Problemas de Ceros.
Métodos de la secante, Newton-Raphson y regula-falsi.
Orden de convergencia. Ceros múltiples. Ceros de polinomios.

(1) Usando los métodos de la secante, Newton-Raphson y regula-falsi, calcular el cero en el intervalo indicado de las funciones siguientes con un error $\epsilon = 10^{-6}$ usando el criterio de parada $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$:

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + 2\cos x - 7 = 0$, para x en el intervalo $[2, 3]$.
b) $f(x) = \ln x - \frac{1}{20}\mathrm{e}^x = 0$, para x en el intervalo $[1, 2]$.

(2) Usando las sucesiones generadas en el apartado b) del ejercicio anterior, estimar el orden de convergencia de los métodos de la secante, Newton-Raphson y regula-falsi.

(3) Aplica el método de Newton-Raphson para resolver la ecuación $x^2 \ln^2 x - 2x\ln x + 1 = 0$, para $x > 0$.

- Estimar el orden de convergencia. ¿Tiene el orden de convergencia esperado? En caso negativo, ¿podéis dar una explicación del fenómeno?
- Modificar el método de Newton-Raphson para que tenga el orden de convergencia esperado.

(4) Sea $\hat{x}$ un cero de multiplicidad m de la función f que suponemos de clase $\mathcal{C}^{m+1}$. Usamos el siguiente método iterativo para hallar un cero de $f(x) = 0$,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{m \cdot f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

- ¿Cuál es el orden de convergencia del método anterior?
- Aplicar el método anterior al problema anterior y estimar el orden de convergencia hallado en el apartado anterior.

(5) Aplicar los métodos de Aitken y Steffensen a la sucesión generada en el primer apartado del problema (3). Estimar los ordenes de convergencia de las sucesiones halladas.

(6) Se dice que una sucesión $(x_n)_n$ es convergente en orden superlineal hacia $\hat{x}$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \hat{x}|}{|x_n - \hat{x}|} = 0.$$

a. Demostrar que si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$ y y $(x_n)_n$ tiene orden de convergencia α con $\alpha > 1$, entonces $(x_n)_n$ es convergente en orden superlineal hacia $\hat{x}$.
b. Demostrar que la sucesión $x_n = \frac{1}{n^n}$ es convergente en orden superlineal hacia 0 pero no tiene orden de convergencia α para cualquier $\alpha > 1$.
c. Demostrar que si $(x_n)_n$ es convergente en orden superlineal hacia $\hat{x}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - \hat{x}|} = 1.$$

(7) Calcular todos los ceros de los polinomios siguientes usando el método de Newton-Raphson, el método de Horner para evaluar la función y la derivada y el método de la deflación:

- $p(x) = x^3 - 5x^2 + 5 = 0$.
- $p(x) = 5x^5 - 75x^4 + 425x^3 - 1125x^2 + 1370x - 597$.

(8) Usando el método de Müller, hallar todos los ceros del polinomio: $p(x) = x^3 - 5x + 10 = 0$.