5) $\begin{cases} a+b+2c=-1 \\ 2a-b+2c=-4 \\ 4a+b+4c=-2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix};\ b = (-1\ -4\ -2)^T$

1) $r = (1, 2, 3)$

2) Прямой ход метода Гаусса

1) $k=1$

2.1) $l = 3 \Rightarrow r = (3, 2, 1)$

2.2.) $a_{ir(j)} = a^{(k-1)}_{ir(j)} - a^{(k-1)}_{kr(j)} \dfrac{a^{(k-1)}_{ir(k)}}{a^{(k-1)}_{kr(k)}}$

$a_{2r(1)} = a_{2r(1)} - a_{1r(1)} \dfrac{a_{2r(1)}}{a_{1r(1)}} = 2 - 2\dfrac{2}{2} = 0$

$a_{2r(2)} = a_{2r(2)} - a_{1r(2)} \dfrac{a_{2r(1)}}{a_{1r(1)}} = -1 - 1\dfrac{2}{2} = -2$

$a_{2r(3)} = a_{2r(3)} - a_{1r(3)} \dfrac{a_{2r(1)}}{a_{1r(1)}} = 2 - 1\dfrac{2}{2} = 1$

$a_{3r(1)} = a_{3r(1)} - a_{1r(1)} \dfrac{a_{3r(1)}}{a_{1r(1)}} = 4 - 2\dfrac{4}{2} = 0$

$a_{3r(2)} = a_{3r(2)} - a_{1r(2)} \dfrac{a_{3r(1)}}{a_{1r(1)}} = 1 - 1\dfrac{4}{2} = -1$

$a_{3r(3)} = a_{3r(3)} - a_{1r(3)} \dfrac{a_{3r(1)}}{a_{1r(1)}} = 4 - 1\dfrac{4}{2} = 2$

$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};\quad b(i) = b(i) - b(k) \dfrac{a^{(k-1)}_{ir(k)}}{a^{(k-1)}_{kr(k)}}$

$\cancel{b(1) = b(1) - b(1) \dfrac{a_{2r(1)}}{a_{1r(1)}} = -1 + 1\dfrac{2}{2}} = 0$

$b^{(1)} = (-1\ -3\ 0)^T$

$b(2) = b(2) - b(1) \dfrac{a_{2r(1)}}{a_{1r(1)}} = -4 + 1\dfrac{2}{2} = -3$

$b(3) = b(3) - b_1 \dfrac{a_{3r(1)}}{a_{1r(1)}} = -2 + 1\dfrac{4}{2} = 0$

2) $k=2$

2.1) $l=2 \Rightarrow r=(3,2,1)$

2.2) $a_{ir(j)} = a_{ir(j)} - a_{kr(j)}^{(k-1)} \dfrac{a_{ir(k)}^{(k-1)}}{a_{kr(k)}^{(k-1)}}$

$a_{3r(2)} = a_{3r(2)} - a_{2r(1)} \dfrac{a_{3r(2)}}{a_{2r(2)}} = -1 + 2\dfrac{1}{2} = 0$

$a_{3r(3)} = a_{3r(3)} - a_{2r(3)} \dfrac{a_{3r(2)}}{a_{2r(2)}} = 2 - 1\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $b_3 = b_3 - b_2 \dfrac{a_{3r(2)}}{a_{2r(2)}} = 0 + 3\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

$b^{(2)} = \left(-1 \ -3 \ \frac{3}{2}\right)$

3) Обратный ход метода Гаусса

1) $p=3$

$x(r(p)) = \dfrac{1}{a_{pr(p)}} \left(b_p - \sum\limits_{j=p+1}^{n} a_{pr(j)} x_{pr(j)}\right)$

$x(r(3)) = x(1) = \dfrac{1}{\underset{31}{a_{3r(3)}}} (b_3 - 0) = \dfrac{1}{3/2} \cdot 3/2 = 1$

2) $p=2$

$x(r(2)) = x(2) = \dfrac{1}{\underset{22}{a_{2r(2)}}} \left(b_2 - \dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}(-3-1) = 2$

3) $p=1$

$x(r(1)) = x(3) = \dfrac{1}{\underset{13}{a_{1r(1)}}} (b_1 - 1 - 2) = \dfrac{1}{2}(-1-1-2) =$
$= -2$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

② 1) $a_{ij}^{(k)}$ – элемент матрицы A (матрица коэффициентов) на k-том шаге метода, $k = 1, 2, \ldots n-1$

$b_i^{(k)}$ – элемент вектора свободных членов на k-том шаге

$a_{ij}^{(0)} \overset{def}{:=} a_{ij}$; $b_i^{(0)} \overset{def}{:=} b_i$

Алгоритм:

1) вводим вектор перестановок $r = (1, 2, \ldots n)$

2) Прямой ход метода Гаусса для $k = 1, 2, \ldots n-1$

2.1) Найти такое $l > k$, что $|a_{k\,r(l)}| = \max\limits_{i=k,k+1,\ldots n} \{ |a_{k\,r(i)}| \}$

если $a_{k\,r(l)} = 0$, однозначного решения нет

иначе поменять местами компоненты вектора $r(k)$ и $r(l)$

2.2) Вычислить коэффициенты на k-том шаге

$$a_{ij}^{(k)} = a_{i\,r(j)}^{(k-1)} - a_{k\,r(j)}^{(k-1)} \frac{a_{i\,r(k)}^{(k-1)}}{a_{k\,r(k)}^{(k-1)}}$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - b_k^{(k-1)} \frac{a_{i\,r(k)}^{(k-1)}}{a_{k\,r(k)}^{(k-1)}}$$

$i = k+1, k+2, \ldots n$

$j = k+1, k+2, \ldots n$

3) Обратный ход метода Гаусса для $p = n, n-1, \ldots 1$

3.1) $$x_{r(p)} = \frac{1}{a_{p\,r(p)}} \left(b_p - \sum_{j=p+1}^{n} a_{p\,r(j)} x_{r(j)} \right)$$

(6) 6.1. Создание матрицы с заданным числом обусловленности

С помощью стандартной функции Matlab svd(A) случайную матрицу A представим в виде $A = USV^T$, где S – диагональная матрица, $UU^T = VV^T = E$

Создадим вектор S, $S(1) = C$ (заданное число cond), а $S(i) = 1$ $i \neq 1$ $U \cdot diag(S) \cdot V^T$ – итоговая матрица.

Для построения зависимости относительной ошибки в решении от относительного возмущения правой части будем брать матрицы 50×50 A_1 и A_2, $cond(A_1) = 10$ $cond(A_2) = 100$. За 500 итераций вектор-столбец правой части вычисляется как

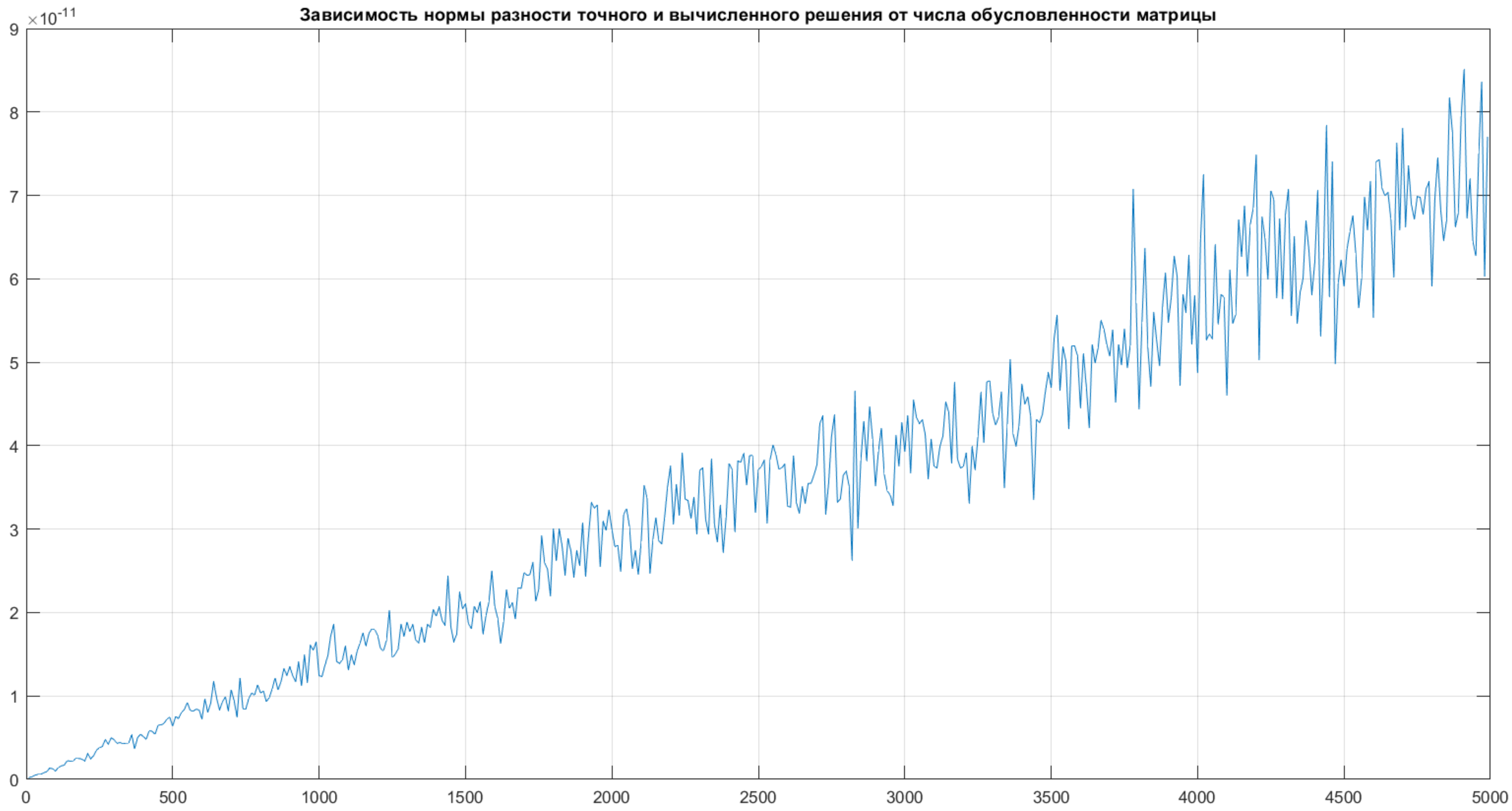
$$b_i = b_{i-1} + 2 \cdot 10^{-4} \cdot ones(50,1) \cdot i$$, где i – номер итерации

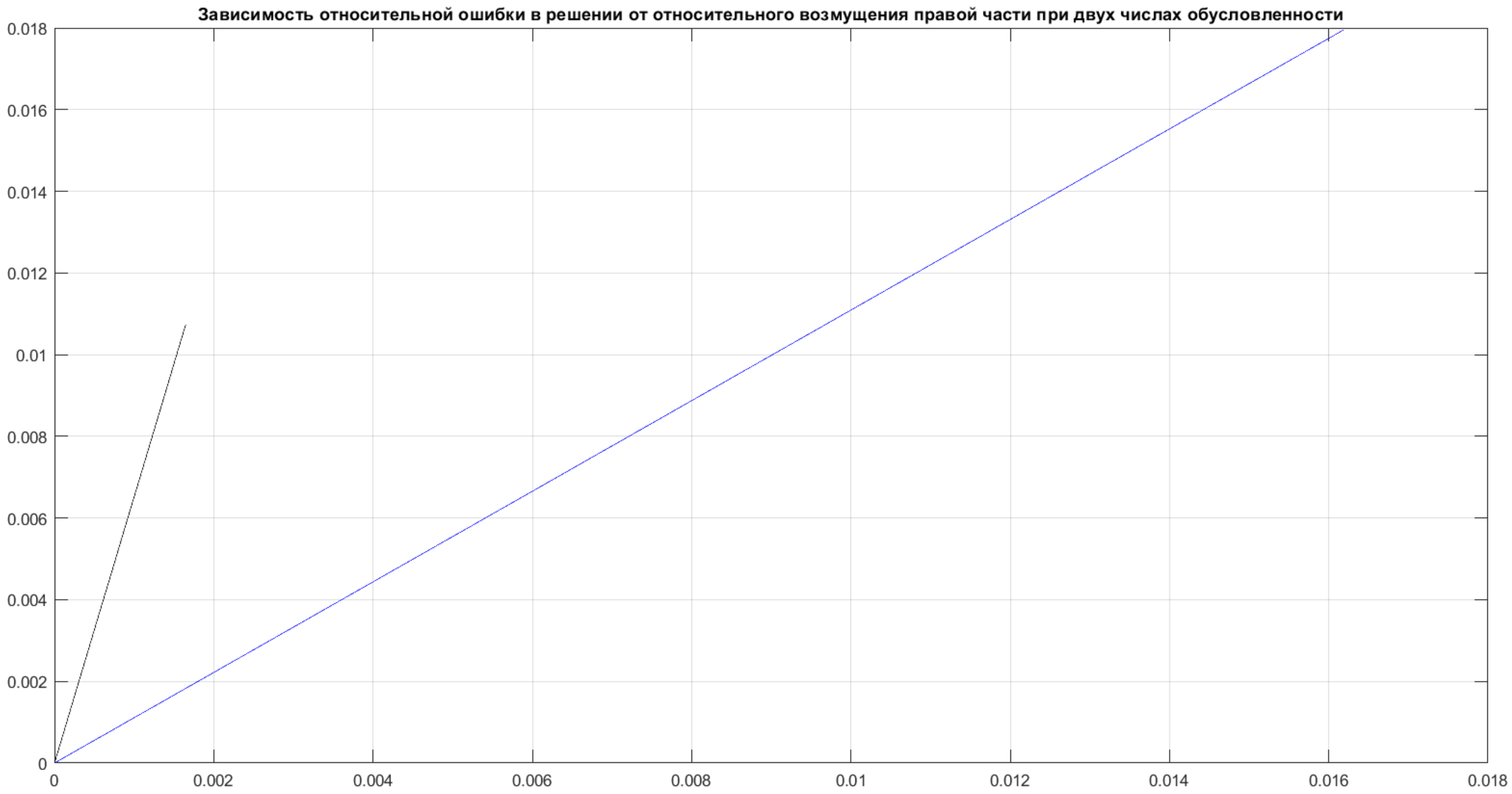
Для построения нормы разности точного и вычисленного решения от cond(A) будем за 500 итераций решать $Ax = b$, на каждой итерации задавая A как матрицу 50×50 с $cond(A) = 10n$, где n – номер итерации. Таким образом, $\forall$ матрицы с $cond(A) \in [10, 5000]$ с шагом 10

(8) Из графика 1 видим, что зависимость отн. ошибки от возм. правой части является линейной. Из свойств числа обусловл.

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le cond(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad (*)$$

Из графика оценим угловые коэф. прямых $\alpha_2 \approx 6{,}5$ (соотв. A_2) $\alpha_1 \approx 1{,}1$ (соотв. A_1), что соотносится с оценкой (*) $\alpha_2 < cond(A_2) = 100$ $\alpha_1 < cond(A_1) = 10$. Видим, что рост погрешности для плохо обусловл. матриц намного более заметен


Зависимость нормы разности точного и вычисленного решения от числа обусловленности матрицы
$\times 10^{-11}$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
4500
5000


Зависимость относительной ошибки в решении от относительного возмущения правой части при двух числах обусловленности
0.018
0.016
0.014
0.012
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0.002
0.004
0.006
0.008
0.01
0.012
0.014
0.016
0.018