависимость относительной ошибки в решении от относительного возмущения правой части при двух числах обусловленности

Рис. 2 Зависимость нормы разности точного и вычисленного решения от числа обусловленности матрицы