p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Todas las proposiciones compuestas pueden escribirse utilizando únicamente este conectivo.

a) Muestre que $\neg p \Leftrightarrow p \mid p$

b) Muestre que $p \vee q \Leftrightarrow (p \mid p) \mid (q \mid q)$

c) Encuentre una proposición equivalente a $p \wedge q$ utilizando únicamente la raya de Sheffer.

d) Haga lo mismo para $p \rightarrow q$

e) Haga lo mismo para $p \oplus q$

10. Algunos matemáticos utilizan el símbolo $\downarrow$ como la negación de la disyunción. Es decir, $p \downarrow q$ significa "ni p ni q".

a) Construya la tabla de verdad para $p \downarrow q$.

b) Encuentre una fórmula utilizando sólo los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ que sea equivalente a $p \downarrow q$. Verifique su respuesta utilizando tablas de verdad.

c) Encuentre fórmulas usando el conectivo $\downarrow$ que sean equivalentes a $\neg p$, $p \vee q$ y $p \wedge q$.

1.6 Validez Lógica de Argumentos

Una aplicación interesante y útil del cálculo proposicional es el análisis de ciertos tipos de argumentos para verificar su validez lógica. Un argumento consiste de una serie de proposiciones "dadas", cuya conjunción constituye la *premisa* del argumento y juntas deben llevar a una *conclusión*.

Formalmente, un argumento que consiste de la premisa $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n$ (cada una de las p_i que conforman a la premisa puede ser llamada una *premisa parcial*) y de la conclusión q es un *argumento válido* si y sólo si la proposición $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ es una tautología. El requisito para la validez de un argumento es, por lo tanto, que la conclusión sea verdadera en todos los casos en que todas las premisas parciales sean verdaderas.

El siguiente ejemplo muestra el formato estándar en que las premisas y la conclusión son presentadas:

EJEMPLO 1.17

Verifique la validez del argumento

$$\begin{array}{ll} & p \\ & p \rightarrow q \\ & \neg q \vee r \\ \hline \therefore & r \end{array}$$

Solución. Las proposiciones sobre la línea horizontal son las premisas parciales, mientras que la que se encuentra bajo la línea es la conclusión. El símbolo $\therefore$ se lee "por lo tanto". Para verificar la validez del argumento, es necesario comprobar que $[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)] \rightarrow r$ es una tautología. Usando una tabla de verdad, el lector debería verificar que en efecto, el argumento dado es lógicamente válido. $\square$

EJEMPLO 1.18

Exprese simbólicamente y analice la validez del argumento "Si las tasas de interés bajan, la economía mejora. Si la economía mejora, el desempleo baja. Para que las autoridades actuales sean reelegidas, el desempleo debe bajar. Por lo tanto, una condición suficiente para que las autoridades actuales sean reelectas es que la tasa de interés baje".

Solución. Primero simbolizamos cada proposición simple en el argumento.

p : las tasas de intereses bajan
q : la economía mejora
r : el desempleo baja
s : las autoridades actuales son reelectas

De aquí que las premisas parciales tienen la forma $p \to q$, $q \to r$ y $s \to r$. La conclusión tiene la forma $p \to s$. Por lo tanto, el argumento en forma simbólica es:

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ & s \to r \\ \hline \therefore & p \to s \end{array}$$

El lector deberá verificar construyendo una tabla de verdad, que el argumento *no es* lógicamente válido.

□

Las tautologías $[p \wedge (p \to q)] \to q$ (*modus ponens*), $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ (transitividad de la implicación) y $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$, proveen un método para concluir la validez de un argumento (o de sospechar la invalidez) que nos permite evitar escribir repetidamente tablas de verdad extensas. *Modus ponens* nos indica que podemos concluir q cuando tengamos p y $p \to q$. La transitividad de las implicaciones dice que podemos reemplazar dos hipótesis de la forma $(p \to q)$ y $(q \to r)$ por la hipótesis $(p \to r)$, si hacerlo resulta ventajoso. La tercera implicación nos dice que si nuestra conclusión tiene la forma $q \to r$, podemos agregar q a la lista de premisas parciales y deducir r en lugar de $q \to r$, a partir de esta lista expandida. Finalmente, recuerde la utilidad de la equivalencia lógica: una proposición puede ser reemplazada por cualquier proposición equivalente. Este procedimiento se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.19

Analice el argumento del ejemplo 17 sin utilizar tablas de verdad.

Solución. La pregunta se reduce a si es posible o no deducir de manera válida a r de la presunta veracidad de cada una de las tres premisas parciales p, $p \to q$ y $\neg q \vee r$. Primero, utilizamos la equivalencia de la forma $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (tabla 1.1, equivalencia 11a), para sustituir a $\neg q \vee r$ por $q \to r$ para que las premisa se convierta en $p \wedge (p \to q) \wedge (q \to r)$. De $p \wedge (p \to q)$ podemos concluir q, por *modus ponens*. De q y $q \to r$ podemos concluir r nuevamente utilizando *modus ponens*. Por lo tanto, este análisis muestra que r puede ser deducido lógicamente a partir de la premisa, por lo que el argumento es válido. □

EJEMPLO 1.20
Analice el argumento del ejemplo 18 sin utilizar tablas de verdad.

Solución. La pregunta es si podemos derivar s de p dadas las hipótesis $p \to q$, $q \to r$ y $s \to r$. Primero, agregamos p a la lista de hipótesis. La pregunta es ahora si podemos derivar s de la lista expandida de premisas parciales. De p y $p \to q$, tenemos q. De q y $q \to r$, obtenemos r. Ahora tenemos r y $s \to r$. En este punto, la cadena de razonamientos se detiene. No tenemos manera alguna de concluir s a partir de $r \wedge (s \to r)$ (puede comprobar que $[r \wedge (s \to r)] \to s$ no es una tautología). Por lo tanto existe razón para *dudar* de la validez del argumento. Para *demostrar* la invalidez, debemos proveer una combinación de valores de verdad para la cual la implicación en cuestión es falsa. Esto también puede realizarse sin necesidad de escribir una tabla de verdad completa.

El razonamiento sigue la siguiente línea: queremos encontrar valores de verdad para p, q, r y s tal que la conjunción $(p \to q) \wedge (q \to r) \wedge (s \to r)$ de las premisas parciales sea verdadera mientras que la conclusión $p \to s$ sea falsa. Claramente, para que $p \to s$ sea falsa, p debe ser verdadera y s debe ser falsa. En ese caso, para que $p \to q$ sea verdadera, entonces q debe ser verdadera. Pero entonces r debe también ser verdadera para que $q \to r$ sea verdadera. Note que si s es falsa y r es verdadera, la premisa parcial $s \to r$ es verdadera. Por lo tanto, hemos encontrado una combinación de valores de verdad para las cuales la premisa del argumento es verdadera mientras que la conclusión es falsa. Esto prueba concluyentemente la invalidez del argumento. □

Los ejercicios de esta sección pueden realizarse tanto utilizando tablas de verdad como el razonamiento de los ejemplos anteriores. Aún cuando el procedimiento mecánico de construcción de tablas de verdad parezca más sencillo de realizar, es más provechoso para su formación el intentar utilizar el razonamiento lógico anterior. A continuación se presenta un último ejemplo utilizando este razonamiento.

EJEMPLO 1.21
Determine si el siguiente argumento lógico es válido. “Si estudio o soy un genio, entonces aprobaré el curso. Si apruebo el curso, entonces me permitirán tomar el siguiente curso. Por lo tanto, si no me permiten tomar el siguiente curso, entonces no soy un genio”.

Solución. Si nombramos a las proposiciones de la siguiente manera:

s = “estudio”
g = “soy un genio”
p = “aprobaré el curso”
a = “me permitirán tomar el curso siguiente”

entonces el argumento puede ser representado simbólicamente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} & s \vee g \to p \\ & p \to a \\ \hline \therefore & \neg a \to \neg g \end{array}$$

Ya que la conclusión es una implicación, utilizamos la táctica presentada anteriormente de modificar el problema suponiendo que el antecedente es una de las premisas y tratando de demostrar

1.	$s \vee g \rightarrow p$	hipótesis
2.	$p \rightarrow a$	hipótesis
3.	$g \rightarrow g \vee s$	Regla 12 (adición)
4.	$g \rightarrow s \vee g$	Por 3 y ley conmutativa 2-a
5.	$g \rightarrow p$	Por 4, 1 y silogismo hipotético (regla 33)
6.	$g \rightarrow a$	Por 5, 2 y silogismo hipotético (regla 33)
7.	$\neg a \rightarrow \neg g$	Por 6 y contrarecíproca (regla 9)

$\square$

Ejercicios

1. Que haga buen clima es necesario para tener un jardín bonito. El jardín es bonito. Por lo tanto, el clima fue bueno.
2. Si hoy es lunes, entonces mañana es martes. Pero hoy no es lunes. Por lo tanto, mañana no es martes.
3. Hoy es lunes o martes. Pero hoy no es lunes. Por lo tanto, hoy es martes.
4. Perderé mi trabajo a menos que Sandra siga trabajando. Sandra será despedida sólo si usted lo recomienda. Por lo tanto, retendré mi trabajo si no recomienda que Sandra sea despedida.
5. Si $5+7 = 12$, entonces $6 > 8$. Si $5+7 = 7+5$, entonces $5 + 7 = 12$. Pero $5 + 7 = 7 + 5$. Por lo tanto, podemos concluir que $6 > 8$.
6. Si el dólar sube de valor, las exportaciones se reducen. El desempleo aumentará a menos que se detenga la reducción en las exportaciones. Una baja en las tasas de interés es necesaria para debilitar el precio del dólar. Por lo tanto, una baja en las tasas de interés es suficiente para causar disminución en el desempleo.
7. Claudia pasará el examen si entiende el tema. Si Claudia pasa el examen, entonces aprobará la materia. Por lo tanto, si Claudia entiende el tema, entonces aprobará la materia.
8. Si estudio toda la noche para el examen de lógica matemática, estaré cansado. Si estoy cansado, no haré la tarea de Geometría. Por lo tanto, para pasar el examen de Lógica Matemática y hacer la tarea de Geometría, es necesario que no estudie toda la noche.
9. Dado que $p \rightarrow q$ es una tautología, para que $q \rightarrow p$ sea una tautología es necesario y suficiente que $p \leftrightarrow q$ sea una tautología. Sabemos que $p \rightarrow q$ es una tautología y que $p \leftrightarrow q$ no es una tautología. Por lo tanto $q \rightarrow p$ no es una tautología.
10. Si Mercedes no se encontró con Mirna anoche, entonces o Mercedes es la asesina o Mirna estaba fuera de la ciudad. Si Mercedes no fue la asesina, entonces Mirna no se encontró con Mercedes anoche y el asesinato ocurrió en un hotel. Si el asesinato ocurrió en un hotel, entonces o Mercedes fue la asesina o Mirna estaba fuera de la ciudad. Pero Mercedes se encontró con Mirna anoche y Mirna no estaba fuera de la ciudad. Por lo tanto, Mercedes fue la asesina.