

8) Численный анализ

Из рис. 2 \Rightarrow графический метод обеспечивает линейной скоростью.

$$\|x^{(k+1)} - x^*\|_{H_A} \leq \left(\frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} \right) \|x^{(k)} - x^*\|_{H_A}$$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{H_A} \leq \left(\frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} \right)^k \|x^{(0)} - x^*\|_{H_A}$$

Т.к. при решении системы $x^{(0)} =$ нулевой вектор $\|x^{(0)} - x^*\|_{H_A} = \|x^*\|_{H_A}$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{H_A} \leq \varepsilon = \left(\frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} \right)^k \|x^*\|_{H_A}$$

$$\ln \varepsilon \leq k \ln \left(\frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} \right) + \ln \|x^*\|_{H_A}$$

$$k \geq \frac{\ln \varepsilon - \ln \|x^*\|_{H_A}}{\ln \left(\frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} \right)} = \frac{1}{\ln \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta}} \ln \varepsilon - \frac{\ln \|x^*\|_{H_A}}{\ln \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta}}$$

Условный коэф. умнож. на рис. 2 зависит от $k(\ln \varepsilon) \approx -7,05$

$$\delta = \frac{1}{\ln \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta}} = -7,05; \quad \ln \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta} = -\frac{1}{7,05}; \quad \ln \frac{\Delta + \delta}{\Delta - \delta} = \frac{1}{7,05}$$

$$\frac{\Delta + \delta}{\Delta - \delta} = +1,15$$

Вид графиков на рис. 3, 4, 5 объясняется особенностями построения матрицы с заданной определителем. Кол-во операций для решения необходимо точно пропорционален коэф. $\frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta}$, который приближается к 0 (единичная матрица), или заданная $\det(A) \approx 2 \cdot 2^n$, $n \in \mathbb{Z}, n=10$ (размерность матрицы), т.к. количество ненулевых элементов увеличивается по степени двойки. На графиках 3, 4, 5 показывается минимизация через канале 10³ (по определителю) $\approx 1024 = 2^{10}$

$$\|r\| = \|b - Ax - b + Ax^*\| = \|A(x - x^*)\| \leq \|A\| \|x - x^*\|$$

$\ln \|r\| \leq \ln \|A\| + \ln \|x - x^*\| \Rightarrow$ на рис. 1 график имеет вид, находясь на некоторой высоте график имеет вид, параллельно оси

Рис. 1 Зависимости абсолютной погрешности и нормы невязки от ϵ

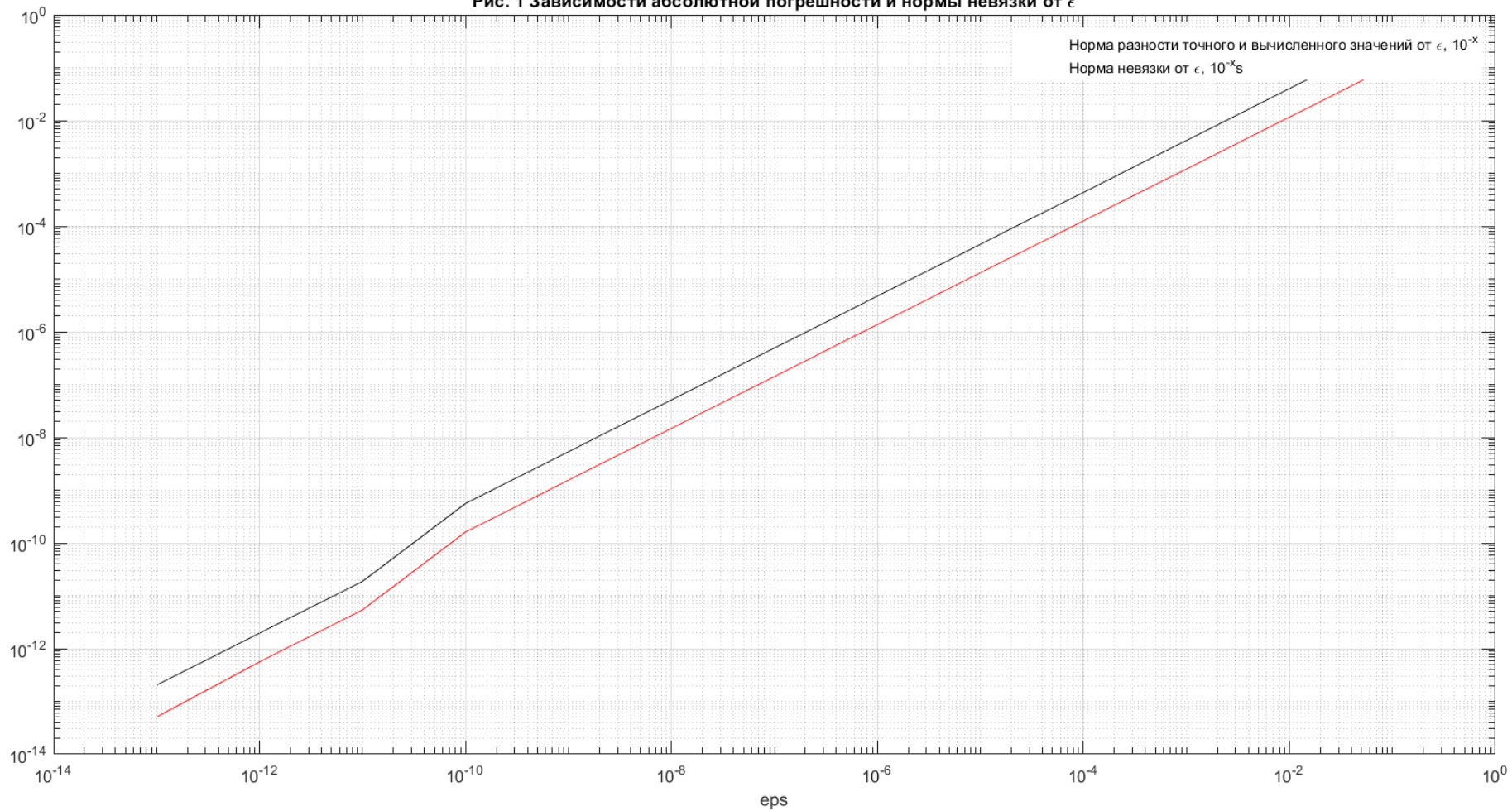


Рис. 2 Число итераций от ϵ , 10^{-x}

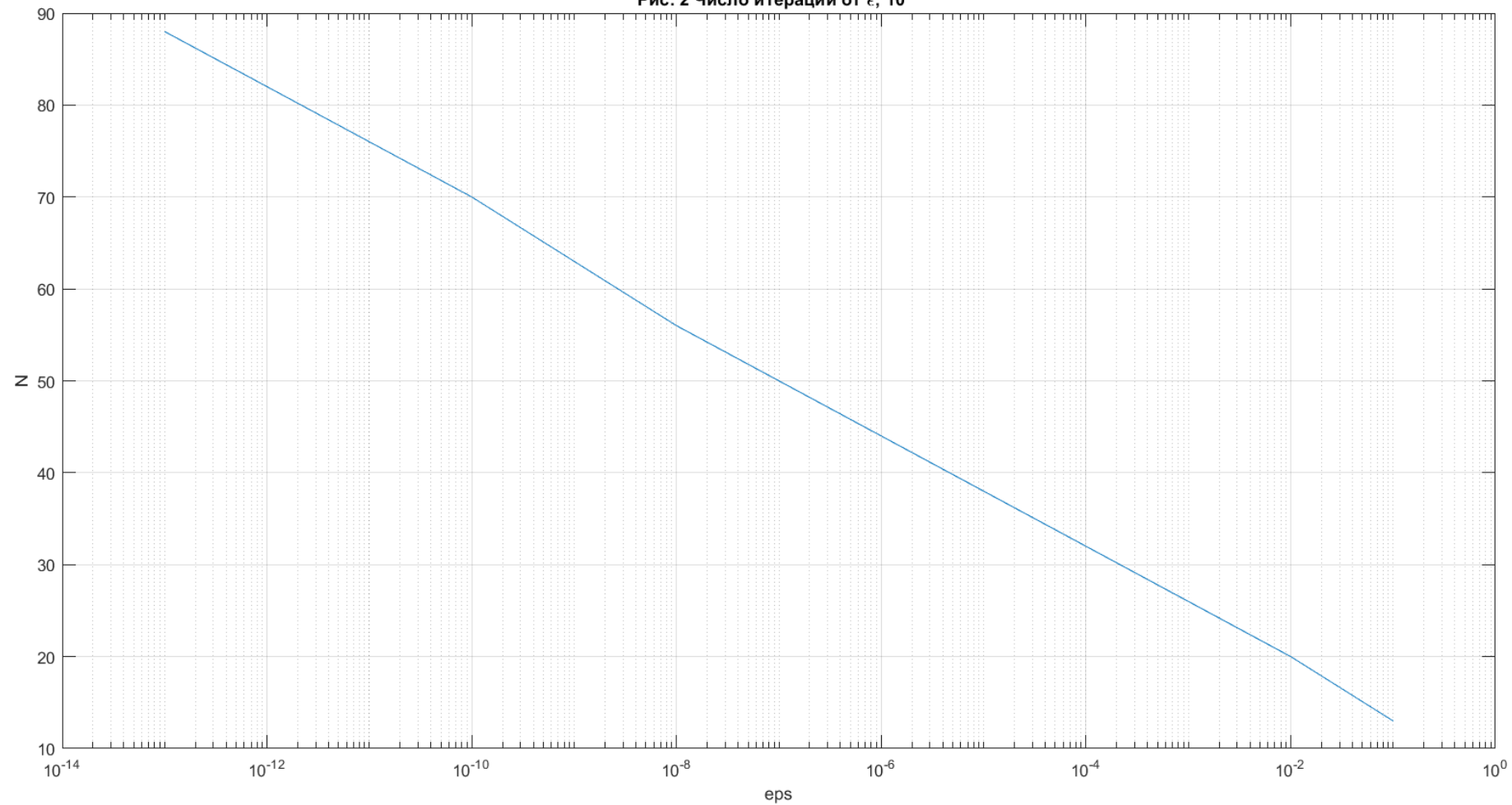


Рис. 3 Норма разности точного и вычисленного значений от det,

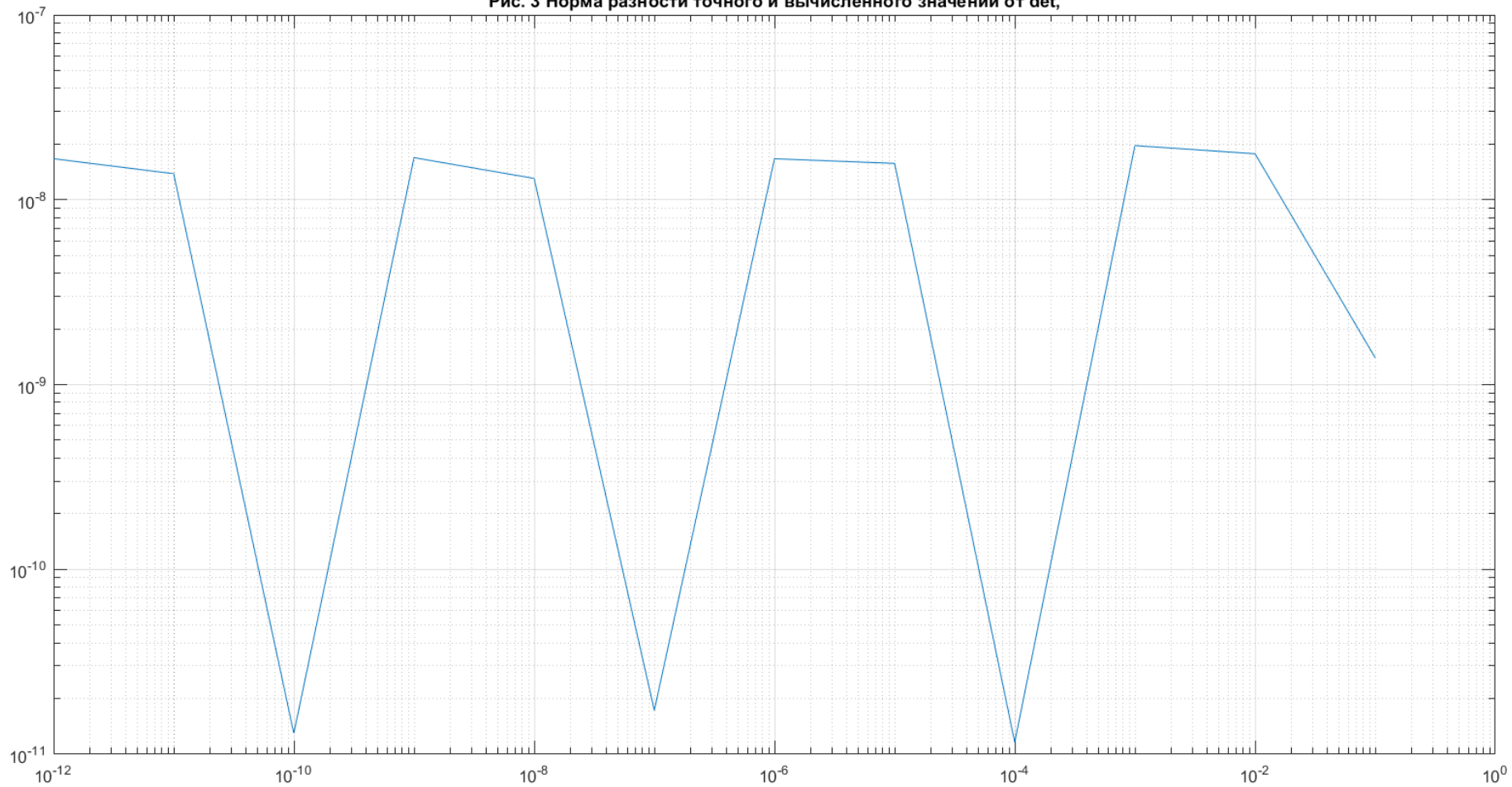


Рис. 4 Норма невязки от det

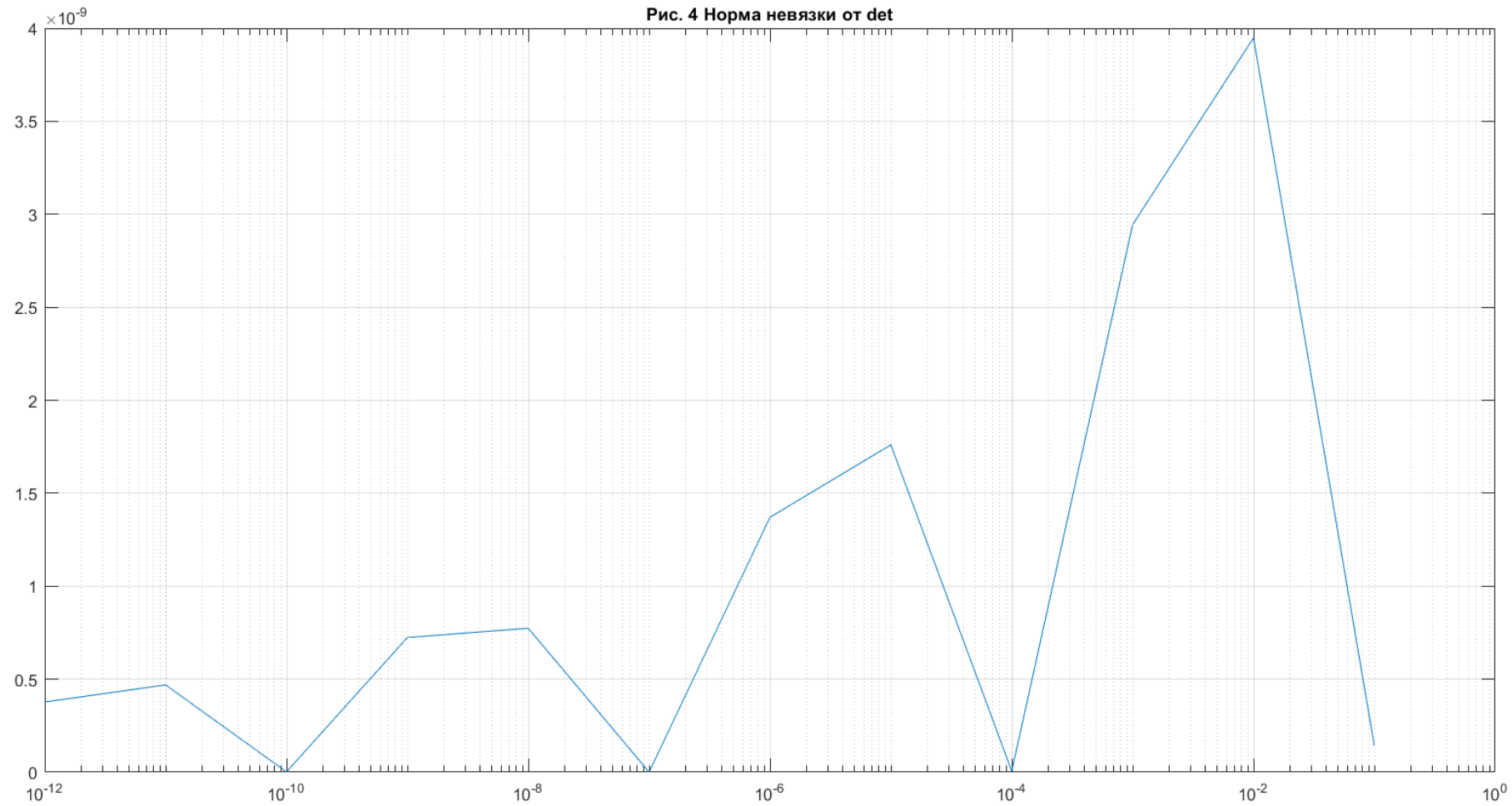


Рис. 5 Число итераций от det

