Problemas de interpolación.
Diferencias divididas. Interpolación de Hermite.
Splines cúbicos.

(1) Usando el método de las diferencias divididas, halla el polinomio de interpolación de la función $f(x) = \sin(\pi x) - x^2$ en los nodos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1, x_4 = 2$. Usar el polinomio anterior para hallar una aproximación de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Calcular una cota del error cometido al aproximar $f(x)$ por el polinomio de interpolación para x en el intervalo $[-2, 2]$.

(2) La tabla siguiente corresponde a los valores de un polinomio de grado desconocido:

x	0	1	2
$P(x)$	2	-1	4

Determina el coeficiente de x^2 en la expresión de $P(x)$ sabiendo que todas las diferencias divididas hacia adelante de tercer orden valen 1.

(3) Un polinomio de grado 4 satisface lo siguiente:

$$\Delta^4 P(0) = 24, \quad \Delta^3 P(0) = 6, \quad \Delta^2 P(0) = 0,$$

donde $\Delta P(x) = P(x+1) - P(x)$. Calcular $\Delta^2 P(10)$.

(4) Sea $i_0, i_1, \ldots, i_n$ una permutación de la sucesión de enteros $0, 1, \ldots, n$. Demostrar que:

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

Indicación: Considerar el coeficiente de grado mayor del n-ésimo polinomio interpolador para los datos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$.

(5) Usando el método de las diferencias divididas generalizadas, halla el polinomio de interpolación de Hermite de la función $f(x) = \sin(\pi x) - x^2$ en los nodos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1, x_4 = 2$. Usar el polinomio anterior para hallar una aproximación de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(6) Halla el spline cúbico natural que interpola la función $f(x) = \sin(\pi x) - x^2$ en los nodos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1, x_4 = 2$. Usar el polinomio anterior para hallar una aproximación de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

(7) Repetir el ejercicio anterior pero ahora considerando un spline cúbico de frontera fija.

(8) Demostrar que si $f(x)$ es un polinomio de grado 3 y $S_c(x)$ es el spline cúbico de frontera fija interpolador de f en unos ciertos nodos x_i, $i = 0, \ldots, n$, para un cierto n, entonces $f(x) = S_c(x)$ para todo valor de x. ¿Es cierta la condición anterior si en lugar de considerar el spline cúbico de frontera fija, consideramos el spline cúbico natural?