verdad de:
*a*) $p \wedge q$ *b*) $p \vee q$ *c*) $q \to p$

Observación: las proposiciones $p$, $q$ son las mismas en las cuatro proposiciones compuestas.

## 1.3 Tablas de Verdad

Ya que hemos definido a los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$ y $\leftrightarrow$ únicamente en términos de sus valores de verdad, es posible definirlos usando una *tabla de verdad*[6], donde representamos al valor verdadero con una `V` o un 1, y al valor falso con una `F` o un 0. Por ejemplo, si $p$ denota una proposición cualquiera, entonces la veracidad de la proposición "no $p$" puede ser ilustrada con la siguiente tabla:

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| F | V |
| V | F |

o bien

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

La primera fila de la tabla indica que cuando la proposición $p$ es falsa, la proposición $\neg p$ es verdadera. La segunda fila indica que cuando $p$ es verdadera, $\neg p$ es falsa.

En general, una tabla de verdad indica la veracidad o falsedad de una proposición para todas las posibles combinaciones de los valores de las proposiciones simples. Por ejemplo, la tabla de verdad para la proposición $p \wedge q$ tiene cuatro filas:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

En las primeras dos columnas aparecen todas las posibles combinaciones de los valores de 1 y 0 que las proposiciones $p$ y $q$ pueden tener. La tercera columna muestra el valor de verdad de $p \wedge q$ por cada una de las combinaciones. De aquí se puede ver que $p \wedge q$ es verdadero únicamente cuando tanto $p$ como $q$ son verdaderos.

Para $p \vee q$ y para $p \to q$ tenemos las tablas:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

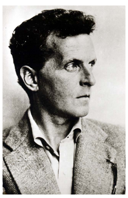
[6] Aunque las tablas de verdad habían sido utilizadas en la literatura desde 1920, fue la influencia del *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein (ver pág. 15) que popularizó su uso. Sin embargo, Lewis Carroll (ver pág. 47), autor de *Alicia en el País de las Maravillas*, había formulado tablas de verdad en 1894 para resolver ciertos problemas, pero los manuscritos que contenian ese trabajo no fueron descubiertos sino hasta 1977.

Es posible construir tablas de verdad para expresiones más complicadas. Considere, por ejemplo, la tabla de verdad para $p \leftrightarrow q$, la cual fue definida como $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

| | $p$ | $q$ | $p \to q$ | $q \to p$ | $(p \to q) \wedge (q \to p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Pasos | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |

La última fila de la tabla anterior muestra el orden en que fueron llenados los valores de las columnas. Se inicia con una columna por cada una de las variables de la expresión de tal manera que cada fila tenga una combinación diferente de los valores de verdad de las variables, cubriendo todas las combinaciones posibles. Luego, por cada fila, se calcula el

---



**Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951)** fue un filósofo Austríaco que trabajó principalmente en los fundamentos de la lógica, la filosofía de la matemática, la filosofía de la mente, y la filosofía del lenguaje. Nació en Viena el 26 de abril de 1889, siendo el más joven de ocho hijos nacidos en una de las más prominentes y adineradas familias del imperio Austro-Húngaro. Su familia era visitada por músicos como Johannes Brahms y Gustav Mahler. Ludwig y sus hermanos fueron educados tanto intelectual como artísticamente, por lo que Ludwig poseía una devoción a la música que siguió siendo importante por el resto de su vida.

Ludwig fue educado en casa hasta 1903, cuando inició tres años de estudio en la *Realschule* de Linz, donde Adolfo Hitler fue estudiante al mismo tiempo. Wittgenstein hablaba Alemán altamente puro y educado, aunque ocasionalmente tartamudeaba, vestía ropas elegantes, y era increíblemente sensitivo y antisocial. Se refería a sus compañeros formalmente, demandando que hicieran lo mismo con él. Odió la escuela y mantuvo únicamente calificaciones promedio.

En 1906, inició sus estudios de ingeniería mecánica en Berlin, y en 1908, comenzó su doctorado en ingeniería en la Universidad de Manchester. Sin embargo, el estudio del *Principia Matematica* de Russell (ver biografía en la pag. **??**) como parte de su investigación despertó un interés que lo llevó a visitar a Frege (ver biografía la pag. 43), quien le aconsejó que ingresara a la Universidad de Cambridge como alumno de Russell. Éste luego escribió que ser profesor de Wittgenstein fue "…una de las aventuras intelectuales más interesantes [de su vida]…[Wittgenstein tenía] pureza intelectual a un grado extraordinario…[El] pronto sabía todo lo que podía enseñarle." Ambos pronto comenzaron a trabajar en los fundamentos de la lógica y en lógica matemática. Sin embargo, durante su perído en Cambridge Ludwig sufrió depresión y amenazó con suicidarse en repetidas ocasiones. En 1913, partió hacia una remota población en Noruega ya que pensaba que no podría llegar al corazón de sus preguntas más fundamentales mientras estuviese rodeado de académicos. Durante este período, que luego consideró como uno de los más apasionados y productivos de su vida, escribió *Logik*, libro predecesor de su *Tractatus Logico-Philosophicus* que sería su trabajo más famoso.

Durante la Primera Guerra Mundial, se unió voluntariamente al ejército Austro-Húngaro, ganando medallas por valentía y cayendo como prisionero de guerra en noviembre de 1918. Durante su cautiverio, refinó su trabajo en el *Tractatus*, para el cual Russell escribió su introducción. Después de un período de cerca de 7 años desde 1922 en los que trabajó como profesor de escuela primaria, asistente de jardinero en un monasterio y ayudante de arquitecto, Ludwig regresó a Cambridge en 1929 donde descubrió con horror que era uno de los filósofos más famosos del mundo. Sin embargo, antes de optar a una posición en Cambridge debió completar su doctorado, para lo que presentó al *Tractatus* como tesis, con Russell y G. Moore como sus jueces. Al final de su presentación, Ludwig se dirigió a ellos dándoles una palmada en la espalda y diciéndoles: "no se preocupen, sé que nunca lo entenderán".

Wittgenstein renunció a su puesto en Cambridge en 1947 para concentrarse en sus escritos. Murió de cáncer de próstata en Cambridge en 1951. Sus últimas palabras fueron: "Díganles que tuve una vida maravillosa".

valor de verdad de las expresiones $p \to q$ y $q \to p$ por separado, mostrando sus resultados en las columnas 3 y 4 (en los pasos 2 y 3) de la tabla. Finalmente, se utilizan los resultados de los pasos 2 y 3 para calcular los valores de verdad de la última columna utilizando las reglas para los valores de verdad de $\wedge$.

Los siguientes dos ejemplos muestran más construcciones de tablas de verdad:

**EJEMPLO 1.8**

Elaborar la tabla de verdad para la proposición $(p \wedge q) \vee \neg(p \to q)$

*Solución*

| | $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \to q$ | $\neg(p \to q)$ | $(p \wedge q) \vee \neg(p \to q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Pasos | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

□

Es posible escribir una tabla de verdad equivalente a la anterior de una manera más compacta. En lugar de utilizar columnas separadas para listar los valores de verdad de las partes componentes de la expresión, puede listarse esos los valores de verdad bajo los conectivos correspondientes en la fórmula original. Esto es ilustrado en la siguiente tabla:

| | $p$ | $q$ | $(p \wedge q)$ | $\vee$ | $\neg$ | $(p \to q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Pasos | 1 | 1 | 2 | 5 | 4 | 3 |

Al igual que en la tabla original, en el primer paso se han listado los valores de las variables de la expresión. En el segundo paso, los valores de $(p \wedge q)$ han sido escritos bajo el símbolo $\wedge$. Igualmente, en el paso 3 se escriben bajo $\to$ los valores de verdad de $(p \to q)$. Los resultados del paso 3 se utilizan para obtener los valores en el paso 4, escribiendo el resultado bajo $\neg$. Finalmente, se utilizan los resultados de los pasos 2 y 4 para calcular los valores de la expresión completa, escritos bajo $\vee$. Note que los valores de verdad escritos en el paso 5 de esta tabla coinciden con los escritos en el paso 5 de la tabla original y que las expresiones son evaluadas en el mismo orden en ambas tablas.

**EJEMPLO 1.9**

Escriba la tabla de verdad de $(p \to q) \wedge [(q \wedge \neg r) \to (p \vee r)]$.

*Solución.*

| | $p$ | $q$ | $r$ | $p \to q$ | $\wedge$ | $[(q\wedge$ | $\neg r)$ | $\to$ | $(p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Pasos | 1 | 1 | 1 | 2 | 5 | 3 | 2 | 4 | 2 |

□

Note que ya que la expresión del ejemplo anterior contiene tres variables, son necesarias ocho filas para listar todos las posibles combinaciones para los valores de verdad de dichas variables. En general, si una expresión contiene $n$ variables, la tabla de verdad resultante deberá tener $2^n$ filas (¿Por qué?).

Dado que nuestra definición de equivalencia depende únicamente del valor de verdad de la expresión, dos proposiciones serán equivalentes si tienen la misma tabla de verdad. Por ejemplo, podemos demostrar que $p \to q$ es lógicamente equivalente[7] a $\neg q \to \neg p$ construyendo la tabla de verdad:

| | | $*$ | | | $*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg q$ | $\neg p$ | $\neg q \to \neg p$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

## 1.4 Tautologías y Contradicciones

Se llama *tautología* a toda proposición cuyo valor de verdad es siempre *verdadero*, sin importar el valor de verdad de las proposiciones componentes.

**EJEMPLO 1.10**

Muestre la tabla de verdad de la tautología clásica $p \to p$:

*Solución*

| $p$ | $p \to p$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |

[7]La definición de *equivalencia lógica* se estudiará más detalladamente en la sección 1.5.

□

**EJEMPLO 1.11**
Muestre que la proposición $[p \wedge (p \to q)] \to q$ es una tautología.
*Solución*

| | $p$ | $q$ | $[p\wedge$ | $(p \to q)]$ | $\to q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Pasos | 1 | 1 | 3 | 2 | 4 |

□

**EJEMPLO 1.12**
Muestre que $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ es una tautología.
*Solución*

| | $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p \vee q)$ | $\leftrightarrow$ | $(\neg p$ | $\wedge$ | $\neg q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Pasos | 1 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 |

□

Por otro lado, una proposición compuesta que siempre es *falsa*, sin importar el valor de verdad de sus componentes, es llamada una *contradicción*.

**EJEMPLO 1.13**
Construya la tabla de verdad de la contradicción clásica $p \wedge \neg p$.
*Solución*

| | $p$ | $\wedge$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 |
| Pasos | 1 | 3 | 2 |

□

Observe que una proposición compuesta $P$ es una contradicción si y sólo si $\neg P$ es una tautología. Es decir, la negación de una tautología es una contradicción y viceversa.

## Ejercicios

1. Construya las tablas de verdad de:
   *a*) $p \wedge \neg p$ *b*) $p \vee \neg p$
   *c*) $\neg(p \wedge q)$ *d*) $\neg(p \vee q)$
   *e*) $p \leftrightarrow \neg p$ *f*) $\neg\neg p$
   *g*) $\neg p \wedge \neg q$ *h*) $\neg p \vee \neg q$

2. Construya las tablas de verdad de:

   *a*) $(p \to q) \to [(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)]$
   *b*) $[(p \vee q) \wedge r] \to (p \wedge \neg q)$
   *c*) $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \to r)] \to (\neg q \wedge p)$
   *d*) $\neg(p \vee q) \to r$
   *e*) $\neg((p \vee q) \to r)$

3. Pruebe o refute lo siguiente usando tablas de verdad:

   a) $(q \to p) \leftrightarrow (p \wedge q)$ es una tautología
   b) $(p \wedge \neg q) \to (p \to q)$ es una tautología
   c) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ es una tautología

   Observación: Basta una línea de la tabla de verdad para mostrar que una proposición no es una tautología.

4. Encuentre una proposición compuesta con los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ para cada una de las siguientes tablas de verdad:

   a)

   | $p$ | $q$ | ??? |
   |---|---|---|
   | 0 | 0 | 1 |
   | 0 | 1 | 0 |
   | 1 | 0 | 1 |
   | 1 | 1 | 1 |

   b)

   | $p$ | $q$ | ??? |
   |---|---|---|
   | 0 | 0 | 0 |
   | 0 | 1 | 1 |
   | 1 | 0 | 1 |
   | 1 | 1 | 0 |

5. a) Escriba una proposición compuesta que sea verdadera cuando exactamente una de las proposiciones $p$, $q$ y $r$ sea verdadera.
   b) Escriba una proposición compuesta que sea verdadera cuando exactamente dos de las tres proposiciones $p$, $q$ y $r$ sean verdaderas.

## 1.5 Equivalencias Lógicas

Hasta ahora hemos tomado cinco palabras comunes, *y*, *o*, *no*, *implica* y *equivalente*, y les hemos dado un significado preciso en el lenguaje común. Obtuvimos la precisión deseada al basar nuestras definiciones únicamente en el valor de verdad de las proposiciones, sin tomar en cuenta cualquier relación causal u otras conexiones que las palabras puedan expresar. En el caso de las primeras tres, *y*, *o* y *no*, las definiciones precisas de la *conjunción*, *disyunción* y *negación*, respectivamente, se ajustan razonablemente bien con el uso común de esas palabras fuera de las matemáticas. En el caso de las últimas dos, *implica* y *equivale*, definimos contrapartes precisas y formales llamadas *condiconal* y *bicondicional*, respectivamente, que tienen algunas propiedades comunes con el significado común de *implica* y *equivale* pero es diferente en otras maneras. Es especialmente esta última la que tendrá nuestra atención en esta sección.

Como se observó en la sección anterior, es posible utilizar tablas de verdad para comprobar que dos expresiones $p$ y $q$ son *lógicamente equivalentes* al observar que ambas

| # | **Equivalencia Lógica** | **Nombre** |
|---|---|---|
| 1 | $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ | Doble negación |
| 2 | a) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$<br>b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$<br>c) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ | Leyes conmutativas |
| 3 | a) $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$<br>b) $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ | Leyes asociativas |
| 4 | a) $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$<br>b) $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ | Leyes distributivas |
| 5 | a) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$<br>b) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ | Leyes de idempotencia |
| 6 | a) $(p \vee c) \Leftrightarrow p$<br>b) $(p \wedge t) \Leftrightarrow p$ | Leyes de identidad |
| 7 | a) $(p \vee t) \Leftrightarrow t$<br>b) $(p \wedge c) \Leftrightarrow c$ | Leyes de dominación |
| 8 | a) $(p \vee \neg p) \Leftrightarrow t$<br>b) $(p \wedge \neg p) \Leftrightarrow c$ | Leyes de negación |
| 9 | a) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$<br>b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$<br>c) $p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$<br>d) $p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ | Leyes de De Morgan |
| 10 | $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ | Contrarrecíproca (o contrapositiva) |
| 11 | a) $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$<br>b) $(p \to q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$<br>c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \to q)$<br>d) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \to \neg q)$ | Implicación |
| 12 | $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$ | Equivalencia |

Tabla 1.1: Algunas equivalencias lógicas. En esta tabla una contradicción es representada por la letra $c$ y una tautología por la letra $t$.

obtienen los mismos valores de verdad para todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de las proposiciones simples que las componen. En tal caso escribimos $p \Leftrightarrow q$, que se lee "$p$ es lógicamente equivalente a $q$".

En nuestra discusión de los conectivos lógicos introdujimos ya algunas equivalencias. Por ejemplo, observamos que $\neg(\neg p)$ es equivalente a $p$, que $p \to q$ es equivalente a $\neg p \vee q$ y que $\neg(p \vee q)$ es equivalente a $\neg p \wedge \neg q$. Estas y otras equivalencias útiles son listadas en la tabla 1.1.

Muchas de las equivalencias en la lista deberían recordarle a reglas similares con los operadores $+$, $-$ y $\cdot$ en álgebra. Como en el álgebra, estas reglas pueden ser aplicadas a expresiones más complejas, y pueden ser combinadas para simplificar equivalencias más complicadas. Cualquiera de las letras en estas equivalencias pueden ser reemplazadas por expresiones complicadas y la equivalencia resultante seguirá siendo verdadera. Por ejemplo, reemplazando $p$ en la ley de doble negación con la fórmula $q \vee \neg r$ es posible ver que $\neg\neg(q \vee \neg r)$ es equivalente a $q \vee \neg r$. Esta observación es importante dado que las equivalencias listadas muestran la *forma* de las mismas, por lo que más que memorizarlas, es útil entender su significado.

Por ejemplo, las leyes conmutativas nos dicen que con los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\leftrightarrow$, el orden de las proposiciones involucradas no es importante. Las leyes distributivas nos dicen que, así como en el álgebra la multiplicación puede ser distribuida sobre la suma (es por esto que $x \cdot (y + w) = x \cdot y + x \cdot w$), el conectivo $\wedge$ puede ser distribuido sobre $\vee$, y $\vee$ puede ser distribuido sobre $\wedge$[8].

Las leyes de identidad y dominación nos muestran el comportamiento de las proposiciones cuando son combinadas en disyunción o conjunción con una tautología o una contradicción. Note que estas leyes son similares al comportamiento de las expresiones algebraicas cuando se les suma o se les multiplica por cero o por uno. Por ejemplo, de la misma manera en que $x \cdot 1$ es igual a $x$ y que $x \cdot 0$ es igual a 0, $p \wedge t$ es equivalente a $p$ y $p \wedge c$ es equivalente a $c$. Así mismo, las leyes de idempotencia y negación describen el comportamiento de las proposiciones cuando son combinadas mediante los operadores $\wedge$ y $\vee$ consigo mismas y con su negación.

Note que, aunque muchas de las leyes de la tabla 1.1 tienen contrapartes en el álgebra al que está acostumbrado el lector, no deben tomarse las leyes del álgebra para el cálculo proposicional. Por ejemplo, cuando se tiene una expresión como $-(x - y)$ en álgebra, es posible "meter el signo menos en el paréntesis" aplicándolo a ambos términos para obtener $-x - (-y) = -x + y$. Sin embargo, en el álgebra proposicional a una expresión como $\neg(q \wedge \neg p)$ *no puede* aplicársele una ley parecida a la anterior para obtener $(\neg p \wedge \neg\neg q)$, que es equivalente a $(\neg p \wedge q)$. Para poder "meter la negación en el paréntesis" cuando el conectivo principal dentro del paréntesis es una conjunción o disyunción, es necesario utilizar la ley de De Morgan que nos dice que, aparte de negar cada una de las proposiciones conectadas, también debe cambiarse la disyunción por conjunción o la conjunción por disyunción.

Como muestran los siguientes ejemplos, las equivalencias de la tabla 1.1 nos permiten simplificar expresiones lógicas o encontrar otras expresiones que, aunque con mayor o menor complejidad, tengan el mismo significado.

**EJEMPLO 1.14**

Demostrar la equivalencia lógica

$$[(p \vee q) \vee (p \vee r)] \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

sustituyendo sucesivamente proposiciones equivalentes.

[8] Note aquí una diferencia con las leyes distributivas del álgebra: aunque la multiplicación puede ser distribuida sobre la suma, la suma no puede ser distribuida sobre la multiplicación. Es decir, en general, $x + y \cdot w \neq (x + y) \cdot (x + w)$.

*Solución.*

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \vee (p \vee r) &\Leftrightarrow [(p \vee q) \vee p] \vee r && \text{ley asociativa}\\
&\Leftrightarrow [p \vee (q \vee p)] \vee r && \text{ley asociativa}\\
&\Leftrightarrow [p \vee (p \vee q)] \vee r && \text{ley conmutativa}\\
&\Leftrightarrow [(p \vee p) \vee q] \vee r && \text{ley asociativa}\\
&\Leftrightarrow (p \vee q) \vee r && \text{ley idempotencia}
\end{aligned}$$

□

**EJEMPLO 1.15**
Encontrar una proposición lógicamente equivalente a

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge q)$$

que no utilice el conectivo $\wedge$.
*Solución.*

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge q) &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge q) && \text{De Morgan}\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(\neg\neg p \vee \neg q) && \text{De Morgan}\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \vee \neg q) && \text{Doble negación}
\end{aligned}$$

Esta última proposición no usa el conectivo $\wedge$.

□

**EJEMPLO 1.16**
Simplificar cada una de las proposiciones siguientes:

a) $(p \vee q) \wedge \neg p$

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \neg p &\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee q) && \text{Conmutativa}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) && \text{Distributiva}\\
&\Leftrightarrow c \vee (\neg p \wedge q) && \text{Negación}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee c && \text{Conmutativa}\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) && \text{Identidad}
\end{aligned}$$

b) $p \vee (p \wedge q)$

$$\begin{aligned} p \vee (p \wedge q) &\Leftrightarrow (p \wedge t) \vee (p \wedge q) && \text{Identidad} \\ &\Leftrightarrow p \wedge (t \vee q) && \text{Distributiva} \\ &\Leftrightarrow p \wedge t && \text{Dominación} \\ &\Leftrightarrow p && \text{Identidad} \end{aligned}$$

c) $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$

$$\begin{aligned} \neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) &\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) && \text{De Morgan} \\ &\Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg q \vee q) && \text{Distributiva} \\ &\Leftrightarrow \neg p \wedge t && \text{Negación} \\ &\Leftrightarrow \neg p && \text{Identidad} \end{aligned}$$

□

Como se mostró en la sección anterior, todos los resultados de los ejemplos anteriores pueden ser comprobados a través de tablas de verdad, asegurándonos que las columnas de las expresiones dadas tengan los mismos valores de verdad para los mismos valores de las variables lógicas.

## Ejercicios

1. Verifique las siguientes equivalencias lógicas (tabla 1.1) utilizando tablas de verdad:
   a) Las leyes distributivas
   b) Las leyes de identidad
   c) La contrarrecíproca
   d) La regla 9-c y 9-d
2. Demuestre utilizando equivalencias lógicas que:
   a) $(p \to \neg q) \Leftrightarrow (q \to \neg p)$
   b) $[(p \wedge q) \to r] \Leftrightarrow [(p \to r) \vee (q \to r)]$
   c) $[p \to (q \to r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$
   d) $[(p \vee r) \wedge (q \to r)] \Leftrightarrow [(p \to q) \to r]$
   e) $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$
   f) $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
3. Demuestre, por medio de equivalencias lógicas, que las siguientes proposiciones son tautologías:
   a) $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \to (q \vee r)$
   b) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
   c) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$
   d) $\neg q \to [(p \wedge q) \to r]$
4. Simplifique (escriba con un mínimo de conectivos):
   a) $\neg(p \vee \neg q)$
   c) $\neg(p \wedge \neg q)$
   b) $\neg(\neg p \to q)$
   d) $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

e) $\neg(\neg p \leftrightarrow q)$

f) $\neg(\neg p \rightarrow \neg q)$

5. Dadas dos proposiciones $p$ y $q$, el conectivo "ó excluible", simbolizado por $p \oplus q$, es verdadero cuando únicamente $p$ es verdadera o cuando únicamente $q$ es verdadera.

    a) Construya la tabla de verdad de $p \oplus q$.

    b) Muestre que $p \oplus q$ tiene la misma tabla de verdad que $\neg(p \leftrightarrow q)$.

    c) Construya una tabla de verdad para $p \oplus p$, $(p \oplus q) \oplus r$ y $(p \oplus p) \oplus p$.

6. Muestre que $(p \oplus q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)]$, donde $\oplus$ es el "o excluible" introducido en el ejercicio 5.

7. Demuestre o refute que

    a) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

    b) $[p \oplus (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus r)]$

8. Toda proposición compuesta se puede escribir utilizando únicamente los conectivos $\neg$ y $\vee$. Esto resulta de las equivalencias:

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$
$$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$
$$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

    Encuentre proposiciones lógicamente equivalentes a las siguientes, utilizando solamente los conectivos $\neg$ y $\vee$.
    a) $p \leftrightarrow q$ b) $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$
    c) $(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r)$ d) $p \oplus q$

9. La *raya de Sheffer* es el conectivo | definido por la tabla de verdad:

---

**Charles Sanders Peirce (1839-1914)** fue un lógico, matemático, filósofo y científico nacido en Cambridge, Massachusetts, E.E. U.U. Hijo de Sarah Hunt y Benjamin Peirce, un profesor de astronomía y matemática en la Universidad de Harvard. A los 12 años, Charles leyó una copia del libro *Elementos de Lógica*, para ese entonces el libro de texto líder en la materia, lo que comenzó su fascinación con la lógica y el razonamiento. Obtuvo su Licenciatura y Maestría en Harvard y una Maestría en química de la Lawrence Scientific School.

Entre 1859 y 1891, Charles se empleó intermitentemente en el Servicio Costero Estadounidense, donde trabajó principalmente en geodesia y gravimetría, refinando el uso de péndulos para determinar pequeñas variaciones locales en la fuerza de gravedad terrestre. Este trabajo lo libró de tomar parte de la guerra civil estadounidense. De 1869 a 1872, trabajó como asistente en el observatorio astronómico de Harvard, realizando importantes avances en la determinación de la brillantez de las estrellas y la forma de la Vía Láctea. En 1878, fue el primero en definir el metro en términos de la longitud de onda de la luz a cierta frecuencia, definición utilizada hasta 1983. En 1891, Peirce fue obligado a renunciar a su puesto en el Servicio.

De 1879 a 1883, Peirce fue nombrado profesor de lógica en la Universidad John Hopkins, el cual fue el único puesto académico que ocupó durante su vida. En los últimos años de su vida, Peirce vivió con duras limitaciones económicas debido al desempleo, viviendo principalmente de consultorías mal pagadas y de donaciones de amigos, especialmente de William James, quien desde 1898 hasta 1910 escribió a sus amigos académicos, pidiéndoles hacer contribuciones económicas para mantener a Peirce.

Peirce realizó una serie de admirables descubrimientos en matemáticas, que casi en su totalidad fueron apreciados únicamente después de su muerte. Entre otros aportes, mostró que lo que ahora llamamos *Álgebra Booleana* podía ser expresada por medio de una sola operación binaria, anticipándose por 33 años a Sheffer. Además, se anticipó por más de 50 años a la observación que cálculos booleanos pueden ser realizados con dispositivos eléctricos, idea que se utilizó años más tarde para producir computadoras digitales. Sentó las bases para la teoría axiomática de conjuntos, anticipándose a Zermelo por casi dos décadas. Descubrió la axiomatización de la aritmética de los números naturales unos cuantos años antes que Dedekind y Peano. Descubrió, independientemente de Dedekind, la importante definición formal de un conjunto infinito.

Aunque descrito por Bertrand Russell como "sin lugar a dudas [...] fue una de las mentes más originales de finales de siglo diecinueve, y ciertamente el más grande pensador Estadounidense de todos los tiempos", Peirce fue en gran parte ignorado durante su vida, y la literatura acerca de él fue escasa hasta después de la Segunda Guerra Mundial. Después de su muerte se descubrieron cerca de 1650 manuscritos, totalizando cerca de 100,000 páginas, muchos de los cuales siguen sin publicarse hasta este día.