

# Notas de clase de Probabilidad y Estadística

## Volumen 4: Modelos lineales generalizados (GLM)

Versión 1 (Agosto 17, 2017)

**Dr. rer. nat. Humberto LLinás Solano**

Doctor en Estadística (Mainz-Alemania)  
Profesor Asociado/Investigador Asociado  
hllinas@uninorte.edu.co

Departamento de Matemáticas y Estadística  
**Universidad del Norte**  
([www.uninorte.edu.co](http://www.uninorte.edu.co)).



# ÍNDICE GENERAL

## **PREFACIO** **PÁGINA 3**

|              |   |
|--------------|---|
| Introducción | 3 |
| El autor     | 3 |

## **1** **MODELOS LINEALES GENERALIZADOS** **PÁGINA 5**

|       |                                              |   |
|-------|----------------------------------------------|---|
| 1.1   | Componentes de un modelo lineal generalizado | 5 |
| 1.1.1 | Componente aleatoria                         | 5 |
| 1.1.2 | Componente sistemática                       | 5 |
| 1.1.3 | Componente de enlace                         | 6 |
| 1.2   | Modelo lineal                                | 6 |
| 1.3   | Modelo loglineal                             | 7 |
| 1.4   | Modelo logit (Modelo logístico)              | 7 |
| 1.5   | Otros modelos                                | 7 |

## **A** **APÉNDICE DE TABLAS** **PÁGINA 9**

|    |                                                                |    |
|----|----------------------------------------------------------------|----|
| 1. | Distribución binomial                                          | 9  |
| 2. | Distribución de Poisson                                        | 12 |
| 3. | Distribución normal estándar                                   | 13 |
| 4. | Distribución $t$ de Student                                    | 15 |
| 5. | Distribución chi-cuadrada                                      | 16 |
| 6. | Distribución $F$ de Fisher                                     | 18 |
| 7. | Algunas distribuciones discretas                               | 22 |
| 8. | Algunas distribuciones continuas                               | 22 |
| 9. | Resumen de distribuciones muestrales e intervalos de confianza | 23 |

## **B** **GUÍA RÁPIDA PARA TRABAJAR CON STATGRAPHICS** **PÁGINA 27**

|     |                                                     |    |
|-----|-----------------------------------------------------|----|
| B.1 | Análisis de un solo conjunto de datos               | 27 |
| B.2 | Análisis simultáneo de dos o más conjuntos de datos | 27 |
| B.3 | Gráficos de dispersión                              | 28 |
| B.4 | Diagramas de presentación                           | 28 |

|     |                                         |    |
|-----|-----------------------------------------|----|
| B.5 | Variables numéricas multidimensionales  | 29 |
| B.6 | Distribuciones de probabilidad          | 29 |
| B.7 | Inferencias basadas en una sola muestra | 29 |
| B.8 | Inferencias basadas en dos muestras     | 30 |
| B.9 | Bondad de ajuste                        | 30 |

**C****GUÍA RÁPIDA PARA TRABAJAR CON SPSS** **PÁGINA 31**

|       |                                        |    |
|-------|----------------------------------------|----|
| C.1   | Definición de las variables            | 31 |
| C.1.1 | Transformación de una variable         | 32 |
| C.1.2 | Recodificación de una Variable         | 33 |
| C.1.3 | Filtrado de datos                      | 33 |
| C.2   | Análisis exploratorio de datos         | 34 |
| C.3   | Inferencia sobre una o más poblaciones | 35 |

**D****USO DE LA CALCULADORA EN LA ESTADÍSTICA** **PÁGINA 37****BIBLIOGRAFÍA & REFERENCIAS** **PÁGINA 39**



# Prefacio

## Introducción

---

Estas notas de clase hacen parte de un compendio de varios volúmenes y están dirigido a todo tipo de público que requiere de algún conocimiento básico en Estadística.

## El autor

---

Humberto Jesús Llinás Solano es Licenciado en Ciencias de la Educación, con énfasis en Matemáticas, Física y Estadística de la Universidad del Atlántico (Colombia). Magister en Matemáticas, convenio Universidad del Valle-Universidad del Norte (Colombia). Doctor en Estadística (Dr. rer. nat.) de la Universidad Johannes Gutenberg de Mainz (Alemania). Desde 1998 se desempeña como profesor de tiempo completo de la Universidad del Norte y forma parte de los grupos de investigación Matemáticas y Enfermedades tropicales de dicha institución. Autor de los productos<sup>1</sup>:

- *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad* (2005, [6])
- *Estadística inferencial* (2006, [8])
- *Una visión histórica del concepto moderno de integral* (como editor, 2006, [4])
- *Medida e integración* (2007, [9])
- *Applets de estadística* (2007, [11])
- *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales* (2012, [12])
- *Procesos estocásticos con aplicaciones* (como coautor, 2013, [2])
- *Introducción a la estadística matemática* (2014, [13])
- *Introducción a la teoría de la probabilidad* (2014, [14])

**Para más referencias y otros productos de mi autoría, pueden consultarse:**

- [Rpubs](#)
- [CVLAC](#)
- [ORCID](#)
- [Google Scholar](#)

---

<sup>1</sup>Se cita el título del texto o applet, el año de publicación y la referencia bibliográfica respectiva. Cuando sea necesario, un comentario adicional.



# 1

## Modelos lineales generalizados

En este capítulo, se presentan los modelos lineales generalizados, debido a que los modelos logísticos, al igual que los modelos lineales y loglineales, son una clase particular de ellos. También, se explican, brevemente, algunas diferencias entre los modelos lineales y logísticos, básicamente, en cuanto a los métodos de estimación y pruebas de hipótesis y se describen los diferentes tipos de modelos lineales, así como, las correspondientes estimaciones y pruebas de hipótesis.

### 1.1 Componentes de un modelo lineal generalizado

---

El modelo lineal generalizado o, más brevemente, GLM (en inglés: **General Linear Model**) es una clase bastante amplia de modelos introducidos por Nelder y Wedderburn (1972)<sup>1</sup> y está especificado por tres componentes: aleatoria, sistemática y de enlace. Explicaremos cada una de ellas.

#### 1.1.1. Componente aleatoria

Una *componente aleatoria*, que identifica la distribución de probabilidad de la variable dependiente. Consiste de observaciones independientes  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  de una distribución en la familia exponencial natural (el exponente  $T$  representa a la transpuesta). Esto es, cada variable muestral  $Y_i$  tiene función de densidad de la forma

$$f(y_i, \theta_i, \phi) = G(y_i, \phi) \cdot \exp \left[ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi)} \right] \quad (1.1)$$

donde los  $\theta_i$  son los llamados *parámetros naturales* de la distribución y  $\phi$  es el llamado *parámetro de dispersión* que puede existir o no. Es conveniente usar, en la ecuación (2.1), los parámetros naturales; aunque, a veces, son funciones de otros parámetros originalmente dados en el modelo.

#### 1.1.2. Componente sistemática

Una *componente sistemática*, que especifica una función lineal de los valores fijados  $x_{1i}, \dots, x_{Ki}$  de las variables explicativas  $X_1, \dots, X_K$ , dadas por

$$\eta_i := \delta + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_K x_{Ki}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

donde los  $\beta_k$  son los llamados *parámetros del modelo lineal generalizado*, incluyendo el llamado *intercepto* como  $\delta = \beta_0$ , siendo  $x_{0i} = 1$ . Se ha adoptado el orden del subíndice de cada valor fijado  $x_{ki}$  de  $X_k$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, K$  como  $ki$  y

---

<sup>1</sup>Ver [15]



no como  $ik$  para resaltar el hecho de que, primero, se tienen las variables  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_K$  (por eso, cada  $k$  como primer índice) y, luego, se hacen las observaciones (por eso,  $i$  como segundo índice). Si se reúnen los valores observados de las variables explicativas en la llamada “matriz de diseño”

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{K1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{Kn} \end{pmatrix},$$

de tamaño  $n \times (1 + K)$ , los parámetros del modelo en el vector  $\alpha = (\delta, \beta_1, \dots, \beta_K)^T$  y los  $\hbar_i$  en el vector  $\hbar = (\hbar_1, \dots, \hbar_n)^T$ , entonces, la expresión (2.2) puede ser escrita en forma vectorial como

$$\hbar = C \cdot \alpha$$

### 1.1.3. Componente de enlace

Una *componente de enlace* entre las componentes aleatoria y sistemática. Sea  $\mu_i$  la esperanza condicional de  $Y_i$  dada la condición  $x_{1i}, \dots, x_{Ki}$ , es decir,  $\mu_i := E(Y_i | x_{1i}, \dots, x_{Ki})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Entonces, este enlace está dado por una llamada “función de enlace”

$$g(\mu_i) = \hbar_i.$$

Particularmente, interesa el llamado *enlace canónico*, definido por

$$g(\mu_i) = \theta_i,$$

en cuyo caso resultan  $\theta_i = \hbar_i$ , y el enlace está descrito por la expresión

$$\theta_i = \delta + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_K x_{Ki}.$$

## 1.2 Modelo lineal

Supongamos que la variable  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  está normalmente distribuida con esperanza  $\mu_i$  y varianza  $\sigma^2$ . La función de densidad en los valores  $y_i$  viene dada por

$$\begin{aligned} f(y_i, \mu_i, \sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - \mu_i)^2 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{y_i^2}{2\sigma^2} \right] \cdot \exp \left[ \frac{y_i \mu_i - \mu_i^2/2}{\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

Aquí,  $\theta_i = \mu_i$  ya son los parámetros naturales y se tiene  $\phi = \sigma^2$  como parámetro de dispersión, siendo:

$$\begin{aligned} b(\theta_i) &= \frac{\mu_i^2}{2}, \\ a(\sigma^2) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

El enlace canónico está dado por la función identidad

$$g(\mu_i) = \mu_i.$$

Los GLMs que usan el enlace *identidad* son llamados modelos *lineales*

## 1.3 Modelo loglineal

---

Supongamos que la  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es una variable de Poisson con parámetro  $\tau_i$ . Su función de densidad viene dada por

$$f(y_i, \tau_i) = \frac{1}{y_i!} \cdot 1_{\{0,1,2,\dots\}}(y_i) \cdot \exp[y_i \log \tau_i - \tau_i],$$

donde log siempre será el logaritmo natural y

$$1_{\{0,1,2,\dots\}}(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i \in \{0, 1, 2, \dots\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los parámetros naturales son  $\theta_i = \log \tau_i$ , siendo  $b(\theta_i) = \exp[\theta_i]$ . El enlace canónico es

$$g(\tau_i) = \log \tau_i.$$

Los GLMs que usan el enlace *log* son llamados modelos *loglineales*.

## 1.4 Modelo logit (Modelo logístico)

---

Muchas variables categóricas tienen únicamente dos categorías. La observación para cada caso puede ser clasificada como éxito o fracaso. En este caso, la variable  $Y_i$  tiene distribución de Bernoulli con parámetro  $p_i$ . Su función de densidad es

$$f(y_i, p_i) = 1_{\{0,1\}}(y_i) \cdot \exp \left[ y_i \log \left( \frac{p_i}{1-p_i} \right) - \log \left( \frac{1}{1-p_i} \right) \right].$$

Los parámetros naturales son  $\theta_i = \log \left( \frac{p_i}{1-p_i} \right)$ , siendo

$$b(\theta_i) = \log(1 + \exp[\theta_i]).$$

El enlace canónico

$$g(p_i) = \log \left( \frac{p_i}{1-p_i} \right)$$

es llamado el logit de  $p_i$ . Los GLMs que usan el enlace logit son llamados modelos *logit* o *logísticos*.

## 1.5 Otros modelos

---

Los modelos anteriores y otros que hacen parte de los GLM se pueden ver en la tabla de abajo.

| Distribucion   | $a(\phi)$     | $\theta$                                    | $\phi$ | $b(\theta)$          | $c(y, \theta)$                                                                          |
|----------------|---------------|---------------------------------------------|--------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Normal         | $\phi$        | $\mu$ (identidad)                           |        | $\frac{\theta^2}{2}$ | $-\frac{1}{2} \left[ \frac{y^2}{\phi} + \ln(2\pi\phi) \right]$                          |
| Binomial       | $\frac{1}{n}$ | $\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$ (logística) |        | $\ln(1 + e^\theta)$  | $\ln\binom{n}{ny}$                                                                      |
| Poisson        | 1             | $\ln(\mu)$ (logarítmica)                    |        | $e^\theta$           | $-\ln(y!)$                                                                              |
| Exponencial    |               | $\frac{1}{\mu}$ (recíproca)                 |        |                      |                                                                                         |
| Gamma          | $\phi$        | $\frac{1}{\mu}$ (recíproca)                 |        | $-\ln(-\theta)$      | $\frac{1}{\phi^{-2}} \ln\left(\frac{y}{\theta}\right) - \ln(y) - \ln \Gamma(\phi^{-1})$ |
| Normal inversa | $\phi$        |                                             |        | $-\sqrt{-2\theta}$   | $-\frac{1}{2} \left[ \ln(\pi\phi y^3) + \frac{1}{(\phi y)} \right]$                     |

# A

## Apéndice de tablas

### 1. Distribución binomial

Las tablas (a)-(e) muestran la probabilidad  $P(X \leq k) = B(k; n, p)$  de que ocurran máximo  $k$  éxitos en  $n$  ensayos independientes, cada uno con probabilidad de éxito  $p$ .

Estas probabilidades se calculan para  $n = 5, 10, 15, 20$  y  $25$ , respectivamente.

#### (a) Tabla binomial para $n = 5$

|   | $p$   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| k | 0,05  | 0,10  | 0,20  | 0,25  | 0,30  | 0,40  | 0,50  | 0,60  | 0,70  | 0,75  | 0,80  | 0,90  | 0,95  |
| 0 | 0,774 | 0,590 | 0,328 | 0,237 | 0,168 | 0,078 | 0,031 | 0,010 | 0,002 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1 | 0,977 | 0,919 | 0,737 | 0,633 | 0,528 | 0,337 | 0,188 | 0,087 | 0,031 | 0,016 | 0,007 | 0,000 | 0,000 |
| 2 | 0,999 | 0,991 | 0,942 | 0,896 | 0,837 | 0,683 | 0,500 | 0,317 | 0,163 | 0,104 | 0,058 | 0,009 | 0,001 |
| 3 | 1,000 | 1,000 | 0,993 | 0,984 | 0,969 | 0,913 | 0,812 | 0,663 | 0,472 | 0,367 | 0,263 | 0,081 | 0,023 |
| 4 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,999 | 0,998 | 0,990 | 0,969 | 0,922 | 0,832 | 0,763 | 0,672 | 0,410 | 0,226 |
| 5 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |

#### (b) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 10$

|   | $p$   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| k | 0,05  | 0,10  | 0,20  | 0,25  | 0,30  | 0,40  | 0,50  | 0,60  | 0,70  | 0,75  | 0,80  | 0,90  | 0,95  |
| 0 | 0,599 | 0,349 | 0,107 | 0,056 | 0,028 | 0,006 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1 | 0,914 | 0,736 | 0,376 | 0,244 | 0,149 | 0,046 | 0,011 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 2 | 0,988 | 0,930 | 0,678 | 0,526 | 0,383 | 0,167 | 0,055 | 0,012 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 3 | 0,999 | 0,987 | 0,879 | 0,776 | 0,650 | 0,382 | 0,172 | 0,055 | 0,011 | 0,004 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| 4 | 1,000 | 0,998 | 0,967 | 0,922 | 0,850 | 0,633 | 0,377 | 0,166 | 0,047 | 0,020 | 0,006 | 0,000 | 0,000 |
| 5 | 1,000 | 1,000 | 0,994 | 0,980 | 0,953 | 0,834 | 0,623 | 0,367 | 0,150 | 0,078 | 0,033 | 0,002 | 0,000 |
| 6 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,996 | 0,989 | 0,945 | 0,828 | 0,618 | 0,350 | 0,224 | 0,121 | 0,013 | 0,001 |
| 7 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,988 | 0,945 | 0,833 | 0,617 | 0,474 | 0,322 | 0,070 | 0,012 |
| 8 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,989 | 0,954 | 0,851 | 0,756 | 0,624 | 0,264 | 0,086 |
| 9 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,994 | 0,972 | 0,944 | 0,893 | 0,651 | 0,401 |

**(c) Probabilidades binomiales acumuladas para  $n = 15$** 

| k  | $p$   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 0,05  | 0,10  | 0,20  | 0,25  | 0,30  | 0,40  | 0,50  | 0,60  | 0,70  | 0,75  | 0,80  | 0,90  | 0,95  |
| 0  | 0,463 | 0,206 | 0,305 | 0,013 | 0,005 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1  | 0,829 | 0,549 | 0,167 | 0,080 | 0,035 | 0,005 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 2  | 0,964 | 0,816 | 0,398 | 0,236 | 0,127 | 0,027 | 0,004 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 3  | 0,995 | 0,944 | 0,648 | 0,461 | 0,297 | 0,091 | 0,018 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 4  | 0,999 | 0,987 | 0,836 | 0,686 | 0,515 | 0,217 | 0,059 | 0,009 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5  | 1,000 | 0,998 | 0,939 | 0,852 | 0,722 | 0,403 | 0,151 | 0,034 | 0,004 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 6  | 1,000 | 1,000 | 0,982 | 0,943 | 0,869 | 0,610 | 0,304 | 0,095 | 0,015 | 0,004 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| 7  | 1,000 | 1,000 | 0,996 | 0,983 | 0,950 | 0,787 | 0,500 | 0,213 | 0,050 | 0,017 | 0,004 | 0,000 | 0,000 |
| 8  | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,996 | 0,985 | 0,905 | 0,696 | 0,390 | 0,131 | 0,057 | 0,018 | 0,000 | 0,000 |
| 9  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,996 | 0,966 | 0,849 | 0,597 | 0,278 | 0,148 | 0,061 | 0,002 | 0,000 |
| 10 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,991 | 0,941 | 0,783 | 0,485 | 0,314 | 0,164 | 0,013 | 0,000 |
| 11 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,982 | 0,909 | 0,703 | 0,539 | 0,352 | 0,056 | 0,005 |
| 12 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,996 | 0,973 | 0,873 | 0,764 | 0,602 | 0,184 | 0,036 |
| 13 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,995 | 0,965 | 0,920 | 0,833 | 0,451 | 0,171 |
| 14 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,995 | 0,987 | 0,965 | 0,794 | 0,537 |

**(d) Probabilidades binomiales acumuladas para  $n = 20$** 

| k  | $p$   |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 0,05  | 0,10  | 0,20  | 0,25  | 0,30  | 0,40  | 0,50  | 0,60  | 0,70  | 0,75  | 0,80  | 0,90  | 0,95  |
| 0  | 0,358 | 0,122 | 0,012 | 0,003 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1  | 0,736 | 0,392 | 0,069 | 0,024 | 0,008 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 2  | 0,925 | 0,677 | 0,206 | 0,091 | 0,035 | 0,004 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 3  | 0,984 | 0,867 | 0,411 | 0,225 | 0,107 | 0,016 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 4  | 0,997 | 0,957 | 0,630 | 0,415 | 0,238 | 0,051 | 0,006 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5  | 1,000 | 0,989 | 0,804 | 0,617 | 0,416 | 0,126 | 0,021 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 6  | 1,000 | 0,998 | 0,913 | 0,786 | 0,608 | 0,250 | 0,058 | 0,006 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 7  | 1,000 | 1,000 | 0,968 | 0,898 | 0,772 | 0,416 | 0,132 | 0,021 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 8  | 1,000 | 1,000 | 0,990 | 0,959 | 0,887 | 0,596 | 0,252 | 0,057 | 0,005 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 9  | 1,000 | 1,000 | 0,997 | 0,986 | 0,952 | 0,755 | 0,412 | 0,128 | 0,017 | 0,004 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |
| 10 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,996 | 0,983 | 0,872 | 0,588 | 0,245 | 0,048 | 0,014 | 0,003 | 0,000 | 0,000 |
| 11 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,995 | 0,943 | 0,748 | 0,404 | 0,113 | 0,041 | 0,010 | 0,000 | 0,000 |
| 12 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,979 | 0,868 | 0,584 | 0,228 | 0,102 | 0,032 | 0,000 | 0,000 |
| 13 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,994 | 0,942 | 0,750 | 0,392 | 0,214 | 0,087 | 0,002 | 0,000 |
| 14 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,979 | 0,874 | 0,584 | 0,383 | 0,196 | 0,011 | 0,000 |
| 15 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,994 | 0,949 | 0,762 | 0,585 | 0,370 | 0,043 | 0,003 |
| 16 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,984 | 0,893 | 0,775 | 0,589 | 0,133 | 0,016 |
| 17 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,996 | 0,965 | 0,909 | 0,794 | 0,323 | 0,075 |
| 18 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,992 | 0,976 | 0,931 | 0,608 | 0,264 |
| 19 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,997 | 0,988 | 0,878 | 0,642 |

**(e) Probabilidades binomiales acumuladas para  $n = 25$**

| k  | p     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 0,05  | 0,10  | 0,20  | 0,25  | 0,30  | 0,40  | 0,50  | 0,60  | 0,70  | 0,75  | 0,80  | 0,90  | 0,95  |
| 0  | 0,277 | 0,072 | 0,004 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1  | 0,642 | 0,271 | 0,027 | 0,007 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 2  | 0,873 | 0,537 | 0,098 | 0,032 | 0,009 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 3  | 0,966 | 0,764 | 0,234 | 0,096 | 0,033 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 4  | 0,993 | 0,902 | 0,421 | 0,214 | 0,090 | 0,009 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 5  | 0,999 | 0,967 | 0,617 | 0,378 | 0,193 | 0,029 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 6  | 1,000 | 0,991 | 0,780 | 0,561 | 0,341 | 0,074 | 0,007 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 7  | 1,000 | 0,998 | 0,891 | 0,727 | 0,512 | 0,154 | 0,022 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 8  | 1,000 | 1,000 | 0,953 | 0,851 | 0,677 | 0,274 | 0,054 | 0,004 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 9  | 1,000 | 1,000 | 0,983 | 0,929 | 0,811 | 0,425 | 0,115 | 0,013 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 10 | 1,000 | 1,000 | 0,994 | 0,970 | 0,902 | 0,586 | 0,212 | 0,034 | 0,002 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 11 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,980 | 0,956 | 0,732 | 0,345 | 0,078 | 0,006 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 12 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,997 | 0,983 | 0,846 | 0,500 | 0,154 | 0,017 | 0,003 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 13 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,994 | 0,922 | 0,655 | 0,268 | 0,044 | 0,020 | 0,002 | 0,000 | 0,000 |
| 14 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,966 | 0,788 | 0,414 | 0,098 | 0,030 | 0,006 | 0,000 | 0,000 |
| 15 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,987 | 0,885 | 0,575 | 0,189 | 0,071 | 0,017 | 0,000 | 0,000 |
| 16 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,996 | 0,946 | 0,726 | 0,323 | 0,149 | 0,047 | 0,000 | 0,000 |
| 17 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,978 | 0,846 | 0,488 | 0,273 | 0,109 | 0,002 | 0,000 |
| 18 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,993 | 0,926 | 0,659 | 0,439 | 0,220 | 0,009 | 0,000 |
| 19 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,971 | 0,807 | 0,622 | 0,383 | 0,033 | 0,001 |
| 20 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,991 | 0,910 | 0,786 | 0,579 | 0,098 | 0,007 |
| 21 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,967 | 0,904 | 0,766 | 0,236 | 0,034 |
| 22 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,991 | 0,968 | 0,902 | 0,463 | 0,127 |
| 23 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,993 | 0,973 | 0,729 | 0,358 |
| 24 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,996 | 0,928 | 0,723 |

## 2. Distribución de Poisson

La tabla muestra la probabilidad  $P(X \leq k; \lambda)$  para algunos valores  $\lambda$ .

|         | $\lambda = 0,1$ | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1     |
|---------|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $k = 0$ | 0,905           | 0,819 | 0,741 | 0,670 | 0,607 | 0,549 | 0,497 | 0,449 | 0,407 | 0,368 |
| 1       | 0,995           | 0,982 | 0,963 | 0,938 | 0,910 | 0,878 | 0,844 | 0,809 | 0,772 | 0,736 |
| 2       | 1,000           | 0,999 | 0,996 | 0,992 | 0,986 | 0,977 | 0,966 | 0,953 | 0,937 | 0,920 |
| 3       | 1,000           | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,998 | 0,997 | 0,994 | 0,991 | 0,987 | 0,981 |
| 4       | 1,000           | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,999 | 0,998 | 0,996 |
| 5       | 1,000           | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 |
| 6       | 1,000           | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |

|         | $\lambda = 2$ | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 15    | 20    |
|---------|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $k = 0$ | 0,135         | 0,050 | 0,018 | 0,007 | 0,002 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 1       | 0,406         | 0,199 | 0,092 | 0,040 | 0,017 | 0,007 | 0,003 | 0,001 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 2       | 0,677         | 0,423 | 0,238 | 0,125 | 0,062 | 0,030 | 0,014 | 0,006 | 0,003 | 0,000 | 0,000 |
| 3       | 0,857         | 0,647 | 0,433 | 0,265 | 0,151 | 0,082 | 0,042 | 0,021 | 0,010 | 0,000 | 0,000 |
| 4       | 0,947         | 0,815 | 0,629 | 0,440 | 0,285 | 0,173 | 0,100 | 0,055 | 0,029 | 0,001 | 0,000 |
| 5       | 0,983         | 0,916 | 0,785 | 0,616 | 0,446 | 0,301 | 0,191 | 0,116 | 0,067 | 0,003 | 0,000 |
| 6       | 0,995         | 0,966 | 0,889 | 0,762 | 0,606 | 0,450 | 0,313 | 0,207 | 0,130 | 0,008 | 0,000 |
| 7       | 0,999         | 0,988 | 0,949 | 0,867 | 0,744 | 0,599 | 0,453 | 0,324 | 0,220 | 0,018 | 0,001 |
| 8       | 1,000         | 0,996 | 0,979 | 0,932 | 0,847 | 0,729 | 0,593 | 0,456 | 0,333 | 0,037 | 0,002 |
| 9       | 1,000         | 0,999 | 0,992 | 0,968 | 0,916 | 0,830 | 0,717 | 0,587 | 0,458 | 0,070 | 0,005 |
| 10      | 1,000         | 1,000 | 0,997 | 0,986 | 0,957 | 0,901 | 0,816 | 0,706 | 0,583 | 0,118 | 0,011 |
| 11      | 1,000         | 1,000 | 0,999 | 0,995 | 0,980 | 0,947 | 0,888 | 0,803 | 0,697 | 0,185 | 0,021 |
| 12      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,991 | 0,973 | 0,936 | 0,876 | 0,792 | 0,268 | 0,039 |
| 13      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,996 | 0,987 | 0,966 | 0,926 | 0,864 | 0,363 | 0,066 |
| 14      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,994 | 0,983 | 0,959 | 0,917 | 0,466 | 0,105 |
| 15      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,998 | 0,992 | 0,978 | 0,951 | 0,568 | 0,157 |
| 16      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,996 | 0,989 | 0,973 | 0,664 | 0,221 |
| 17      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,995 | 0,986 | 0,749 | 0,297 |
| 18      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,998 | 0,993 | 0,819 | 0,381 |
| 19      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,997 | 0,875 | 0,470 |
| 20      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,917 | 0,559 |
| 21      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,947 | 0,644 |
| 22      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,967 | 0,721 |
| 23      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,981 | 0,787 |
| 24      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,989 | 0,843 |
| 25      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 0,994 | 0,970 | 0,902 | 0,586 | 0,212 | 0,034 | 0,994 | 0,888 |
| 26      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,980 | 0,956 | 0,732 | 0,345 | 0,078 | 0,997 | 0,922 |
| 27      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,997 | 0,983 | 0,846 | 0,500 | 0,154 | 0,998 | 0,948 |
| 28      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,994 | 0,922 | 0,655 | 0,268 | 0,999 | 0,966 |
| 29      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,966 | 0,788 | 0,414 | 1,000 | 0,978 |
| 30      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,987 | 0,885 | 0,575 | 1,000 | 0,987 |
| 31      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,996 | 0,946 | 0,726 | 1,000 | 0,992 |
| 32      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,999 | 0,978 | 0,846 | 1,000 | 0,995 |
| 33      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,993 | 0,926 | 1,000 | 0,997 |
| 34      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 0,971 | 1,000 | 0,999 |
| 35      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,991 | 1,000 | 0,999 |
| 36      | 1,000         | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,998 | 1,000 | 1,000 |

### 3.Distribución normal estándar

La tabla muestra la probabilidad  $P(Z \leq z)$ .

#### (a) Áreas para valores negativos de $Z$

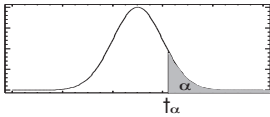
| z    | 0,00   | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -3,4 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 |
| -3,3 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 |
| -3,2 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| -3,1 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 |
| -3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
|      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
|      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
|      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0352 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
|      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0722 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
|      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
|      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
| -0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| -0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |



**(b) Áreas para valores positivos de  $Z$**

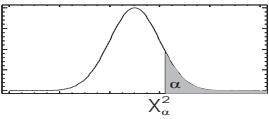
| z   | 0,00   | 0,01   | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,06   | 0,07   | 0,08   | 0,09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9278 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9948 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9961 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9971 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |

4. Distribución *t* de Student



|                | $\alpha$ |       |        |        |        |        |         |
|----------------|----------|-------|--------|--------|--------|--------|---------|
| $\nu$          | 0,10     | 0,05  | 0,025  | 0,01   | 0,005  | 0,001  | 0,0005  |
| 1              | 3,078    | 6,314 | 12,706 | 31,821 | 63,657 | 318,31 | 636,620 |
| 2              | 1,886    | 2,920 | 4,303  | 6,965  | 9,925  | 22,326 | 31,598  |
| 3              | 1,638    | 2,353 | 3,182  | 4,541  | 5,841  | 10,213 | 12,924  |
| 4              | 1,533    | 2,132 | 2,776  | 3,747  | 4,604  | 7,173  | 8,610   |
| 5              | 1,476    | 2,015 | 2,571  | 3,365  | 4,032  | 5,893  | 6,869   |
| 6              | 1,440    | 1,943 | 2,447  | 3,143  | 3,707  | 5,208  | 5,959   |
| 7              | 1,415    | 1,895 | 2,365  | 2,998  | 3,499  | 4,785  | 5,408   |
| 8              | 1,397    | 1,860 | 2,306  | 2,896  | 3,355  | 4,501  | 5,041   |
| 9              | 1,383    | 1,833 | 2,262  | 2,821  | 3,250  | 4,297  | 4,781   |
| 10             | 1,372    | 1,812 | 2,228  | 2,764  | 3,169  | 4,144  | 4,587   |
| 11             | 1,363    | 1,796 | 2,201  | 2,718  | 3,106  | 4,025  | 4,437   |
| 12             | 1,356    | 1,782 | 2,179  | 2,681  | 3,055  | 3,930  | 4,318   |
| 13             | 1,350    | 1,771 | 2,160  | 2,650  | 3,012  | 3,852  | 4,221   |
| 14             | 1,345    | 1,761 | 2,145  | 2,624  | 2,977  | 3,787  | 4,140   |
| 15             | 1,341    | 1,753 | 2,131  | 2,602  | 2,947  | 3,733  | 4,073   |
| 16             | 1,337    | 1,746 | 2,120  | 2,583  | 2,921  | 3,686  | 4,015   |
| 17             | 1,333    | 1,740 | 2,110  | 2,567  | 2,898  | 3,646  | 3,965   |
| 18             | 1,330    | 1,734 | 2,101  | 2,552  | 2,878  | 3,610  | 3,922   |
| 19             | 1,328    | 1,729 | 2,093  | 2,539  | 2,861  | 3,579  | 3,883   |
| 20             | 1,325    | 1,725 | 2,086  | 2,528  | 2,845  | 3,552  | 3,850   |
| 21             | 1,323    | 1,721 | 2,080  | 2,518  | 2,831  | 3,527  | 3,819   |
| 22             | 1,321    | 1,717 | 2,074  | 2,508  | 2,819  | 3,505  | 3,795   |
| 23             | 1,319    | 1,714 | 2,069  | 2,500  | 2,807  | 3,485  | 3,767   |
| 24             | 1,318    | 1,711 | 2,064  | 2,492  | 2,797  | 3,467  | 3,745   |
| 25             | 1,316    | 1,708 | 2,060  | 2,485  | 2,787  | 3,450  | 3,725   |
| 26             | 1,315    | 1,706 | 2,056  | 2,479  | 2,779  | 3,435  | 3,707   |
| 27             | 1,314    | 1,703 | 2,052  | 2,473  | 2,771  | 3,421  | 3,690   |
| 28             | 1,313    | 1,701 | 2,048  | 2,467  | 2,763  | 3,408  | 3,674   |
| 29             | 1,311    | 1,699 | 2,045  | 2,462  | 2,756  | 3,396  | 3,659   |
| 30             | 1,310    | 1,697 | 2,042  | 2,457  | 2,750  | 3,385  | 3,646   |
| 32             | 1,309    | 1,694 | 2,037  | 2,449  | 2,738  | 3,365  | 3,622   |
| 34             | 1,307    | 1,691 | 2,032  | 2,441  | 2,728  | 3,348  | 3,601   |
| 36             | 1,306    | 1,688 | 2,028  | 2,434  | 2,719  | 3,333  | 3,582   |
| 38             | 1,304    | 1,686 | 2,024  | 2,429  | 2,712  | 3,319  | 3,566   |
| 40             | 1,303    | 1,684 | 2,021  | 2,423  | 2,704  | 3,307  | 3,551   |
| 50             | 1,299    | 1,676 | 2,009  | 2,403  | 2,678  | 3,262  | 3,496   |
| 60             | 1,296    | 1,671 | 2,000  | 2,390  | 2,660  | 3,232  | 3,460   |
| 120            | 1,282    | 1,658 | 1,980  | 2,358  | 2,617  | 3,160  | 3,373   |
| $\infty (= z)$ | 1,282    | 1,645 | 1,960  | 2,326  | 2,576  | 3,090  | 3,291   |

5. Distribución chi-cuadrada

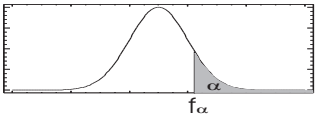


|       | $\alpha$ |        |        |        |         |        |        |        |        |        |
|-------|----------|--------|--------|--------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\nu$ | 0,995    | 0,99   | 0,98   | 0,975  | 0,95    | 0,90   | 0,80   | 0,75   | 0,70   | 0,50   |
| 1     | 0,000    | 0,000  | 0,000  | 0,001  | 0,00393 | 0,0158 | 0,0642 | 0,102  | 0,148  | 0,4550 |
| 2     | 0,010    | 0,0201 | 0,0404 | 0,0506 | 0,103   | 0,211  | 0,446  | 0,575  | 0,713  | 1,386  |
| 3     | 0,0717   | 0,115  | 0,185  | 0,216  | 0,352   | 0,584  | 1,005  | 1,213  | 1,424  | 2,366  |
| 4     | 0,207    | 0,297  | 0,429  | 0,484  | 0,711   | 1,064  | 1,649  | 1,923  | 2,195  | 3,357  |
| 5     | 0,412    | 0,554  | 0,752  | 0,831  | 1,145   | 1,610  | 2,343  | 2,675  | 3,000  | 4,351  |
| 6     | 0,676    | 0,872  | 1,134  | 1,237  | 1,635   | 2,204  | 3,070  | 3,455  | 3,828  | 5,348  |
| 7     | 0,989    | 1,239  | 1,564  | 1,690  | 2,167   | 2,833  | 3,822  | 4,255  | 4,671  | 6,346  |
| 8     | 1,344    | 1,646  | 2,032  | 2,180  | 2,733   | 3,490  | 4,594  | 5,071  | 5,527  | 7,344  |
| 9     | 1,735    | 2,088  | 2,532  | 2,700  | 3,325   | 4,168  | 5,380  | 5,899  | 6,393  | 8,343  |
| 10    | 2,156    | 2,558  | 3,059  | 3,247  | 3,940   | 4,865  | 6,179  | 6,737  | 7,267  | 9,342  |
| 11    | 2,603    | 3,053  | 3,609  | 3,816  | 4,575   | 5,578  | 6,989  | 7,584  | 8,148  | 10,341 |
| 12    | 3,074    | 3,571  | 4,178  | 4,404  | 5,226   | 6,304  | 7,807  | 8,438  | 9,034  | 11,340 |
| 13    | 3,565    | 4,107  | 4,765  | 5,009  | 5,892   | 7,042  | 8,634  | 9,299  | 9,926  | 12,340 |
| 14    | 4,075    | 4,660  | 5,368  | 5,629  | 6,571   | 7,790  | 9,467  | 10,165 | 10,821 | 13,339 |
| 15    | 4,601    | 5,229  | 5,985  | 6,262  | 7,261   | 8,547  | 10,307 | 11,036 | 11,721 | 14,339 |
| 16    | 5,142    | 5,812  | 6,614  | 6,908  | 7,962   | 9,312  | 11,152 | 11,912 | 12,624 | 15,338 |
| 17    | 5,697    | 6,408  | 7,255  | 7,564  | 8,672   | 10,085 | 12,002 | 12,792 | 13,531 | 16,338 |
| 18    | 6,844    | 7,633  | 8,567  | 8,907  | 10,117  | 11,651 | 13,716 | 14,562 | 15,352 | 18,338 |
| 19    | 6,844    | 7,633  | 8,567  | 8,907  | 10,117  | 11,651 | 13,716 | 14,562 | 15,352 | 18,338 |
| 20    | 7,434    | 8,260  | 9,237  | 9,591  | 10,851  | 12,443 | 14,578 | 15,452 | 16,266 | 19,337 |
| 21    | 8,034    | 8,897  | 9,915  | 10,283 | 11,591  | 13,240 | 15,445 | 16,344 | 17,182 | 20,337 |
| 22    | 8,643    | 9,542  | 10,600 | 10,982 | 12,338  | 14,041 | 16,314 | 17,240 | 18,101 | 21,337 |
| 23    | 9,260    | 10,196 | 11,293 | 11,688 | 13,091  | 14,848 | 17,187 | 18,137 | 19,021 | 22,337 |
| 24    | 9,886    | 10,856 | 11,992 | 12,401 | 13,848  | 15,659 | 18,062 | 19,037 | 19,943 | 23,337 |
| 25    | 10,520   | 11,524 | 12,692 | 13,120 | 14,611  | 16,473 | 18,940 | 19,939 | 20,867 | 24,337 |
| 26    | 11,160   | 12,198 | 13,409 | 13,844 | 15,379  | 17,292 | 19,820 | 20,843 | 21,792 | 25,336 |
| 27    | 11,808   | 12,879 | 14,125 | 14,573 | 16,151  | 18,114 | 20,703 | 21,749 | 22,719 | 26,336 |
| 28    | 12,461   | 13,565 | 14,847 | 15,308 | 16,928  | 18,939 | 21,588 | 22,657 | 23,647 | 27,336 |
| 29    | 13,121   | 14,256 | 15,574 | 16,047 | 17,708  | 19,768 | 22,475 | 23,567 | 24,577 | 28,336 |
| 30    | 13,787   | 14,953 | 16,306 | 16,791 | 18,493  | 20,599 | 23,364 | 24,478 | 25,508 | 29,336 |
| 31    | 14,457   | 15,655 | 17,042 | 17,538 | 19,280  | 21,433 | 24,255 | 25,390 | 26,440 | 30,336 |
| 32    | 15,134   | 16,362 | 17,783 | 18,291 | 20,072  | 22,271 | 25,148 | 26,304 | 27,373 | 31,336 |
| 33    | 15,815   | 17,073 | 18,527 | 19,046 | 20,866  | 23,110 | 26,042 | 27,219 | 28,307 | 32,336 |
| 34    | 16,501   | 17,789 | 19,275 | 19,806 | 21,664  | 23,952 | 26,938 | 28,136 | 29,242 | 33,336 |
| 35    | 17,191   | 18,508 | 20,027 | 20,569 | 22,465  | 24,796 | 27,836 | 29,054 | 30,178 | 34,336 |
| 36    | 17,887   | 19,233 | 20,783 | 21,336 | 23,269  | 25,643 | 28,735 | 29,973 | 31,115 | 35,336 |
| 37    | 18,584   | 19,960 | 21,542 | 22,105 | 24,075  | 26,492 | 29,636 | 30,893 | 32,053 | 36,336 |
| 38    | 19,289   | 20,691 | 22,304 | 22,878 | 24,884  | 27,343 | 30,537 | 31,815 | 32,992 | 37,336 |
| 39    | 19,994   | 21,425 | 23,069 | 23,654 | 25,695  | 28,196 | 31,441 | 32,737 | 33,932 | 38,335 |
| 40    | 20,706   | 22,164 | 23,838 | 24,433 | 26,509  | 29,050 | 32,345 | 33,660 | 34,872 | 39,335 |

Valores críticos  $\chi^2_{\alpha}(\nu)$  (continuación)

| $\nu$ | $\alpha$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-------|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|       | 0,30     | 0,25   | 0,20   | 0,10   | 0,05   | 0,025  | 0,02   | 0,01   | 0,005  | 0,001  |
| 1     | 1,074    | 1,323  | 1,642  | 2,706  | 3,841  | 5,024  | 5,412  | 6,635  | 7,879  | 10,827 |
| 2     | 2,408    | 2,773  | 3,219  | 4,605  | 5,991  | 7,378  | 7,824  | 9,210  | 10,597 | 13,815 |
| 3     | 3,665    | 4,108  | 4,642  | 6,251  | 7,815  | 9,348  | 9,837  | 11,345 | 12,838 | 16,268 |
| 4     | 4,878    | 5,385  | 5,989  | 7,779  | 9,488  | 11,143 | 11,668 | 13,277 | 14,860 | 18,465 |
| 5     | 6,064    | 6,626  | 7,289  | 9,236  | 11,070 | 12,832 | 13,388 | 15,086 | 16,750 | 20,517 |
| 6     | 7,231    | 7,841  | 8,558  | 10,645 | 12,592 | 14,449 | 15,033 | 16,812 | 18,548 | 22,457 |
| 7     | 8,383    | 9,037  | 9,803  | 12,017 | 14,067 | 16,013 | 16,622 | 18,475 | 20,278 | 24,322 |
| 8     | 9,524    | 10,219 | 11,030 | 13,362 | 15,507 | 17,535 | 18,168 | 20,090 | 21,955 | 26,125 |
| 9     | 10,656   | 11,389 | 12,242 | 14,684 | 16,919 | 19,023 | 19,679 | 21,666 | 23,589 | 27,877 |
| 10    | 11,781   | 12,549 | 13,442 | 15,987 | 18,307 | 20,483 | 21,161 | 23,209 | 25,188 | 29,588 |
| 11    | 12,899   | 13,701 | 14,631 | 17,275 | 19,675 | 21,920 | 22,618 | 24,725 | 26,757 | 31,264 |
| 12    | 14,011   | 14,845 | 15,812 | 18,549 | 21,026 | 23,337 | 24,054 | 26,217 | 28,300 | 32,909 |
| 13    | 15,119   | 15,984 | 16,985 | 19,812 | 22,362 | 24,736 | 25,472 | 27,688 | 29,819 | 34,528 |
| 14    | 16,222   | 17,117 | 18,151 | 21,064 | 23,685 | 26,119 | 26,873 | 29,141 | 31,319 | 36,123 |
| 15    | 17,322   | 18,245 | 19,311 | 22,307 | 24,996 | 27,488 | 28,259 | 30,578 | 32,801 | 37,697 |
| 16    | 18,418   | 19,369 | 20,465 | 23,542 | 26,296 | 28,845 | 29,633 | 32,000 | 34,267 | 39,252 |
| 17    | 19,511   | 20,489 | 21,615 | 24,769 | 27,587 | 30,191 | 30,995 | 33,409 | 35,718 | 40,790 |
| 18    | 20,601   | 21,605 | 22,760 | 25,989 | 28,869 | 31,526 | 32,346 | 34,805 | 37,156 | 42,312 |
| 19    | 21,689   | 22,718 | 23,900 | 27,204 | 30,144 | 32,852 | 33,687 | 36,191 | 38,582 | 43,820 |
| 20    | 22,775   | 23,828 | 25,038 | 28,412 | 31,410 | 34,170 | 35,020 | 37,566 | 39,997 | 45,315 |
| 21    | 23,858   | 24,935 | 26,171 | 29,615 | 32,671 | 35,479 | 36,343 | 38,932 | 41,401 | 46,797 |
| 22    | 24,939   | 26,039 | 27,301 | 30,813 | 33,924 | 36,781 | 37,659 | 40,289 | 42,796 | 48,268 |
| 23    | 26,018   | 27,141 | 28,429 | 32,007 | 35,172 | 38,076 | 38,968 | 41,638 | 44,181 | 49,728 |
| 24    | 27,096   | 28,241 | 29,553 | 33,196 | 36,415 | 39,364 | 40,270 | 42,980 | 45,558 | 51,179 |
| 25    | 28,172   | 29,339 | 30,675 | 34,382 | 37,652 | 40,646 | 41,566 | 44,314 | 46,928 | 52,620 |
| 26    | 29,246   | 30,434 | 31,795 | 35,563 | 38,885 | 41,923 | 42,856 | 45,642 | 48,290 | 54,052 |
| 27    | 30,319   | 31,528 | 32,912 | 36,741 | 40,113 | 43,194 | 44,140 | 46,963 | 49,645 | 55,476 |
| 28    | 31,391   | 32,620 | 34,027 | 37,916 | 41,337 | 44,461 | 45,419 | 48,278 | 50,993 | 56,893 |
| 29    | 32,461   | 33,711 | 35,139 | 39,087 | 42,557 | 45,722 | 46,693 | 49,588 | 52,336 | 58,302 |
| 30    | 33,530   | 34,800 | 36,250 | 40,256 | 43,773 | 46,979 | 47,962 | 50,892 | 53,672 | 59,703 |
| 31    | 34,598   | 35,887 | 37,359 | 41,422 | 44,985 | 48,231 | 49,226 | 52,190 | 55,003 | 61,098 |
| 32    | 35,665   | 36,973 | 38,466 | 42,585 | 46,194 | 49,480 | 50,487 | 53,486 | 56,328 | 62,487 |
| 33    | 36,731   | 38,058 | 39,572 | 43,745 | 47,400 | 50,724 | 51,743 | 54,774 | 57,646 | 63,870 |
| 34    | 37,795   | 39,141 | 40,676 | 44,903 | 48,602 | 51,966 | 52,995 | 56,061 | 58,964 | 65,247 |
| 35    | 38,859   | 40,223 | 41,778 | 46,059 | 49,802 | 53,203 | 54,244 | 57,340 | 60,272 | 66,619 |
| 36    | 39,922   | 41,304 | 42,879 | 47,212 | 50,998 | 54,437 | 55,489 | 58,619 | 61,581 | 67,985 |
| 37    | 40,984   | 42,383 | 43,978 | 48,363 | 52,192 | 55,667 | 56,731 | 59,891 | 62,880 | 69,346 |
| 38    | 42,045   | 43,462 | 45,076 | 49,513 | 53,384 | 56,896 | 57,969 | 61,162 | 64,181 | 70,703 |
| 39    | 43,105   | 44,540 | 46,173 | 50,660 | 54,572 | 58,119 | 59,204 | 62,426 | 65,473 | 72,055 |
| 40    | 44,165   | 45,616 | 47,269 | 51,805 | 55,758 | 59,342 | 60,436 | 63,691 | 66,766 | 73,402 |

6. Distribución  $F$  de Fisher



(a) Valores críticos  $F_\alpha(v_1, v_2)$  para  $\alpha = 0,05$

|          | $v_1$ |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $v_2$    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
| 1        | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234,0 | 236,8 | 238,9 | 240,5 |
| 2        | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 |
| 3        | 10,13 | 9,55  | 9,28  | 9,12  | 9,01  | 8,94  | 8,89  | 8,85  | 8,81  |
| 4        | 7,71  | 6,94  | 6,59  | 6,39  | 6,26  | 6,16  | 6,09  | 6,04  | 6,00  |
| 5        | 6,61  | 5,79  | 5,41  | 5,19  | 5,05  | 4,95  | 4,88  | 4,82  | 4,77  |
| 6        | 5,99  | 5,14  | 4,76  | 4,53  | 4,39  | 4,28  | 4,21  | 4,15  | 4,10  |
| 7        | 5,59  | 4,74  | 4,35  | 4,12  | 3,97  | 3,87  | 3,79  | 3,73  | 3,68  |
| 8        | 5,32  | 4,46  | 4,07  | 3,84  | 3,69  | 3,58  | 3,50  | 3,44  | 3,39  |
| 9        | 5,12  | 4,26  | 3,86  | 3,63  | 3,48  | 3,37  | 3,29  | 3,23  | 3,18  |
| 10       | 4,96  | 4,10  | 3,71  | 3,48  | 3,33  | 3,22  | 3,14  | 3,07  | 3,02  |
| 11       | 4,84  | 3,98  | 3,59  | 3,36  | 3,20  | 3,09  | 3,01  | 2,95  | 2,90  |
| 12       | 4,75  | 3,89  | 3,49  | 3,26  | 3,11  | 3,00  | 2,91  | 2,85  | 2,80  |
| 13       | 4,67  | 3,81  | 3,41  | 3,18  | 3,03  | 2,92  | 2,83  | 2,77  | 2,71  |
| 14       | 4,60  | 3,74  | 3,34  | 3,11  | 2,96  | 2,85  | 2,76  | 2,70  | 2,65  |
| 15       | 4,54  | 3,68  | 3,29  | 3,06  | 2,90  | 2,79  | 2,71  | 2,64  | 2,59  |
| 16       | 4,49  | 3,63  | 3,24  | 3,01  | 2,85  | 2,74  | 2,66  | 2,59  | 2,54  |
| 17       | 4,45  | 3,59  | 3,20  | 2,96  | 2,81  | 2,70  | 2,61  | 2,55  | 2,49  |
| 18       | 4,41  | 3,55  | 3,16  | 2,93  | 2,77  | 2,66  | 2,58  | 2,51  | 2,46  |
| 19       | 4,38  | 3,52  | 3,13  | 2,90  | 2,74  | 2,63  | 2,54  | 2,48  | 2,42  |
| 20       | 4,35  | 3,49  | 3,10  | 2,87  | 2,71  | 2,60  | 2,51  | 2,45  | 2,39  |
| 21       | 4,32  | 3,47  | 3,07  | 2,84  | 2,68  | 2,57  | 2,49  | 2,42  | 2,37  |
| 22       | 4,30  | 3,44  | 3,05  | 2,82  | 2,66  | 2,55  | 2,46  | 2,40  | 2,34  |
| 23       | 4,28  | 3,42  | 3,03  | 2,80  | 2,64  | 2,53  | 2,44  | 2,37  | 2,32  |
| 24       | 4,26  | 3,40  | 3,01  | 2,78  | 2,62  | 2,51  | 2,42  | 2,36  | 2,30  |
| 25       | 4,24  | 3,39  | 2,99  | 2,76  | 2,60  | 2,49  | 2,40  | 2,34  | 2,28  |
| 26       | 4,23  | 3,37  | 2,98  | 2,74  | 2,59  | 2,47  | 2,39  | 2,32  | 2,27  |
| 27       | 4,21  | 3,35  | 2,96  | 2,73  | 2,57  | 2,46  | 2,37  | 2,31  | 2,25  |
| 28       | 4,20  | 3,34  | 2,95  | 2,71  | 2,56  | 2,45  | 2,36  | 2,29  | 2,24  |
| 29       | 4,18  | 3,33  | 2,93  | 2,70  | 2,55  | 2,43  | 2,35  | 2,28  | 2,22  |
| 30       | 4,17  | 3,32  | 2,92  | 2,69  | 2,53  | 2,42  | 2,33  | 2,27  | 2,21  |
| 40       | 4,08  | 3,23  | 2,84  | 2,61  | 2,45  | 2,34  | 2,25  | 2,18  | 2,12  |
| 60       | 4,00  | 3,15  | 2,76  | 2,53  | 2,37  | 2,25  | 2,17  | 2,10  | 2,04  |
| 120      | 3,92  | 3,07  | 2,68  | 2,45  | 2,29  | 2,17  | 2,09  | 2,02  | 1,96  |
| $\infty$ | 3,84  | 3,00  | 2,60  | 2,37  | 2,21  | 2,10  | 2,01  | 1,94  | 1,88  |

**(b) Valores críticos  $F_{\alpha}(v_1, v_2)$  para  $\alpha = 0,05$**

|          | $v_1$ |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $v_2$    | 10    | 12    | 15    | 20    | 24    | 30    | 40    | 60    | 120   | $\infty$ |
| 1        | 241,9 | 243,9 | 245,9 | 248,0 | 249,1 | 250,1 | 251,1 | 252,2 | 253,3 | 254,3    |
| 2        | 19,40 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,48 | 19,49 | 19,50    |
| 3        | 8,79  | 8,74  | 8,70  | 8,66  | 8,64  | 8,62  | 8,59  | 8,57  | 8,55  | 8,53     |
| 4        | 5,96  | 5,91  | 5,86  | 5,80  | 5,77  | 5,75  | 5,72  | 5,69  | 5,66  | 5,63     |
| 5        | 4,74  | 4,68  | 4,62  | 4,56  | 4,53  | 4,50  | 4,46  | 4,43  | 4,40  | 4,36     |
| 6        | 4,06  | 4,00  | 3,94  | 3,87  | 3,84  | 3,81  | 3,77  | 3,74  | 3,70  | 3,67     |
| 7        | 3,64  | 3,57  | 3,51  | 3,44  | 3,41  | 3,38  | 3,34  | 3,30  | 3,27  | 3,23     |
| 8        | 3,35  | 3,28  | 3,22  | 3,15  | 3,12  | 3,08  | 3,04  | 3,01  | 2,97  | 2,93     |
| 9        | 3,14  | 3,07  | 3,01  | 2,94  | 2,90  | 2,86  | 2,83  | 2,79  | 2,75  | 2,71     |
| 10       | 2,98  | 2,91  | 2,85  | 2,77  | 2,74  | 2,70  | 2,66  | 2,62  | 2,58  | 2,54     |
| 11       | 2,85  | 2,79  | 2,72  | 2,65  | 2,61  | 2,57  | 2,53  | 2,49  | 2,45  | 2,40     |
| 12       | 2,75  | 2,69  | 2,62  | 2,54  | 2,51  | 2,47  | 2,43  | 2,38  | 2,34  | 2,30     |
| 13       | 2,67  | 2,60  | 2,53  | 2,46  | 2,42  | 2,38  | 2,34  | 2,30  | 2,25  | 2,21     |
| 14       | 2,60  | 2,53  | 2,46  | 2,39  | 2,35  | 2,31  | 2,27  | 2,22  | 2,18  | 2,13     |
| 15       | 2,54  | 2,48  | 2,40  | 2,33  | 2,29  | 2,25  | 2,20  | 2,16  | 2,11  | 2,07     |
| 16       | 2,49  | 2,42  | 2,35  | 2,28  | 2,24  | 2,19  | 2,15  | 2,11  | 2,06  | 2,01     |
| 17       | 2,45  | 2,38  | 2,31  | 2,23  | 2,19  | 2,15  | 2,10  | 2,06  | 2,01  | 1,96     |
| 18       | 2,41  | 2,34  | 2,27  | 2,19  | 2,15  | 2,11  | 2,06  | 2,02  | 1,97  | 1,92     |
| 19       | 2,38  | 2,31  | 2,23  | 2,16  | 2,11  | 2,07  | 2,03  | 1,98  | 1,93  | 1,88     |
| 20       | 2,35  | 2,28  | 2,20  | 2,12  | 2,08  | 2,04  | 1,99  | 1,95  | 1,90  | 1,84     |
| 21       | 2,32  | 2,25  | 2,18  | 2,10  | 2,05  | 2,01  | 1,96  | 1,92  | 1,87  | 1,81     |
| 22       | 2,30  | 2,23  | 2,15  | 2,07  | 2,03  | 1,98  | 1,94  | 1,89  | 1,84  | 1,78     |
| 23       | 2,27  | 2,20  | 2,13  | 2,05  | 2,01  | 1,96  | 1,91  | 1,86  | 1,81  | 1,76     |
| 24       | 2,25  | 2,18  | 2,11  | 2,03  | 1,98  | 1,94  | 1,89  | 1,84  | 1,79  | 1,73     |
| 25       | 2,24  | 2,16  | 2,09  | 2,01  | 1,96  | 1,92  | 1,87  | 1,82  | 1,77  | 1,71     |
| 26       | 2,22  | 2,15  | 2,07  | 1,99  | 1,95  | 1,90  | 1,85  | 1,80  | 1,75  | 1,69     |
| 27       | 2,20  | 2,13  | 2,06  | 1,97  | 1,93  | 1,88  | 1,84  | 1,79  | 1,73  | 1,67     |
| 28       | 2,19  | 2,12  | 2,04  | 1,96  | 1,91  | 1,87  | 1,82  | 1,77  | 1,71  | 1,65     |
| 29       | 2,18  | 2,10  | 2,03  | 1,94  | 1,90  | 1,85  | 1,81  | 1,75  | 1,70  | 1,64     |
| 30       | 2,16  | 2,09  | 2,01  | 1,93  | 1,89  | 1,84  | 1,79  | 1,74  | 1,68  | 1,62     |
| 40       | 2,08  | 2,00  | 1,92  | 1,84  | 1,79  | 1,74  | 1,69  | 1,64  | 1,58  | 1,51     |
| 60       | 1,99  | 1,92  | 1,84  | 1,75  | 1,70  | 1,65  | 1,59  | 1,53  | 1,47  | 1,39     |
| 120      | 1,91  | 1,83  | 1,75  | 1,66  | 1,61  | 1,55  | 1,50  | 1,43  | 1,35  | 1,25     |
| $\infty$ | 1,83  | 1,75  | 1,67  | 1,57  | 1,52  | 1,46  | 1,39  | 1,32  | 1,22  | 1,00     |

**(c) Valores críticos  $F_\alpha(v_1, v_2)$  para  $\alpha = 0,01$** 

|          | $v_1$ |        |       |       |       |       |       |       |       |
|----------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $v_2$    | 1     | 2      | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     |
| 1        | 4052  | 4999,5 | 5403  | 5625  | 5764  | 5859  | 5928  | 5981  | 6022  |
| 2        | 98,50 | 99,00  | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 | 99,39 |
| 3        | 34,12 | 30,82  | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,35 |
| 4        | 21,20 | 18,00  | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 |
| 5        | 16,26 | 13,27  | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,46 | 10,29 | 10,16 |
| 6        | 13,75 | 10,92  | 9,78  | 9,15  | 8,75  | 8,47  | 8,26  | 8,10  | 7,98  |
| 7        | 12,25 | 9,55   | 8,45  | 7,85  | 7,46  | 7,19  | 6,99  | 6,84  | 6,72  |
| 8        | 11,26 | 8,65   | 7,59  | 7,01  | 6,63  | 6,37  | 6,18  | 6,03  | 5,91  |
| 9        | 10,56 | 8,02   | 6,99  | 6,42  | 6,06  | 5,80  | 5,61  | 5,47  | 5,35  |
| 10       | 10,04 | 7,56   | 6,55  | 5,99  | 5,64  | 5,39  | 5,20  | 5,06  | 4,94  |
| 11       | 9,65  | 7,21   | 6,22  | 5,67  | 5,32  | 5,07  | 4,89  | 4,74  | 4,63  |
| 12       | 9,33  | 6,93   | 5,95  | 5,41  | 5,06  | 4,82  | 4,64  | 4,50  | 4,39  |
| 13       | 9,07  | 6,70   | 5,74  | 5,21  | 4,86  | 4,62  | 4,44  | 4,30  | 4,19  |
| 14       | 8,86  | 6,51   | 5,56  | 5,04  | 4,69  | 4,46  | 4,28  | 4,14  | 4,03  |
| 15       | 8,68  | 6,36   | 5,42  | 4,89  | 4,56  | 4,32  | 4,14  | 4,00  | 3,89  |
| 16       | 8,53  | 6,23   | 5,29  | 4,77  | 4,44  | 4,20  | 4,03  | 3,89  | 3,78  |
| 17       | 8,40  | 6,11   | 5,18  | 4,67  | 4,34  | 4,10  | 3,93  | 3,79  | 3,68  |
| 18       | 8,29  | 6,01   | 5,09  | 4,58  | 4,25  | 4,01  | 3,84  | 3,71  | 3,60  |
| 19       | 8,18  | 5,93   | 5,01  | 4,50  | 4,17  | 3,94  | 3,77  | 3,63  | 3,52  |
| 20       | 8,10  | 5,85   | 4,94  | 4,43  | 4,10  | 3,87  | 3,70  | 3,56  | 3,46  |
| 21       | 8,02  | 5,78   | 4,87  | 4,37  | 4,04  | 3,81  | 3,64  | 3,51  | 3,40  |
| 22       | 7,95  | 5,72   | 4,82  | 4,31  | 3,99  | 3,76  | 3,59  | 3,45  | 3,35  |
| 23       | 7,88  | 5,66   | 4,76  | 4,26  | 3,94  | 3,71  | 3,54  | 3,41  | 3,30  |
| 24       | 7,82  | 5,61   | 4,72  | 4,22  | 3,90  | 3,67  | 3,50  | 3,36  | 3,26  |
| 25       | 7,77  | 5,57   | 4,68  | 4,18  | 3,85  | 3,63  | 3,46  | 3,32  | 3,22  |
| 26       | 7,72  | 5,53   | 4,64  | 4,14  | 3,82  | 3,59  | 3,42  | 3,29  | 3,18  |
| 27       | 7,68  | 5,49   | 4,60  | 4,11  | 3,78  | 3,56  | 3,39  | 3,26  | 3,15  |
| 28       | 7,64  | 5,45   | 4,57  | 4,07  | 3,75  | 3,53  | 3,36  | 3,23  | 3,12  |
| 29       | 7,60  | 5,42   | 4,54  | 4,04  | 3,73  | 3,50  | 3,33  | 3,20  | 3,09  |
| 30       | 7,56  | 5,39   | 4,51  | 4,02  | 3,70  | 3,47  | 3,30  | 3,17  | 3,07  |
| 40       | 7,31  | 5,18   | 4,31  | 3,83  | 3,51  | 3,29  | 3,12  | 2,99  | 2,89  |
| 60       | 7,08  | 4,98   | 4,13  | 3,65  | 3,34  | 3,12  | 2,95  | 2,82  | 2,72  |
| 120      | 6,85  | 4,79   | 3,95  | 3,48  | 3,17  | 2,96  | 2,79  | 2,66  | 2,56  |
| $\infty$ | 6,63  | 4,61   | 3,78  | 3,32  | 3,02  | 2,80  | 2,64  | 2,51  | 2,41  |

**(d) Valores críticos  $F_\alpha(v_1, v_2)$  para  $\alpha = 0,01$**

| $v_2$    | $v_1$ |       |       |       |       |       |       |       |       |          |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
|          | 10    | 12    | 15    | 20    | 24    | 30    | 40    | 60    | 120   | $\infty$ |
| 1        | 6056  | 6106  | 6157  | 6209  | 6235  | 6261  | 6287  | 6313  | 6339  | 6366     |
| 2        | 99,40 | 99,42 | 99,43 | 99,45 | 99,46 | 99,47 | 99,47 | 99,48 | 99,49 | 99,50    |
| 3        | 27,23 | 27,05 | 26,87 | 26,69 | 26,60 | 26,50 | 26,41 | 26,32 | 26,22 | 26,13    |
| 4        | 14,55 | 14,37 | 14,20 | 14,02 | 13,93 | 13,84 | 13,75 | 13,65 | 13,56 | 13,46    |
| 5        | 10,05 | 9,89  | 9,72  | 9,55  | 9,47  | 9,38  | 9,29  | 9,20  | 9,11  | 9,02     |
| 6        | 7,87  | 7,72  | 7,56  | 7,40  | 7,31  | 7,23  | 7,14  | 7,06  | 6,97  | 6,88     |
| 7        | 6,62  | 6,47  | 6,31  | 6,16  | 6,07  | 5,99  | 5,91  | 5,82  | 5,74  | 5,65     |
| 8        | 5,81  | 5,67  | 5,52  | 5,36  | 5,28  | 5,20  | 5,12  | 5,03  | 4,95  | 4,86     |
| 9        | 5,26  | 5,11  | 4,96  | 4,81  | 4,73  | 4,65  | 4,57  | 4,48  | 4,40  | 4,31     |
| 10       | 4,85  | 4,71  | 4,56  | 4,41  | 4,33  | 4,25  | 4,17  | 4,08  | 4,00  | 3,91     |
| 11       | 4,54  | 4,40  | 4,25  | 4,10  | 4,02  | 3,94  | 3,86  | 3,78  | 3,69  | 3,60     |
| 12       | 4,30  | 4,16  | 4,01  | 3,86  | 3,78  | 3,70  | 3,62  | 3,54  | 3,45  | 3,36     |
| 13       | 4,10  | 3,96  | 3,82  | 3,66  | 3,59  | 3,51  | 3,43  | 3,34  | 3,25  | 3,17     |
| 14       | 3,94  | 3,80  | 3,66  | 3,51  | 3,43  | 3,35  | 3,27  | 3,18  | 3,09  | 3,00     |
| 15       | 3,80  | 3,67  | 3,52  | 3,37  | 3,29  | 3,21  | 3,13  | 3,05  | 2,96  | 2,87     |
| 16       | 3,69  | 3,55  | 3,41  | 3,26  | 3,18  | 3,10  | 3,02  | 2,93  | 2,84  | 2,75     |
| 17       | 3,59  | 3,46  | 3,31  | 3,16  | 3,08  | 3,00  | 2,92  | 2,83  | 2,75  | 2,65     |
| 18       | 3,51  | 3,37  | 3,23  | 3,08  | 3,00  | 2,92  | 2,84  | 2,75  | 2,66  | 2,57     |
| 19       | 3,43  | 3,30  | 3,15  | 3,00  | 2,92  | 2,84  | 2,76  | 2,67  | 2,58  | 2,49     |
| 20       | 3,37  | 3,23  | 3,09  | 2,94  | 2,86  | 2,78  | 2,69  | 2,61  | 2,52  | 2,42     |
| 21       | 3,31  | 3,17  | 3,03  | 2,88  | 2,80  | 2,72  | 2,64  | 2,55  | 2,46  | 2,36     |
| 22       | 3,26  | 3,12  | 2,98  | 2,83  | 2,75  | 2,67  | 2,58  | 2,50  | 2,40  | 2,31     |
| 23       | 3,21  | 3,07  | 2,93  | 2,78  | 2,70  | 2,62  | 2,54  | 2,45  | 2,35  | 2,26     |
| 24       | 3,17  | 3,03  | 2,89  | 2,74  | 2,66  | 2,58  | 2,49  | 2,40  | 2,31  | 2,21     |
| 25       | 3,13  | 2,99  | 2,85  | 2,70  | 2,62  | 2,54  | 2,45  | 2,36  | 2,27  | 2,17     |
| 26       | 3,09  | 2,96  | 2,81  | 2,66  | 2,58  | 2,50  | 2,42  | 2,33  | 2,23  | 2,13     |
| 27       | 3,06  | 2,93  | 2,78  | 2,63  | 2,55  | 2,47  | 2,38  | 2,29  | 2,20  | 2,10     |
| 28       | 3,03  | 2,90  | 2,75  | 2,60  | 2,52  | 2,44  | 2,35  | 2,26  | 2,17  | 2,06     |
| 29       | 3,00  | 2,87  | 2,73  | 2,57  | 2,49  | 2,41  | 2,33  | 2,23  | 2,14  | 2,03     |
| 30       | 2,98  | 2,84  | 2,70  | 2,55  | 2,47  | 2,39  | 2,30  | 2,21  | 2,11  | 2,01     |
| 40       | 2,80  | 2,66  | 2,52  | 2,37  | 2,29  | 2,20  | 2,11  | 2,02  | 1,92  | 1,80     |
| 60       | 2,63  | 2,50  | 2,35  | 2,20  | 2,12  | 2,03  | 1,94  | 1,84  | 1,73  | 1,60     |
| 120      | 2,47  | 2,34  | 2,19  | 2,03  | 1,95  | 1,86  | 1,76  | 1,66  | 1,53  | 1,38     |
| $\infty$ | 2,32  | 2,18  | 2,04  | 1,88  | 1,79  | 1,70  | 1,59  | 1,47  | 1,32  | 1,00     |



## 7. Algunas distribuciones discretas

| NOMBRE            | FUNCIÓN                                                                                               | PARÁMETROS                                                          | $E(X)$                         | $V(X)$                                                                           |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------|
| Uniforme          | $f(x_k) = \frac{1}{n},$<br>$k = 1, 2, \dots, n$                                                       | $x_i < x_{i+1}$<br>$n \in \mathbb{N}$                               | $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ | $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2$ |
| De dos puntos     | $f(x_1) = p,$<br>$f(x_2) = 1 - p$                                                                     | $x_1 < x_2$<br>$0 < p < 1$                                          | $x_1 p + x_2(1 - p)$           | $(x_1 - x_2)^2 p(1 - p)$                                                         |
| Bernoulli         | $f(0) = p,$<br>$f(1) = 1 - p$                                                                         | $p$                                                                 | $p$                            | $p(1 - p)$                                                                       |
| Binomial          | $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$<br>$k = 0, 1, 2, \dots, n$                                           | $0 < p < 1$<br>$n \in \mathbb{N}$                                   | $np$                           | $np(1 - p)$                                                                      |
| Poisson           | $f(k) = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k$<br>$k = 0, 1, 2, 3, \dots$                               | $\lambda > 0$                                                       | $\lambda$                      | $\lambda$                                                                        |
| Hiper-geométrica  | $\frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$<br>$k \in \mathbb{N}_0, k \leq n,$<br>$k \leq M$ | $M \in \mathbb{N}_0,$<br>$n, N \in \mathbb{N}$<br>$n \leq M \leq N$ | $n \cdot \frac{M}{N}$          | $na \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$<br>$p = \frac{M}{N}$<br>$a = p(1 - p)$       |
| Binomial negativa | $\binom{k+r-1}{r-1} p^r (1 - p)^k$<br>$k = 0, 1, 2, \dots$                                            | $r > 0,$<br>$0 < p < 1$                                             | $\frac{r(1-p)}{p}$             | $\frac{r(1-p)}{p^2}$                                                             |
| Geométrica        | $f(k) = p(1 - p)^k$<br>$k = 0, 1, 2, \dots$                                                           | $0 < p < 1$                                                         | $\frac{1-p}{p}$                | $\frac{1-p}{p^2}$                                                                |

## 8. Algunas distribuciones continuas

| NOMBRE          | FUNCIÓN                                                                                                                                                                                           | PARÁMETROS                              | $E(X)$                         | $V(X)$                                             |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------|----------------------------------------------------|
| Uniforme        | $f(x) = \frac{1}{b-a},$<br>$a < x < b$                                                                                                                                                            | $a < b$                                 | $\frac{a+b}{2}$                | $\frac{(a-b)^2}{12}$                               |
| Normal          | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$<br>$x \in \mathbb{R}$                                                                                                     | $\mu \in \mathbb{R},$<br>$\sigma^2 > 0$ | $\mu$                          | $\sigma^2$                                         |
| Normal estándar | $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$<br>$x \in \mathbb{R}$                                                                                                                          |                                         | 0                              | 1                                                  |
| Gamma           | $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta},$<br>$x > 0$                                                                                                              | $\alpha > 0,$<br>$\beta > 0$            | $\alpha\beta$                  | $\alpha\beta^2$                                    |
| Exponencial     | $f(x) = \lambda e^{-\lambda x},$<br>$x > 0$                                                                                                                                                       | $\lambda > 0$                           | $\frac{1}{\lambda}$            | $\frac{1}{\lambda^2}$                              |
| $t$ de Student  | $f(x) = a_n (1 + n x^2)^{-(n+1)/2},$<br>$a_n := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \sqrt{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi}}, x \in \mathbb{R}$                                    | $n \in \mathbb{N}$                      | 0,<br>$n \geq 2$               | $\frac{n}{n-2},$<br>$n \geq 3$                     |
| Chi-cuadrada    | $\frac{1}{a_n} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2},$<br>$a_n := 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), x > 0$                                                                                             | $n > 0$                                 | $n$                            | $2n$                                               |
| $F$ de Fisher   | $f(x) = \frac{a_n x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}$<br>$a_n := \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, x > 0$ | $m, n \in \mathbb{N}$                   | $\frac{n}{n-2},$<br>$n \geq 3$ | $\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)},$<br>$n \geq 5$ |
| Erlang          | $\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda e^{-\lambda x}$                                                                                                                                   | $k \in \mathbb{N}, \lambda > 0$         | $\frac{k}{\lambda}$            | $\frac{k}{\lambda^2}, x > 0$                       |

9. Resumen de distribuciones muestrales e intervalos de confianza

Cuadro A.1: Distribución de la media muestral

|    | ¿FORMA DE LA POBLACIÓN? | ¿ES $\sigma^2$ CONOCIDA? | ¿TAMAÑO DE LA MUESTRA?    | ¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?                            | ¿Z Ó t?                                       |
|----|-------------------------|--------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. | Normal                  | Sí                       | No importa                | Normal                                             | $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ |
| 2. |                         | No                       | Grande<br>( $n \geq 30$ ) | Normal                                             | $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$      |
| 3. |                         |                          | Pequeño<br>( $n < 30$ )   | t de Student,<br>$v = n - 1$<br>grados de libertad | $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$      |
| 4. | No normal o desconocida | Sí                       | Grande<br>( $n \geq 30$ ) | Normal                                             | $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ |
| 5. |                         |                          | Pequeño<br>( $n < 30$ )   | Callejón sin salida                                |                                               |
| 6. |                         | No                       | Grande<br>( $n \geq 30$ ) | Normal                                             | $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$      |
| 7. |                         |                          | Pequeño<br>( $n < 30$ )   | Callejón sin salida                                |                                               |

Cuadro A.2: Distribución relacionadas con proporciones

|    | ¿ESTADÍSTICO?                         | ¿SUPUESTO?                                                                                  | ¿DIST. MUESTRAL | ¿Z?                                                                                                        |
|----|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | Proporción muestral                   | $n \geq 30$                                                                                 | Normal          | $Z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$                                                          |
| 2. |                                       | $np \geq 5,$<br>$n(1 - p) \geq 5$                                                           | Normal          |                                                                                                            |
| 3. | Diferencia de proporciones muestrales | $n_1 \geq 30,$<br>$n_2 \geq 30$                                                             | Normal          | $Z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$ |
| 4. |                                       | $n_1 p_1 \geq 5,$<br>$n_1 (1 - p_1) \geq 5,$<br>$n_2 p_2 \geq 5,$<br>$n_2 (1 - p_2) \geq 5$ | Normal          |                                                                                                            |

**Cuadro A.3:** Distribución de la diferencias de medias muestrales

$X$  representa la población y para las dos últimas posibilidades de la tabla:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad v' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

|    | ¿X?          | ¿ $\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$<br>SE<br>CONOCEN? | ¿ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ? | ¿ $n_1$ y $n_2$ ?                           | ¿DISTRIBUCIÓN<br>MUESTRAL?                                          | ¿Z Ó t?<br>$d := \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ,<br>$\mu := \mu_1 - \mu_2$            |
|----|--------------|-------------------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | No<br>normal | Sí                                              | No im-<br>porta               | Grandes<br>$n_1 \geq 30$ ,<br>$n_2 \geq 30$ | Normal                                                              | $Z = \frac{d - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$   |
| 2. |              | No                                              | No im-<br>porta               | Grandes<br>$n_1 \geq 30$ ,<br>$n_2 \geq 30$ | Normal                                                              | $Z = \frac{d - \mu}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$             |
| 3. | Normal       | Sí                                              |                               | No importa                                  | Normal                                                              | $Z = \frac{d - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$   |
| 4. |              | No                                              | Sí                            | Pequeño<br>$n_1 < 30$ ,<br>$n_2 < 30$       | t de Student con<br>$v = n_1 + n_2 - 2$<br>grados de libertad       | $t = \frac{d - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ |
| 5. |              |                                                 | No                            | Pequeño<br>$n_1 < 30$ ,<br>$n_2 < 30$       | v' grados de libertad<br><br>(redondear al en-<br>tero más cercano) | $t = \frac{d - \mu}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$             |

**Cuadro A.4:** Distribución de la varianza muestral y de la razón de varianzas muestrales

|    | ESTADÍSTICO     | ¿POBLACIÓN?       | ¿DISTRIBUCIÓN<br>MUESTRAL?                                                    | ¿ $\chi^2$ Ó F?                                                                                                        |
|----|-----------------|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $s^2$           | Normal            | Chi-cuadrada con<br>$v = n - 1$<br>grados de libertad                         | $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$                                                                                   |
| 2. | $s_1^2 / s_2^2$ | Ambas<br>normales | F de Fisher con<br>$v_1 = n_1 - 1$ ,<br>$v_2 = n_2 - 1$<br>grados de libertad | $F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2}$<br><br>Regla:<br>$F_{1-\alpha}(a, b) = \frac{1}{F_{\alpha}(b, a)}$ |

**Cuadro A.5:** Intervalos de confianza para la media poblacional

|    | ¿POBLACIÓN?                        | ¿ $\sigma^2$<br>CONOCIDA? | ¿TAMAÑO<br>MUESTRAL?      | ¿DISTRIBUCIÓN<br>MUESTRAL?                           | ¿INTERVALO?<br>$\bar{x} - b < \mu < \bar{x} + b$ , con: |
|----|------------------------------------|---------------------------|---------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1. | Normal                             | Sí                        | No importa                | Normal                                               | $b := Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$             |
| 2. |                                    | No                        | Grande<br>( $n \geq 30$ ) | Normal                                               | $b := Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$                  |
| 3. |                                    |                           | Pequeño<br>( $n < 30$ )   | $t$ de Student,<br>$v = n - 1$<br>grados de libertad | $b := t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$                  |
| 4. | No<br>normal o<br>desco-<br>nocida | Sí                        | Grande<br>( $n \geq 30$ ) | Normal                                               | $b := Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$             |
| 5. |                                    |                           | Pequeño<br>( $n < 30$ )   | Callejón sin<br>salida                               |                                                         |
| 6. |                                    | No                        | Grande<br>( $n \geq 30$ ) | Normal                                               | $b := Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$                  |
| 7. |                                    |                           | Pequeño<br>( $n < 30$ )   | Callejón sin<br>salida                               |                                                         |

**Cuadro A.6:** Intervalos para la proporción y para la diferencia de proporciones

|    | ¿ESTADÍSTICO?                               | ¿SUPUESTOS?                                                                              | ¿DISTR.<br>MUESTRAL? | ¿INTERVALO DE CONFIANZA?<br>$\bar{p} - b < p < \bar{p} + b$ , con:                                 |
|----|---------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | Proporción<br>muestral                      | $n \geq 30$                                                                              | Normal               | $b := Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$                                            |
| 2. |                                             | $np \geq 5$ ,<br>$n(1-p) \geq 5$                                                         | Normal               |                                                                                                    |
| 3. | Diferencia de<br>proporciones<br>muestrales | $n_1 \geq 30$ ,<br>$n_2 \geq 30$                                                         | Normal               | $\bar{p} := \bar{p}_1 - \bar{p}_2$                                                                 |
| 4. |                                             | $n_1 p_1 \geq 5$ ,<br>$n_1(1-p_1) \geq 5$ ,<br>$n_2 p_2 \geq 5$ ,<br>$n_2(1-p_2) \geq 5$ | Normal               | $b := Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{p}_1(1-\bar{p}_1)}{n_1} + \frac{\bar{p}_2(1-\bar{p}_2)}{n_2}}$ |

**Cuadro A.7:** Intervalos para la varianza y para la razón de varianzas

|    |                 | ¿POBLACIÓN?       | ¿DISTRIBUCIÓN<br>MUESTRAL?                                                      | ¿INTERVALO DE<br>CONFIANZA?                                                                                                                                                                                                        |
|----|-----------------|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $s^2$           | Normal            | Chi-cuadrada con<br>$v = n - 1$<br>grados de libertad                           | $\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$                                                                                                                             |
| 2. | $s_1^2 / s_2^2$ | Ambas<br>normales | $F$ de Fisher con<br>$v_1 = n_1 - 1$ ,<br>$v_2 = n_2 - 1$<br>grados de libertad | $\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(v_1, v_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(v_2, v_1)$<br><br>Regla:<br>$F_{1-\alpha}(a, b) = \frac{1}{F_{\alpha}(b, a)}$ |

**Cuadro A.8:** Intervalos de confianza para la diferencias de medias poblacionales

$X$  representa la población y para las dos últimas posibilidades de la tabla:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad v' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

|    | ¿X?          | ¿ $\sigma_1^2$ y $\sigma_2^2$<br>SE<br>CONOCEN? | ¿ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ? | ¿ $n_1$ y $n_2$ ?                               | ¿DISTRIBUCIÓN<br>MUESTRAL?                                                              | ¿INTERVALO?<br>$d - b < \theta < d + b$ ,<br>donde $d := \bar{x}_1 - \bar{x}_2$<br>$\theta := \mu_1 - \mu_2$ y: |
|----|--------------|-------------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | No<br>normal | Sí                                              | No<br>importa                 | Grandes<br>( $n_1 \geq 30$ ,<br>$n_2 \geq 30$ ) | Normal                                                                                  | $b := Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$                                      |
| 2. |              | No                                              | No<br>importa                 | Grandes<br>( $n_1 \geq 30$ ,<br>$n_2 \geq 30$ ) | Normal                                                                                  | $b := Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$                                                |
| 3. | Normal       | Sí                                              | No<br>importa                 | No<br>importa                                   | Normal                                                                                  | $b := Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$                                      |
| 4. |              | No                                              | Sí                            | Pequeño<br>( $n_1 < 30$ ,<br>$n_2 < 30$ )       | $t$ de Student con<br>$v = n_1 + n_2 - 2$<br>grados de libertad                         | $b := t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$                                                |
| 5. |              |                                                 | No                            | Pequeño<br>( $n_1 < 30$ ,<br>$n_2 < 30$ )       | $t$ de Student con<br>$v'$ grados de libertad<br>(redondear al en-<br>tero más cercano) | $b := t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$                                                |

# B

## Guía rápida para trabajar con Statgraphics

### B.1 Análisis de un solo conjunto de datos

---

1. Abrir el archivo de datos **calles.sf3**.
2. Seleccionamos *Describe ... Numeric Data ... One-Variable Analysis*.
3. Elegimos *Data = Longitud* y pulsamos la opción *OK*.
4. Sale la llamada *ventana del análisis*. Los íconos principales de esta ventana son:
  - *Input dialog* (ícono de diálogos): para seleccionar o cambiar variables dentro del archivo y análisis seleccionado.
  - *Tabular options* (ícono de opciones tabulares): medidas estadísticas, percentiles, tablas de frecuencia, inferencias, etc.
  - *Graphical options* (ícono de opciones gráficas): diagramas de dispersión, histogramas, etc.
  - *Save results* (ícono de salvar resultados): permite salvar los resultados del análisis.
5. Transformación de una variable:<sup>1</sup> *One Variable Analysis*, activar el botón *Transform* y, en *Operators*, elegir *logaritmo*.

### B.2 Análisis simultáneo de dos o más conjuntos de datos

---

1. *Compare ... Two Samples ... Two Sample Comparison ...*
2. Para obtener diagramas de cajas múltiples: *Compare ... Multiple Samples ... Multiple-Sample Comparison ... Multiple Data Columns ... Ok ... Samples=* (en esta última opción mencionar los datos que queremos comparar)
3. Para obtener diagramas de cajas múltiples: *Plot ... Exploratory Plots ... Multiple Box-and-Whisker Plot ... Data=distancia ... Level codes=year ...*

---

<sup>1</sup>Por ejemplo, si quisiéramos trabajar con el logaritmo de la variable escribimos **LOG(longitud)** en vez de **longitud**.

## B.3 Gráficos de dispersión

Con la opción *Plot...Scatterplots* se pueden realizar:

1. Gráficos univariantes (*Univariate Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y utilizar la variable *mpg*.
2. Gráficos bidimensionales *X-Y* simples (*X-Y plot*) y múltiples (*Multiple X-Y Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y hacer *Y=mpg* y *X=potencia*. Sobre la gráfica, pulsar botón derecho del ratón y elegir *Pane options*. Aparece una pantalla con varios campos. Elegir *Point Codes=model*.
3. Gráficos tridimensionales *X-Y-Z* simples (*X-Y-Z plot*) y múltiples (*Multiple X-Y-Z Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y hacer *X=accel*, *Y=cilindro*, *Z=price*. Sobre la zona gráfica: botón derecho, *Pane options*, *Point Codes=origin*.
4. Gráficos de matriz (*Matriz Plot*).
5. Gráficos en coordenadas polares (*Polar Coordinates Plot*).

## B.4 Diagramas de presentación

Con la opción *Plot...Business Charts* se pueden realizar (abrir siempre el archivo **autos.sf3**):

1. Gráficos de barras simples (*Barchart*). Por ejemplo, realizar un gráfico de barras para la variable *origin* del archivo **autos.sf3**, que contiene el país de origen de los autos. Los valores de la variable *origin* son 1 para los autos norteamericanos, 2 para autos europeos y 3 para autos japoneses. En esta opción sale, entre otros, el campo *Counts* (Frecuencias) que permite introducir la variable que contiene las frecuencias absolutas de los valores de la variable a graficar. Como las frecuencias absolutas de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)*. Además, el campo *Labels* (Etiquetas) permite introducir el nombre de la variable que contiene las etiquetas a utilizar para cada barra del gráfico. Como las etiquetas de los valores de la variable *origin* están contenidas *carmakers*, que son *America*, *Europe* y *Japan*, hacemos *Labels=carmakers*.
2. Gráficos de barras múltiples (*Multiple Barchart*). Por ejemplo, realizaremos un gráfico de barras dobles para las variables *origin* y *year* del archivo **autos.sf3**, que contienen el país de origen de los autos y el año de construcción, respectivamente. Los valores de la variable *year* son los intervalos 1978, [1979,1980] y [1981,1982]. Aparecen, entre otros, los siguientes campos:
  - *Columns* (Columnas): En este campo se introducen las variables que contienen las frecuencias absolutas de los valores de las variables a graficar, o una expresión de Statgraphics que contiene operadores y que genera sus valores. Como las frecuencias absolutas de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, y como las frecuencias absolutas de los valores de la variable *year* son: 36 para 1978, 58 para [1979,1980] y 61 para [1981,1982], entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)* y *join3(36;58;61)*.
  - *Labels* (Etiquetas): Hacemos *Labels=carmakers*.
3. Gráficos de sectores (*Piechart*). Por ejemplo, realizaremos un gráfico de sectores para la variable *origin* del archivo **autos.sf3**, que contienen el país de origen de los autos y el año de construcción, respectivamente. Los valores de la

variable *origin* son 1 para los autos norteamericanos, 2 para autos europeos y 3 para autos japoneses. Aparecen, entre otros, los siguientes campos:

- **Counts** (Frecuencias): En este campo se introducen las variables que contienen las frecuencias absolutas de los valores de las variables a graficar, o una expresión de Statgraphics que contiene operadores y que genera sus valores. Como las frecuencias absolutas de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)*.
- **Labels** (Etiquetas): En este campo se debe introducir el nombre de la variable que contiene las etiquetas a utilizar para cada grupo de barras del gráfico. Como las etiquetas de los valores de la variable *origin* están contenidas *carmakers*, que son *America*, *Europe* y *Japan*, hacemos *Labels=carmakers*.

4. Gráficos de componentes de líneas (*Component Line Chart*)

5. Gráficos de escogencias alta y baja (*High-Low-Chose Chart*).

## B.5 Variables numéricas multidimensionales

---

Seleccione la siguiente secuencia de opciones: *Describe...Numeric Data...Multiple-Variable Analysis* y aparecen todas las variables del archivo. Aparece una ventana de diálogo en cuyo campo *Data* introducimos la variables *origin*, *price* y *year*. Luego, pulsamos el botón OK.

## B.6 Distribuciones de probabilidad

---

*Plot ... Probability Distributions*. Escogemos la distribución deseada. Los valores de los parámetros que definen la distribución (están fijados por defecto por el programa) los podemos modificar si pulsamos el botón derecho del ratón y escogemos la opción *Analysis Options*.

## B.7 Inferencias basadas en una sola muestra

---

1. Se escoge *Describe ... Numeric Data ... One Variable Analysis*. Elegimos la variable que va a ser objeto del análisis y pulsar OK. Al pulsar el ícono *Tabular options* aparecen, entre otros:

- **Confidence Intervals**.  
Calcula intervalos para la media (*Confidence Interval for Mean*) y la desviación típica (*Confidence Interval for Standard Deviation*) de la distribución. Pulsando el botón derecho del ratón y escogiendo *Pane Options* se puede modificar el nivel de confianza (*Confidence Level*) y el tipo de intervalo (*Interval Type*).
- **Hypothesis Testing**  
Se realizan los contrastes de la media y de la desviación típica. Pulsando el botón derecho del ratón y escogiendo *Pane options* se pueden modificar el valor del parámetro para la hipótesis nula (por ejemplo  $Mean = \mu_0$ ), del nivel de significancia  $\alpha$  (*Alpha*) y de la hipótesis alternativa:



## 2. Cálculo de la curva de potencia.

*Describe ... Hypothesis Test ... Normal Mean* y en *Null Hypothesis* se elige el valor de la media bajo la hipótesis nula. En la casilla *Sample Sigma* se escoge el valor de la desviación típica de la población. El tamaño de muestra se fija a través de *Sample Size*. Seleccionando el ícono de gráficos se selecciona la única gráfica posible (curva de potencia - *Power Curve*) y se pulsa *OK*.

## B.8 Inferencias basadas en dos muestras

---

1. Elegir *Compare ... Two Samples*, en donde aparecen cuatro (4) opciones: *Two Sample Comparison*, *Paired-Sample Comparison*, *Hypotesis Tests*, *Sample-Size Determination*.
2. Cuando seleccionamos *Two Sample Comparison*<sup>2</sup> el programa pide al usuario que especifique las dos columnas de datos a comparar (*Sample 1* y *Sample 2*). Seleccionando *Tabular options* aparece, entre otros:
  - *Comparison of Means*: Intervalo de confianza para la diferencia de medias y contraste de igualdad de medias.
  - *Comparison of Standard Deviations*: Intervalo de confianza para el cociente de varianzas y contraste de igualdad de varianzas.
  - *Kolmogorov-Smirnov Test*: Prueba de hipótesis para saber si las distribuciones de ambas muestras son idénticas.

## B.9 Bondad de ajuste

---

1. Se selecciona *Describe... Distribution Fitting...Uncensored Data*. Al pulsar *OK* se obtiene, entre otras, la salida de los contrastes de bondad de ajuste.
2. Si, estando situados sobre esta salida, pulsamos el botón derecho del ratón y elegimos la opción *Analysis Options* del menú emergente resultante, obtenemos la caja de diálogo *Probability Distributios Options*, que presenta todas las posibles distribuciones a considerar para el ajuste (observamos que por defecto el ajuste se realiza a una distribución normal).
3. También aparecen los siguientes campos:
  - *Number of Trials* (número de ensayos).  
Se rellena con el número de tiradas cuando la distribución elegida para el ajuste es binomial;
  - *Number of Successes* (número de eventos).  
Se rellena con el número de éxitos cuando la distribución elegida es una binomial negativa.
  - *Population Size* (tamaño de la población).  
Se rellena con el tamaño de la población cuando la distribución elegida es una hipergeométrica.
4. La opción tabular *Tests for Normality*: realiza los contrastes de normalidad.
5. Opción tabular *Goodness-of-Fit Tests*: realiza los contrastes de la bondad de ajuste de los datos a una distribución dada.

---

<sup>2</sup>El procedimiento es idéntico cuando seleccionamos la opción *Paired-Sample Comparison*

# C

## Guía rápida para trabajar con SPSS

### C.1 Definición de las variables

---

Para definir cada variable hay dos procedimientos:

- Hacer doble clic sobre el encabezamiento de la variable o
- Seleccionar, en la parte inferior, la pestaña *vista de variables*.

Cuando se hace esto, observamos que hay una fila para cada variable del conjunto de datos y que existen 10 columnas: *Nombre*, *Tipo*, *Anchura*, *Decimales*, *Etiqueta*, *Valores*, *Perdidos*, *Columnas*, *Alineación* y *Medida*. La definición de una variable se basa en las opciones que se ofrecen en esa ventana:

1. *Asignar un nombre a cada variable*, cumpliendo las siguientes reglas:

- Nombres con no más de 8 caracteres (el primero debe ser una letra o @).
- No utilizar símbolos como &, /, \$, etc.
- No utilizar nunca espacios en blanco.
- No utilizar expresiones como ALL, AND, BY, EQ, GE, GT, LE, NE, NOT, OR, TO, o WITH.

2. *Asignar un tipo a cada variable*, indicando el máximo número de dígitos que deseamos para anotar las observaciones de la variable y el tipo de la variable con la que vamos a trabajar (*alfanumérica*, *fecha*, *moneda* o *numérica*) indicando en este caso el número de cifras decimales con que queremos que aparezca en el editor. SPSS permite trabajar con los siguientes tipos de variables:

- *Numéricas*: formato numérico estándar.
- *Coma*: comas de separación cada tres posiciones. Un punto para la parte decimal.
- *Punto*: al contrario que el anterior.
- *Notación Científica*: uso de la E para exponente.
- *Cadena*: variable alfanumérica (de más de 8 caracteres se considera larga).
- Además están los formatos de *fecha*, *dólar* y *moneda personalizada*.

Si no escogemos el tipo, el sistema lo asigna automáticamente, siendo el formato por defecto: *Númerica 8.2* que significa: Anchura: 8 y Decimales: 2; es decir, una amplitud de columna de 8 espacios, siendo los 2 últimos para los decimales.

3. *Asignar una Etiqueta a cada variable* de no más de 120 caracteres (entre 30 y 40 es el valor recomendado) que nos permita tener más información sobre esa variable.
4. *Asignar Valores*: se trata de asignar etiquetas a los valores de cada variable. No es obligatorio, pero sí muy útil en algunos casos.
5. *Definir Perdidos*: permite definir los valores de los datos especificados como perdidos por el usuario. Sitúese en el campo correspondiente a *Perdidos* de cualquier variable y pulse sobre el recuadro coloreado, aparece: Los códigos asignados a los valores ausentes deben de ser coherentes con el tipo de variables declarado: numéricos para las numéricas y alfanuméricos para las alfanuméricas (máximo 9 caracteres). Se pueden introducir hasta 3 valores perdidos (individuales) de tipo discreto, un rango de valores perdidos o un rango más un valor de tipo discreto. Sólo pueden especificarse rangos para las variables numéricas. Estos valores ausentes son denominados por SPSS “valores ausentes definidos por el usuario” (*user-defined missing values*), a diferencia de los definidos por el sistema (*system-missing values* o *sysmis*). Estos últimos corresponden a los que establece el sistema para los espacios en blanco y caracteres ilegales que puedan haber en el archivo de datos. Aparecen en los listados representados por comas.
6. *Definir Columnas*: consiste en especificar la amplitud de la columna. Podemos hacerlo también desde el propio archivo de datos.
7. *Definir Alineación*: seleccionar la justificación de las entradas de la columna: *Izquierda*, *Derecha* y *Centrado*.
8. *Especificar medida*. Se puede seleccionar uno de los tres niveles de medida:
  - *Escala*: los valores de datos son numéricos en una escala de intervalo. Las variables de escala deben ser numéricas.
  - *Ordinal*: los valores de datos representan categorías con un cierto orden intrínseco (bajo, medio, alto; totalmente de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo). Las variables ordinales pueden ser de cadena o valores numéricos. Notar que para variables de cadena ordinales, se asume que el orden alfabético de los valores de cadena indica el orden correcto de las categorías; en el caso de bajo, medio y alto el orden sería alto, bajo y medio (orden que no es correcto), por lo que es más fiable utilizar códigos numéricos para representar datos ordinales que usar etiquetas de estos códigos.
  - *Nominal*: los valores de datos representan categorías sin un cierto orden intrínseco. Las variables nominales pueden ser de cadena o valores numéricos que representan categorías diferentes, por ejemplo *1 = Hombre* y *2 = Mujer*.

### C.1.1. Transformación de una variable

Elegimos *Transformar ... Calcular*, y realizamos los siguientes pasos:

- a) Asignar un nombre y un tipo (por defecto será numérica) a la nueva variable en el cuadro de texto de la *Variable de destino*.
- b) Definir la expresión numérica que va a permitir calcular los valores de la misma. Para ello utilizaremos los nombres de las variables del archivo (podemos escribirlos o seleccionarlos del listado que aparece), constantes, operadores y funciones.
- c) Pulsar *Aceptar*.

Para construir estas expresiones pueden usarse operadores aritméticos como +, -, \*, /, \*\* y funciones como SQRT, EXP, LG10, LN, ARTAN, COS, SIN, ABS, MOD10, TRUNC, RND, entre otras:

- MOD10 (Resto resultante de dividir entre 10).
- TRUNC (Parte entera de un número).
- RND (Redondeo al entero más cercano).

Pulsando el botón derecho sobre el nombre de la función, aparece su descripción. El argumento de las funciones debe ir entre paréntesis. Existen funciones particulares como UNIFORM y NORMAL, que se utilizan para la generación de variables aleatorias. Son de bastante utilidad en estudios de simulación.

Es importante tener cuidado con el orden de utilización de los operadores y no olvidar que los valores antiguos pierden su vigencia al recodificar una variable sobre el mismo nombre.

El botón *SI...* permite realizar modificaciones similares, pero sujetas a que se verifique una condición lógica. Se incluirán aquellos casos que verifiquen la condición. Los que no la cumplan pasarán a ser valores ausentes definidos por el sistema.

Una expresión lógica es una expresión que puede ser evaluada como verdadera o falsa en función de los valores de las variables en ella relacionadas. El nexo de las variables son los operadores de relación: =, >=, <=, <, >, ~= . Es posible formar expresiones complejas, utilizando los operadores lógicos: AND (&), OR (|), NOT (~).

### C.1.2. Recodificación de una Variable

A partir de una variable podemos crear otra cuyos valores sean una recodificación de los de la primera. Esta recodificación podemos hacerla tanto en la misma variable como en variables diferentes. Para ello, seleccionaremos *Transformar ... Recodificar ... En distintas variables*. Se abre una ventana en la que deberemos asignar un nombre (y una etiqueta si queremos) a la nueva variable.<sup>1</sup>

### C.1.3. Filtrado de datos

El programa SPSS permite seleccionar determinados casos para un próximo proceso, bien temporalmente o de forma permanente, sobre la base de un criterio lógico o de una decisión aleatoria. Para ello seleccionaremos el menú *Datos ... Seleccionar casos*. La selección de individuos puede ser temporal (*filtrados*) o permanente (*eliminados*). En la selección permanente eliminamos del archivo activo los individuos deseados, mientras que en la temporal, la selección es recuperable (los casos son filtrados). En esta última situación, los individuos (casos) del archivo que no satisfacen la condición aparecerán marcados como excluidos mediante una línea que cruza en diagonal su número de fila. Aparece también una variable llamada *filter\$* que el sistema crea para controlar el filtrado de datos.

Especificaciones:

- *Todos los casos*: indica que quiere procesar todos los casos del archivo de datos de trabajo.
- *Si se satisface la condición*: indica que quiere procesar sólo los casos que satisfagan una condición lógica. Para especificar o cambiar la condición, pulse en *Sí*. Esta alternativa crea la variable *filter\$*, que el sistema crea para controlar el filtrado de datos.

---

<sup>1</sup> Cuidado!, si se selecciona ... borrarás la variable original.

- **Muestra aleatoria de casos:** indica que queremos seleccionar los casos de forma aleatoria para su procesamiento. Si ha tecleado las especificaciones de muestreo, éstas aparecerán junto al botón de comando Muestra. Si no, o si quiere cambiarlas, pulse en *Muestra* (véase más adelante). Esta alternativa también crea la variable *filter\$*.
- **Basándose en el rango del tiempo o de los casos:** permite seleccionar los casos deseados siempre que sean consecutivos.
- **Usar variable de filtro:** indica que quiere utilizar los valores de una variable numérica existente para controlar el filtrado de casos. Seleccione la variable de la lista de la izquierda. Los casos cuyo valor sea 0, o ausentes, en la variable de filtro se excluyen del análisis.

## C.2 Análisis exploratorio de datos

---

Primero abrir el archivo de datos.

- a) **Tablas de frecuencias:** *Analizar ... Estadísticos descriptivos ... Frecuencias*. SPSS también cuenta con el menú alternativo *Analizar ... Tablas personalizadas* que posibilita alterar el formato del resultado.
- b) **Estadísticos:** *Analizar ... Estadísticos descriptivos ... Descriptivos* donde hay que seleccionar la variable o variables de interés y después *Opciones* para escoger los estadísticos que interesan. Sin embargo con este menú no se pueden obtener los percentiles. Para obtenerlos hay que usar *Analizar ... Estadísticos descriptivos ... Frecuencias* y entrar en la opción *Estadísticos* en donde se seleccionan los percentiles deseados.
- c) **Gráficos de sectores:** *Gráficos ... Sectores* y seleccionaremos una o varias variables apareciendo un cuadro de diálogo, cuyas opciones pasamos a comentar:
  - 1) *Resúmenes para grupos de casos:* Genera un gráfico en el que cada sector corresponde a un valor de la variable seleccionada. El tamaño del sector se determina por la opción *Los sectores representan*, esta opción aparece en el cuadro de diálogo que surge después de pulsar el botón *Definir* del cuadro anterior. También es posible que los sectores representen otra cosa, como la media de los valores de otra variable, el valor máximo, etc.; esto se consigue con la opción *Otra función resumen*. Se puede también editar el gráfico haciendo doble clic sobre él, con posibilidad de cambiar colores, tramas, desgajar sectores, etc.
  - 2) *Resúmenes para distintas variables.* Permite que los sectores representen variables en lugar de grupos de casos. Cada sector representa una función de una determinada variable (por ejemplo, la suma de los valores de sus casos).
  - 3) *Valores individuales de los casos.* Se resume una única variable, los casos ya son valores agrupados de la variable. Cada sector representa el valor de un caso individual. Con *Gráficos ... Interactivos ... Sectores* podemos obtener representaciones con efectos más llamativos.
- d) **Diagramas de barras:** *Gráficos ... Barras* y *Gráficos ... Interactivos ... Barras*.
- e) **Histogramas:** *Gráficos ... Histograma* o *Gráficos ... Interactivos ... Histograma*.
- f) **Gráficos de tallo y hojas:** *Analizar ... Estadísticos descriptivos ... Explorar*.
- g) **Diagramas de caja:** *Gráficos ... Diagrama de cajas*.

- h) **Diagramas de dispersión:** *Gráficos ... dispersión ... simple* o *Gráficos ... Interactivos ... Diagrama de dispersión*, en donde aparece un cuadro de diálogo en el que se puede elegir qué variable ocupará el eje X y qué otra el eje Y.

## C.3 Inferencia sobre una o más poblaciones

---

Primero abrir el archivo de datos.

- a) **Análisis de una muestra:** *Analizar ... Comparar medias ... Prueba T para una muestra*. Aparece una pantalla en cuyo campo *Contrastar Variables* introducimos las variables que queremos contrastar. En esta ventana, seleccionamos *Opciones*, para introducir el grado de confianza deseado (por defecto es del 95%). Al final se pulsa *Aceptar*.
- b) **Análisis de dos muestras emparejadas o relacionadas (Prueba T para muestras relacionadas).** Para efectuar la prueba T para muestras relacionadas se necesita una columna en los datos para cada una de las variables a comparar. Seleccionamos *Analizar ... Comparar medias ... Prueba T para muestras relacionadas*. Aparece la ventana en donde seleccionamos las variables en cuya comparación estamos interesados. Al hacer la primera selección en la columna de variables, esta aparece en el recuadro selecciones actuales como *variable 1*, y al realizar la segunda selección aparecerá como *variable 2*. En ese momento, ya seleccionadas las dos, es cuando las podemos introducir en la columna variables relacionadas. Se pulsa *Aceptar*.
- c) **Análisis de dos muestras independientes (Prueba T para muestras independientes).** El programa necesita una columna en el editor de datos que contenga los valores de la variable cuyas medias en las dos poblaciones se desea comparar, y otra que indica la población o grupo a que pertenece cada individuo. A continuación, seleccionamos *Analizar ... Comparar medias ... Prueba T para muestras independientes*. Aparece una ventana en donde, en primer lugar seleccionamos una variable numérica y con el puntero la situamos en la ventana de *Contrastar variables*. A continuación, seleccionamos una única variable de agrupación y pulsamos *Definir grupos*. En esta ventana debemos especificar los dos grupos de la variable de contraste, eligiendo entre:
- *Usar valores especificados*. Escribimos un valor para el Grupo 1 y otro para el Grupo 2. Los casos con otros valores quedarán excluidos.
  - *Punto de corte*. Escribimos un número que divida los valores de la variable de agrupación en dos conjuntos.

Si la variable de agrupación es de cadena corta, por ejemplo, *SI* y *NO*, podemos escribir una cadena para el Grupo 1 y otra para el Grupo 2. Los casos con otras cadenas quedarán excluidos del análisis. Una vez completada la ventana y tras pulsar *Continuar*, volvemos a la ventana de *Prueba T para muestras independientes*. Pulsando el botón *Opciones* podemos introducir un valor entre 1 y 99 para el coeficiente de confianza de un intervalo, cuyo valor por defecto es del 95%. Tras pulsar el botón *Aceptar*.

- d) **Pruebas de normalidad.** *Analizar ... Estadísticos descriptivos ... Explorar*. Aparece la ventana *Explorar*. En el caso de una muestra situamos la variable en la ventana *Dependientes*, y dejamos *Factores* en blanco. Para dos muestras independientes, situamos la variable a contrastar en la ventana *Dependientes*, y la variable que forma los grupos en la de *Factores*. Para dos muestras emparejadas situamos una variable con la diferencia de las dos originales en la ventana *Dependientes*, y dejamos *Factores* en blanco. A continuación, debemos pulsar el botón *Gráficos* y en la nueva ventana escoger la opción de *Histograma* y activar la opción de *Gráficos con pruebas de normalidad*.



# D

## Uso de la calculadora en la estadística

Las explicaciones las basaremos en la utilización de las calculadoras Casio fx-82MS, fx-83MS, fx-85MS, fx-270MS, fx-300MS y fx-350MS.

### Cálculos estadísticos

Para realizar cálculos estadísticos en la calculadora, tenga en cuenta los siguientes comentarios:

- Utilice **MODE** **2** para ingresar el modo estadístico SD.
- Utilice **SHIFT** **CLR** **1** **=** para borrar la memoria.
- Ingrese los datos usando la secuencia de tecla siguiente: <Dato> **DT**.
- Tenga en cuenta la tabla siguiente para los cálculos que se necesiten:

| Para llamar este tipo de valor: | Realice esta operación:            |
|---------------------------------|------------------------------------|
| $\sum x^2$                      | <b>SHIFT</b> <b>S-SUM</b> <b>1</b> |
| $\sum x$                        | <b>SHIFT</b> <b>S-SUM</b> <b>2</b> |
| $n$                             | <b>SHIFT</b> <b>S-SUM</b> <b>3</b> |
| $\bar{x}$                       | <b>SHIFT</b> <b>S-VAR</b> <b>1</b> |
| $\sigma_n$                      | <b>SHIFT</b> <b>S-VAR</b> <b>2</b> |
| $\sigma_{n-1}$                  | <b>SHIFT</b> <b>S-VAR</b> <b>3</b> |

### Ejemplo D.1

Calcule  $n$ ,  $\sum x$ ,  $\sum x^2$ ,  $\bar{x}$ ,  $\sigma_n$  y  $\sigma_{n-1}$  para los datos siguientes: 55, 54, 51, 55, 53, 53, 54 y 52.

SOLUCION:

- Primero, ingresamos al modo SD con las teclas **MODE** **2**.
- Luego, borramos la memoria con la secuencia de teclas **SHIFT** **CLR** **1** **=**.
- Posteriormente, ingresamos los datos: 55 **DT** 54 **DT** 51 **DT** 55 **DT** 53 **DT** 53 **DT** 54 **DT** 52 **DT**.
- Por último, calculamos las medidas estadísticas pedidas:



Suma de los cuadrados de los valores  $\sum x^2 = 22,805$

SHIFT S-SUM 1 =

Suma de valores  $\sum x = 427$

SHIFT S-SUM 2 =

Número de datos  $n = 8$

SHIFT S-SUM 3 =

Media aritmética  $\bar{x} = 53,375$

SHIFT S-VAR 1 =

Desviación estándar poblacional  $\sigma_n = 1,316956719$

SHIFT S-VAR 2 =

Desviación estándar muestral  $\sigma_{n-1} = 1,407885953$

SHIFT S-VAR 3 =

## Precauciones con el ingreso de datos

- **DT** **DT** ingresa el mismo dato dos veces.
- También puede ingresar múltiples entradas del mismo dato usando **SHIFT** **;**. Por ejemplo, para ingresar el dato 110 diez veces presiones 110 **SHIFT** **;** 10 **DT**.
- Mientras ingresa datos o después de completar el ingreso de datos, puede usar las teclas **Δ** y **▽** para ir visualizando a través de los datos que ha ingresado.
- Si ingresa múltiples ingresos del mismo dato usando **SHIFT** **;** para especificar la frecuencia de datos (número de ítemes de datos) como se describe anteriormente, pasando a través de los datos muestra el ítem de dato y una pantalla separada para la frecuencia de datos (freq).
- Los datos visualizados pueden editarse, si así lo desea. Ingrese el valor nuevo y presione la tecla **=** para reemplazar el valor antiguo por el valor nuevo. Esto también significa que si desea realizar alguna otra operación (cálculo, llamada de resultados de cálculos estadísticos, etc.), siempre deberá presionar primero la tecla **AC** para salir de la presentación de datos.
- Presionando la tecla **DT** en lugar de **=** después de cambiar un valor sobre la presentación, registra el valor que ha ingresado como un elemento de dato nuevo, y deja el valor antiguo tal como está.
- Puede borrar el valor del dato visualizado usando **Δ** y **▽**, y luego presionando **SHIFT** **CL**. Borrando un valor de dato ocasiona que todos los valores siguientes se desplacen hacia arriba.
- Después de ingresar los datos en el modo SD, no podrá visualizar o editar más los datos ítemes de datos individuales, después de cambiar a otro modo.

# Bibliografía

- [1] AGRESTI, A., *Categorical data analysis*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1990.
- [2] BARBOSA, R.; LLINÁS, H., *Procesos estocásticos con aplicaciones*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2013.
- [3] HOSMER, D. and LEMESHOW S., *Applied Logistic Regression*, Segunda edición, John Wiley and Sons, 2000.
- [4] KALB, K. y KONDER, P., *Una visión histórica del concepto moderno de integral*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2006 (editor: Dr. rer. nat. Humberto Llinás).
- [5] KLEINBAUM, D. and KLEIN, M., *Logistic Regression: A self Learning Text*, Segunda edición, Ed. Springer, 2002.
- [6] LLINÁS, H.; ROJAS, C., *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad*. Barranquilla: Ediciones Uninorte, 2005.
- [7] LLINÁS, H., *Precisiones en la teoría de los modelos logísticos*, Revista Colombiana de Estadística, Volumen 29, Número 2, pág. 239-265, 2006.
- [8] LLINÁS, H., *Estadística inferencial*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2006.
- [9] LLINÁS, H., *Medida e integración*. Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2007.
- [10] LLINÁS, H., *Applet: La ley de los grandes números*. Se puede encontrar en el siguiente link:  
<http://ylang-ylang.uninorte.edu.co/Objetos/Estadistica/LeyDeGrandesNumeros/index.html>
- [11] LLINÁS, H., *Applets de estadística*, 2007. Se puede encontrar en el siguiente link:  
<http://ylang-ylang.uninorte.edu.co:8080/drupal/?q=node/238>
- [12] LLINÁS, H.; ALONSO, J. FLÓREZ, K., *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2012.
- [13] LLINÁS, H., *Introducción a la estadística matemática*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.
- [14] LLINÁS, H., *Introducción a la teoría de probabilidad*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.
- [15] NELDER, J.A. and WEDDERBURN, R.W.M., *Generalized linear models*. The Journal of the Royal Statistical Society, serie A 135, pág.370-384, 1972.
- [16] PÉREZ, C., *Estadística práctica con Statgraphics*. España: Prentice Hall, 2002.
- [17] Página web de datos estadísticos del Institute for Digital Research and Education (IDRE) de la Universidad de California en Los Angeles (UCLA): <https://stats.idre.ucla.edu/>. En especial, consultar: <https://stats.idre.ucla.edu/other/examples/alr2/>