CAPITULO

2 CÁLCULO DE PREDICADOS

Los humanos tienden a confundir la fuerza de su sentimiento con la fuerza de su argumento. La mente exacerbada resiente siempre el frío tacto y el implacable escrutinio de la lógica.
-William Gladstone

Existen muchos tipos de sentencias tanto en el lenguaje matemático como en el común que no pueden ser representadas usando el cálculo proposicional. Además del factor externo de tener que enlazar proposiciones a través de conectivos lógicos, existe un factor interno en proposiciones que contienen palabras como "todos" o "algunos" que requiere un análisis lógico más allá del posible con el cálculo proposicional, como lo muestra el siguiente famoso argumento:

Todos los hombres son mortales
Sócrates es un hombre
Por lo tanto, Sócrates es mortal

Es posible expresar este argumento como tres proposiciones simples:

p: *Todos los hombres son mortales*
q: *Sócrates es un hombre*
r: *Sócrates es mortal*

pero dicho argumento tendría la forma:

$$\begin{array}{ll} & p \\ & q \\ \hline \therefore & r \end{array}$$

el cual no es un argumento válido dentro del cálculo proposicional. Es claro que en este caso el problema es tomar las oraciones como proposiciones simples. Sin embargo, escribirlas como proposiciones compuestas tampoco resuelve el problema. Por ejemplo, podríamos intentar utilizar la regla transitiva para formar el argumento:

$$\begin{array}{ll} & \text{Algo es un hombre} \rightarrow \text{Es mortal} \\ & \text{Alguien es Sócrates} \rightarrow \text{Es hombre} \\ \hline \therefore & \text{Algo es Sócrates} \rightarrow \text{Es mortal} \end{array}$$

Aún cuando el ejemplo anterior parece convincente, "Algo es un hombre" y "Es mortal", aunque son sentencias válidas en Español, no son proposiciones. Lo mismo puede decirse para el resto de sentencias en el argumento. De hecho, sin importar cómo intentemos reescribir el argumento en el cálculo proposicional, siempre encontraremos alguna dificultad técnica como la anterior.

Para poder expresar correctamente el argumento anterior, necesitamos ir más allá del cálculo proposicional y entrar al cálculo de predicados, que nos permite manipular sentencias sobre todas o algunas cosas. Este es el tema del presente capítulo.

2.1 Predicados y Cuantificadores

Normalmente encontramos expresiones como "ella es médico" o "$x^2+2x+1=0$", conocidas como *predicados*, *funciones proposicionales* o *sentencias abiertas*, que contienen una o más *variables* o *incógnitas*. Estas incógnitas pueden ser símbolos matemáticos que representan números o alguna otra entidad matemática, o pueden ser palabras del lenguaje cotidiano como el pronombre "ella" o cualquier otra palabra con significado variable, como "ayer" o "mañana". Un predicado no es una proposición ya que no es verdadero ni falso. Sin embargo, los predicados están relacionados con las proposiciones y la notación que utilizaremos para representarlos (por ejemplo, $p(x)$ o $q(x)$) refleja esto. De hecho, existen dos procedimientos estándar que nos permiten convertir a un predicado en una proposición: la sustitución y la cuantificación.

La sentencia $p(x) : x > 4$ es un ejemplo de predicado con una variable. Por sí mismo no podemos asignarle un valor de verdad, pero si sustituimos a x por 10, obtenemos $p(10) : 10 > 4$, lo cual es claramente verdadero. Si sustituimos a x por 2, obtenemos $p(2) : 2 > 4$, lo cual es falso. En ambos casos, la sentencia resultante es una proposición.

Es de notar que no todas las sustituciones de objetos específicos por variables convierten a los predicados en proposiciones. Por ejemplo, si sustituimos a x del ejemplo anterior por el número complejo $2+3i$, tendremos una sentencia sin sentido: $2+3i > 4$. Esto ocurriría más dramáticamente si sustituyeramos a x por "Juan Perez". Esto deja ver que cuando se especifica un predicado, es necesario también especificar la colección de objetos de la cual se pueden tomar los valores de las variables del predicado. En el caso de $p(x)$ del ejemplo anterior, es necesario especificar que x debe ser un número real. A esta colección la llamaremos el *dominio del discurso* de la variable x del predicado.

La segunda forma de obtener una proposición a partir de un predicado es utilizar frases como "para todo" o "alguno" para describir cuándo el predicado debería ser verdadero.

En matemática, frecuentemente se encuentran frases existenciales como "la ecuación $x^2+2x+1=0$ tiene una raíz real". La naturaleza existencial de esta frase puede hacerse más explícita reescribiéndola de la forma "*existe* un número real x tal que $x^2+2x+1=0$". De la misma forma, "$\sqrt{2}$ es racional" expresa una afirmación existencial, que aunque en la superficie no parece serlo, puede hacerse explícita al escribirla como "*existen* números enteros positivos p y q tal que $\sqrt{2}=p/q$"[1]. La primera sentencia es verdadera (tome $x=-1$), mientras que la segunda es falsa, como demostraremos más adelante. Usaremos la simbología $\exists x$ para denotar "existe un x tal que ... ", por lo que los ejemplos anteriores pueden ser escritos como:

$$\exists x(x^2+2x+1=0)$$
$$\exists p \exists q(\sqrt{2}=p/q)$$

respectivamente. Sin embargo, el problema con esta notación es que se asume experiencia o conocimiento del contexto por parte del lector para determinar que x debe ser un número

[1] La definición general de un número irracional dice que p y q pueden ser cualquier entero siempre y cuando $q \neq 0$, pero ya que $\sqrt{2}$ es un número real positivo, la definición dada es suficiente.

real y que p y q deben ser números enteros positivos. Como vimos en la sección anterior, se hace necesario, entonces, definir el *dominio de discurso* de las variables en las sentencias anteriores. Por ejemplo, si utilizamos el símbolo $\mathbb{R}$ para representar a los números reales, podemos escribir $(\exists x \in \mathbb{R})$ para representar "existe un número real tal que..."[2]. Por lo tanto, para expresar que la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ tiene una raíz real escribimos

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 + 2x + 1 = 0)$$

Al símbolo $\exists$ se le llama el *cuantificador existencial*.

De la misma forma, si utilizamos la notación $\mathbb{N}$ para representar a los enteros positivos (es decir, $1, 2, 3, 4 \ldots$), también llamados los números *naturales*, podemos escribir "$\sqrt{2}$ es irracional" como

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(\sqrt{2} = n/m)$$

Así como en ocasiones es necesario especificar que ciertos objetos existen, frecuentemente es necesario expresar que un predicado es cierto *para todo* x. Utilizamos la simbología $\forall x$ para representar a "para todo x es cierto que ...". Nuevamente, es posible especificar el tipo de objeto que x puede ser. Por ejemplo, para decir que $\sqrt{2}$ es irracional escribimos

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(\sqrt{2} \neq n/m)$$

A $\forall$ se le llama el *cuantificador universal*.

Note que en todos los ejemplos anteriores se encuentran algunos predicados implícitos: $p(x) : x^2 + 2x + 1 = 0$, $q(n, m) : \sqrt{2} = n/m$ y $r(n, m) : \sqrt{2} \neq n/m$. Es posible, por lo tanto, reescribir los ejemplos como

- $(\exists x \in \mathbb{R})(p(x))$
- $(\exists n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(q(n, m))$
- $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(r(n, m))$

respectivamente.

2.2 Traducción del lenguaje natural

Existen muchas posibles traducciones al Español de los predicados cuantificados. Ya que a menudo necesitará escribir sentencias en Español en forma simbólica, es necesario que se familiarice con estas traducciones, algunas de las cuales únicamente incluyen implícitamente a las frases "para todo" y "existe".

Considere el predicado $x^2 = 4$. Literalmente, $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = 4)$ se lee "para todo x en los reales, x al cuadrado es igual a cuatro". Sin embargo, puede también tener las siguientes lecturas:

[2]"$x \in \mathbb{R}$" significa "x es un elemento de $\mathbb{R}$". Vea el capítulo 3 para una discusión sobre la teoría de conjuntos.

- Para todo número real x, $x^2 = 4$.
- *Cada* número real tiene a 4 como su cuadrado.

Note que en esta última traducción no decimos explícitamente "para todo" ni utilizamos la variable x. De la misma manera, $(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 = 4)$, que literalmente se lee "existe un número real x tal que x al cuadrado es igual a 4", puede tener las siguientes lecturas:

- Existe un número real x *para el cual* $x^2 = 4$.
- Existe un número real x *cuyo* cuadrado es 4.
- *Algún* número real tiene a 4 como su cuadrado.

El problema de traducir correctamente predicados cuantificados se vuelve más complejo cuando tratamos de referirnos a un *subdominio* de las variables del predicado. Esto

Nota Histórica

La lógica tradicional, que fue la lógica dominante hasta el advenimiento del cálculo de predicados a finales del siglo XIX, comenzó a utilizar *todos*, *alguno* y *no* a partir de Aristóteles (ver pág. 3) en el siglo I A.C.

Gottlob Frege (ver pág. 43), en su *Begriffsschrift* de 1879, fue el primero en utilizar un cuantificador para que las variables en un predicado se tomen sobre un dominio específico. Él cuantificaba universalmente las variables al ubicarlas sobre un pequeño rizo en las líneas rectas de sus fórmulas diagramáticas. Frege no utilizó una notación explícita para el cuantificador existencial. El tratamiento de los cuantificadores fue prácticamente ignorado hasta el *Principia Mathematica* de 1903 de Bertrand Russell (ver pág. **??**).

En trabajos que fueron coronados en 1885, Charles Sanders Peirce (ver pág. 24) y su estudiante O. H. Mitchell independientemente inventaron los cuantificadores existencial y universal. Peirce y Mitchell utilizaron $\sqcap_x$ y Σ_x donde ahora escribimos $\forall x$ y $\exists x$. La notación de Peirce puede encontrase en los escritos de Ernst Schroder, Leopold Loewenheim, Thoralf Skolem, y lógicos polacos hasta la década de 1950. Más notablemente, es la notación que Kurt Göedel utilizó en su principal publicación de 1930 sobre la completitud de la lógica de primer orden, y su publicación de 1931 sobre la incompletitud de la aritmética de Peano.

Los cuantificadores de Peirce también influenciaron a William Ernst Johnson y Giuseppe Peano, que inventaron incluso otra notación, (x), para el cuantificador universal sobre x y, en 1897, $\exists x$ para el cuantificador existencial sobre x. Es por esto que, por décadas, la notación canónica en filosofía y lógica matemática fue $(x)p$ para indicar que "todos los individuos en el dominio de x tienen la propiedad p", y "$(\exists x)p$" para "existe al menos un individuo en el dominio de x que tiene la propiedad p". Peano, que era mucho más conocido que Peirce, en efecto diseminó el pensamiento de este último a través de Europa. La notación de Peano fue adoptada en el *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, Quine, y Alonzo Church. En 1935, Gentzen introdujo el símbolo $\forall$, en analogía con el símbolo $\exists$ de Peano. $\forall$ no se convirtió en un estándar sino hasta la década de 1960.

se muestra en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 2.1
Analice la forma lógica de la proposición “todos los números naturales múltiplos de 10 terminan en cero”.
Solución. En este caso estamos hablando de una colección limitada de los números naturales: aquellos que son múltiplos de 10. Si representamos como D a la colección de estos números y $r(x)$ es el predicado “el número natural x termina en cero”, entonces podríamos escribir la proposición anterior como:

$$(\forall x \in D)(r(x))$$

Sin embargo, una forma más natural de expresar lo anterior sería utilizar como dominio a los naturales (en lugar de los múltiplos de 10) e introducir el predicado “$d(x)$: el número natural x es múltiplo de 10”. Lo que la proposición quiere expresar es que un número natural termina en cero *si* es múltiplo de 10, lo cual sugiere la utilización del condicional. De esta manera, podemos escribir

$$(\forall x \in \mathbb{N})(d(x) \to r(x))$$

que se lee “para todo número natural, si x es múltiplo de 10, entonces x termina en cero”, que es precisamente lo que la proposición a traducir quería expresar.

Una confusión común es tratar de escribir esta proposición utilizando una conjunción en lugar de una implicación:

$$(\forall x \in \mathbb{N})(d(x) \wedge r(x))$$

Sin embargo, lo anterior es leido como “todo número natural es múltiplo de 10 y termina en cero”, lo cual es claro que no es lo que se tenía en mente.

□

EJEMPLO 2.2
Analice la forma lógica de la proposición “algunos números naturales múltiplos de 10 son múltiplos de 3”.
Solución. Note que la proposición nos dice que existen números que son múltiplos de 10 *y* múltiplos de 3 al mismo tiempo. Si definimos a los predicados “$d(x)$: el número natural x es múltiplo de 10” y “$s(x)$: el número natural x es múltiplo de 3”, entonces la proposición dada se escribe como:

$$(\exists x \in \mathbb{N})(d(x) \wedge s(x))$$

Note que esta proposición, además de expresar “algunos números naturales múltiplos de 10 son múltiplos de 3”, puede interpretarse literalmente como “existe un número natural múltiplo de 10 divisible por 3” o “existe un número natural múltiplo de 3 divisible por 10”.

□

Una conclusión importante que debe hacerse a partir de los ejemplos anteriores es que proposiciones como "todos los hombres son mortales" se simbolizan lógicamente utilizando el cuantificador universal junto al conectivo condicional. Si $h(x)$ representa al predicado "x es un hombre" y $m(x)$ representa a "x es mortal", entonces "todos los hombres son mortales" se simboliza como $\forall x(h(x) \rightarrow m(x))$. Además, expresiones existenciales como "algunos hombres son mortales" se simbolizan utilizando el cuantificador existencial junto con la conjunción. Así, "algunos hombres son mortales" se simboliza como $\exists x(h(x) \wedge m(x))$.[3] De igual manera, "algunos hombres no son mortales" se representa como $\exists x(h(x) \wedge \neg m(x))$.[4]

Los siguientes ejemplos muestran otras traducciones de proposiciones con cuantificadores desde el lenguaje natural. En todos ellos, asuma que el dominio de los predicados es la colección de todas las personas.

EJEMPLO 2.3

Analice la forma lógica de la proposición "alguien no hizo la tarea".

Solución. La palabra "alguien" sugiere el uso del cuantificador existencial. Como primer paso escribimos $\exists x$ (x no hizo la tarea). Ahora, si representamos al predicado "x hizo la tarea" por $t(x)$, entonces podemos reescribir la proposición como $\exists x[\neg t(x)]$. □

EJEMPLO 2.4

Analice la forma lógica de la proposición "todos en la clase de lógica son de nuevo ingreso o cursan la materia por segunda vez".

Solución. Piense en la proposición como "si alguien está en la clase de lógica, entonces es de nuevo ingreso o cursa la materia por segunda vez", sin importar quién es ese *alguien*. Por lo tanto, comenzamos escribiendo $\forall x$ (si x está en la clase de lógica, entonces x es de nuevo ingreso o x cursa la materia por segunda vez). Para escribir la parte entre paréntesis simbólicamente, podemos usar $l(x)$ para representar "x está en la clase de lógica", $n(x)$ para "x es de nuevo ingreso", $s(x)$ para "x cursa la materia por segunda vez". En este caso, nuestra expresión final sería $\forall x[l(x) \rightarrow (n(x) \vee s(x))]$.

Note que como en el ejemplo 1, esta proposición tiene la forma de un cuantificador universal aplicado a una proposición condicional. Podemos comprobar la respuesta a este problema usando la tabla de verdad del conectivo condicional. La única forma en que la expresión $l(x) \rightarrow (n(x) \vee s(x))$ puede ser falsa es si x está en la clase de lógica, pero ni es de nuevo ingreso ni cursa la materia por segunda vez. En otras palabras, decir que dicha expresión es verdadera para todos los valores de x significa que lo anterior nunca sucede, que es exactamente lo mismo que decir que todos en la clase de lógica son de nuevo ingreso o cursan la materia por segunda vez. □

EJEMPLO 2.5

Analice la forma lógica de la proposición "a Susana le agrada toda persona a quien no le

[3] Note que esta expresión también puede leerse como "algunos mortales son hombres".

[4] ¿Puede encontrar alguna relación entre las proposiciones "todos los hombres son mortales" y "algunos hombres no son mortales"?

agrada José".
Solución. Como en el ejemplo anterior, podemos pensar en esta proposición como "si a una persona no le agrada José, entonces a Susana le agrada esa persona", sin importar quién es *esa persona*. Por lo tanto, podemos comenzar reescribiendo la proposición como $\forall x$(si a x no le agrada José, entonces a Susana le agrada x). Sea $g(x, y)$ el predicado "a x le agrada y". En proposiciones que hablan de objetos específicos del dominio, es conveniente usar letras para representar a esos objetos específicos. En este caso, podemos representar a Susana por la letra s y a José por la letra j, por lo que $g(s, x)$ representaría "a Susana le agrada x" y $\neg g(x, j)$ representaría "a x no le agrada José". Sustituyendo esto en la expresión tenemos

$$\forall x(\neg g(x, j) \rightarrow g(s, x))$$

□

Aunque en los ejemplos de esta sección se han utilizado proposiciones con un solo cuantificador, en la sección anterior encontramos ejemplos en los que más de un cuantificador es necesario. Los siguientes ejemplos muestran la traducción de proposiciones con más de un cuantificador. Como en los ejemplos anteriores, asuma que el dominio de los predicados es la colección de todas las personas.

EJEMPLO 2.6
Analice la forma lógica de la proposición "algunos estudiantes de la UES están casados".
Solución. La palabra "algunos" indica que la proposición debería ser escrita con un cuantificador existencial, así que podríamos reescribirla como $\exists x$(x es un estudiante de la UES y x está casado). Sea $u(x)$ el predicado "x es un estudiante de la UES". Similarmente, podríamos seleccionar una representación para "x está casado", pero un mejor análisis reconocería que estar casado significa estar casado *con alguien*. Por lo tanto, si $c(x, y)$ representa a "x está casado con y", entonces podemos escribir que x está casado como $\exists y(c(x, y))$. Por lo tanto, podemos representar la proposición completa como

$$\exists x \exists y[u(x) \wedge c(x, y)]$$

□

EJEMPLO 2.7
Analice la forma lógica de la proposición "todos los alumnos de la UES tienen un compañero que no les agrada".
Solución. Esto dice lo mismo que $\forall x$(si x es un alumno de la UES, entonces x tiene un compañero que no le agrada). Para decir que x tiene un compañero que no le agrada, podríamos escribir $\exists y$(x es compañero de y y a x no le agrada y). Si usamos a $c(x, y)$ para representar a "x es un compañero de y" y a $g(x, y)$ para representar "a x le agrada y", entonces esto se convierte en $\exists y(c(x, y) \wedge \neg g(x, y))$. Finalmente, si usamos a $u(x)$ para representar "x estudia en la UES", entontonces el análisis completo de la proposición original sería:

$$\forall x \exists y(u(x) \rightarrow [c(x, y) \wedge \neg g(x, y)])$$

$\square$

En su carrera matemática, no solamente será necesario traducir del lenguaje natural al lenguaje matemático, sino que tendrá que poder interpretar el lenguaje matemático. Cuando una proposición contiene más de un cuantificador es algunas veces dificil encontrar su significado. En esos casos, es mejor pensar en los cuantificadores uno a la vez, en el orden en que aparecen. Por ejemplo, considere la proposición $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 5)$. Pensando primero en el primer cuantificador $\forall x$, vemos que la proposición significa que para todo número real x, se cumple que $(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 5)$. Luego vemos que para que se cumpla esta última proposición, debería existir un y en los reales tal que $x + y = 5$. En otras palabras, a todo número real podemos sumarle algún otro real tal que la suma da como resultado 5. Sabemos que esto es verdadero ya que para cualquier x, $y = 5 - x$ cumple con esta condición.

Los siguientes ejemplos muestran más traducciones del lenguaje matemático al lenguaje natural.

EJEMPLO 2.8
Analice la forma lógica de las siguientes proposiciones:

a) $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(x < y)$
b) $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})(x < y)$
c) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(x < y)$
d) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})(x < y)$
e) $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})(x < y)$
f) $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(x < y)$

Solución

a) Esto nos dice que para cualquier número natural x, la proposición $(\exists y \in \mathbb{N})(x < y)$ es verdadera. En otras palabras, para todo número natural x, existe un número natural mayor que x. Esta proposición es verdadera ya que, por ejemplo, $x+1$ es siempre mayor que x.
b) Esto significa que para algún número natural x la proposición $(\forall x \in \mathbb{N})(x < y)$ es verdadera. Es decir, existe un número natural y tal que todos los números naturales son menores que y. Esto es falso ya que no importa qué número natural y seleccionemos, siempre habrá un número natural mayor, como $y + 1$.
c) Esto nos dice que existe un número natural x tal que la proposición $(\forall y \in \mathbb{N})(x < y)$ es verdadera. Es decir, existe un número natural que es menor que todos los números naturales. Aunque a primera vista esta proposición es veradera cuando $x = 1$. Como 1 es el menor número natural, la proposición $1 < y$ es verdadera para todos los valores de y excepto cuando $y = 1$, en cuyo caso $1 < 1$ es falso y, por lo tanto, $(\forall y \in \mathbb{N})(1 < y)$ es falso, por lo que la proposición completa es falsa.
d) Esta proposición significa que para todo número natural y, hay un número natural menor que y. Esto es verdadero para cada natural y excepto $y = 1$. Ya que no existe un

número natural menor que 1, la proposición es falsa.

e) Esto nos dice que existe un número natural x que es menor que algún otro número natural. Ya que 2 y 3 son números naturales y $2 < 3$, la proposición es verdadera.

f) Esto significa que todo número natural x es menor que todo número natural. Pero como vimos en el literal (c), no existe algún valor de x para el cual esto sea cierto, así que esta proposición debe ser falsa.

□

Es importante notar que cuando hablamos de dos objetos x e y, no debemos descartar la posibilidad que x e y representen al mismo objeto. Por ejemplo, si $g(x, y)$ representa "a x le agrada y" y $a(x, y)$ representa "x admira a y", la expresión

$$\forall x \forall y (g(x, y) \to a(x, y))$$

no sólo significa que una persona a quien le agrada otra persona admira a esa otra persona, sino también que las personas que se agradan a sí mismas también se admiran a sí mismas. Como otro ejemplo, considere la proposición "a todos les agradan al menos dos personas". Si utilizamos $a(x, y)$ como en el ejemplo anterior, podríamos realizar un primer intento escribiendo la forma lógica de esta proposición como

$$\forall x \exists y \exists z (a(x, y) \land a(x, z))$$

pero para decir que para todo x, a x le agradan dos personas, debemos decir que existen dos personas *diferentes* que le agradan a x, y en la proposición anterior puede darse el caso que $y = z$. Para expresar la proposición correctamente, debemos hacer explícito el hecho que z e y deben ser diferentes:

$$\forall x \exists y \exists z (a(x, y) \land a(x, z) \land y \neq z)$$

Existencia Única

Un último cuantificador comúnmente utilizado es $\exists!$, que expresa "existe un único x tal que...". Una proposición de la forma $(\exists! x)[p(x)]$ puede ser pensada como una forma compacta de expresar:

$$\exists x \forall y [p(x) \land (p(y) \to x = y)]$$

Ejercicios

1. Simbolice las siguientes proposiciones utilizando el cuantificador existencial:

   a) La ecuación $x^5 = 32$ tiene solución en los enteros naturales.
   b) 10^{10} no es el mayor número natural.
   c) Hay números naturales que no son primos.

2. Simbolice las siguientes proposiciones utilizando el cuantificador universal:

   a) La ecuación $x^5 = 33$ no tiene solución en los enteros naturales.
   b) 0 es menor que todos los números naturales.
   c) Todos los números naturales son primos.

3. Analice la forma lógica de las siguientes proposiciones utilizando como dominio a la colección de todos los humanos.

   a) Todos son altos o todos son bajos.
   b) Todos son altos o bajos.
   c) Alguien es más alto que todos.
   d) Nadie es perfecto.
   e) Todos tienen una madre biológica.
   f) A nadie le gustan los mentirosos.
   g) Nadie en la clase de cálculo es mayor que todos los de la clase de matemática discreta.
   h) Guadalupe vió a un ladrón y Rogelio vió también a un ladrón.
   i) Guadalupe vió a un ladrón y Rogelio vió al mismo ladrón.
   j) Si Carlos aprobó el examen, todos pueden aprobarlo.
   k) A todos les agrada María, excepto a María.

4. Considere los siguientes predicados con dominio sobre todos los humanos:

$$
\begin{aligned}
p(x) &: x \text{ es joven} \\
q(x) &: x \text{ es hombre} \\
r(x) &: x \text{ es alumno}
\end{aligned}
$$

   Analice las forma lógica de las siguientes proposiciones:

   a) Todos los alumnos son jóvenes.
   b) Algunos alumnos no son jóvenes.
   c) No todos los jóvenes son alumnos.
   d) Ningún joven es alumno.
   e) Todos los jóvenes no son alumnos.
   f) Algunos jóvenes no son alunos.
   g) Algunos alumnos son hombres jóvenes.
   h) Todos los hombres jóvenes son alumnos.
   i) Todos los alumnos son mujeres jóvenes.
   j) Algunos alumnos son hombres y no son jóvenes.
   k) Algunos hombres jóvenes no son alumnos.
   l) Todos los alumnos son mujeres o están jóvenes.

5. Sea $e(x)$ el predicado "x es estudiante", $p(x)$ el predicado "x es profesor" y $r(x, y)$ el predicado "x le ha hecho una pregunta a y", donde el universo del discurso es la colección de todos las personas asociadas con la Universidad de El Salvador. Analice la forma lógica de las siguientes proposiciones:

   a) Gabriela le hizo una pregunta al profesor Salvador.
   b) Todo estudiante le ha hecho una pregunta al profesor Pedro.
   c) Algún estudiante no ha hecho pregunta alguna a algún profesor.
   d) Hay un profesor al que ningún estudiante le ha hecho una pregunta.
   e) Algún estudiante le ha hecho preguntas a todos los profesores.
   f) Hay un profesor que le ha hecho pregun-

tas a todos los demás profesores.

g) Algún estudiante nunca ha recibido una pregunta por algún profesor.

6. Analice la forma lógica de las siguientes proposiciones utilizando a $a(x, y)$ como el predicado "x ama a y" con dominio del discurso de x e y a la colección de todos los humanos.

   a) Todos aman a Juan.
   b) Todos aman a alguien.
   c) Hay alguien a quien todos aman.
   d) Nadie ama a todos.
   e) Todos son amados por alguien.
   f) Hay alguien a quien Lorena no ama.
   g) Hay alguien a quien nadie ama.
   h) Hay exactamente una persona amada por todos.
   i) Todos se aman a sí mismos.
   j) Nadie se ama a sí mismo.
   k) Hay alguien que no ama si no es a sí mismo.
   l) Hay alguien que ama exactamente a una persona además de sí mismo.
   m) Hay exactamente dos personas a quien Lorena ama.

7. Traduzca las siguientes proposiciones al Español y determine su valor de verdad, siendo $p(x, y)$: "x es padre de y" con dominio sobre todos los humanos.

   a) $\forall x \exists y[p(x, y)]$
   b) $\exists x \forall y[p(x, y)]$
   c) $\exists x \exists y[\neg p(x, y)]$

8. Traduzca las siguientes proposiciones al Español, siendo $a(x, y)$: "a x le agrada y", donde el dominio del discurso de x y y es la colección de todos los humanos.

   a) $\forall x \forall y[a(x, y)]$
   b) $\exists x \exists y[a(x, y)]$
   c) $\forall x \exists y[a(x, y) \wedge \neg a(x, y)]$
   d) $\exists x \forall y[a(x, y)]$
   e) $\exists y \forall x[a(x, y)]$
   f) $\forall x \exists y[a(x, y)]$
   g) $\forall x[a(x, x)]$
   h) $\forall x \exists y \forall z[a(y, z) \rightarrow a(x, z)]$

9. Traduzca las siguientes proposiciones al Español.

   a) $(\forall x \in \mathbb{N})[(p(x) \wedge \neg(x = 2)) \rightarrow m(x)]$, donde $p(x)$ simboliza a "x es un número primo" y $m(x)$ representa a "x es impar".
   b) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})[p(x) \wedge (p(y) \rightarrow y \leq x)]$, donde $p(x)$ simboliza a "x es un número primo".

10. Dados dos elementos m y n en los naturales, decimos que m divide a n si y sólo si existe un número p en los naturales tal que $n = mp$. Sea $d(m, n)$ el predicado "m divide a n". Traduzca cada una de las siguientes proposiciones al Español y determine su valor de verdad:

    a) $d(5, 7)$
    b) $d(4, 16)$
    c) $d(16, 4)$
    d) $d(1, 7)$
    e) $d(12, 16)$
    f) $\forall m[d(m, m)]$
    g) $\forall n[d(1, n)]$
    h) $\forall m[d(m, 0)]$
    i) $\forall m \exists n[d(m, n)]$
    j) $\exists n \forall m[d(m, n)]$
    k) $\forall n \exists m[d(m, n)]$
    l) $\exists m \forall n[d(m, n)]$
    m) $\forall m \forall n[d(m, n) \rightarrow d(n, m)]$
    n) $\forall m \forall n[d(m, n) \rightarrow n > m]$
    ñ) $\forall m \forall n \forall p[d(m, n) \wedge d(n, p) \rightarrow d(m, p)]$
    o) $\forall m \forall n[d(m, n) \wedge d(n, m) \rightarrow m = n]$

11. Siendo el dominio del discurso los números reales, traduzca cada una de las siguientes proposiciones al Español y determine su valor de verdad.

    a) $\exists x(x^2 = 5)$
    b) $\exists x(x^2 = -1)$

c) $\forall x \exists y (xy = x)$
d) $\exists x \forall y (xy = x)$
e) $\forall x \exists y (xy = 1)$
f) $\exists x \forall y (xy = 0)$
g) $\exists x \exists y (x + y \neq y + x)$
h) $\forall x \exists y (x + y = 0)$
i) $\forall x \exists y (x \neq 0 \to xy = 1)$
j) $\exists y \forall x (x \neq 0 \to xy = 1)$
k) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists m \in \mathbb{N})(m > x)$
l) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(n \leq |x| < n + 1)$
m) $\exists! x (x > 1)$
n) $\exists! x (x^2 = 1)$
ñ) $\exists! x (x + 3 = 2x)$
o) $\exists! x (x = x + 1)$
p) $\forall x (\exists! n \in \mathbb{N})(n \leq |x| < n + 1)$

2.3 Propiedades de los cuantificadores

Muchas proposiciones en matemática requieren una combinación del cuantificador universal con el existencial. Por ejemplo, para expresar que no existe un número entero positivo que sea mayor que todos los demás, escribimos:

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})(n > m)$$

que se lee "para todo entero positivo m es cierto que existe un entero positivo n tal que n es mayor que m". Note que el orden en el que aparecen los cuantificadores puede tener extrema importancia. Por ejemplo, si cambiamos el orden en el ejemplo anterior obtenemos

$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(n > m)$$

que dice que existe un número entero positivo que es mayor que todos los enteros positivos, lo cual es claramente falso.

Note, sin embargo, que si los cuantificadores son ambos del mismo tipo (ambos son $\forall$ o ambos $\exists$), entonces es posible cambiar el orden sin afectar el significado de la expresión. Por ejemplo, considere la proposición "alguien tiene profesor más joven que él". Para escribir esto simbólicamente, primero escribimos $\exists x$(x tiene un profesor más joven que x). Para decir "x tiene un profesor más joven que x utilizamos $p(y, x)$ para representar a "y es profesor de x" y a $j(y, x)$ para representar a "y es más joven que x", obteniendo la expresión $\exists y (p(y, x) \wedge j(y, x))$. Sustituyendo esta última expresión en la primera, la proposición original será representada como

$$\exists x \exists y (p(y, x) \wedge j(y, x))$$

pero si cambiamos el orden de los cuantificadores para obtener

$$\exists y \exists x (p(y, x) \wedge j(y, x))$$

tendremos una expresión que se lee "existe una persona y tal que y es profesor de alguien que es mayor que y". En otras palabras, alguien es profesor de alguien mayor que el.

Pero esto será verdadero en exactamente las mismas circunstancias en que la proposición original es verdadera. Ambos significan que hay personas x e y tal que y es un profesor de x y y es más joven que x.

De la misma manera, dos cuantificadores universales en una proposición pueden ser intercambiadas sin cambiar el significado de la expresión. Por ejemplo, considere la expresión

$$\forall x \forall y (g(x, y) \rightarrow a(x, y))$$

donde $g(x, y)$ representa "a x le agrada y" y $a(x, y)$ representa "x admira a y", produciendo la proposición "para toda persona x e y, si a x le agrada y, entonces x admira a y". En otras palabras, "todas las personas admiran a quienes les agradan". La expresión

$$\forall y \forall x (g(x, y) \rightarrow a(x, y))$$

significa exactamente lo mismo.

Al escribir una proposición donde se tiene una conjunción o una negación de predicados, es tentador utilizar algún tipo de ley distributiva para "escribir el cuantificador dentro del paréntesis". Por ejemplo, para escribir la proposición verdadera "todo número natural es par o impar", podemos representar a $p(n)$: "n es un número par" e $i(n)$: "n es un número impar" para obtener

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \vee i(n))$$

Pero es importante notar la diferencia entre la representación anterior y la siguiente:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n)) \vee (\forall n \in \mathbb{N})(i(n))$$

que nos dice que o todos los números naturales son pares o todos son impares, lo cual es falso. En el primer caso tenemos a una proposición que nos dice que una disyunción siempre debería ser verdadera. En el segundo caso tenemos a dos proposiciones unidas por una disyunción y el valor de verdad de esta proposición compuesta, como hemos visto anteriormente, depende de los valores de verdad de las proposiciones individuales $(\forall n \in \mathbb{N})(p(n))$ y $(\forall n \in \mathbb{N})(i(n))$ de acuerdo a la definición de la disyunción. Esto muestra que, en general, no puede "moverse el $\forall x$ dentro del paréntesis" si el conectivo principal es una disyunción ya que puede terminar con una expresión muy diferente a la original.

De la misma manera, la proposición

$$(\exists n \in \mathbb{N})(p(n) \wedge i(n))$$

que dice que existe un número natural que es al mismo tiempo par e impar, es falsa, pero la proposición

$$(\exists n \in \mathbb{N})(p(n)) \wedge (\exists n \in \mathbb{N})(i(n))$$

que nos dice que existe algún número natural par y que existe algún número natural impar, es verdadera. Por lo tanto, en general tampoco es válido "mover a $\exists x$ dentro del paréntesis" si el conectivo principal es una conjunción, ya que puede llevar a una proposición diferente de la original.

Sin embargo, considere la proposición “todos tienen un padre y una madre biológica”. Si usamos $m(x)$ para representar a “x tiene una madre biológica” y $p(x)$ para representar a “x tiene un padre biológico”, entonces podemos representar a la proposición anterior como

$$\forall x(p(x) \wedge m(x))$$

pero también podría ser escrita como

$$\forall x(p(x)) \wedge \forall x(m(x))$$

que literalmente se lee “todos tienen un padre biológico y todos tienen una madre biológica”, que intuitivamente significa lo mismo que la proposición original. De hecho, decir que todas las x cumplen con dos propiedades ($p(x)$ y $m(x)$ en este caso), es lo mismo que decir que todas las x cumplen con una de ellas (por ejemplo, $p(x)$) *y* que todas ellas cumplen con la otra (por ejemplo, $m(x)$). Por lo tanto, cuando se tiene el cuantificador universal sobre una conjunción, es posible distribuir el cuantificador sobre cada uno de los predicados en conjunción. En otras palabras, es posible “mover el $\forall x$ dentro del paréntesis” cuando la operación principal del predicado al que modifica es una conjunción.

De la misma manera es posible distribuir al cuantificador existencial sobre la disyunción. Es decir, $\exists x[p(x) \vee m(x)]$ es lógicamente equivalente a $\exists x[p(x)] \vee \exists x[m(x)]$ (ver ejercicio 6).

2.3.1. Negación de Proposiciones con Cuantificadores

En general, si queremos negar una proposición cualquiera únicamente es necesario poner un símbolo de negación enfrente de ella. Sin embargo, como mencionamos al analizar las formas lógicas de sentencias en Español en el capítulo anterior, es más deseable tener una aserción positiva que una negativa. En otras palabras, la proposición debería no contener negaciones, pero si son necesarias, no deberían ser el conectivo principal de la proposición.

Por ejemplo, considere el predicado $p(x)$: “$x^2 > 0$” con dominio en los números reales. En este caso, para simbolizar que el cuadrado de todo número real es mayor que 0, escribimos

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 0)$$

Suponga ahora que queremos expresar la negación de lo anterior. Es decir, que se cumple que

$$\neg[(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 0)]$$

Pero si es el caso que “no todos los números tienen un cuadrado mayor que cero”, entonces debería existir al menos un número real cuyo cuadrado no es mayor que cero. Es decir,

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\neg(x^2 > 0))$$

o equivalentemente

$$(\exists x \in \mathbb{R})(x^2 \leq 0)$$

Es decir, $\neg[(\forall x \in \mathbb{R})(p(x))]$ implica $(\exists x \in \mathbb{R})(\neg p(x))$.

Ahora suponga que tenemos que

$$(\exists x \in \mathbb{R})(\neg(x^2 > 0))$$

Entonces debería haber un x para el cual $p(x)$ no es cierta. Pero entonces, no puede ser

---

FRIEDRICH LUDWIG GOTTLOB FREGE fue un matemático alemán que ayudó a fundar tanto la lógica matemática como la filosofía analítica. Su trabajo tuvo una enorme influencia en la filosofía del siglo 20, especialmente en paises de habla inglesa.

Frege nació en 1848 en Wismar, Alemania. Su padre, Karl Alexander Frege, fue el director de un colegio de niñas hasta su muerte en 1866, cuando la madre de Frege, Auguste Wilhelmine Sophie Frege, asumió la dirección. Desde su infancia, Frege se encontró con las filosofías que determinarían su carrera científica. Por ejemplo, su padre escribió un libro de texto del idioma Alemán para niños de 9 a 13 años cuya primera sección trataba la estructura y lógica del lenguaje.

Frege estudió en un colegio en su ciudad natal de Wismar, graduándose a los 15 años, en la Pascua de 1869, para luego estudiar en la Universidad de Jena, donde cursó primordialmente física y matemática. En 1871, Frege continuó sus estudios en Göttingen, la universidad más importante en matemáticas de los territorios germano parlantes.

En 1873, Frege terminó su doctorado bajo la supervisión de Ernst Schering, con una tesis titulada *"Über eine geometrische Darstellung der imagiäre Gebilde in der Ebene"* (La representación Geométrica y plana de figuras imaginarias), en el que intentaba resolver problemas fundamentales de la geometría, tal como la interpretación matemática de puntos infinitamente distantes de la geometría proyectiva.

Aunque su educación y primeros trabajos fueron matemáticos, y especialmente geométricos, Frege pronto comenzó a trabajar con lógica, marcando un hito en el área con su *Begriffsschrift* de 1879, que incluía un nuevo tratamiento de las funciones y variables. Frege quería probar que las matemáticas provenían completamente de la lógica, pero al hacerlo divisó técnicas que lo llevaron mucho más allá de la lógica proposicional Aristotélica de la época. Aunque la lógica de entonces trataba a las constantes lógicas *y*, *o*, *si... entonces...*, *no*, *alguno* y *todos*, iteraciones sobre estas operaciones eran poco comprendidas; incluso la distinción entre las frases "cada niño ama a alguna niña" y "Alguna niña es amada por todos los niños" no podía ser representada. Muchas veces es remarcado que la lógica de Aristóteles no podía representar ni las más elementales inferencias de la geometría Euclídea, mientras que la "notación conceptual" de Frege podía representar inferencias con declaraciones matemáticas complejas. Por lo tanto, el análisis de conceptos lógicos y la formalización que son esenciales a la teoría de descripciones y la *Principia Mathematica* de Bertrand Russell, a los teoremas de la incompletitud de Gödel, y a la teoría de la verdad de Alfred Tarski, son dados por Frege.

En una continuación de su *Begriffsschrift*, el *Grundgesetze der Arithmetik* (2 volúmenes, 1893 y 1903), Frege intentó construir las matemáticas a partir de la aritmética y la lógica de una manera rigurosa y sin contradicciones. Cuando el segundo volumen de la obra estaba en proceso de ser impreso, Russell recalcó una paradoja en el trabajo de Frege. La paradoja, conocida como la paradoja de Russell, es la pregunta "¿acaso la clase de todas las clases que no son miembros de sí mismas es un miembro de sí misma o no?" La pregunta lleva a una contradicción que no puede ser resuelta. Frege fue forzado a admitir que el fundamento de su razonamiento era en vano. Tal y como el notó al final de su trabajo, "un científico rara vez se encontrará con algo tan poco deseable como ver los cimientos colapsar justo cuando el trabajo es terminado. Me fui puesto en esa posición por una carta del Sr. Bertrand Russell cuando el trabajo estaba listo para ir a la imprenta".

El trabajo de Frege en lógica no fue muy reconocido en su época, principalmente porque su peculiar notación diagramática no tenía antecedentes. Más aún, hasta que apareció el *Principia Mathematica* en 1910-13, la aproximación dominante a la lógica matemática era aquella de George Boole y sus descendientes, especialmente Ernst Schroeder. Sin embargo, las ideas de Frege se expandieron a traves de los escritos de su estudiante Rudolph Carnap y otros admiradores, particularmente Russell y Wittgenstein.

cierto que $p(x)$ se cumple para todo x en los reales. Simbólicamente,

$$\neg[(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 > 0)]$$

Es decir, $(\exists x \in \mathbb{R})(\neg p(x))$ implica $\neg[(\forall x \in \mathbb{R})(p(x))]$. De esta implicación y la anterior, podemos decir que $\neg[(\forall x \in \mathbb{R})(p(x))]$ es lógicamente equivalente a $(\exists x \in \mathbb{R})(\neg p(x))$. Bajo un razonamiento similar podemos también concluir que $\neg(\exists x \in \mathbb{R})(p(x))$ es lógicamente equivalente a $(\forall x \in \mathbb{R})(\neg p(x))$.

Aplicando estas equivalencias al ejemplo de "todos los hombres son mortales" de la sección anterior, que habíamos simbolizado como

$$\forall x(h(x) \to m(x))$$

donde $h(x)$ simboliza "x es hombre" y $m(x)$ simboliza "x es mortal", entonces la proposición "no todos los hombres son mortales" estaría escrita como:

$$\exists x(\neg(h(x) \to m(x)))$$

pero por álgebra proposicional sabemos que $\neg(h(x) \to m(x))$ es equivalente $(h(x) \wedge \neg m(x))$, por lo que podemos escribir lo anterior como

$$\exists x(h(x) \wedge \neg m(x))$$

que literalmente dice que "existen al menos un hombre que no es mortal".

Para aplicar estas reglas a proposiciones con más de un cuantificador, la idea principal es comenzar desde afuera hacia adentro. Esto tiene el efecto de cambiar a todas las $\forall$ por $\exists$ y todos los $\exists$ por $\forall$ y terminar negando el predicado principal de la proposición. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\neg[\forall x\exists y\forall z(p(x,y,z))] &\Leftrightarrow \exists x\neg[\exists y\forall z(p(x,y,z))]\\
&\Leftrightarrow \exists x\forall y\neg[\forall z(p(x,y,z))]\\
&\Leftrightarrow \exists x\forall y\exists z[\neg p(x,y,z)]
\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Niegue las proposiciones de los ejercicios 3, 4, 6 y 5 de la sección 2.2, representando su respuesta con una proposición positiva.
2. Los siguientes literales se refieren al ejercicio 8 de la sección 2.2:
   a) Exprese simbólicamente la negación de todos los literales.
   b) Traduzca cada una de estas negaciones al Español.
3. Niegue las siguientes proposiciones, expre-

sando su respuesta con una proposición positiva.

a) Hay alguien de nuevo ingreso que no vive en San Salvador.
b) A todos le agrada alguien, pero a nadie le agradan todos.
c) Todos los estudiantes de matemática tienen un amigo que necesita ayuda con las tareas.
d) Todos tienen un compañero a quien nadie le agrada.

4. Muestre que $\forall x[p(x) \to q(x)]$ es lógicamente equivalente a $\neg\exists x[p(x) \wedge \neg q(x)]$.
5. La proposición $\forall x \exists y[p(x, y)]$ dice, cuando es verdadera, que para todo x corresponde al menos un y para el cual $p(x, y)$ es verdadero. Exprese en sus palabras la propiedad "extra" que debe cumplirse para que $\exists y \forall x[p(x, y)]$ también sea verdadera.
6. Muestre que el cuantificador existencial se distribuye sobre la disyunción. Es decir, muestre que $\exists x[p(x) \vee q(x)]$ es equivalente a $\exists x[p(x)] \vee \exists y[q(x)]$ (puede usar el hecho, discutido en esta sección, que el cuantificador universal se distribuye sobre la conjunción).
7. Muestre que $\exists x[p(x) \to q(x)]$ es lógicamente equivalente a $\forall x[p(x)] \to \exists x[q(x)]$.
8. Muestre que $\forall x[p(x)] \wedge \exists x[q(x)]$ es lógicamente equivalente a $\forall x \exists y[p(x) \wedge q(y)]$.
9. Muestre que $\forall x[p(x)] \vee \exists x[q(x)]$ es lógicamente equivalente a $\forall x \exists y[p(x) \vee q(y)]$.