Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа теоретической механики, ИПММ

Направление подготовки

„01.03.03 Механика и математическое моделирование"

Отчет по лабораторной работе N4

„Решение систем линейных алгебраических уравнений итерационными методами"

Выполнил студент гр. 3630103/90001 Волков Д.

Преподаватель Добрецова С.Б.

(1) Решить СЛАУ градиентным методом. Исследовать зависимость погрешности, невязки, числа итераций от заданной точности. Исследовать зависимость погрешности, невязки, числа итераций от значения определителя матрицы коэффициентов при стремлении к нулю.

(2) $\exists$ A – вещественная симметричная положительно определенная матрица. det(A) известен и не равен нулю, A имеет размер n×n. $\exists$ x – известный вектор-столбец n×1. $\exists$ $b = Ax$

$\exists$ СЛАУ $Ax^* = b$, где A – матрица коэффициентов СЛАУ, b – вектор свободных членов, x^* – вектор неизвестных. x – точное решение системы. Найдем решение с помощью градиентного метода.

(2) Условия применимости:

для $Ax = b$

1) $A = A^T$

2) $A > 0$

Алгоритм метода: для $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

$$\alpha_k = \frac{r^{(k)T} r^{(k)}}{r^{(k)T} A r^{(k)}}$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$$

$$\delta^{(k+1)} = \| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|$$

Условие выхода из итерации:

$$\varepsilon^{(k+1)} = \frac{\delta_{k+1}^2}{\delta_k - \delta_{k+1}} < eps.$$

eps – заданная точность вычисления

$x^{(0)}$ – заданное начальное приближение.

(5) Тестовый пример для задачи малой размерности

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 2$$

$$Ax = b; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A = A^T$, $\Delta_1 = 4 > 0$; $\Delta_2 = 20 - 9 = 11 > 0$; $\Delta_3 = \det A = 13 > 0$

$\Rightarrow A > 0$ и удовлетворяет условиям применимости метода

$\exists\, x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $k = 0$; $r_0 = b - Ax_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - (A)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0} = \frac{(3\ -1\ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(3\ -1\ 2)(A)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = 0{,}1308$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}1308\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}39 \\ 0{,}86 \\ 1{,}26 \end{pmatrix}$$

2) $k = 1$; $r_1 = b - Ax_1 = \begin{pmatrix} 0{,}514 \\ 1{,}618 \\ 0{,}037 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 = \frac{r_1^T r_1}{r_1^T A r_1} = 0{,}3250$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 r_1 = \begin{pmatrix} 1{,}39 \\ 0{,}86 \\ 1{,}26 \end{pmatrix} + 0{,}325\begin{pmatrix} 0{,}514 \\ 1{,}616 \\ 0{,}037 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}55 \\ 1{,}39 \\ 1{,}27 \end{pmatrix}$$

3) $k = 2$; $r_2 = b - Ax_2 = \begin{pmatrix} 1{,}39 \\ -0{,}47 \\ 1{,}24 \end{pmatrix}$

$$\alpha_2 = \frac{r_2^T r_2}{r_2^T A r_2} = 0{,}1329$$

$$x_3 = x_2 + \alpha_2 r_2 = \begin{pmatrix} 1{,}74 \\ 1{,}33 \\ 1{,}44 \end{pmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ – вектор точного решения

$\delta = \dfrac{\|x - x_3\|}{\|x\|} = 0{,}26$ – относительная погрешность после 3-х итераций метода.

$\delta_0 = \dfrac{\|x - x_0\|}{\|x\|} = 4{,}87 > 1 > \delta$

(5) Тестовый пример для задачи малой размерности

$x_1 = x_2 = x_3 = 2$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$Ax = b; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A = A^T$, $\Delta_1 = 4 > 0$; $\Delta_2 = 20 - 9 = 11 > 0$; $\Delta_3 = \det A = 13 > 0$

$\Rightarrow A > 0$ и удовлетворяет условиям применимости метода

$$\exists\, x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $k = 0$; $r_0 = b - Ax_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - (A)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{r_0^T A r_0} = \frac{(3\ -1\ 2)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{(3\ -1\ 2)(A)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = 0{,}1308$$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 r_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0{,}1308\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}39 \\ 0{,}86 \\ 1{,}26 \end{pmatrix}$$

2) $k = 1$; $r_1 = b - Ax_1 = \begin{pmatrix} 0{,}514 \\ 1{,}618 \\ 0{,}037 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 = \frac{r_1^T r_1}{r_1^T A r_1} = 0{,}3250$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 r_1 = \begin{pmatrix} 1{,}39 \\ 0{,}86 \\ 1{,}26 \end{pmatrix} + 0{,}325\begin{pmatrix} 0{,}514 \\ 1{,}618 \\ 0{,}037 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}55 \\ 1{,}39 \\ 1{,}27 \end{pmatrix}$$

3) $k = 2$: $r_2 = b - Ax_2 = \begin{pmatrix} 1{,}39 \\ -0{,}47 \\ 1{,}24 \end{pmatrix}$

$$\alpha_2 = \frac{r_2^T r_2}{r_2^T A r_2} = 0{,}1329$$

$$x_3 = x_2 + \alpha_2 r_2 = \begin{pmatrix} 1{,}74 \\ 1{,}33 \\ 1{,}44 \end{pmatrix}$$

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ – вектор точного решения

$\delta = \dfrac{\|x - x_3\|}{\|x\|} = 0{,}26$ – относительная погрешность после 3-х итераций метода.

$$\delta_0 = \frac{\|x - x_0\|}{\|x\|} = 4{,}87 > 1 > \delta$$

6 Подготовка контрольных тестов

Для создания симметричной положительно определенной матрицы A с $\det(A)=d$ размером $n \times n$ построим диагональную матрицу S, у которой один из диагональных эл-тов равен d, а все остальные равны 1. Затем будем итеративно уменьшать вдвое наибольшее число на диагонали S и увеличивать наименьшее на каждой итерации:

$$S(i,i) = S(i,i) \cdot 2; \quad S(j,j) = S(j,j)/2$$

$S(i,i) = \min S$; $S(j,j) = \max(S)$, пока не достигнем $\frac{\max(S)}{\min(S)} < c$

=> таким образом ограничим рост числа обусловленности

Итоговая матрица $Q = P^T S P$, где P – любая ортогональная. Q – симметричная, $Q>0$, Q – хорошо обусловленная матрица.

Для построения зависимости погрешности, невязки, числа итераций от точности возьмем 13 значений точности: 10^i, $i = -1, -2, \dots -13$

Зададим матрицу A размером 100×100, $\det(A) = 200$, вектор x – случайный ~~со знач~~, $b = Ax$. За 13 итераций получим соотв. значения норм разности точного и вычисленного значений, норм невязки, числа итераций.

Для построения зависимостей погрешности, норм невязки, числа итераций от определителя в течение 200 итераций, т.е. для $i = 1, 2, \dots 200$ будем создавать матрицу 100×100 с опр. $\det(A) = 20 \cdot i$, при этом вектор x остается неизменным. $b = Ax$. Исследуемый интервал значений определителя

$$20 \le \det A \le 4000$$

(7) Модульная структура программы:

1) matrix_with_det(n,d) – возвращает матрицу A размер $n \times n$ с $\det(A) = d$, $A = A^T$, $A > 0$

2) grad(A, b, x_0, eps) – реализует градиентный метод решения СЛАУ $Ax = b$ с использованием x_0 в качестве начального приближения и eps для критерия остановки. Возвращает вектор решения x^*, вектор невязки r и число итераций.

3) main – реализует построение зависимостей от точности от определителя погрешности, невязки и числа итераций.

(8) Из рис.2 видим, что градиентный метод обладает линейной сходимостью. Это следует из оценки абсолютной погрешности на шаге $k+1$

$$\|e^{(k+1)}\|_A \leq \frac{\delta - \Delta}{\delta + \Delta} \|e^{(k)}\|_A \text{, где}$$

δ и Δ – наибольшее и наименьшее из собств. чисел матрицы A

$$\|e^{(k)}\|_A \leq \left(\frac{\delta - \Delta}{\delta + \Delta}\right)^k \|x - x_0\|_A$$

$\Rightarrow$ можем оценить кол-во итераций k для достижения точности $\varepsilon^{(k)}$

$$k \leq \frac{\ln \frac{\|e\|_A}{\|x - x_0\|_A}}{\ln\left(\frac{\delta - \Delta}{\delta + \Delta}\right)}$$

(9) Градиентный метод обеспечивает быструю сходимость, прост в реализации, однако имеет недостаток в виде сильных ограничений на условия применимости метода. Скорость сходимости сильно зависит от свойств исходной матрицы (спектральный радиус)

Рис. 1 Зависимости абсолютной погрешности и нормы невязки от ϵ

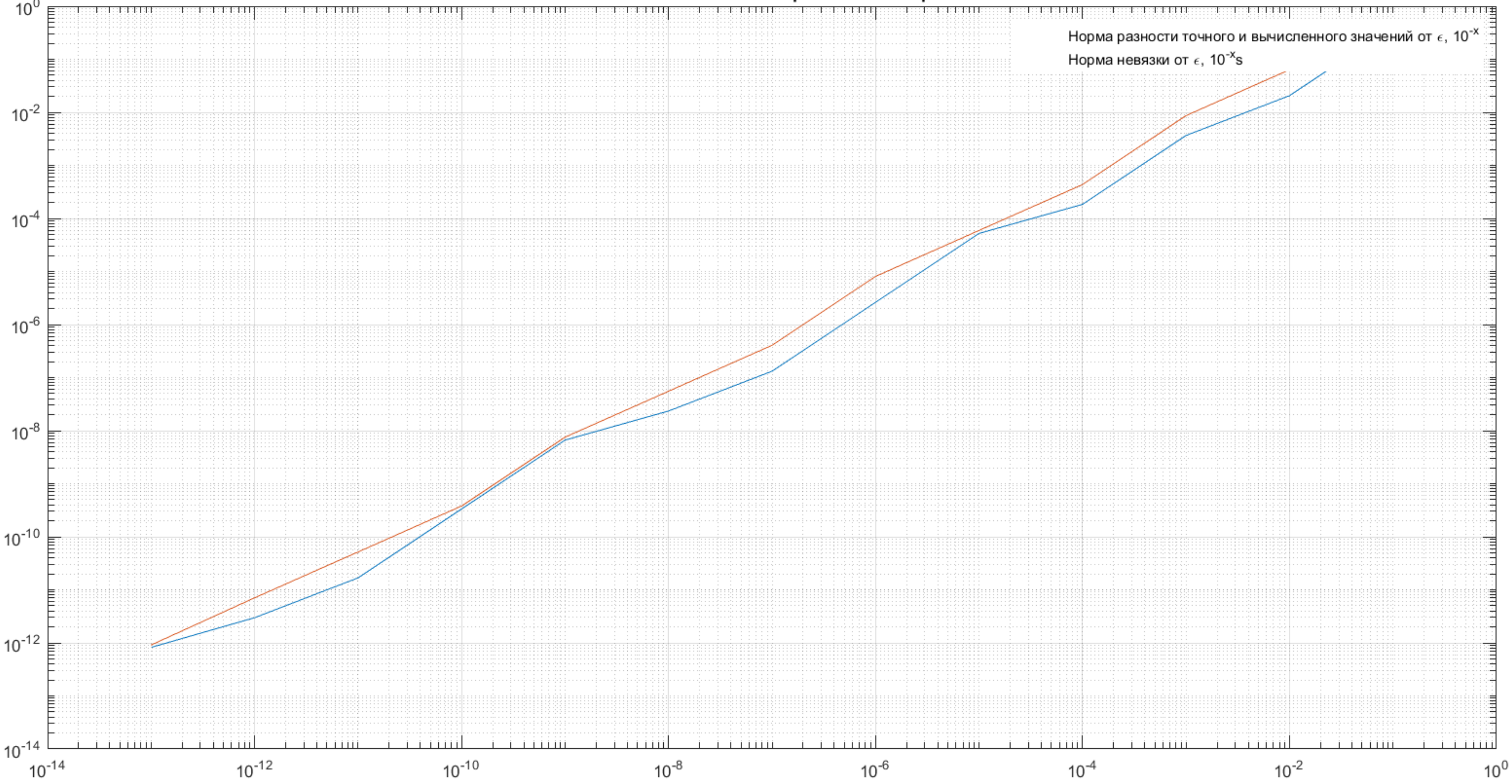
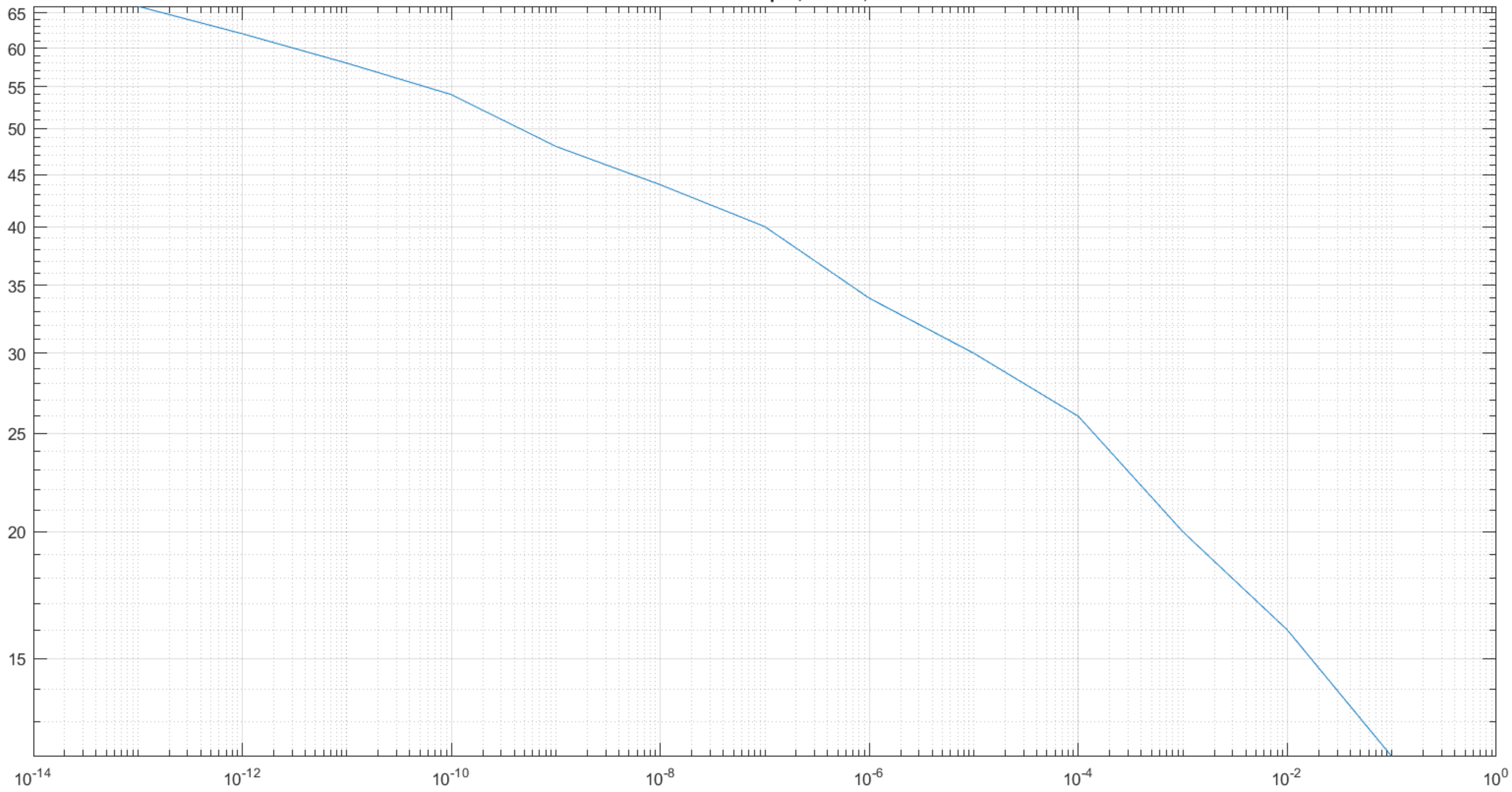
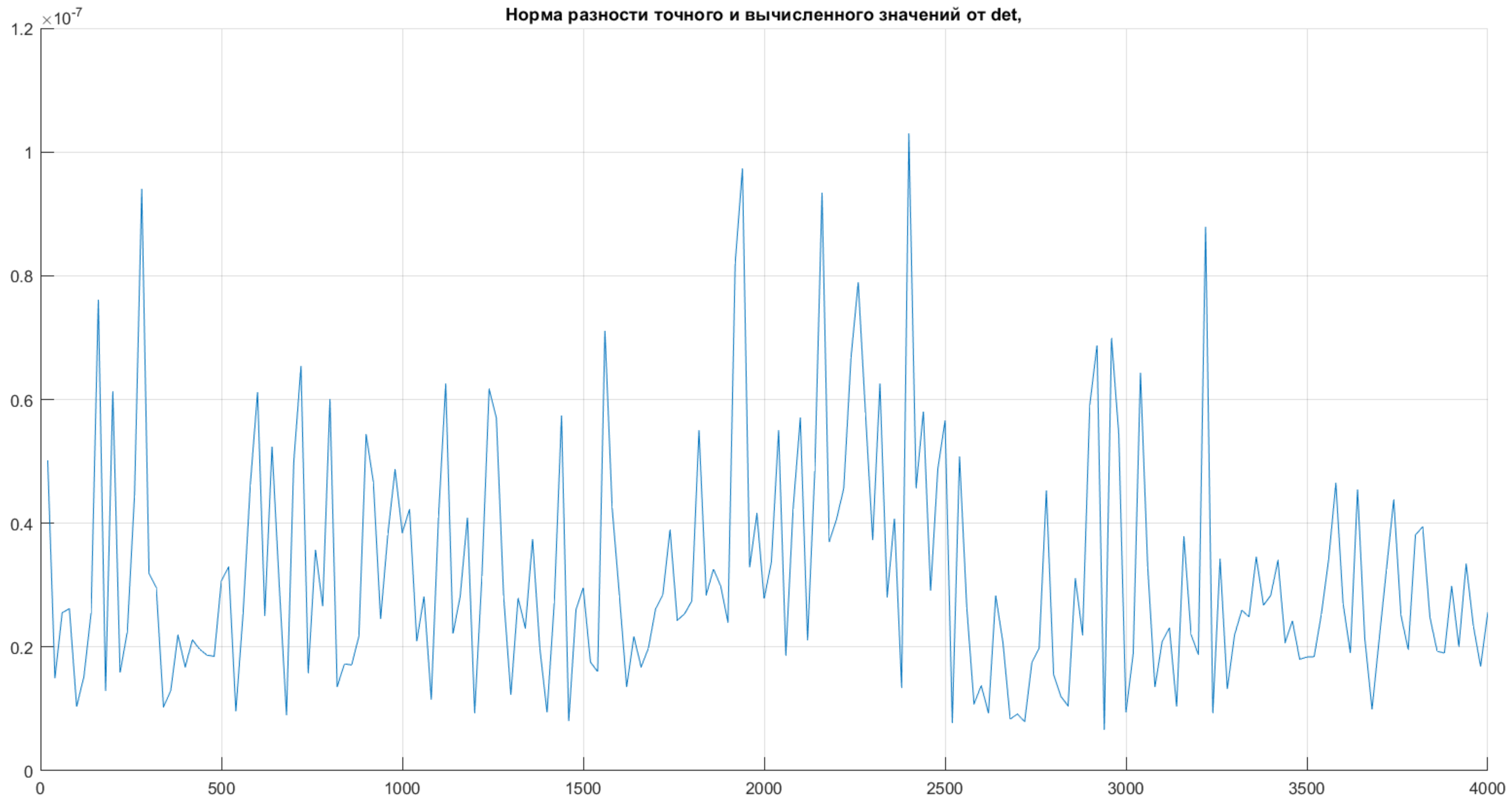
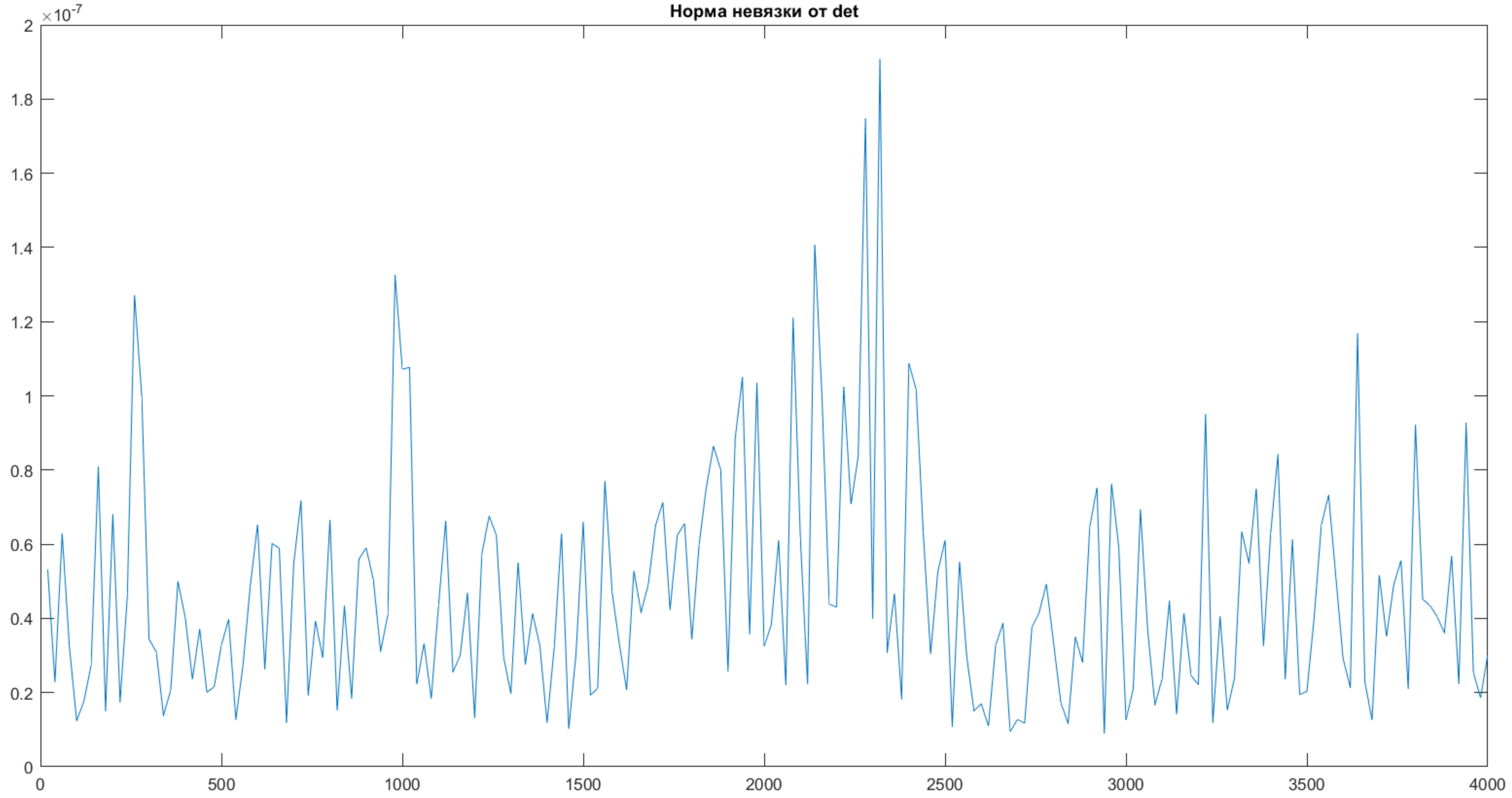


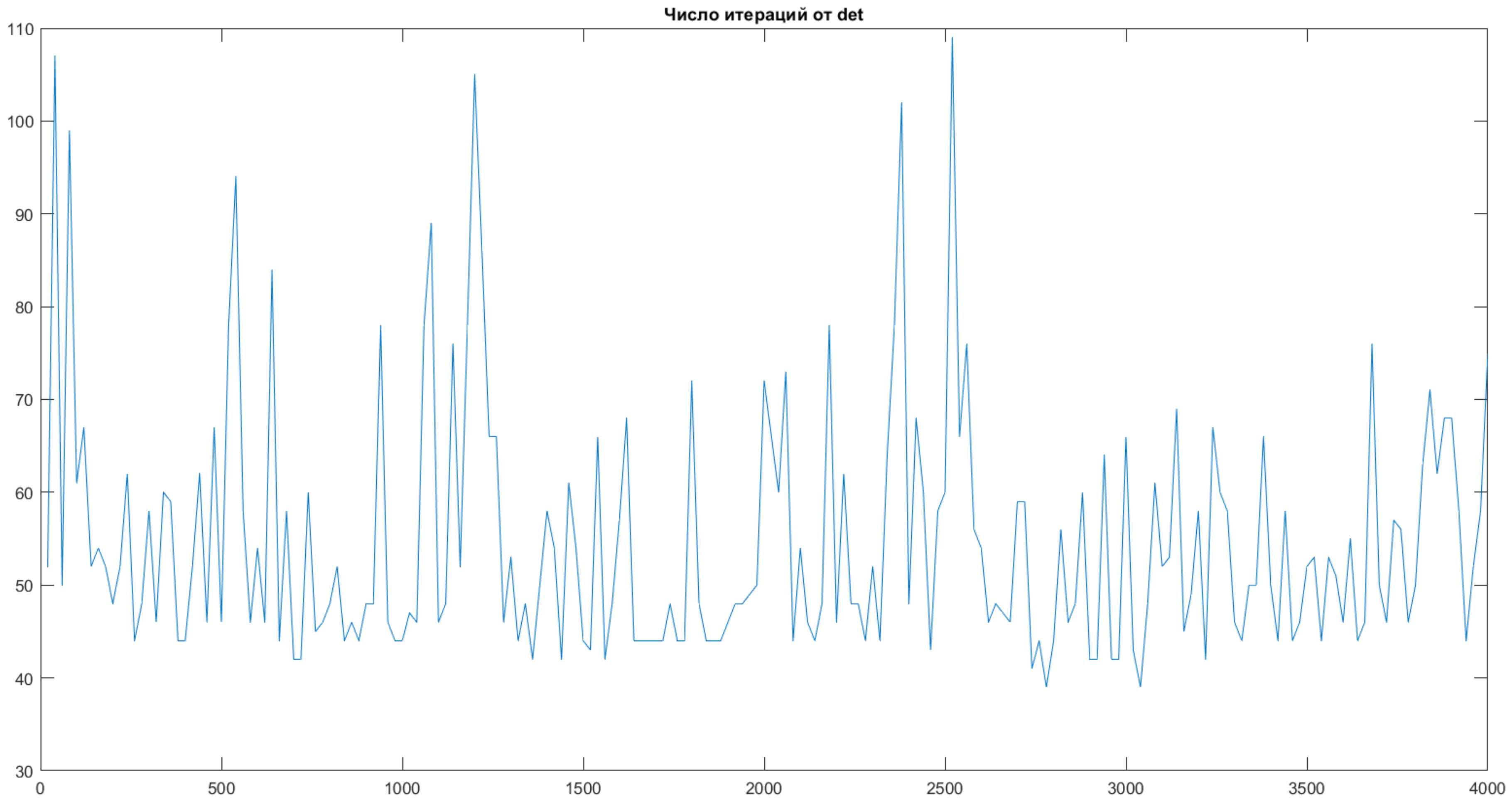
Рис. 2 Число итераций от ϵ, 10^{-x}




Норма разности точного и вычисленного значений от det,
×10^-7
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000



Норма невязки от det
×10^-7
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000


Число итераций от det
110
100
90
80
70
60
50
40
30
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000