2.4 Validez lógica de argumentos con predicados

Ahora que ya contamos con los cuantificadores como nuevo elemento en nuestro lenguaje matemático, regresamos al argumento con el que iniciamos nuestra discusión:
Todos los hombres son mortales
Sócrates es un hombre
Por lo tanto, Sócrates es mortal

De la discusión de las secciones anteriores, podemos ahora escribir al argumento anterior como

$$\begin{array}{ll} & \forall x[h(x) \to m(x)] \\ & h(\text{Sócrates}) \\ \hline \therefore & m(\text{Sócrates}) \end{array}$$

donde $h(x)$ es el predicado "x es un hombre", $m(x)$ es el predicado "x es mortal". Sin embargo, ahora que podemos expresar este argumento en forma simbólica, debemos estudiar cómo establecer la veracidad de dicho argumento. Para ello, utilizaremos cuatro reglas de inferencia ampliamente utilizadas en los argumentos matemáticos.

La ***instanciación universal*** nos dice que a partir de la veracidad de $\forall x[p(x)]$ podemos concluir $p(c)$ para cualquier miembro particular c del dominio de discurso del predicado.

EJEMPLO 2.9
Analice la veracidad del argumento: "Todos los hombres son mortales. Sócrates es hombre. Por lo tanto, Sócrates es mortal".
Solución. Utilizando la instanciación universal podemos concluir que $h(\text{Sócrates}) \to m(\text{Sócrates})$ a partir de $\forall x[h(x) \to m(x)]$, convirtiéndose en

$$\begin{array}{ll} & \forall x[h(x) \to m(x)] \\ & h(\text{Sócrates}) \to m(\text{Sócrates}) \\ & h(\text{Sócrates}) \\ \hline \therefore & m(\text{Sócrates}) \end{array}$$

de donde podemos aseverar la veracidad de la conclusión por *modus ponens*. □

La ***generalización universal*** nos dice que si $p(c)$ se cumple para cada uno de los elementos c del dominio de discurso, entonces $\forall x[p(x)]$ es verdadera. Este tipo de generalización se utiliza para demostrar que $\forall x[p(x)]$ es verdadera tomando un valor arbitrario para c del dominio de discurso, y mostrar que $p(c)$ es verdadero. Note que es necesario tomar un valor *arbitrario* de x, no un valor específico. De lo contrario, lo único que se ha mostrado es que $p(x)$ es verdadero para ese valor específico de x, pero no para todos sus valores.

EJEMPLO 2.10
Analice el siguiente argumento sobre el dominio de todos los estudiantes de la Escuela

de Matemática: “A todos los estudiantes de matemática les gusta programar. Todos los alumnos de la Escuela de Matemática son estudiantes de matemática. Por lo tanto, a todos los alumnos de la Escuela de Matemática les gusta programar”.

Solución. Representemos con x a un estudiante de la Escuela de Matemática (es decir, el dominio del discurso de x es la colección de alumnos de la Escuela de Matemática). Si tomamos a $m(x)$ como el predicado “x es estudiante de matemática”, $p(x)$ como “a x le gusta programar”, entonces el argumento anterior tiene la forma:

$$\begin{array}{rl} & \forall x(m(x) \to q(x)) \\ & \forall x(m(x)) \\ \hline \therefore & \forall x[q(x)] \end{array}$$

Pero de la primera premisa sabemos que $m(x_0) \to q(x_0)$ debe ser cierto para un x_0 arbitrario. Igualmente $m(x_0)$ debe ser cierta para un x_0 arbitrario. Finalmente, podemos utilizar modus ponens con estas dos proposiciones para decir que $q(x_0)$ debe ser cierto para un x_0 arbitrario, de donde $\forall x[q(x)]$ debe ser cierto. □

Note que, por convención, muchas proposiciones matemáticas dicen que un predicado es verdadero para todos los miembros del dominio sin especificar explícitamente el cuantificador universal. Por ejemplo, la proposición “si el número natural n es divisible por 2, entonces n^2 es divisible por 4” en realidad debería escribirse “para todo número entero n, si n es divisible por 2, entonces n^2 es divisible por 4”. Para demostrar que este tipo de proposiciones son verdaderas, usualmente se utiliza la generalización universal sin hacer mención de ella, simplemente tomando un valor arbitrario (es decir, de forma general) para la variable para demostrar que se cumple para cualquier elemento del dominio de discurso.

La *generalización existencial* nos permite concluir que la proposición $\exists x[p(x)]$ es verdadera si se sabe que $p(x)$ se cumple para un valor particular de x.

EJEMPLO 2.11

Analice la veracidad del siguiente argumento lógico: “Todo el que aprueba los exámenes

---

Charles Lutwidge Dodgson es mejor conocido por su pseudónimo Lewis Carroll. Aunque matemático, es famoso por sus libros de *Las Aventuras de Alicia en el País de las Maravillas* (1865) y *Alicia a través del Espejo* (1872). Su *nom de plume* es la versión inglesa de la traducción al latín de su nombre: *Carolus Lodovicus*.

Charles Dodgson nació en 1832, siendo el tercero de 11 hijos. Su educación temprana fue proveida por sus padres, estudiando primordialmente libros religiosos. A los 18 años, ingresó a la Universidad de Oxford, donde permaneció bajo diferentes títulos cerca de 50 años hasta su muerte. Fue ordenado diácono de la Iglesia Anglicana, aunque nunca practicó el ministerio.

Dodgson padeció de insomnio toda su vida, pasando noches enteras despierto tratando resolver problemas matemáticos. Escribió diversos libros sobre la materia, siendo el más interesante de ellos “Euclides y sus modernos rivales”. Enseñó matemáticas a tres generaciones de estudiantes. Su trabajo incluye escritos sobre geometría, determinantes y lógica.

Charles tartamudeaba y se sentía incómodo con personas adultas. Se dice, sin embargo, que tenía buenas relaciones sociales con jóvenes, especialmente niñas. Su relación con las hijas de su amigo diácono Dean Liddel, fue la inspiración de los famosos cuentos de Alicia.

de lógica aprueba la materia. Guadalupe aprobó todos los exámenes de lógica. Por lo tanto, hay alguien que aprobó lógica matemática.”
Solución. Sea $a(x)$ el predicado “x aprobó todos los exámenes de lógica”, y $p(x)$ el predicado “x aprobó lógica matemática”. El argumento anterior se escribe como:

$$\begin{array}{ll} & \forall x[a(x) \to p(x)] \\ & a(\text{Guadalupe}) \\ \hline \therefore & \exists x[p(x)] \end{array}$$

De la premisa $\forall x[a(x) \to p(x)]$ podemos utilizar la instanciación universal para obtener $a(\text{Guadalupe}) \to p(\text{Guadalupe})$. De esta y de la segunda premisa del argumento podemos concluir por *modus ponens* que $p(\text{Guadalupe})$ es cierta. Finalmente, ya que tenemos un caso específico donde $p(x)$ se cumple, de esta última premisa podemos utilizar la generalización existencial para concluir que $\exists x[p(x)]$. □

Finalmente, la *instanciación existencial* nos dice que si $\exists x[p(x)]$ es verdadera, entonces debe existir un miembro e del dominio de discurso que hace que $p(e)$ sea verdadera. En este caso, e no puede ser un valor arbitrario del dominio de discurso, sino el e que hace que $p(x)$ sea verdadera. Sin embargo, la mayor parte del tiempo no sabemos cuál e cumple con esta propiedad, por lo que simplemente lo designamos con una nueva variable y continuamos con nuestro argumento.

EJEMPLO 2.12
Analice la veracidad del siguiente argumento lógico: “Todo el que aprueba los exámenes de lógica aprueba la materia. Alguien aprobó todos los exámenes de lógica. Por lo tanto, hay alguien que aprobó lógica matemática.”
Solución. En este caso, el argumento tiene la forma:

$$\begin{array}{ll} & \forall x[a(x) \to p(x)] \\ & \exists x[a(x)] \\ \hline \therefore & \exists x[p(x)] \end{array}$$

donde $a(x)$ es el predicado “x aprobó todos los exámenes de lógica”, y $p(x)$ es el predicado “x aprobó lógica matemática”.

Aquí, de la segunda premisa podemos utilizar la instanciación existencial para asumir $a(e)$, donde e es el desconocido que aprobó todos los exámenes de lógica. De la primera premisa, podemos utilizar la instanciación universal para el caso especial de e (recuerde que con la instanciación universal, podemos utilizar *cualquier* miembro del dominio de discurso) para asumir $a(e) \to p(e)$. De estas nuevas premisas podemos utilizar *modus ponens* para obtener $p(e)$, del cual, por generalización existencial, podemos concluir $\exists x[p(x)]$. □

Ejercicios

1. Analice la validez lógica de los siguientes argumentos:

   a) Algunos estudiantes son atletas. Algunos atletas reprueban cursos. Por lo tanto, algunos estudiantes reprueban cursos.

   b) Karla, una estudiante de esta clase, puede hablar Inglés. Todos los que pueden hablar Inglés pueden optar a un trabajo bien pagado. Por lo tanto, alguien en esta clase puede optar a un trabajo bien pagado.

   c) A alguien en esta clase le gusta la naturaleza. A todos los que le gusta la naturaleza le importa la contaminación ambiental. Por lo tanto, hay una persona en esta clase a quien le importa la contaminación ambiental.

   d) Todos en El Salvador viven a menos de 100 Km del mar. Alguien en El Salvador nunca ha visto el mar. Por lo tanto, alguien que vive a menos de 100 Km del mar nunca lo ha visto.

   e) Todas las películas dirigidas por Steven Spielberg son maravillosas. Spielberg dirigió una película de alienígenas. Por lo tanto, hay una película de alienígenas maravillosa.

2. Los siguientes argumentos son encontrados en el libro *Lógica Simbólica* de Lewis Carroll[5]. Para cada uno, verifique la validez de las conclusiones. Si la conclusión es falsa, explique porqué. Si es verdadera, muestre los pasos lógicos necesarios para llegar a la conclusión. Para las primeras dos el dominio de discurso es la colección de todas las personas. Para las últimas dos, el dominio de discurso es la colección de todos los animales.

   a) No hay profesores ignorantes. Todas las personas ignorantes son vanas. Por lo tanto, no hay profesores vanos.

   b) Los bebés son ilógicos. Nadie que sea despreciado puede controlar a un cocodrilo. Las personas ilógicas son despreciadas. Por lo tanto, los bebés no pueden controlar a un cocodrilo.

   c) Todos los leones son fieros. Algunos leones no toman café. Por lo tanto, algunas criaturas fieras no toman café.

   d) Todos los colibríes tienen colores vivos. Ningún ave grande vive de la miel. Las aves que no viven de la miel tienen colores opacos. Los colibríes son pequeños. (Nota: asuma que *pequeño* es lo mismo que *no grande*, y que “tiene colores opacos” es lo mismo que “no tiene colores vivos).

[5] Ver su biografía en la página 47.