

⑥ Для построения зависимости относительной ошибки от относительного возмущения правой части будем брать матрицу A , $\text{cond}(A_1) = 10$ и A_2 : $\text{cond}(A_2) = 50000$.

За $n = 500$ итераций вектор правой части вычисляет как

$$b_i = b + \Delta b_i$$

$$\Delta b_i = \frac{r}{\|r\|} \left(\frac{i}{25n} + \frac{1}{100} \right) \|b\|, \text{ где}$$

b_i - вектор правой части на i -той итерации

Δb_i - вектор возмущений на i -той итерации

r - случайный вектор

$$\text{При } i = n \quad \Delta b_{\max} = \frac{r}{\|r\|} \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{100} \right) \|b\| = \frac{r}{\|r\|} \|b\| \cdot \frac{5}{100}$$

$$\|\Delta b_{\max}\| \leq \frac{5}{100} \|b\|$$

$$\text{При } i = 0 \quad \Delta b_{\min} = \frac{r}{\|r\|} \|b\| \cdot \frac{1}{100}; \quad \|\Delta b_{\min}\| = \frac{1}{100} \|b\|$$

Таким образом, относительное возмущение правой части лежит в интервале 1% - 5%.

На i -ной итерации вычисляем решение \tilde{x} : $A\tilde{x} = b + \Delta b_i$

Сохраняем в памяти значение $e_i = \frac{\|x^* - \tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|}$, где x^* - решение $Ax^* = b$.

⑧ Из графика 1 видим, что относительная ошибка решения увеличивается с увеличением $\text{cond}(A)$. Оценим $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$ как для A_1 , так и для A_2 .

Для матрицы A_1 , $\text{cond}(A_1) = 10$: $0,02 \leq \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq 0,05$; $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \in (0,03; 0,25)$ - случай "хорошо" обусловленной матрицы.

Для матрицы A_2 , $\text{cond}(A_2) = 50000$: $0,01 \leq \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq 0,05$; $213 \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq 1085$ - случай "плохо" обусловленной матрицы. Видим, что полученное решение значительно отличается от x при незначительном возмущении правой части.

① Найти решение \vec{x} системы вида $Ax = b$, где

$b = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)^T$ - вектор свободных членов

$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ - вектор неизвестных

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ - квадратная матрица $n \times n$

коэффициентов данной системы, методом Гаусса. Дано точное x^*

Решить систему методом Гаусса, исследовать зависимость
полноты решения от типа обусловленности матрицы A и
от относительного возмущения вектора b .

Рис. 1 Зависимость относительной ошибки в решении от относительного возмущения правой части при двух числах обусловленности

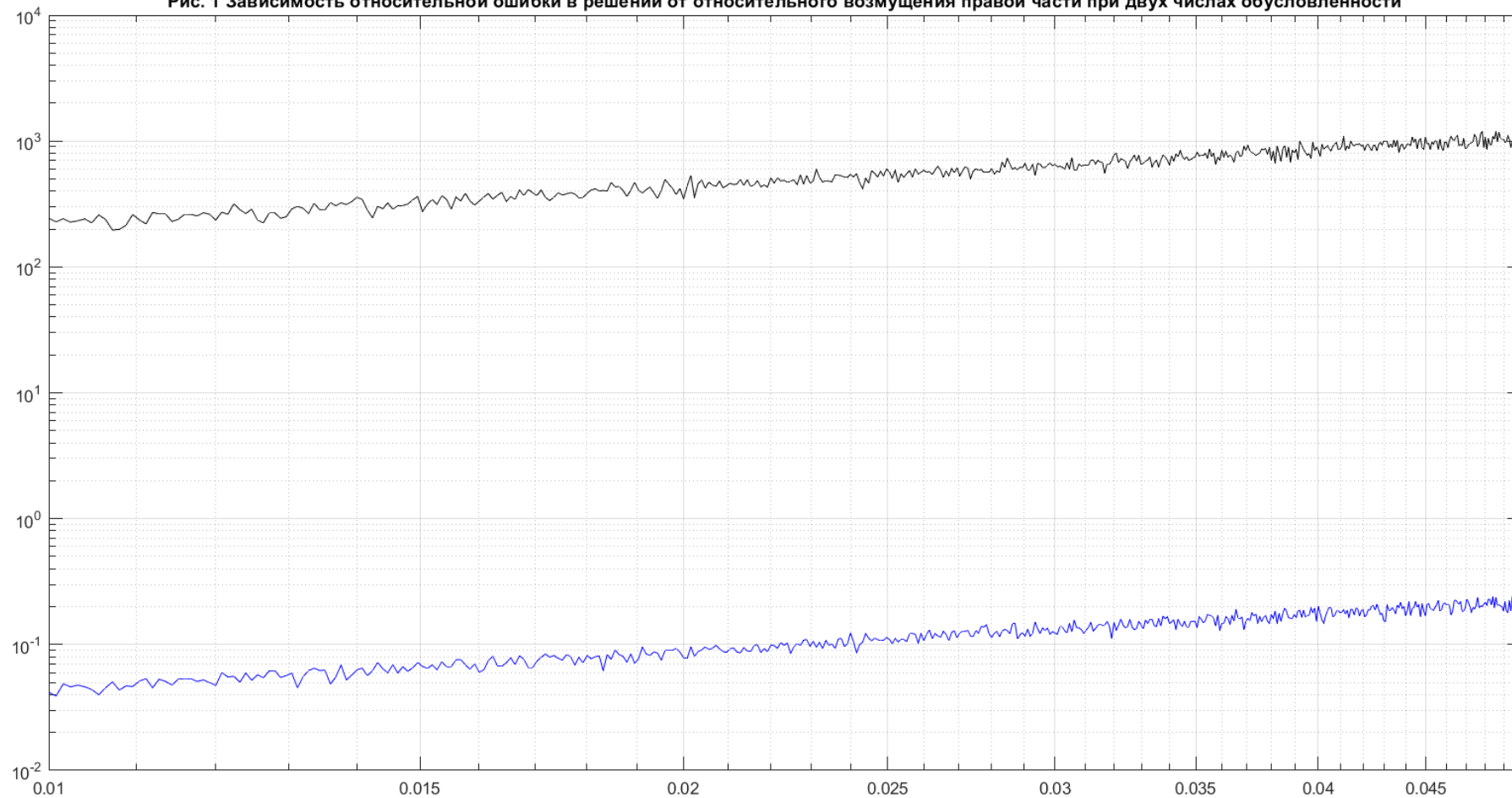


Рис. 2 Зависимость нормы разности точного и вычисленного решения от числа обусловленности матрицы

