CAPITULO 1

Cálculo Proposicional

"Al contrario", continuó Tweedledee, "Si así fue, así pudo ser; si así fuera, así podría ser; pero como no es, no es. Es cuestión de lógica"
-Lewis Carroll
"Alicia a través del espejo"

Según nuestras mejores estimaciones, el lenguaje humano ha sido una manera eficiente de comunicarnos por alrededor de 100,000 años. Mucha de dicha eficiencia se debe al hecho que el significado de lo que decimos o escribimos depende tanto del contexto en el cual decimos o escribimos las cosas como del contexto en el que son escuchadas o leidas. Por ejemplo, "Invierno" representa una época del año diferente dependiendo si se encuentra en el hemisferio norte o sur, o en áreas, como la nuestra, que cuenta únicamente con dos estaciones. "Tengo hambre" significa que yo, Humberto Sermeño, tiene hambre, y tiene un significado diferente si *usted* dice las mismas palabras. Las siguientes sentencias son también ejemplos del lenguaje cotidiano:

1. "Puede comer pastel o comer sorbete".
2. "Si las vacas vuelan, entonces puede entender la teoría de la relatividad".
3. "Si puede resolver todos los problemas que se nos ocurran, entonces tendrá 10 en la materia".
4. "Todo salvadoreño tiene un sueño".

¿Qué significan *exactamente* estas sentencias? ¿Puedo comer tanto pastel como sorbete o debo elegir un solo postre? Si la segunda sentencia es cierta, ¿significa que la teoría de la relatividad es incomprensible? Si puede resolver algunos de los problemas que se nos ocurran, pero no todos, ¿tendrá 10 en la materia? ¿Puede tener 10 aún cuando no pueda resolver alguno de los problemas? ¿Implica la última sentencia que todos los salvadoreños tienen el mismo sueño o puede cada uno tener un sueño diferente?

Algo de incerteza es tolerable en la conversación normal. Desafortunadamente, cuando se necesita formular ideas de manera precisa -como en matemáticas- estas ambigüedades inherentes en el lenguaje del día a día se convierten en un problema. No es posible realizar un argumento exacto si no estamos completamente seguros de lo que significan las palabras. Es por esto que antes de comenzar nuestro estudio matemático, debemos investigar el problema de cómo hablar matemáticamente.

En este capítulo se inicia definiendo los tipos de sentencias del lenguaje natural que son útiles en el lenguaje matemático, dándole un significado preciso a palabras como "y", "o", "no", "implica" y "equivale", los cambios lógicos que estas palabras traen al unir dos o más sentencias, y los símbolos matemáticos utilizados para representarlas[1]. Finalmente, se introducirá la formalización de dichos conceptos y las propiedades inherentes en ellos en la forma del álgebra proposicional.

[1]Mucho de este trabajo fue iniciado por los Griegos hace más de 2,000 años.

1.1 Proposiciones

Coinsidere las sentencias matemáticas "$2 + 5 = 7$" y "$7 < 5$". De aritmética básica, sabemos que la primera es cierta, mientras que la segunda es falsa. Pero, ¿qué pasa con las sentencias como "$2 + 5 = 7$ *y* $7 < 5$" o "Si $2 + 5 = 7$ *entonces* $7 < 5$"? En realidad, la verdad o falsedad de estas sentencias *compuestas* depende de la falsedad o veracidad de sus componentes simples y de las características de los conectivos usados en la composición. Para comenzar a estudiar la naturaleza precisa de esta dependencia debemos primero definir dichos componentes simples o *proposiciones*. Definiremos a una *proposición* como cualquier sentencia declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo.

La designación de verdadero o falso, de los cuales sólo uno es asignable a una proposición, es llamado el *valor de verdad* de la proposición.

EJEMPLO 1.1
Las siguientes son todas proposiciones:

a) París es la capital de Canadá.
b) El 15 de abril de 2009 es un miércoles.
c) La tierra es plana.
d) $3 + 5 = 8$
e) $2^{893015674434} + 1$ es un número primo
f) Todo entero par mayor que 2 es la suma de dos números primos.[2]

Las proposiciones (a) y (c) son claramente falsas (es decir, tienen un valor de verdad de *falso*), mientras que las proposiciones (b) y (d) son verdaderas. Por otro lado, aún no es posible determinar si las proposiciones (e) y (f) son verdaderas o falsas, pero es importante entender que no es necesario saber cuál es el valor de verdad de una sentencia para poder clasificarla como proposición. Es suficiente con que sea posible en algún momento asignarle uno de los dos valores.

□

EJEMPLO 1.2
Las siguientes sentencias no son proposiciones:

a) ¿Regresamos el martes o el miércoles?
b) ¡Ayúdeme por favor!
c) $X - Y = Y - X$.
d) Esta proposición es falsa.

□

En general, las preguntas y las órdenes no son proposiciones, por lo que (a) y (b) no pueden ser clasificadas como tales. Por otra parte (c) no es proposición porque no específi-

[2] Esta es la conjetura de Goldbach, que data de 1742.

ca qué clase de objetos son X e Y. Finalmente, (d), aunque pareciera a primera vista ser una proposición, es en realidad una paradoja: Si la proposición fuera verdadera, entonces debería ser falsa; si la proposición es falsa, debería ser verdadera. En otras palabras, la sentencia toma al mismo tiempo el valor de falso y verdadero, lo que contradice la definición de proposición.

Se deben evitar frases ambiguas como las siguientes:

a) Los médicos son ricos.
b) Las matemáticas son divertidas.
c) La computación es más interesante que la matemática.

Donde el valor de verdad depende de preferencias o percepciones subjetivas. Así mismo, nótese que hay proposiciones cuyo valor de verdad depende del contexto en la que son expresadas. En términos estrictos, una sentencia como "hoy es lunes" puede no considerarse como una proposición dado que "hoy" es variable. Lo mismo puede ser dicho

---

ARISTÓTELES (384-322 AC) nació en la ciudad de Estagira, no lejos del actual monte Athos, en la Calcídica entonces perteneciente al reino de Macedonia. Su padre, Nicómaco, fue el médico personal del rey Amyntas III de Macedonia, por lo que Aristóteles fue entrenado y educado como miembro de la aristocracia.

Alrededor de los dieciocho años, viajó a Atenas para continuar su educación en la Academia de Platón, donde continuó por cerca de veinte años hasta la muerte de su mentor en 347 AC. Luego viajó a la corte del rey Hermias de Atarneos, en Asia Menor, junto a su condiscípulo Xenócrates, desposándose de Pythias, la hija (o sobrina) de Hermias. Poco después de la muerte del rey, Aristóteles fue invitado por Filipo II de Macedonia para convertirse en tutor de Alejandro Magno.

Para 335 AC, había regresado a Atenas y establecido una escuela llamada "liceo" (así llamado por estar situado dentro de un recinto dedicado a Apolo Likeios), donde educó a sus alumnos en amplios temas por los próximos doce años. Durante este período murió su esposa Pythias, por lo que se involucró con Herpyllis de Estagira. De acuerdo a la Suda, también tuvo un erómeno llamado Palaephatus de Abidos.

Es durante este período en Atenas que se cree que Aristóteles compuso muchos de sus trabajos. Escribió muchos diálogos, de los cuales sólo fragmentos han sobrevivido. Los trabajos que sobreviven se encuentran en forma de tratados y, en su mayoría, no estaban pensados para amplia publicación, ya que se piensa que serían textos de apoyo para sus estudiantes. Se cree que sólo cerca de un tercio de sus trabajos originales han sobrevivido.

Aristóteles (junto con Sócrates y Platón) es una de las figuras fundadoras más importantes de la filosofía occidental. Fue el primero en crear un sistema filosófico completo, abarcando moral y estética, lógica y ciencia, política y metafísica. Los puntos de vista de Aristóteles sobre las ciencias físicas dieron forma a las enseñanzas medievales, y su influencia se extendió hasta el Renacimiento, cuando fueron finalmente reemplazadas por la física moderna. En las ciencias biológicas, algunas de sus observaciones fueron confirmadas hasta finales del siglo XIX. Sus trabajos contienen el estudio formal más antiguo conocido sobre la lógica, lo que fue incorporado a finales del siglo XIX en la lógica formal moderna. En metafísica, Aristóteles tuvo una influencia profunda en el pensamiento filosófico y teológico de las tradiciones Islámicas y Judías en la Edad Media, y continúa influenciando la teología Cristiana, especialmente la teología ortodoxa oriental, y la tradición escolástica de la iglesia Católica Romana.

Luego de la muerte de Alejandro, se encendió nuevamente un ambiente anti-macedónico en Atenas. Eurimedón denunció a Aristóteles de no rendir honor a los dioses, por lo que Aristóteles huyó de la ciudad a las propiedades de la familia de su madre en Calcis explicando: "No dejaré que los Atenienses cometan otro pecado contra la filosofía", refiriéndose al juicio y ejecución de Sócrates en Atenas. Sin embargo, murió a menos de un año de haber llegado a Eubea de causas naturales. Dejó un testamento en el cual pedía ser enterrado junto a su esposa.

de "está lloviendo". Sin embargo, en la práctica, cuando estas sentencias son usadas en el día a día, hay una gran cantidad de material de respaldo (contexto) que hacen que dichas sentencias sean verdaderas o falsas en un tiempo y lugar específicos, por lo que serán consideradas como proposiciones.

1.2 Conectivos Lógicos

Todas las proposiciones en el ejemplo 1 son proposiciones simples. Sin embargo, es usual en el lenguaje cotidiano utilizar proposiciones *compuestas* que consisten de dos o más proposiciones unidas por uno o más *conectivos lógicos*, siendo "y", "o", "no", "implica" y "equivale" las más comunes de ellas. Por ejemplo, podemos combinar tres proposiciones:

Si los humanos son mortales **y** todos los salvadoreños son humanos, **entonces** todos los salvadoreños son mortales.

En la discusión siguiente, no nos preocupará mucho el significado de las proposiciones simples -ya sea que hablen de matemática o de la mortalidad de los salvadoreños- pero sí de cómo las proposiciones son combinadas y relacionadas. Es por esto que usualmente se utilizarán variables como p o q en lugar de proposiciones específicas como "Todos los humanos son mortales" y "2+3=5". Se entenderá que estas variables, como las proposiciones, pueden tomar uno de dos valores: *verdadero* o *falso*.

1.2.1. Conjunción, Disyunción y Negación

Primero analizamos el uso del conectivo *y*, que expresa que dos eventos son ciertos simultáneamente. Es decir, si p y q son dos proposiciones, la proposición compuesta "p y q", simbolizada por $p \wedge q$ y llamada *conjunción*, será verdadera solamente en el caso en que ambas proposiciones lo sean.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de la conjunción.

EJEMPLO 1.3
La proposición "Son las 4 PM y está lloviendo" está compuesta por las proposiciones p ="Son las 4 PM" y q ="Está lloviendo" unidas por el conectivo "*y*" para indicar que ambos se cumplen al mismo tiempo. Se simboliza como $p \wedge q$. □

EJEMPLO 1.4
La proposición "π es mayor que 3 y π es menor que 3.2" indica que debe cumplirse tanto "π es mayor que 3" como "π es menor que 3.2". Simbólicamente, podemos representar a s como $\pi > 3$ y a t como $\pi < 3.2$, por lo que la proposición compuesta puede ser escrita como

$$(\pi > 3) \wedge (\pi < 3.2)$$

□

Una observación importante es que en el lenguaje matemático, una conjunción es independiente del orden de sus partes: $p \wedge q$ significa lo mismo que $q \wedge p$. Esto no siempre es cierto en el lenguaje cotidiano. Por ejemplo, la proposición

José pateó el tiro libre y la pelota entró en la portería.

no significa lo mismo que

La pelota entró en la portería y José pateó el tiro libre.

Otra diferencia importante con el uso de "y" en el lenguaje natural se puede observar en frases como "Juan y Pedro son amigos". En esta proposición, no es posible utilizar el símbolo $\wedge$ para representar la palabra "*y*" ya que no está siendo usada para unir dos proposiciones.

El siguiente conectivo lógico que analizaremos es la palabra "o", que, a diferencia del "y", sí introduce ambigüedad en el lenguaje común. Utilizamos "o" cuando queremos expresar que el evento A es cierto o el evento B es cierto. Es decir, dadas dos proposiciones p y q, la proposición compuesta "p o q", simbolizada como $p \vee q$, es verdadera cuando al menos una de las proposiciones componentes lo es. Las proposiciones de la forma $p \vee q$ son llamadas *disyunciones*.

EJEMPLO 1.5
Las siguientes proposiciones son ejemplos de disyunciones.

a) La proposición "La clase de mañana a las 10 será en el aula 1 o en el aula 3", está formada por las proposiciones "La clase de mañana a las 10 será en el aula 1" y "La clase de mañana a las 10 serán en el aula 3".
b) La proposición "3 es un entero par ó 7 un primo" se representa con $p \vee q$, donde p = "3 es un entero par", q = "7 es un número primo".
c) La proposicion "Esta noche comeré pollo o vegetales" está compuesta por las proposiciones r="Esta noche comeré pollo" y s="Esta noche comeré vegetales".

□

Note que la definición de disyunción nos dice que la proposición compuesta disyuntiva será falsa únicamente cuando ambas proposiciones son falsas. Esto introduce una diferencia importante con el lenguaje cotidiano, donde la proposición $p \vee q$ normalmente indica que o p es verdadera, o q es verdadera, pero no ambas. Las proposiciones (a) y (b) del ejemplo 5 siguen este razonamiento exclusivo. Sin embargo, para la proposición (c) tanto r como s pueden ser ciertas simultáneamente. Este significado inclusivo de la palabra *o* es el que utilizaremos de aquí en adelante.

La siguiente definición surge de la necesidad de negar sentencias, expresando que una proposición es falsa. Dada una proposición p cualquiera, la proposición compuesta "no p", simbolizada por $\neg p$, es verdadera si p es falsa, y es falsa si p es verdadera.

Como se muestra en los siguientes ejemplos, los tres conectivos lógicos presentados hasta ahora nos permiten analizar la forma lógica de proposiciones complejas.

EJEMPLO 1.6
Analice la forma lógica de “José se irá de casa y no volverá”.
Solución. Sea p la proposición “José se irá de casa” y q la proposición “José no volverá”, entonces podemos representar esta expresión simbólicamente como $p \wedge q$. Sin embargo, este análisis no considera que q es en realidad una expresión negativa. Podríamos obtener un mejor resultado si consideramos a r como “José volverá” y reescribimos a q como $\neg r$. Reemplazando a q en nuestro análisis original tenemos $p \wedge \neg r$. □

EJEMPLO 1.7
Analice la forma lógica de “O Elisa entró a clases y Gabriela no, o Gabriela entró a clases y Elisa no”.
Solución. Sea e la proposición “Elisa entró a clases” y sea g la proposición “Gabriela entró a clases”. La primera parte de la proposición, es decir “O Elisa entró a clases y Gabriela no”, puede ser escrita como $e \wedge \neg g$. Similarmente, la segunda mitad puede ser representada por $g \wedge \neg e$. Para representar toda la proposición, utilizamos la disyunción para combinar estas dos partes para formar $(e \wedge \neg g) \vee (g \wedge \neg e)$. □

Note que al analizar la proposición compuesta del ejemplo anterior, agregamos paréntesis cuando formamos la disjunción de $e \wedge \neg g$ y $g \wedge \neg e$ para indicar sin ambigüedades qué proposiciones estaban siendo combinadas. Esto es similar al uso de paréntesis en álgebra, en donde, por ejemplo, el producto de $a+b$ y $a-b$ sería escrito como $(a+b)\cdot(a-b)$, con los paréntesis indicando qué cantidades están siendo multiplicadas. Como en el álgebra, en lógica es conveniente omitir algunos paréntesis para hacer más cortas y más legibles nuestras expresiones. Sin embargo, es necesario establecer las reglas para leer dichas expresiones sin que esto introduzca ambigüedades. Una primera convención que adoptaremos es que la negación ($\neg$) se aplica únicamente a la proposición que viene inmediatamente después de ella. Por ejemplo, $\neg p \wedge q$ significa $(\neg p) \wedge q$ en lugar de $\neg(p \wedge q)$. En el transcurso del libro, se presentarán más convenciones sobre los paréntesis.

También es importante tomar en cuenta que los símbolos $\wedge$ y $\vee$ únicamente pueden ser usados *entre dos proposiciones* para formar su conjunción o disyunción, y el símbolo $\neg$ sólo puede ser usado *antes de una proposición* para negarlo. Esto quiere decir que ciertas cadenas de símbolos y variables no son válidas, como $p\neg \wedge q$, $p \vee \wedge q$, y $p\neg q$. Una vez más, puede ser útil pensar en una analogía con el álgebra, donde los símbolos $+$, $-$, $\times$ y $\div$ pueden ser usados entre dos números, como operadores, y el símbolo $-$ puede también ser usado antes de un número para negarlo. Estas son las únicas formas en los que estos símbolos pueden ser usados en álgebra, por lo que expresiones como $x - \div y$ no tienen sentido alguno.

Algunas veces, palabras diferentes a “*y*”, “*o*” y “*no*” son usadas para expresar el significado representado por $\wedge$, $\vee$ y $\neg$. Por ejemplo, considere la predicción del tiempo “viento y lluvia son las únicas posibilidades para el clima de mañana”. Esta es simplemente otra manera de decir que o hará viento o lloverá mañana, por lo que, aún cuando se utilizó la palabra "*y*" en la proposición, ésta es en realidad una disyunción. El mensaje de estos ejemplos es que para determinar la forma lógica de las proposiciones debe pensarse en el significado de las mismas y no en simplemente traducirlas palabra por palabra. Como otro ejemplo, considere la proposición "tengo hambre pero tengo que ir a clase". En este caso, la palabra *pero* es utilizada para representar a la conjunción.

Finalmente, algunas veces hay conectivos ocultos en la notación matemática. Por ejemplo, considere la proposición $3 \leq \pi$. Aunque a primera vista parezca una proposición sin conectivos lógicos, al leerla en voz alta se escuchará la palabra *o*. Si representamos a $3 < \pi$ como p y a $3 = \pi$ como q, entonces la proposición $3 \leq \pi$ puede ser escrita como $p \vee q$.

Como un ejemplo ligeramente más complicado, considere la proposición $3 \leq \pi < 3.2$. Esta proposición significa que $3 \leq \pi$ *y* $\pi < 3.2$. Utilizando la representación que se obtuvo de $3 \leq \pi$ en el párrafo anterior, podemos escribir la proposición completa como $[(3 < \pi) \vee (3 = \pi)] \wedge (\pi < 3.2)$.

Propiedades de la negación

Antes de continuar nuestra discusión sobre los conectivos lógicos, es útil adentrarnos en el comportamiento de la negación.

Nuestra primera observación es simple: $\neg(\neg p)$ es equivalente a (es decir, significa lo mismo que) p. Esta propiedad de la negación no es necesariamente verdadera en el lenguaje común. Por ejemplo, es común escuchar frases como "No me desagradó la película". En términos de negación, esta proposición tiene la forma $\neg(\neg\texttt{AGRADAR})$, pero esa frase no quiere decir que a quien lo dijo le agradó la película. De hecho, definitivamente significa algo mucho menos positivo.

Discutir los efectos de la negación sobre las conjunciones y disyunciones toma un poco más de trabajo. Por ejemplo, ¿Cuál es el significado de una expresión como

$$\neg(p \wedge q)$$

donde p y q son dos proposiciones cualesquiera?

Sabemos que $p \wedge q$ significa "tanto p como q son ciertas", por lo que $\neg(p \wedge q)$ debería significar que "no es cierto que p y q son ambas ciertas". Ahora, si ambas no son ciertas, entonces al menos una de ellas debe de ser falsa. Pero decir que al menos una de p y q es falsa es lo mismo que decir que al menos una de $\neg p$ y $\neg q$ es verdadera (por nuestra definición de negación). Simbólicamente, y por nuestra definición del conectivo *o*, esto puede ser escrito como $\neg p \vee \neg q$[3]. Por lo tanto podemos decir que $\neg(p \wedge q)$ es equivalente (significa lo mismo) a $\neg p \vee \neg q$. Siguiendo un razonamiento similar, es posible mostrar que $\neg(p \vee q)$ es equivalente a $\neg p \wedge \neg q$. Estas dos equivalencias son llamadas las *leyes de De Morgan*[4].

[3]Dado que ya especificamos que $\neg$ modifica únicamente a la proposición que le sigue, podemos obviar los paréntesis para escribir $\neg p \vee \neg q$ sin introducir ambigüedades

[4]Puede leer la biografía de De Morgan en la página 9.

1.2.2. Condicional

La cuarta noción que investigaremos es una de las que causa la mayor confusión inicial: *implicación*. En matemáticas frecuentemente utilizamos expresiones de la forma "p implica q", simbolizada "$p \to q$". De hecho, la implicación provee el medio por el cual demostramos proposiciones, comenzando con observaciones iniciales o *axiomas*. Por lo tanto, sería razonable asumir que cuando se tiene una proposición de la forma $p \to q$, si p es verdadera, entonces q debe ser también verdadera.

Pero suponga que p es la proposición verdadera "$\sqrt{2}$ es irracional" y q es "$0 < 1$". ¿Será verdadera $p \to q$ en este caso? En otras palabras, ¿será cierto que la irracionalidad de $\sqrt{2}$ implica que 0 es menor que 1? Desde luego que no. No existe conexión real entre las proposiciones p y q.

Más dramáticamente, considere la implicación

"Que el emperador Julio César esté vivo implica que $1 + 1 = 2$".

En este caso, ¿Qué puede decirse de $p \to q$ si p es falso? ¿Tienen sentido este tipo de expresiones?

El problema con los ejemplos anteriores es que el concepto de implicación no sólo tiene que ver con el valor de verdad de la proposición (como es el caso de la conjunción, disyunción y negación), sino también con *causalidad*. Cuando escribimos "p implica q", queremos decir que de alguna manera q es causada o provocada por p. Para los propósitos de este capítulo, no consideraremos el complejo problema de la causalidad y utilizaremos únicamente el valor de verdad de las implicaciones. A cualquier expresión de la forma $p \to q$ se le llamará la *expresión condicional* o simplemente el *condicional*. Nos referiremos a p como el *antecedente* y a q como *consecuente*. La verdad o falsedad de un condicional será *definido* completamente por la verdad o falsedad del antecedente y del consecuente, y no se considerará en absoluto si existe o no una conexión significativa entre p y q.

Como se esperaría, esta definición que ignora un aspecto altamente significativo de la noción de la implicación puede tener consecuencias que son contraintuitivas e incluso absurdas. Sin embargo, en todos los casos donde *sí existe* una implicación genuina y significativa de la forma "p implica q", el condicional $p \to q$ concuerda con esa implicación. Dicho de otra manera, al definir el condicional de esta forma, no tenemos caso alguno en que se *contradiga* la noción de la implicación genuina. En lugar de ello, obtenemos una noción que *extiende* a la implicación genuina para cubrir los casos donde se tiene una implicación sin sentido, como en los casos donde el antecedente es falso o donde no hay conexión real entre el antecedente y el consecuente.

Ahora que ignoramos toda causalidad, el valor de verdad de una implicación es intuitivo cuando el antecedente es verdadero. Si p es verdadero y "p implica q" es una proposición válida, entonces q debe ser verdadera. Es decir, el condicional $p \to q$ será verdadero cuando tanto el antecedente como el consecuente sean verdaderos.

Para manejar el caso en el que el antecedente es falso, no consideraremos la noción de implicación sino más bien la de su negación. Extraeremos la parte del valor de verdad y sin causalidad de la proposición "p no implica q", que escribiremos como $p \nrightarrow q$, y dejaremos de lado cualquier tipo de relación entre p y q. Con esto en mente, podemos ver que *p no implicará q* si tenemos que aunque p sea verdadera, q es falsa [5]. Por lo tanto, diremos que $p \nrightarrow q$ es verdadera precisamente cuando p es verdadera y q es falsa.

Habiendo definido la verdad o falsedad de $p \nrightarrow q$, obtenemos el valor de verdad de $p \rightarrow q$ utilizando la negación. De aquí que $p \rightarrow q$ será verdadera exactamente cuando $p \nrightarrow q$ sea falsa, llevando a los siguientes casos donde la expresión condicional $p \rightarrow q$ es verdadera:

(1) p y q son ambas verdaderas.
(2) p y q son ambas falsas.
(3) p es falsa y q es verdadera.

Obervando estos casos, vemos que la expresión condicional es falsa únicamente cuando el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso.

Para explorar aún más el condicional, considere la siguiente proposición:

“Si la conjetura de Goldbach es verdadera, entonces $x^2 \geq 0$ para todo número real x”

Como mencionamos anteriormente, no se ha podido determinar aún si la conjetura de

[5] Formalmente escribimos esto como $p \wedge \neg q$, lo que sugiere que esta expresión y $\neg(p \rightarrow q)$ significan lo mismo (son equivalentes).

Augustus De Morgan (1806-1871) fue el quinto hijo de John De Morgan, un Teniente-Coronel inglés estacionado en India al momento del nacimiento de Augustus. De Morgan perdió su vista en el ojo derecho poco después de su nacimiento y, a los siete meses de edad, regresó a Inglaterra con su familia. John De Morgan murió cuando Augustus tenía 10 años.

De Morgan no sobresalió en la escuela y, debido a su condición física, no jugaba deportes e incluso fue víctima de crueles bromas por parte de sus compañeros.

Ingresó al Trinity College de Cambridge en 1823 a los 16 años, donde fue alumno de Peacock y Whewell, con quienes entabló amistad de por vida. Recibió su licenciatura pero, dado que un exámen teológico era requerido para la Maestría, algo a lo que De Morgan objetaba a pesar de ser miembro de la Iglesia de Inglaterra, el no pudo seguir en Cambridge ya que no era elegible para una beca sin una Maestría.

En 1826 regresó a su hogar en Londres e ingresó al Licoln’s Inn a estudiar para los exámenes de abogacía. En 1827 (a los 21 años), aplicó a la dirección de matemática en el nuevo University College London y, a pesar de no tener publicaciones matemáticas, fue contratado. Por cuestión de principios, renunció a su posición en 1831, siendo contratado nuevamente 1836.

Además de sus famosas leyes y de ser recordado como el reformador de la lógica matemática, De Morgan también contribuyó a otras áreas de la matemática. En 1838, en su artículo *Induction (Mathematics)* de la *Penny Cyclopedia*, definió e intodujo el término *inducción matemática* (ver sección **??**), un proceso que había sido utilizado anteriormente sin claridad o base rigurosa. Otras publicaciones incluyen *Elementos de Álgebra* (1837), *Elementos de aritmética* (1840), *Calculo Diferencial e Integral* y *Trigonometría* (1849).

En 1866, a los 60 años, renunció por segunda vez a su puesto en *University College* por cuestión de principios, por lo que sus pupilos le aseguraron una pension de £500. Ese mismo año fue co-fundador y primer presidente de la Sociedad Londinense de Matemática. Sin embargo, dos años más tarde, muere su hijo George, un hábil matemático por sí mismo, seguido por otra de sus hijas. Cinco años después de su renuncia, De Morgan muere el 18 de marzo de 1871.

De Morgan siempre se interesó por hechos numéricos raros, escribiendo en 1864 que había tenido la distinción de tener x años en el año x^2.

Goldbach es cierta o falsa. Sin embargo, eso no evita que podamos determinar el valor de verdad de la proposición compuesta. Esta proposición tiene la forma $p \to q$, donde p="La conjetura de Goldbach es verdadera" y q="$x^2 \geq 0$ para todo número real x". Ya que q es verdadera, entonces estamos en el caso (1) o el caso (3) de la veracidad de la condicional, por lo que la proposición compuesta es verdadera.

La siguiente proposición demuestra el lado contraintuitivo de las implicaciones:

"Si los cerdos vuelan, entonces puedes entender la teoría de la relatividad"

Curiosamente, el valor de verdad de esta proposición no tiene relación alguna con el hecho de que se pueda o no entender la teoría de la relatividad. Los cerdos no vuelan, así que estamos en el caso (2) o (3) de la veracidad del condicional. En ambos casos, la proposición es verdadera.

En contraste, considere la siguiente proposición:

"Si la luna parece blanca, entonces la luna está hecha de queso blanco"

Sí, la luna parece blanca, pero no, no está hecha de queso blanco. Ya que la combinación de estos valores de verdad no se encuentra en ninguno de los casos de la veracidad del condicional, la proposición debe ser falsa.

Estos ejemplos muestran que la definición del condicional puede resumirse de la siguiente manera:

Una expresión condicional es verdadera si el antecedente es falso o si el consecuente es verdadero.

La escritura formal de la observación anterior sugiere que $p \to q$ y $\neg p \vee q$ significan lo mismo.

Además de los valores de verdad que hemos visto hasta ahora, el condicional (y más generalmente, la implicación) posee terminología asociada a la que el lector debe acostumbrarse. Una proposición "$p \to q$" puede leerse de las siguientes maneras:

(1) p implica q

(2) Si p entonces q

(3) p es suficiente para q

(4) p sólo si q

(5) q si p

(6) q cuando p

(7) q es necesario para p

Las primeras cuatro formas mencionan a p antes de q, y de estas las primeras 3 son relativamente fáciles de entender. Pero (4) requiere un poco de atención. Note el contraste entre (4) y (5) con respecto al orden entre p y q. Con mucha frecuencia quienes estudian estos conceptos por primera vez encuentran dificultad en apreciar la distinción entre *si* y *sólo si*.

De la misma manera, el uso de la palabra *necesario* en (7) usualmente causa confusión. Note que decir que q es una condición necesaria para p no significa que q por sí sola es suficiente para garantizar p. Más bien, lo que dice es que q debe ser verdadera antes que pueda darse cualquier pregunta si p es verdadera.

Contrapositiva y Conversa

A la expresión condicional $p \to q$ puede asociársele la proposición $\neg q \to \neg p$, llamada la *contrapositiva* o *contrarecíproca* de $p \to q$. Note que en la contrapositiva, la introducción del signo de negación es acompañada de un cambio en la dirección de la flecha. Por ejemplo, la contrapositiva de la expresión "si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo" es "si no hay nubes en el cielo, no está lloviendo". De la misma manera, la contrapositiva de la proposición "si $2^n - 1$ es primo, entonces n es primo" es "si n es compuesto (es decir, no es primo), entonces $2^n - 1$ es compuesto".

Más adelante veremos que una expresión condicional y su contrapositiva son lógicamente equivalentes. Sin embargo, es importante no confundir a la contrapositiva con el condicional $q \to p$, llamada la *conversa* o *recíproca* de $p \to q$. En general, *no* existe conexión entre los valores de verdad de un condicional y su conversa. Esto es ilustrado con la conversa de la expresión "si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo", la cual es "si hay nubes en el cielo, entonces está lloviendo".

1.2.3. Bicondicional

Cercanamente ligada a la implicación es la noción de *equivalencia*. Se dice que dos proposiciones p y q son *(lógicamente) equivalentes* si cada una implica a la otra. Así como en la sección anterior la implicación fue desprovista de causalidad, el estudio de equivalencia será igualmente desprovista de causalidad en esta sección y estudiaremos únicamente la parte concerniente al valor de verdad de la equivalencia: el *bicondicional*. Dadas dos proposiciones p y q, la proposición bicondicional "p si y sólo si q", simbolizada por $p \leftrightarrow q$, es definida como $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

De esta definición y como se verá más claramente podemos ver que el bicondicional será verdadero si p y q son ambos verdaderos o ambos falsos; de lo contrario, el bicondicional es falso. En otras palabras, para que $p \leftrightarrow q$ sea verdadero, p y q deben tener el mismo valor de verdad.

Al igual que con el condicional (y la implicación), el bicondicional (y la equivalencia) posee terminología asociada con la que es necesario familiarizarse. Una proposición $p \leftrightarrow q$ puede leerse de las siguientes maneras:

(1) p es equivalente a q

(2) p es necesario y suficiente para q

(3) p si y sólo si q

Es necesario tener en cuenta que en el lenguaje cotidiano algunas veces utilizamos proposiciones condicionales cuando en realidad queremos expresar un bicondicional. Por ejemplo, probablemente no se diría algo como “la clase se impartirá si hay al menos diez personas en el salón” a menos que también sea el caso que si hubiera al menos de diez personas en el salón, la clase se impartiría. Por lo tanto, la proposición sugiere que la clase será impartida si y sólo si hay al menos diez personas en el salón. Como otro ejemplo, suponga que los padres le dicen a un niño, “Si no te comes todo, no tendrás postre”. El niño ciertamente espera que *si termina* su comida tendrá su postre, aunque no sea literalmente lo que sus padres dijeron. En otras palabras, el niño interpreta el significado de la proposición como “que termines tu comida es una condición necesaria *y suficiente* para obtener postre”.

Tal confunsión entre “*si*” y “*si y sólo si*” nunca es aceptable en matemáticas. En el resto del libro (y en el lenguaje matemático) se utilizarán siempre expresiones como “es necesario y suficiente” o “si y sólo si” para expresar el bicondicional. **No deberá interpretar una proposición de la forma “si-entonces” como una proposición bicondicional.**

Ejercicios

1. Exprese las siguientes proposiciones compuestas en forma simbólica:
   a) No irás a jugar fútbol, o irás y nadie estará ahi.
   b) O Juan y Beto están ambos diciendo la verdad, o ninguno la está diciendo.
   c) Comeré pescado o pollo, pero no comeré pescado y puré de papas.
   d) Tendremos ya sea lectura o tarea para la siguiente clase, pero no tendremos tarea y examen al mismo tiempo.
   e) 3 es un divisor común de 6, 9 y 15.
   f) Alicia y Carlos no están ambos en el cuarto.
   g) Alicia y Carlos están ambos fuera del cuarto.
   h) O Alicia o Carlos no están en el cuarto.
   i) Ni Alicia ni Carlos están en el cuarto.
2. ¿Cuáles de las siguientes expresiones lógicas no son válidas?
   a) $\neg(\neg p \vee \neg\neg r)$
   b) $\neg(p, q, \wedge r)$
   c) $p \wedge \neg p$
   d) $(p \wedge q)(p \vee r)$
3. Si p representa a la proposición “compraré los pantalones” y s a la proposición “compraré la camisa”. ¿Qué oraciones en Español son representadas por las siguientes expresiones lógicas?
   a) $\neg p \wedge \neg s$
   b) $\neg p \vee \neg s$
   c) $\neg(p \wedge \neg s)$
4. Si a representa a la proposición “Alfonso está feliz” y g representa a “Gabriel está feliz”. ¿Qué oraciones en Español son representadas por las siguientes expresiones lógicas?
   a) $(a \vee g) \wedge (\neg a \vee \neg g)$
   b) $[a \vee (g \wedge \neg a)] \vee \neg g$
   c) $a \vee [g \wedge (\neg a \vee \neg g)]$
5. Sean p, q, r las proposiciones: p = “Está lloviendo”, q = “El sol está brillando”, r = “Hay nubes en el cielo”. Traduzca las siguientes frases a notación lógica usando p, q, r y los conectivos lógicos:
   a) Está lloviendo y el sol está brillando
   b) Si está lloviendo, entonces el sol no está brillando

c) Si no está lloviendo, entonces el sol no está brillando y no hay nubes en el cielo
d) El sol está brillando si y sólo si no está lloviendo
e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el sol está brillando

6. Sean p, q, r las proposiciones del ejercicio 5, traduzca las siguientes proposiciones al castellano:
a) $(p \wedge q) \to r$ b) $\neg p \leftrightarrow (q \vee r)$
c) $(p \to r) \to q$ d) $\neg(p \leftrightarrow (q \vee r))$
e) $\neg(p \vee q) \wedge r$
7. Identifique al antecedente y al consecuente en cada una de las siguientes expresiones condicionales:

a) Si las manzanas son rojas, entonces las naranjas son verdes.
b) La diferenciabilidad de una función f es suficiente para que f sea contínua.
c) Una función f es acotada si f es integrable.
d) Una secuencia s es acotable cuando s es convergente.
e) Es necesario que n sea primo para que $2^n - 1$ sea primo.
f) El equipo gana sólo cuando Carlos juega.
g) Cuando Carlos juega el equipo gana.
h) El equipo gana cuando Carlos juega.

8. Escriba la conversa y la contrapositiva de cada condicional del ejercicio anterior.
9. Determine el valor de verdad de los siguientes enunciados:

a) Si $5 < 3$ entonces $-3 < -5$.
b) No es verdad que, $2 + 2 = 4$ ó $3 + 5 = 6$.
c) $2 + 2 \neq 4$ y $3 + 3 = 6$.
d) Si $3 < 5$ entonces $-3 < -5$.

10. Proporcione las recíprocas y la contrarecíproca de las siguientes implicaciones:

a) $q \to r$
b) Si $x^2 = x$ entonces $x = 0$ ó $x = 1$
c) Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 8$
d) $p \to (q \wedge r)$
e) Si $x + y = 1$ entonces $x^2 + y^2 \geq 1$
f) Si $2 + 2 = 4$ entonces $3 + 3 = 8$

11. Exprese las siguientes proposiciones compuestas en forma simbólica:

a) Si este gas tiene olor desagradable o no es explosivo, entonces no es hidrógeno.
b) Tener fiebre y dolor de cabeza es una condición suficiente para que Jorge vea al médico.
c) Si $x \neq 2$, entonces una condición necesaria para que el número entero n sea primo es que n sea impar.
d) María venderá su casa sólo si puede venderla a buen precio y encuentra un bonito apartamento.
e) Tener tanto una buena historia crediticia y una prima adecuada es una condición necesaria para obtener una hipoteca.
f) José gastará todo su dinero si nadie lo detiene.
g) Si n es divisible por 4 o 6, entonces no es primo.

12. ¿Cuál de las siguientes condiciones es *necesaria* para que el número entero positivo n sea divisible por 6?

a) n es divisible por 3
b) n es divisible por 9
c) n es divisible por 12
d) $n = 24$
e) n^2 es divisible por 3
f) n es par y divisible por 3

13. ¿Cuáles de las condiciones del ejercicio anterior son *suficientes* para que n sea divisible por 6?
14. ¿Cuáles de las condiciones del ejercicio 12 son *suficientes y necesarias* para que n sea divisible por 6?
15. Sabiendo que la expresión condicional $p \to q$ es falsa, proporcione los valores de