Problemas de derivación e integración
Derivación numérica
Extrapolación de Richardson.

(1) Completa la tabla siguiente usando las fórmulas de los tres puntos usando la del punto medio cuando sea posible:

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.136	
0.9	0.261	
1	0.368	
1.1	0.461	
1.2	0.544	
1.3	0.617	

(2) Usando los datos del ejercicio anterior completa la tabla siguiente hallando fórmulas para calcular $f''(x)$ de orden $O(h^k)$, con k el más alto posible:

x	$f(x)$	$f''(x)$
0.8	0.136	
0.9	0.261	
1	0.368	
1.1	0.461	
1.2	0.544	
1.3	0.617	

(3) Las tablas de los ejercicios anteriores corresponden a la función $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} + \ln(x)$. Hallar una cota de los errores cometidos en los dos ejercicios en las aproximaciones usadas.

(4) Sea $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} + \ln(x)$. Definimos las aproximaciones siguientes para calcular $f'(1)$:

$$f'_n = \frac{f(1 + 10^{-n}) - f(1)}{10^{-n}},$$

para $n = 1, 2, \ldots, 20$. Haz un gráfico de los errores $e_n = |f'_n - f'(1)|$ en función de n y hallar el valor de n para el que dicho error es mínimo.

(5) Usando extrapolación de Richardson, aproxima $f'(1)$ para $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x} + \ln(x)$ con error de orden $O(h^6)$ con $h = 0.1$ usando la fórmula siguiente para aproximar $f'(x)$:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

(6) a. Demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{2+h}{2-h} \right)^{\frac{1}{h}} = \mathrm{e}.$$

b. Calcula aproximaciones de e usando la fórmula $N(h) = \left(\frac{2+h}{2-h}\right)^{\frac{1}{h}}$, para $h = 0.04, 0.02$ y 0.01.

c. Suponga que $\mathrm{e} = N(h) + k_1 h^2 + k_2 h^4 + k_3 h^6 + \cdots$. Usando extrapolación de Richardson, hallar una aproximación de e de orden $O(h^6)$ para $h = 0.04$. ¿Crees que la suposición anterior es correcta? Razona la respuesta.
Indicación: observar que $N(-h) = N(h)$.