Problemas de Ceros.
Método de la bisección y método de punto fijo.

(1) Usar el método de la bisección para hallar los ceros de las funciones siguientes en los intervalos indicados con un error menor que $\epsilon = 10^{-5}$. Hacerlo usando los dos criterios de parada vistos en los apuntes: (i) $|f(x_n)| \leq \epsilon$ y (ii) $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$.

- $f(x) = x - 3^{-x}$, para $0 \leq x \leq 1$.
- $f(x) = \mathrm{e}^x - x^2 + 2x - 3$, para $0 \leq x \leq 2$.

(2) Usar el método de la bisección para hallar el primer cero $\hat{x} > 0$ tal que $\tan x = x$. Calcularlo con un error menor que $\epsilon = 0.0001$. Usar el criterio de parada $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$.

(3) Queremos resolver la ecuación $f(x) = x^3 - 4x + 1 = 0$ para x entre 0 y 1. Para ello usamos el método del punto fijo $x_n = g_i(x_{n-1})$ con las funciones g siguientes: (i) $g_1(x) = \frac{x^3+1}{4}$; (ii) $g_2(x) = \sqrt[3]{4x-1}$; (iii) $g_3(x) = \sqrt{4 - \frac{1}{x}}$.

a) Demostrar que algebraicamente es equivalente que x verifique que $f(x) = 0$ a que x verifique $x = g_i(x)$, con $i = 1, 2, 3$.
b) Considerar $x_0 = 0.5$, ¿cuál de las sucesiones asociadas al método del punto fijo con $g = g_i$, $i = 1, 2, 3$ converge a un cero de f en el intervalo $[0, 1]$.
c) ¿Podríais dar una explicación teórica a lo observado en el apartado anterior?

(4) Para cada una de las ecuaciones siguientes, determinar el intervalo $[a, b]$ donde el método del punto fijo converge. Hallar el punto fijo con un error de $\epsilon = 10^{-6}$ usando el criterio de parada $|x_n - x_{n-1}| \leq \epsilon$.

a) $x - \cos x = 0$.
b) $x^2 - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$, donde $0 < x < 3$.

(5) Demostrar que si $A > 0$ es un número real positivo, la sucesión definida por

$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{A}{2x_{n-1}}, \; n \geq 1,$$

converge a $\sqrt{A}$ siempre que $x_0 > 0$.
Indicación: Definir $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{A}{2x}$. Hallar un intervalo $[a, b]$ tal que si $x \in [a, b]$, entonces $g(x) \in [a, b]$.
Probar con $[a, b] = \left[\sqrt{A}, \infty\right)$.
Estudiar el caso $x_0 < 0$.