Notas de clase de Probabilidad y Estadística

Volumen 2: Cap. 3 (Pruebas de hipótesis)

Versión 4 (Abril 24, 2020)

Dr. rer. nat. Humberto LLinás Solano

Doctor en Estadística (Mainz-Alemania)
Profesor Titular/Investigador Asociado
hllinas@uninorte.edu.co

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Norte
(www.uninorte.edu.co).

Índice general

Prefacio

Introducción

Estas notas de clase hacen parte de un compendio de varios volúmenes y están dirigido a todo tipo de público que requiere de algún conocimiento básico en Estadística.

El autor

Humberto Jesús LLinás Solano es Licenciado en Ciencias de la Educación, con énfasis en Matemáticas, Física y Estadística de la Universidad del Atlántico (Colombia). Magister en Matemáticas, convenio Universidad del Valle-Universidad del Norte (Colombia). Doctor en Estadística (Dr. rer. nat.) de la Universidad Johannes Gutenberg de Mainz (Alemania). Desde 1998 se desempeña como profesor de tiempo completo de la Universidad del Norte y forma parte de los grupos de investigación Matemáticas y Enfermedades tropicales de dicha institución. Autor de los productos[1]:

- *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad* (2005, [6])
- *Estadística inferencial* (2006, [8])
- *Una visión histórica del concepto moderno de integral* (como editor, 2006, [4])
- *Medida e integración* (2007, [9])
- *Applets de estadística* (2007, [11])
- *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales* (2012, [12])
- *Procesos estocásticos con aplicaciones* (como coautor, 2013, [2])
- *Introducción a la estadística matemática* (2014, [13])
- *Introducción a la teoría de la probabilidad* (2014, [14])

[1] Se cita el título del texto o applet, el año de publicación y la referencia bibliográfica respectiva. Cuando sea necesario, un comentario adicional.

3 Pruebas de hipótesis

Notas de clase basada en LLinás (2006). Ver referencia [8].

3.1 Conceptos de la prueba de hipótesis

1. **Hipótesis estadísticas**.

   (a) HIPÓTESIS ESTADÍSTICA: afirmación sobre uno o más parámetros de una o más poblaciones.

   (b) LA HIPÓTESIS NULA H_0: la hipótesis que se debe comprobar. Inicialmente se asume como verdadera.

   (c) La HIPÓTESIS ALTERNATIVA H_1: se establece como el "complemento" de H_0.

   (d) Si θ es el parámetro de interés:[1]

      i) $H_0 : \theta \leq k$ vs $H_1 : \theta > k$, hipótesis (unilateral o de una cola) a la derecha.

      ii) $H_0 : \theta \geq k$ vs $H_1 : \theta < k$, hipótesis (unilateral o de una cola) a la izquierda.

      iii) $H_0 : \theta = k$ vs $H_1 : \theta \neq k$, hipótesis (bilateral o de dos colas).

2. **Comentarios**.

   a) H_0 siempre se refiere a un valor específico del parámetro θ (como, por ejemplo, μ) y no al estadístico (como $\overline{X}$).

   b) H_0 siempre debe contener un signo igual respecto al valor especificado del parámetro. Por ejemplo, la hipótesis nula debe escribirse así:

   $$H_0 : \mu = 36, \quad H_0 : \mu \leq 36 \quad \text{o} \quad H_0 : \mu \geq 36$$

   c) H_1 nunca debe contener un signo igual respecto al valor especificado de parámetro de población. Por ejemplo, la hip0́tesis alternativa debe escribirse así:

   $$H_1 : \mu \neq 36, \quad H_1 : \mu < 36 \quad \text{o} \quad H_1 : \mu > 36$$

[1] En general, si θ es un parámetro poblacional y si k es cualquier número real, entonces, la hipótesis alternativa $H_1 : \theta \neq k$ se llama ALTERNATIVA BILATERAL y las hipótesis alternativas $H_1 : \theta < k$ y $H_1 : \theta > k$, ALTERNATIVAS UNILATERALES.

3. **Errores de tipo I y de tipo II**.
   Véase la tabla 3.2 de LLinás (2006) en la página 154. Ver referencia [8].

Decisión sobre H_0	**H_0 es verdadera**	**H_0 es falsa**
Aceptar H_0	Decisión correcta Probabilidad = $1-\alpha$ $1-\alpha$ se llama grado de confianza	Error de tipo II Probabilidad = β
Rechazar H_0	Error de tipo I Probabilidad = α α se llama nivel de significancia	Decisión correcta Probabilidad = $1-\beta$ $1-\beta$ se llama potencia

Cuadro 3.1: Errores de tipo I y II y sus correspondientes probabilidades

4. **Estadístico de prueba y región crítica**.
   a) Un ESTADÍSTICO DE PRUEBA es un estadístico (es decir, una función que sólo depende de la información muestral) que se utiliza para determinar si se rechaza, o no, la hipótesis nula.
   b) La REGIÓN CRÍTICA es el conjunto de todos los valores del estadístico de prueba para los cuales la hipótesis nula será rechazada.
   c) En la sección 3.2 se muestra la forma de la región crítica para diferentes pruebas.
   d) **Comentario**: La hipótesis nula será rechazada si y sólo si el valor observado o calculado del estadístico de prueba se ubica en la región de rechazo.
5. **Valor P o P-valor**. Véase la definición 3.7.1 de LLinás (2006) en la página 199. Ver referencia [8].
   a) El p-valor o valor p es el mínimo nivel de significancia bajo la cual H_0 es rechazada.
   b) P-valor $\leq \alpha \Rightarrow$ Rechazar H_0 al nivel α.
   c) P-valor $> \alpha \Rightarrow$ No
6. **Fórmula para hallar el valor P o P-valor**.
   a) Véase el Teorema 3.7.2 de LLinás (2006) en la página 200. Ver referencia [8].
   b) Sea X uno de los siguientes estadísticos de prueba: Z, t, F χ^2
   c) x el valor de prueba (calculado con los datos a partir del estadístico de prueba X).
   d) El P-valor se calcula de la siguiente manera:

$$P\text{-valor} = \begin{cases} P(X \leq x), & \text{para una prueba de una cola a la izquierda,} \\ P(X \geq x), & \text{para una prueba de una cola a la derecha,} \\ 2\,P(X \geq |x|), & \text{para una prueba de dos colas.} \end{cases}$$

7. **Comentarios acerca de los términos “aceptar“ y “rechazar”**.
   a) Al “aceptar“ una hipótesis nula, no estamos asegurando necesariamente que haya mucho en su favor.
   b) Una afirmación más precisa, aunque más pedante, sobre la situación puede ser “*los datos disponibles no proporcionan suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula, dado que queremos fijar en α la probabilidad de rechazar una hipótesis nula que es cierta*”.
   c) Nosotros seguiremos usando “aceptar“ como una manera eficiente de expresar la idea anterior.

3.2 Pruebas para algunos parámetros poblacionales

3.2.1. Contrastes para la media poblacional

a) Tener en cuenta los supuestos de la tabla relacionada con distribución muestral de medias.

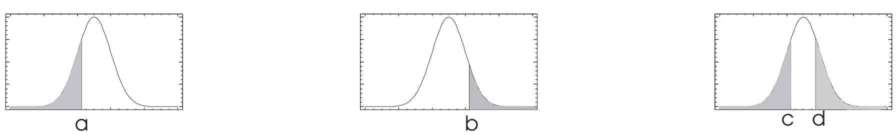
b) Las distribuciones a utilizar serán la normal o la t de Student con $v = n - 1$ grados de libertad.

c) La región crítica es la región sombreada que aparece en la figura 3.1.

d) A los valores a, b, c y d que aparecen en la figura 3.1 se les llamará valores críticos.

	¿HIPOTESIS NULA?	¿HIPOTESIS ALTERNATIVA?	¿REGION CRITICA?	¿VALOR CRITICO?
1.	$H_0 : \mu \geq k$	$H_1 : \mu < k$	Figura 3.1(a)	$a = -Z_\alpha$ ó $a = -t_\alpha$
2.	$H_0 : \mu \leq k$	$H_1 : \mu > k$	Figura 3.1(b)	$b = Z_\alpha$ ó $b = t_\alpha$
3.	$H_0 : \mu = k$	$H_1 : \mu \neq k$	Figura 3.1(c)	$c = -Z_{\alpha/2}$ y $d = Z_{\alpha/2}$ ó $c = -t_{\alpha/2}$ y $d = t_{\alpha/2}$

Cuadro 3.2: Resumen acerca contrastes relacionadas con la media poblacional



(a) $H_1 : \mu < k$ (b) $H_1 : \mu > k$ (c) $H_1 : \mu \neq k$

Figura 3.1: Región crítica para diferentes pruebas relacionadas con medias

3.2.2. Contrastes para la diferencia de medias poblacionales (muestras independientes)

a) Tener en cuenta los supuestos de la tabla relacionada con distribución muestral de diferencia de medias.

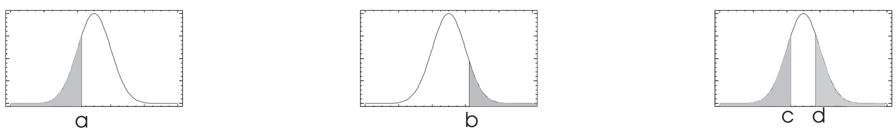
b) Utilizaremos la normal o la t de Student (los grados de libertad dependen de la situación que tengamos en el problema).

c) La región crítica es la región sombreada que aparece en la figura 3.2.

d) A los valores a, b, c y d que aparecen en la figura 3.2 se les llamará valores críticos.

	¿HIPOTESIS NULA?	¿HIPOTESIS ALTERNATIVA?	¿REGION CRITICA?	¿VALOR CRITICO?
1.	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq k$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < k$	Figura 3.2(a)	$a = -Z_\alpha$ ó $a = -t_\alpha$
2.	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq k$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > k$	Figura 3.2(b)	$b = Z_\alpha$ ó $b = t_\alpha$
3.	$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = k$	$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq k$	Figura 3.2(c)	$c = -Z_{\alpha/2}$ y $d = Z_{\alpha/2}$ ó $c = -t_{\alpha/2}$ y $d = t_{\alpha/2}$

Cuadro 3.3: Resumen acerca contrastes relacionadas con la media poblacional



(a) $H_1 : \mu_1 - \mu_2 < k$ (b) $H_1 : \mu_1 - \mu_2 > k$ (c) $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq k$

Figura 3.2: Región crítica para diferentes pruebas relacionadas con medias poblacionales

3.2.3. Contrastes para la diferencia de medias poblacionales (muestras dependientes o pareadas)

Al definir $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 =: \overline{X}$ y al considerar el problema de determinar la distribución muestral de $\overline{X}$, los diferentes supuestos que se deben tener en cuenta, coinciden con los que aparecen en la tabla A.1 y los contrastes son los mismos que los que ilustran en la tabla 3.2.

3.2.4. Contrastes para la proporcion poblacional

a) Tener en cuenta los supuestos de la tabla relacionada con distribución muestral de proporciones muestrales.

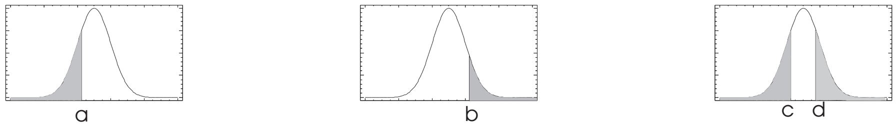
b) La distribución a utilizar será la normal.

c) La región crítica es la región sombreada que aparece en la figura 3.3.

d) A los valores a, b, c y d que aparecen en la figura 3.3 se les llamará valores críticos.

	¿HIPOTESIS NULA?	¿HIPOTESIS ALTERNATIVA?	¿REGION CRITICA?	¿VALOR CRITICO?
1.	$H_0 : p \geq k$	$H_1 : p < k$	Figura 3.3(a)	$a = -Z_\alpha$
2.	$H_0 : p \leq k$	$H_1 : p > k$	Figura 3.3(b)	$b = Z_\alpha$
3.	$H_0 : p = k$	$H_1 : p \neq k$	Figura 3.3(c)	$c = -Z_{\alpha/2}$ y $d = Z_{\alpha/2}$

Cuadro 3.4: Resumen acerca contrastes relacionadas con la proporción poblacional



(a) $H_1 : p < k$ (b) $H_1 : p > k$ (c) $H_1 : p \neq k$

Figura 3.3: Región crítica para diferentes pruebas relacionadas con proporciones poblacionales

3.2.5. Contrastes para la diferencia de proporciones poblacionales

a) Tener en cuenta los supuestos de la tabla relacionada con distribución muestral de diferencia de proporciones muestrales.

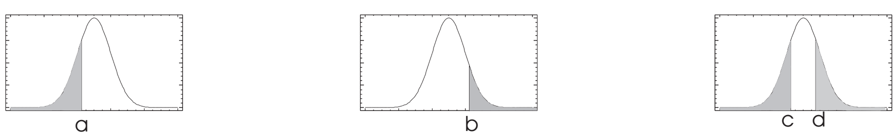
b) La distribución a utilizar será la normal.

c) La región crítica es la región sombreada que aparece en la figura 3.6.

d) A los valores a, b, c y d que aparecen en la figura 3.6 se les llamará valores críticos.

	¿HIPOTESIS NULA?	¿HIPOTESIS ALTERNATIVA?	¿REGION CRITICA?	¿VALOR CRITICO?
1.	$H_0 : p_1 - p_2 \geq k$	$H_1 : p_1 - p_2 < k$	Figura 3.6(a)	$a = -Z_\alpha$
2.	$H_0 : p_1 - p_2 \leq k$	$H_1 : p_1 - p_2 > k$	Figura 3.6(b)	$b = Z_\alpha$
3.	$H_0 : p_1 - p_2 = k$	$H_1 : p_1 - p_2 \neq k$	Figura 3.6(c)	$c = -Z_{\alpha/2}$ y $d = Z_{\alpha/2}$

Cuadro 3.5: Resumen acerca contrastes relacionadas con la diferencia de proporciones poblacionales



(a) $H_1 : p_1 - p_2 < k$ (b) $H_1 : p_1 - p_2 > k$ (c) $H_1 : p_1 - p_2 \neq k$

Figura 3.4: Región crítica para diferentes pruebas relacionadas con diferencia de proporciones poblacionales

3.2.6. Contrastes para la varianza poblacional

a) Tener en cuenta los supuestos de la tabla relacionada con distribución muestral de la varianza muestral

b) La distribución a utilizar será la chi-cuadrada con $\nu = n - 1$ grados de libertad.

c) La región crítica es la región sombreada que aparece en la figura 3.5.

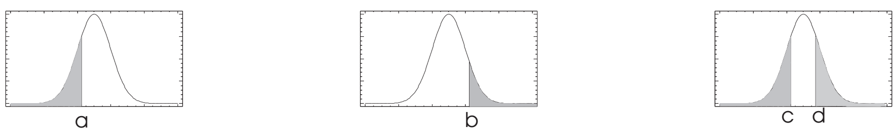
d) A los valores a, b, c y d que aparecen en la figura 3.5 se les llamará valores críticos.

e) Es importante tener en cuenta que, para la distribución chi-cuadrada con ν grados de libertad se cumple que, si $\nu > 40$, entonces,

$$\chi^2_{\alpha,\nu} \approx \nu \left(1 - \frac{2}{9\nu} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9\nu}} \right)^3 .$$

	¿HIPOTESIS NULA?	¿HIPOTESIS ALTERNATIVA?	¿REGION CRITICA?	¿VALOR CRITICO?
1.	$H_0 : \sigma^2 \geq k$	$H_1 : \sigma^2 < k$	Figura 3.5(a)	$a = \chi^2_{1-\alpha}$
2.	$H_0 : \sigma^2 \leq k$	$H_1 : \sigma^2 > k$	Figura 3.5(b)	$b = \chi^2_{\alpha}$
3.	$H_0 : \sigma^2 = k$	$H_1 : \sigma^2 \neq k$	Figura 3.5(c)	$c = \chi^2_{1-(\alpha/2)}$ y $d = \chi^2_{\alpha/2}$

Cuadro 3.6: Resumen para pruebas relacionadas con la varianza poblacional



(a) $H_1 : \sigma^2 < k$ (b) $H_1 : \sigma^2 > k$ (c) $H_1 : \sigma^2 \neq k$

Figura 3.5: Región crítica para pruebas relacionadas con la varianza poblacional

3.2.7. Contrastes para la razon de varianzas poblacionales

a) Tener en cuenta los supuestos de la tabla relacionada con distribución muestral de la razón de varainzas muestrales.

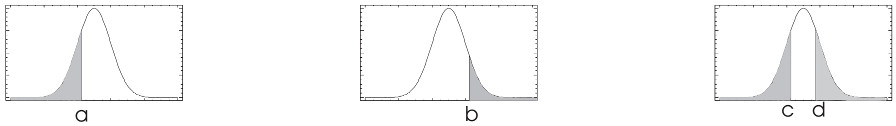
b) La distribución a utilizar será la F de Fisher con $\nu_1 = n_1 - 1$ y $\nu_2 = n_2 - 1$ grados de libertad.

c) La región crítica es la región sombreada que aparece en la figura 3.6.

d) A los valores a, b, c y d que aparecen en la figura 3.6 se les llamará valores críticos.

	¿HIPOTESIS NULA?	¿HIPOTESIS ALTERNATIVA?	¿REGION CRITICA?	¿VALOR CRITICO?
1.	$H_0 : \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	Figura 3.6(a)	$a = F_{1-\alpha}$
2.	$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	Figura 3.6(b)	$b = F_{\alpha}$
3.	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	Figura 3.6(c)	$c = F_{1-(\alpha/2)}$ y $d = F_{\alpha/2}$

Cuadro 3.7: Resumen de pruebas relacionadas con razón de varianzas



(a) $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (b) $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ (c) $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Figura 3.6: Región crítica para pruebas relacionadas con razón de varianzas

3.3 Aplicaciones

COMENTARIOS:

1. A continuación se presentarán algunos ejemplos. Unos con soluciones completas. Hay otros sin solución o con solución parcial. Se les recomienda a los lectores, llenar los detalles correspondientes.

2. Las probabilidades o valores críticos que no puedan ser hallados con las tablas estadísticas del apéndice pueden ser calculados con ayuda de excel. Aquí una mini-guía:

Distribución	X	Calcular X_β:	Calcular la probabilidad:
Normal	Z	Z_β = DISTR.NORM.ESTAND.INV($1-\beta$)	$P(Z \leq k)$ = DISTR.NORM.ESTAND(k)
t de Student	t	$t_\beta(v)$ = DISTR.T.INV($2 * \beta; v$)	$P(t(v) \geq k)$ = DISTR.T.CD(k; v)
Chi-cuadrada	χ^2	$\chi^2_\beta(v)$ = PRUEBA.CHI.INV($\beta; v$)	$P(\chi^2(v) \geq k)$ = DISTR.CHI(k; v)
F de Fisher	F	$F_\beta(v_1, v_2)$ = DISTR.F.INV($\beta; v_1; v_2$)	$P(F(v_1, v_2) \geq k)$ = DISTR.F($k; v_1; v_2$)

Cuadro 3.8: Comandos para usar en excel

3. También se recomienda el uso de geogebra (*https://www.geogebra.org/*), un software libre online.

Ejemplo 3.1

Ejemplo 3.2.2 de LLinás [8]. Como parte de un proceso de ensamblaje, se usa un taladro para hacer agujeros en una lámina de metal. Cuando el taladro funciona adecuadamente, los diámetros de estos agujeros tienen una distribución normal con media de 2 centímetros y desviación típica de 0,06 centímetros. Periódicamente, se miden los diámetros de una muestra aleatoria de agujeros para controlar que el taladro funciona adecuadamente. Asumamos que la desviación típica no varía. Una muestra aleatoria de nueve medidas da un diámetro medio de 1,95 centímetros. Probar la hipótesis de que la media poblacional es 2 centímetros frente a la alternativa de que no es así. Use $\alpha = 0,05$. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:* μ, el diámetro medio poblacional (en centímetros).
   - *Hipótesis:* $H_0 : \mu = 2 \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \mu \neq 2.$
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:* Tenemos que la población es normal, $\sigma = 0,06$ (conocida), $n = 6$ y $\overline{x} = 1,95$.
2. **Verificación de supuestos**:
   - Población es normal.
   - σ (conocida).
   - $n < 30$.
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de la media muestral es normal
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por $Z = -2,50$.
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.* Para una prueba al nivel del 5 %, tenemos que $\alpha = 0,05$ y $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$. Entonces, se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 5 %.
   b) *P-valor.* Su cálculo se deja como ejercicio.
7. **Interpretación**:
   Con un grado de confianza del ..... ◀

Ejemplo 3.2

Ejemplo 3.2.3 de LLinás [8]. Una muestra aleatoria de 100 muertes registradas en cierto país durante el año pasado mostró una vida promedio de 71,8 años. Suponiendo una desviación estándar poblacional de 8,9 años, ¿podría esto indicar que la vida promedio hoy en día es mayor que 70 años? Utilice un nivel de significancia del 5%. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
   -
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

Ejemplo 3.3

Ejemplo 3.2.5 de LLinás [8]. Un fabricante de drogas dice que el tiempo promedio para que se disuelva el contenido de cierta droga es de 50 segundos. El gerente de una empresa competitiva no cree en esto. Por eso, hace una prueba con una muestra al azar de 20 drogas, calculando una media muestral de 54 segundos y desviación típica de 15 segundos. En concreto, el gerente desea saber si puede concluir que el tiempo promedio necesario que se requiere para que el contenido se disuelva es mayor que 50 segundos. Ayúdelo, utilizando un nivel de significancia de 0,05. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
   -
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

Ejemplo 3.4

Ejemplos 3.3.2 y 3.7.3 de LLinás [8]. De una muestra aleatoria de 802 clientes de supermercados, suponga que 378 pagaron sus artículos con tarjetas de crédito. Contrastar el nivel del 10 %, la hipótesis nula de que al menos la mitad de los compradores pagan sus artículos con tárjetas de crédito frente a la alternativa de que la proporción poblacional es menor de la mitad. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:* p, la proporción poblacional de compradores que pagan sus artículos con tarjetas de crédito.
   - *Hipótesis:* $H_0 : p \geq 0,50$ versus $H_1 : p < 0,50$.
   - *Método de decisión:* Región crítica con $\alpha = 10\,\%$, P-valor
   - *Otros datos:* Tenemos que $n = 802$, $\overline{p} = 378/802 = 0,471$.
2. **Verificación de supuestos**:
   - $n \geq 30$
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de ......
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba es $Z = -1,64$.
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.* Tenemos que $\alpha = 0,10$ y $Z_\alpha = Z_{0,10} = 1,28$. Entonces, se rechaza H_0 al 10 %.
   b) *P-valor.* El P-valor es:
   $$P\text{-valor} = \Phi(-1,64) = P(Z \leq -1,64) = 0,0505.$$
   Por tanto, H_0 se rechazaría para cualquier nivel $\alpha \geq P$-valor $= 0,0505$. Por ejemplo, H_0 se rechazaría si $\alpha = 0,10$ (compárese con el resultado anterior), pero no se rechazaría si $\alpha = 0,01$.
7. **Interpretación**:
   Con un grado de confianza del .... ◄

Ejemplo 3.5

Ejemplo 3.3.3 de LLinás [8]. Un doctor afirma que el 12 % de todas las citas son canceladas y, en concreto, durante un periodo de seis semanas, fueron canceladas 21 de las 200 citas del doctor. Hágase una prueba, con un nivel de significancia del 5 %, para determinar si la verdadera proporción de todas las citas que son canceladas es diferente del 12 %. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

Ejemplo 3.6

Ejemplo 3.4.2 de LLinás [8], Resuelto con Región crítica. Un rector de cierta universidad afirma que la proporción de hombres que tienen auto en el campus es mayor a la proporción de mujeres que tienen auto en el campus. Un profesor de estadística se interesa en la afirmación y entrevista aleatoriamente a 100 hombres y a 100 mujeres. Encuentra que 34 hombres y 27 mujeres tienen autos en el campus. ¿Puede concluirse con un nivel del 5 % que la afirmación del rector es falsa?
SOLUCIÓN:

1. **Datos**:

   - *Unidades experimentales*: Hombres y mujeres universitarios.
   - *Población*: Respuesta a la pregunta: ¿Usted tiene auto en el campus?
   - *Estadístico*: $\overline{p}_1 - \overline{p}_2$, siendo $\overline{p}_1$ y $\overline{p}_2$ las proporciones muestrales de hombres y mujeres, respectivamente, que tienen auto en el campus.
   - *Parámetro*: $p_1 - p_2$, siendo p_1 y p_2 las proporciones poblacionales de hombres y mujeres, respectivamente, que tienen auto en el campus.
   - *hipótesis*: Queremos contrastar las hipótesis

   $$H_0 : p_1 - p_2 \leq 0 \qquad \text{versus} \qquad H_1 : p_1 - p_2 > 0.$$

   - *Método de decisión*: Región crítica con $\alpha = 5\,\%$.
   - *Otros datos*: Los datos muestrales son

   $$n_1 = 100, \quad \overline{p}_1 = \frac{34}{100} = 0,34, \quad n_2 = 100, \quad \overline{p}_2 = \frac{27}{100} = 0,27.$$

2. **Verificación de supuestos**:

   - $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$.

3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de $\overline{p}_1 - \overline{p}_2$ es normal.

4. **Fórmula**:

   $$Z = \frac{\overline{p}_1 - \overline{p}_2}{\sqrt{\frac{\overline{p}_0(1-\overline{p}_0)}{n_1} + \frac{\overline{p}_0(1-\overline{p}_0)}{n_2}}}, \quad \text{con} \quad \overline{p}_0 = \frac{n_1\overline{p}_1 + n_2\overline{p}_2}{n_1 + n_2}$$

5. **Cálculos**:
   El estimador común bajo H_0 es $\overline{p}_0 = 0,305$ y el estadístico de prueba está dado por $Z = 1,075$.

6. **Aplicación del método de decisión**:
   Tenemos que $\alpha = 0,05$ y $Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,64$. Entonces, al 5 %, no se rechaza la hipótesis nula de que $p_1 - p_2 \leq 0$ (o sea, se rechaza que $p_1 - p_2 > 0$). Por esta razón, consideraremos dos casos:

   - *Caso 1:* $H_0 : p_1 - p_2 \geq 0$ versus $H_1 : p_1 - p_2 < 0$.
   - *Caso 2:* $H_0 : p_1 - p_2 = 0$ versus $H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$.

   Analizaremos cada caso:

- *Caso 1:* $H_0: p_1 - p_2 \geq 0$ versus $H_1: p_1 - p_2 < 0$.
  Tenemos una prueba de una cola a la izquierda. Como $Z > -Z_{0,05}$ (ya que $1,075 > -1,64$), entonces no rechazamos H_0. Es decir, $p_1 - p_2 = 0$ (ya que se rechazó que $p_1 - p_2 > 0$).
- *Caso 2:* $H_0: p_1 - p_2 = 0$ versus $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$.
  Tenemos una prueba de dos colas a la izquierda. Tenemos que $Z = 1,075$ y $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$. Como $-Z_{\alpha/2} < Z < Z_{\alpha/2}$, entonces no rechazamos H_0. Es decir, $p_1 - p_2 = 0$.

En conclusión, observe que con culaquier caso hemos encontrado que $p_1 - p_2 = 0$, con un nivel de 5 %.

7. **Interpretación**:
   Con una confianza del 95 % podemos afirmar que no hay diferencia estadísticamente significativa entre las proporciones de hombres y mujeres que tienen auto en el campus. Es decir, los datos muestran que la afirmación del rector es falsa. ◄

Ejemplo 3.7

Ejemplo 3.4.2 de LLinás [8], Resuelto con P-valor. Considere nuevamente la situación planteada en el ejemplo anterior. Halle el P-valor para probar las hipótesis correspondientes.
SOLUCIÓN:
Los pasos 1 a 5 del ejemplo anterior son los mismos. Recordemos que:

$$Z = 1,075; \qquad H_0: p_1 - p_2 \leq 0 \quad \text{versus} \quad H_1: p_1 - p_2 > 0.$$

6. **Aplicación del método de decisión**:
   Como tenemos una prueba de una cola a la derecha, el P-valor es:

$$P\text{-valor} \;=\; P(Z > 1,075) \;=\; 1 - 0,8599 \;=\; 0,1401$$

Como P-valor es mayor que todo α, entonces no se rechaza la hipótesis nula de que $p_1 - p_2 \leq 0$ (o sea, se rechaza que $p_1 - p_2 > 0$).

Analizaremos los dos casos mencionados en el ejemplo anterior:

- *Caso 1:* $H_0: p_1 - p_2 \geq 0$ versus $H_1: p_1 - p_2 < 0$.
  Tenemos una prueba de una cola a la izquierda. En este caso, el P-valor es

$$P\text{-valor} \;=\; P(Z < 1,075) \;=\; 0,8599$$

  Como P-valor es mayor que todo α, entonces no rechazamos H_0. Es decir, $p_1 - p_2 = 0$ (ya que se rechazó que $p_1 - p_2 > 0$).
- *Caso 2:* $H_0: p_1 - p_2 = 0$ versus $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$.
  Tenemos una prueba de dos colas a la izquierda. En este caso, el P-valor es

$$P\text{-valor} \;=\; 2P(Z < |1,075|) \;=\; 2[1 - 0,8599] \;=\; 2[0,1401] = 0,2802$$

  Como P-valor es mayor que todo α, entonces entonces no rechazamos H_0. Es decir, $p_1 - p_2 = 0$.

En conclusión, observe que con culaquier caso hemos encontrado que $p_1 - p_2 = 0$, con un nivel de 5 %.

7. **Interpretación**:
   Con una confianza del 95 % podemos afirmar que no hay diferencia estadísticamente significativa entre las proporciones de hombres y mujeres que tienen auto en el campus. Es decir, los datos muestran que la afirmación del rector es falsa. ◄

Ejemplo 3.8

Ejemplo 3.4.3 de LLinás [8]. De una muestra aleatoria de 203 anuncios publicados en revistas colombianas, 52 eran de deportes. Mientras que, de otra muestra aleatoria independiente de 270 anuncios publicados en revistas brasileras, 56 eran de deportes. Usando un nivel del 5 %, constrástese frente a una alternativa bilateral, la hipótesis nula de que las proporciones de anuncios deportivos de las revistas colombianas y brasileras son iguales. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◀

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

Ejemplo 3.9

Ejemplo 3.5.3 de LLinás [8]. Se llevó a cabo un estudio entre expertos matemáticos para conocer su opinión sobre las mujeres matemáticas. Se les pidió que evaluaran en una escala de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo) la afirmación: “Las mujeres matemáticas tienen la misma oferta de trabajo que los hombres”. Para una muestra aleatoria de 186 hombres de esta profesión, la respuesta media fue de 4,059 con una desviación típica de 0,839. Para una muestra aleatoria independiente de 172 mujeres matemáticas, la respuesta media fue 3,680 con una desviación típica de 0,966. Utilícese un nivel de significancia del 5 % para contrastar la hipótesis nula de que las dos medias poblacionales son iguales frente a la alternativa de que ambas sean diferentes. Halle también el P-valor.

SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

Ejemplo 3.10

Ejemplo 3.5.1 de LLinás [8]. Un equipo médico midió el nivel de cierto producto químico en la sangre de 15 sujetos antes y después afrontar una situación que producía ansiedad. La tabla 3.9 muestra los resultados. Con base en esos datos y al nivel de 0,05, verifíquese si las situaciones que producen ansiedad aumentan el nivel de este producto químico en la sangre. Suponga que las poblaciones en cuestión están normalmente distribuidas. Halle también el P-valor.

Par	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antes (y_i)	8	15	20	18	12	10	22	18	7	14	7	20	9	17	14
Después (x_i)	28	10	15	14	12	21	25	22	11	16	10	27	10	22	24
$x_i - y_i$	20	-5	-5	-4	0	11	3	4	4	2	3	7	1	5	10

Cuadro 3.9: Datos para el ejemplo 3.10

SOLUCIÓN:

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:* $\mu := \mu_{\text{después}} - \mu_{\text{antes}}$
   - *Hipótesis:* Queremos contrastar la hipótesis nula $H_0 : \mu \leq 0$ versus $H_1 : \mu > 0$.
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
   -
   -
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   Sea $d_i = x_i - y_i$. La media, varianza y desviación de las diferencias d_i son, respectivamente:

$$\overline{d} = 3,73; \quad s_d^2 = 43,35; \quad s_d = \sqrt{s_d^2} = 6,58$$

   . El estadístico de prueba tendrá valor:

$$t = \frac{\overline{d} - 0}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{3,73}{6,58/\sqrt{15}} = 2,20.$$

6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.* Debido a que $t_{0,05} = 1,7613$ con $n - 1 = 14$ grados de libertad, rechazamos H_0.
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:
   Por lo tanto, al nivel de 0,05, podemos concluir que las situaciones causantes de ansiedad aumentan el nivel de ese producto en la sangre. ◄

Ejemplo 3.11

Ejemplo 3.5.3 de LLinás [8]. Se llevó a cabo un estudio entre expertos matemáticos para conocer su opinión sobre las mujeres matemáticas. Se les pidió que evaluaran en una escala de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo) la afirmación: “Las mujeres matemáticas tienen la misma oferta de trabajo que los hombres”. Para una muestra aleatoria de 186 hombres de esta profesión, la respuesta media fue de 4,059 con una desviación típica de 0,839. Para una muestra aleatoria independiente de 172 mujeres matemáticas, la respuesta media fue 3,680 con una desviación típica de 0,966. Utilícese un nivel de significancia del 5 % para contrastar la hipótesis nula de que las dos medias poblacionales son iguales frente a la alternativa de que ambas sean diferentes. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
   -
   -
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

Ejemplo 3.12

Ejemplo 3.5.4 de LLinás [8]. En un establecimiento escolar suburbano, se seleccionó al azar una muestra aleatoria de 25 alumnos de quinto grado (grupo 1) de una poblacion de estudiantes perteneciente a familias en que ambos padres trabajan. Se seleccionó también una muestra aleatoria al azar de 15 estudiantes (grupo 2) del mismo grado y establecimiento escolar entre aquellos estudiantes que pertenecen a familias en que solamente el padre trabaja. El análisis de los puntajes de rendimiento escolar (en escala de 1 a 100) de los dos grupos dio los siguientes resultados: un puntaje promedio de 78 para el grupo 1 y de 85 para el grupo 2. La experiencia muestra que las poblaciones de puntajes para ambos grupos están distribuidas en forma aproximadamente normal, con varianzas de $\sigma_1^2 = 81$ y $\sigma_2^2 = 25$. Utilizando un nivel de significancia del 5% y con base en estos datos, determinar si se puede concluir que la media de la población de la que se seleccionó el grupo 1 es inferior a la media de la población de la que se seleccionó el grupo 2. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:* $\mu_1 - \mu_2$, siendo μ_1 y μ_2 las respectivas medias poblacionales de puntajes promedios.
   - *Hipótesis:* Al plantear las hipótesis del problema, obtenemos

$$\begin{array}{lll} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 & \text{o su equivalente} & H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq 0; \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 & \text{o su equivalente} & H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0. \end{array}$$

   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:* Tenemos que

$$\begin{array}{lll} n_1 = 25, & \overline{x}_1 = 78, & \sigma_1^2 = 78; \\ n_2 = 15, & \overline{x}_2 = 85, & \sigma_2^2 = 85. \end{array}$$

2. **Verificación de supuestos**:
   -

3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de

4. **Fórmula**:

5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por $Z = -3,16$.

6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.* El valor del estadístico de prueba está dado por Para una prueba al nivel del 5%, tenemos que $\alpha = 0,05$ y $Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,64$. Entonces, se rechaza la hipótesis nula al nivel de significancia del 5%.
   b) *P-valor.*

7. **Interpretación**:
   Por lo tanto, se concluye que en ese establecimiento escolar, los puntajes promedios generales de rendimiento de los estudiantes de quinto grado que pertenecen a familias en que ambos padres trabajan son inferiores a los de los estudiantes que pertenecen a familias en que solamente el padre trabaja. ◄

Ejemplo 3.13

Ejemplo 3.5.6 de LLinás [8]. Se llevó a cabo un estudio que pretendía valorar el efecto de la presencia de un moderador sobre el número de ideas generadas por un grupo. Se observaron cuatro miembros, con y sin moderadores. Para una muestra aleatoria de cuatro grupos con moderador, el número medio de ideas generadas por grupo fue de 78, con una desviación típica de 24,4. Al mismo tiempo, que para una muestra aleatoria independiente de cuatro grupos sin moderador, el número medio de ideas generadas por grupo fue de 63,5, con una desviación típica de 20,2. Asumiendo que las distribuciones poblacionales son normales con igual varianza, contrástese la hipótesis nula de que las medias poblacionales son iguales frente a la alternativa de que la verdadera media es mayor para los grupos con moderador. Use un nivel de significancia del 10 %. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,10$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

Ejemplo 3.14

Ejemplo 3.5.7 de LLinás [8]. Se llevó a cabo un experimento para comparar el deterioro abrasivo de dos materiales laminados diferentes. Se probaron doce piezas del material 1, exponiendo cada una a una máquina para medir el deterioro. De la misma manera, se probaron diez piezas del material 2. En cada caso, se observó la profundidad del deterioro. Las muestras del material 1 dieron un deterioro promedio (registrado) de 85 unidades con una desviación estándar muestral de 4, mientras que las muestras del material 2 dieron un promedio de 81 y una desviación estándar muestral de 5. ¿Puede concluirse en el nivel de significancia del 5% que el deterioro abrasivo del material 1 excede al del material 2 por más de 2 unidades? Asuma que las poblaciones son aproximadamente normales con varianzas iguales. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:* $\mu_1 - \mu_2$, siendo μ_1 y μ_2 las respectivas medias poblacionales para las piezas de los materiales 1 y 2.
   - *Hipótesis:* Queremos contrastar la hipótesis
   $$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0.$$
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:* Tenemos que
   $$n_1 = 12, \quad \overline{x}_1 = 85, \quad s_1 = 4, \qquad n_2 = 10, \quad \overline{x}_2 = 81, \quad s_2 = 5.$$
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   La varianza poblacional común se estima como $s^2 = 20,05$. Además, el valor del estadístico de prueba está dado por $t = 1,04$.
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.* Tenemos que $\alpha = 0,05$ y $t_\alpha = t_{0,05} = 1,725$ con 20 grados de libertad. Entonces, no puede rechazarse la hipótesis nula de igualdad de medias frente a la alternativa unilateral al nivel del 5%.
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:
   Por lo tanto, no se está en condiciones de concluir que el deterioro abrasivo del material 1 excede al del material 2 por más de dos unidades. ◄

Ejemplo 3.15

Ejemplo 3.5.9 de LLinás [8]. El departamento de zoología de cierto instituto llevó a cabo un estudio para estimar la diferencia en la cantidad de cierta sustancia química medida en dos estaciones diferentes de un río. La sustancia se mide en miligramos por litro. Se reunieron 15 muestras de la estación 1 y 12 muestras de la estación 2. Las 15 muestras de la estación 1 tuvieron un contenido promedio de sustancia química de 3,84 miligramos por litro y una desviación estándar de 3,07 miligramos por litro, mientras que las 12 muestras de la estación 2 tuvieron un contenido promedio de 1,49 miligramos por litro y una desviación estándar de 0,80 miligramos por litro. Al nivel del 5% determine si los contenidos promedios reales de sutancia en estas dos estaciones son diferentes. Suponga que las observaciones vienen de poblaciones normalmente distribuidas con varianzas diferentes. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:* $\mu_1 - \mu_2$, donde μ_1 y μ_2 son las respectivas medias poblacionales para contenidos promedios reales de sutancia en las dos estaciones.
   - *Hipótesis:* Queremos contrastar $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$.
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:* Tenemos que

$$n_1 = 15, \quad \overline{x}_1 = 3,84, \quad s_1 = 3,07, \quad n_2 = 12, \quad \overline{x}_2 = 1,49, \quad s_2 = 0,80.$$

2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de .....
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por $t = 2,846$.
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) Ya que $\alpha = 0,05$ y $t_{\alpha/2} = t_{0,025} = 2,120$ con 16 grados de libertad, entonces, H_0 se rechaza para $\alpha = 5\%$.
   b) El P-valor se calcula así: $P\text{-valor} = 2P(t \geq |2,846|) = 2P(t \geq 2,846)$.

   De la tabla t de Student con 16 grados de libertad, observamos que: $0,01 < P\text{-valor} < 0,02$. En excel, el valor preciso es:

$$P\text{-valor} = 2P(t \geq |2,846|) = 2P(t \geq 2,846) = 2\text{DISTR.T.CD(2,846;16)} = 2(0,00584) = 0,01168$$

   Entonces, H_0 se rechazaría para $\alpha = 5\%$ y 10%, pero no para 1%.
7. **Interpretación**:
   Por lo tanto, al nivel del 5%, podemos concluir que los contenidos promedio reales de sustancia para estos dos lugares son diferentes. ◄

Ejemplo 3.16

Ejemplos 3.6.2 y 3.7.5 de LLinás [8]. Con el fin de cumplir las normas establecidas, es importante que la varianza en el porcentaje de impurezas de unas remesas de productos químicos no supere el 4 %. Una muestra aleatoria de 20 envíos dio una varianza muestral de 5,62 en el porcentaje de impureza. Al nivel del 10 %, contrastar la hipótesis nula de que la varianza de la población no es mayor que 4. Supóngase que la distribución de la población es normal. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:* σ^2, la varianza poblacional de la concentración de impureza.
   - *Hipótesis:* Queremos contrastar $H_0 : \sigma \leq 4$ versus $H_1 : \sigma > 4$.
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,10$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:* Tenemos que $s^2 = 5,62$, $n = 20$ y $\sigma_0^2 = 4$.
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por $\chi^2 = 26,695$.
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) Para una prueba al nivel del 10 %, tenemos que $\alpha = 0,10$ y $\chi^2_{\alpha}(19) = \chi^2_{0,10}(19) = 27,20$ con 19 grados de libertad. Entonces, no puede rechazarse la hipótesis nula al nivel del 10 %.
   b) El P-valor se calcula así: P-valor $= P(\chi^2 \geq 26,695)$. Ahora bien, en la tabla chi-cuadrada con 19 grados de libertad, observamos que:
   $$\underbrace{P(\chi^2 \geq 27,204)}_{0,10} < \underbrace{P(\chi^2 \geq 26,695)}_{P\text{-valor}} < \underbrace{P(\chi^2 \geq 23,900)}_{0,20}.$$
   En excel, el valor exacto del P-valor es:
   $$P\text{-valor} = P(\chi^2 \geq 26,695) = DISTR.CHI(26,695;19) = 0,112.$$
   Por tanto, H_0 no se rechazaría para cualquier nivel α.
7. **Interpretación**:
   Por lo tanto, los datos no contienen una evidencia particularmente importante contra la hipótesis de que la varianza poblacional del porcentaje de impureza no es mayor que 4. ◀

Ejemplo 3.17

Ejemplo 3.6.3 de LLinás [8]. La varianza de los puntajes en lectura de los estudiantes de tercer grado del sistema escolar A, obtenidos durante 10 años, es 1,44. Una muestra aleatoria de 21 estudiantes de tercer grado de otro sistema escolar (B), con quienes se practicó la misma prueba de lectura, arrojó una varianza de $s^2 = 1,05$. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente como para concluir, al nivel de significancia 0,05, que los puntajes de los alumnos de tercer grado del sistema B son menos variables que los de los estudiantes del sistema A? Supóngase que los puntajes de los estudiantes considerados del sistema B están normalmente distribuidos. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

Ejemplo 3.18

Ejemplo 3.6.5 de LLinás [8]. Se compararon las varianzas de los vencimientos de dos tipos de bonos. Para una muestra aleatoria de 17 bonos del primer tipo, la varianza de los vencimientos (en años al cuadrado) fue de 123,35. Para una muestra aleatoria independiente de 11 bonos del segundo tipo, la varianza de los vencimientos fue de 8,02. Al nivel del 2 %, determinar si las dos varianzas poblacionales son diferentes. Asuma que las dos poblaciones tienen distribución normal. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:* σ_1^2/σ_2^2, siendo σ_1^2 y σ_2^2 las respectivas varianzas poblacionales.
   - *Hipótesis:* Queremos contrastar $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{versus} \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,02$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:* Para este ejemplo, $n_1 = 17, \quad s_1^2 = 123,35, \quad n_2 = 11, \quad s_2^2 = 8,02$.
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de.....
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por $F = 15,38$.
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.* Para una prueba al nivel del 2 %, tenemos que $\alpha = 0,02$ y
   $$F_{\alpha/2}(16,10) \;=\; F_{0,01}(16,10) \;=\; \text{DISTR.F.INV(0,01; 16; 10)} \;=\; 4,5204$$
   con $v_1 = 16$ y $v_2 = 10$ grados de libertad. Podemos rechazar la hipótesis nula al nivel del 2 %.

   b) *P-valor.* Como la hipótesis alternativa es de dos colas, el P-valor es :
   $$P\text{-valor} \;=\; 2\,P(F \geq |15,38|) \;=\; 2\,P(F \geq 15,38) \;=\; 2 * \text{DISTR.F(15,38;16;10)} \;\approx\; 2(0) \;=\; 0.$$
   Por consiguiente, H_0 se rechazará para cualquier nivel α, en particular, por ejemplo, para $\alpha = 0,02$.
7. **Interpretación**:
   Por consiguiente, hay abrumadora evidencia de que las varianzas en los vencimientos son diferentes para estos dos tipos de bonos. ◄

Ejemplo 3.19

Ejemplo 3.6.6 de LLinás [8]. Al probar la diferencia en el desgaste abrasivo de los dos materiales en el ejemplo 3.3, se asumió que las varianzas poblacionales desconocidas eran iguales. ¿Es esta justificación correcta? Utilice un nivel de significancia del 10 %. Halle también el P-valor.
SOLUCIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ◄

1. **Datos**:
   - *Unidades experimentales:*
   - *Población:*
   - *Estadístico:*
   - *Parámetro:*
   - *Hipótesis:*
   - *Método de decisión:* (a) Región crítica con $\alpha = 0,05$; (b) P-valor.
   - *Otros datos:*
2. **Verificación de supuestos**:
   -
3. **Conclusión**:
   La distribución muestral de
4. **Fórmula**:
5. **Cálculos**:
   El valor del estadístico de prueba está dado por
6. **Aplicación del método de decisión**:
   a) *Región crítica.*
   b) *P-valor.*
7. **Interpretación**:

3.4 Ejercicios

1. Una muestra aleatoria de 100 muertes registradas en cierto país durante el año pasado mostró una vida promedio de 71,8 años. Suponiendo una desviación estándar poblacional de 8,9 años, ¿parecería esto indicar que la vida promedio hoy en día es mayor que 70 años? Utilice un nivel de significancia del 5 %.

2. Un doctor afirma que el 12 % de todas las citas son canceladas durante un periodo de seis semanas. Se sabe que fueron canceladas 21 de las 200 citas del doctor. Haga una prueba con un nivel de significancia del 5 % para determinar si la verdadera proporción de todas las citas que son canceladas es diferente del 12 %.

3. De una muestra aleatoria de 203 anuncios publicados en revistas colombianas, 52 eran de deportes. De una muestra aleatoria independiente de 270 anuncios publicados en revistas brasileras, 56 eran de deportes. Usando un nivel del 5 %, constrastar frente a una alternativa bilateral, la hipótesis nula de que las proporciones de anuncios cómicos de las revistas colombianas y americanas son iguales.

4. Se llevó a cabo un estudio entre expertos matemáticos para conocer su opinión sobre las mujeres matemáticas. Se les pidió que evaluaran en una escala de 1 (totalmente en desacuerdo) a 5 (totalmente de acuerdo) la afirmación: "Las mujeres matemáticas tienen la misma oferta de trabajo que los hombres". Para una muestra aleatoria de 186 hombres de esta profesión, la respuesta media fue de 4.059 con una desviación típica de 0,839. Para una muestra aleatoria independiente de 172 mujeres matemáticas, la respuesta media fue 3.680 con una desviación típica de 0,966. Utilize un nivel de significancia del 5 % para contrastar la hipótesis nula de que las dos medias poblacionales son iguales frente a la alternativa de que la verdadera media es mayor para los hombres.

5. Se llevó a cabo un estudio que pretendía valorar el efecto de la presencia de un moderador sobre el número de ideas generadas por un grupo. Se observaron cuatro miembros, con y sin moderadores. Para una muestra aleatoria de cuatro grupos con moderador, el número medio de ideas generadas por grupo fue de 78, con una desviación típica de 24,4. Para una muestra aleatoria independiente de cuatro grupos sin moderardor, el número medio de ideas generadas por grupo fue de 63,5, con una desviación típica de 20,2. Asumiendo que las distribuciones poblacionales son normales con igual varianza, contrastar la hipótesis nula de que las medias poblacionales son iguales frente a la alternativa de que la verdadera media es mayor para los grupos con moderador. Use un nivel de significancia del 10 %.

6. La varianza calculada de los puntajes en lectura de los estudiantes de tercer grado del sistema escolar A, obtenidos durante 10 años, es 1,44. Una muestra aleatoria de 21 estudiantes de tercer grado de otro sistema escolar (B) con quienes se practicó la misma prueba de lectura, arrojó una varianza de $s^2 = 1,05$. ¿Proporcionan estos datos evidencia suficiente como para concluir, al nivel de significancia 0,05, que los puntajes de los alumnos de tercer grado del sistema B son menos variables de que los de los estudiantes del sistema A? Supónga que los puntajes de los estudiantes de tercer del sistema B están normalmente distribuidos.

7. Al probar la diferencia en el desgaste abrasivo de los dos materiales en el ejemplo 3.3, se asumió que las varianzas poblacionales desconocidas eran iguales. ¿Es esta justificación correcta? Utilice un nivel de significancia del 10 %.

8. En 1879, A.A. Michelson hizo 100 determinaciones de la velocidad de la luz en el aire empleando una modificación del método propuesto por el físico francés Foucault. Los datos estan en miles de km/s. Los datos están recogidos en la primera columna del archivo **luz.sf**. Suponiendo que los datos corresponden a una distribución normal,

   (a) estimar la media y la desviación típica de la distribución.

   (b) Obtener un intervalo de confianza del 95 % para la media y la desviación típica de la distribución.

(c) Contrastar[2] la hipótesis nula $H_0 : \mu = 299{,}782,5 Km/s$ frente a la alternativa H_1 bilateral con $\alpha = 0,05$.

9. En 1879, el físico norteamericano Albert A. Michelson tomó 100 medidas de la velocidad de la luz en el aire empleando una modificación del método propuesto por el físico francés Foucault. Las medidas que tomó se proporcionan en la primera columna del archivo **luz.sf3** (en miles de km/s).

    (a) Analice numérica y gráficamente estos datos. Genere el histograma, el diagrama de cajas y el diagrama de tallo y hojas y proporcione los principales estadísticos que caracterizan a este conjunto de datos.

    (b) Contraste la normalidad de los datos gráficamente (gráfico probabilista normal).

10. Simon Newcomb midió el tiempo que una señal luminosa tardaba en recorrer una distancia de 7.400 metros. Los datos se proporcionan en nanosegundos (hay 109 nanosegundos en un segundo) y están recogidos en la segunda columna del archivo **luz.sf3**.

    (a) Analice numérica y gráficamente estos datos. ¿Se detecta algún valor atípico mediante los diagramas de cajas y de tallo y hojas?

    (b) Considere ahora los datos correspondientes a las velocidades y analícelos ¿Se detecta algún valor atípico mediante los diagramas de cajas y de tallo y hojas?

    (c) Si hubiere valores atípicos elimínelos del análisis y compruebe la normalidad de los datos restantes mediante diferentes gráficos.

    (d) Compare gráficamente los datos de la velocidad de la luz de Newcomb y de Michelson (diagramas de cajas e histogramas).

11. Se ha registrado el número de niñas en familias de 12 hijos nacidas entre 1879 y 1936 para unas comunidades de granjeros que habitaban en los Estados Unidos de Norteamérica y Canadá. Los datos se muestran en el archivo **demografia.sf3**.

    (a) Analice numérica y gráficamente estos datos. Admitiendo equiprobabilidad de nacimiento de niño y niña en cualquier embarazo ¿qué tipo de distribución deberían seguir estos datos?

    (b) Estime la fracción media de niñas en ese tipo de familias.

12. Los circuitos integrados se construyen sobre obleas de silicio, que son discos de 20 cm de diámetro y muy poco espesor (entre 200-300 micras). En una de las etapas iniciales de fabricación se toman obleas de silicio y se introducen en una esmeriladora (grinder) hasta conseguir el espesor deseado. En el archivo **obleas.sf3** se presentan 150 medidas de espesor de obleas de silicio, que corresponden a una planta holandesa de fabricación de circuitos integrados de Philips. El espesor deseado es 245 micras. Realizar la estimación puntual y obtener los intervalos de confianza para la media y la desviación típica ($\alpha = 0,01$) suponiendo distribucion normal. Contrastar la hipotesis nula $H_0 : \mu = 245$ micras frente a $H_1 : \mu \neq 245$ con $\alpha = 0,05$.

13. Los laboratorios Merck llevaron a cabo un experimento para evaluar el efecto de un nuevo medicamento. Se inyectó a diecinueve ratas de pantano una dosis de 12,5 mg de la droga. Se eligieron al azar, de la camada de cada una de estas ratas, un macho y una hembra para tirarlos a una piscina. Cada rata era colocada en un extremo de la piscina y se la dejaba nadar hasta que escapaba por el otro extremo. Si no conseguía escapar al cabo de un cierto tiempo se le daba otra oportunidad. El experimento se repetía hasta que la rata conseguía escapar tres veces. El archivo de datos **merck.sf3** presenta el número de pruebas necesarias para que cada animal consiguiese los tres éxitos. ¿Hay evidencia de diferencias en el número de intentos que necesitan machos y hembras para superar la prueba?

[2] Actualmente se toma 299.792,5 km/s como la velocidad de la luz en el vacío.

14. En el archivo de datos **gemelos.sf3** mostramos los resultados de tests de inteligencia realizados a parejas de gemelos monozigóticos. Los gemelos monozigóticos se forman por la división en dos de un mismo óvulo ya fecundado y, por tanto, tienen la misma carga genética. Al mismo tiempo, por razones obvias, es muy frecuente que compartan el entorno vital y es difícil separar ambos factores. En el conjunto de datos, los datos de la columna A corresponden al gemelo criado por sus padres naturales, los de la columna B al criado por un familiar u otra persona.

    (a) Analice numérica y gráficamente, por separado, los datos correspondientes a cada uno de estos dos tipos de gemelos.

    (b) Calcule el coeficiente de correlación entre los cocientes de inteligencia de ambos tipos de gemelos.

    (c) Estudie si existen diferencias significativas entre los promedios de inteligencia de ambos tipos de gemelos.

15. El Insitol es un alcohol cíclico de estructura compleja que se utiliza para combatir la depresión. También se ha utilizado en investigación psiquiátrica contra el pánico. Para probar esta teoría se ha realizado un estudio doblemente ciego placebo con 21 pacientes a los que se había diagnosticado pánico. Los pacientes apuntaban en un diario sus ataques de pánico. En el archivo **insitol.sf3** se muestran los datos correspondientes a una semana durante la cual se les había administrado una dosis de placebo y otra semana en la cual se les había administrado Insitol. Estudie si el uso de Insitol reduce significativamente el número de ataques de pánico.

16. Se ha investigado la relación entre la temperatura media del aire y la temperatura de la envoltura de gusanos en el Ártico. En diferentes días se han tomado las temperaturas medias del aire y dentro de la envoltura de estos gusanos (grados centígrados). Los datos del archivo **gusanos.sf3** indican que la temperatura del gusano dentro de la envoltura es superior a la temperatura del aire exterior.

    (a) Estime la diferencia media entre las temperaturas de la envoltura y del aire exterior.

    (b) Contraste si la temperatura dentro de la envoltura es superior en al menos cuatro grados centígrados a la temperatura media del aire.

A Apéndice de tablas

1. Distribución binomial

Las tablas (a)-(e) muestran la probabilidad $P(X \leq k) = B(k; n, p)$ de que ocurran máximo k éxitos en n ensayos independientes, cada uno con probabilidad de éxito p.

Estas probabilidades se calculan para $n = 5$, 10, 15, 20 y 25, respectivamente.

(a) Tabla binomial para $n = 5$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,774	0,590	0,328	0,237	0,168	0,078	0,031	0,010	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,977	0,919	0,737	0,633	0,528	0,337	0,188	0,087	0,031	0,016	0,007	0,000	0,000
2	0,999	0,991	0,942	0,896	0,837	0,683	0,500	0,317	0,163	0,104	0,058	0,009	0,001
3	1,000	1,000	0,993	0,984	0,969	0,913	0,812	0,663	0,472	0,367	0,263	0,081	0,023
4	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,990	0,969	0,922	0,832	0,763	0,672	0,410	0,226
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

(b) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 10$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,599	0,349	0,107	0,056	0,028	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,914	0,736	0,376	0,244	0,149	0,046	0,011	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,988	0,930	0,678	0,526	0,383	0,167	0,055	0,012	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,999	0,987	0,879	0,776	0,650	0,382	0,172	0,055	0,011	0,004	0,001	0,000	0,000
4	1,000	0,998	0,967	0,922	0,850	0,633	0,377	0,166	0,047	0,020	0,006	0,000	0,000
5	1,000	1,000	0,994	0,980	0,953	0,834	0,623	0,367	0,150	0,078	0,033	0,002	0,000
6	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,945	0,828	0,618	0,350	0,224	0,121	0,013	0,001
7	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,988	0,945	0,833	0,617	0,474	0,322	0,070	0,012
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,989	0,954	0,851	0,756	0,624	0,264	0,086
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,972	0,944	0,893	0,651	0,401

(c) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 15$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,463	0,206	0,305	0,013	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,829	0,549	0,167	0,080	0,035	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,964	0,816	0,398	0,236	0,127	0,027	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,995	0,944	0,648	0,461	0,297	0,091	0,018	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,999	0,987	0,836	0,686	0,515	0,217	0,059	0,009	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	0,998	0,939	0,852	0,722	0,403	0,151	0,034	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000
6	1,000	1,000	0,982	0,943	0,869	0,610	0,304	0,095	0,015	0,004	0,001	0,000	0,000
7	1,000	1,000	0,996	0,983	0,950	0,787	0,500	0,213	0,050	0,017	0,004	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,999	0,996	0,985	0,905	0,696	0,390	0,131	0,057	0,018	0,000	0,000
9	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,966	0,849	0,597	0,278	0,148	0,061	0,002	0,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,991	0,941	0,783	0,485	0,314	0,164	0,013	0,000
11	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,982	0,909	0,703	0,539	0,352	0,056	0,005
12	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,973	0,873	0,764	0,602	0,184	0,036
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,965	0,920	0,833	0,451	0,171
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,987	0,965	0,794	0,537

(d) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 20$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,358	0,122	0,012	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,736	0,392	0,069	0,024	0,008	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,925	0,677	0,206	0,091	0,035	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,984	0,867	0,411	0,225	0,107	0,016	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,997	0,957	0,630	0,415	0,238	0,051	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	0,989	0,804	0,617	0,416	0,126	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	0,998	0,913	0,786	0,608	0,250	0,058	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	1,000	0,968	0,898	0,772	0,416	0,132	0,021	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,990	0,959	0,887	0,596	0,252	0,057	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	0,997	0,986	0,952	0,755	0,412	0,128	0,017	0,004	0,001	0,000	0,000
10	1,000	1,000	0,999	0,996	0,983	0,872	0,588	0,245	0,048	0,014	0,003	0,000	0,000
11	1,000	1,000	1,000	0,999	0,995	0,943	0,748	0,404	0,113	0,041	0,010	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,979	0,868	0,584	0,228	0,102	0,032	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,942	0,750	0,392	0,214	0,087	0,002	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,979	0,874	0,584	0,383	0,196	0,011	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,949	0,762	0,585	0,370	0,043	0,003
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,984	0,893	0,775	0,589	0,133	0,016
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,965	0,909	0,794	0,323	0,075
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,992	0,976	0,931	0,608	0,264
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,988	0,878	0,642

(e) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 25$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,277	0,072	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,642	0,271	0,027	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,873	0,537	0,098	0,032	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,966	0,764	0,234	0,096	0,033	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,993	0,902	0,421	0,214	0,090	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,999	0,967	0,617	0,378	0,193	0,029	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	0,991	0,780	0,561	0,341	0,074	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	0,998	0,891	0,727	0,512	0,154	0,022	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,953	0,851	0,677	0,274	0,054	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	0,983	0,929	0,811	0,425	0,115	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	1,000	1,000	0,994	0,970	0,902	0,586	0,212	0,034	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
11	1,000	1,000	0,998	0,980	0,956	0,732	0,345	0,078	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	0,997	0,983	0,846	0,500	0,154	0,017	0,003	0,000	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,922	0,655	0,268	0,044	0,020	0,002	0,000	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,966	0,788	0,414	0,098	0,030	0,006	0,000	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,987	0,885	0,575	0,189	0,071	0,017	0,000	0,000
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,946	0,726	0,323	0,149	0,047	0,000	0,000
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,978	0,846	0,488	0,273	0,109	0,002	0,000
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,926	0,659	0,439	0,220	0,009	0,000
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,971	0,807	0,622	0,383	0,033	0,001
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	0,910	0,786	0,579	0,098	0,007
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,967	0,904	0,766	0,236	0,034
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	0,968	0,902	0,463	0,127
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,993	0,973	0,729	0,358
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,928	0,723

2. Distribución de Poisson

La tabla muestra la probabilidad $P(X \leq k; \lambda)$ para algunos valores λ.

	$\lambda = 0{,}1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$k = 0$	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368
1	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772	0,736
2	1,000	0,999	0,996	0,992	0,986	0,977	0,966	0,953	0,937	0,920
3	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,994	0,991	0,987	0,981
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,996
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

	$\lambda = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$k = 0$	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000
2	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003	0,000	0,000
3	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010	0,000	0,000
4	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,029	0,001	0,000
5	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067	0,003	0,000
6	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130	0,008	0,000
7	0,999	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220	0,018	0,001
8	1,000	0,996	0,979	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333	0,037	0,002
9	1,000	0,999	0,992	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458	0,070	0,005
10	1,000	1,000	0,997	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583	0,118	0,011
11	1,000	1,000	0,999	0,995	0,980	0,947	0,888	0,803	0,697	0,185	0,021
12	1,000	1,000	1,000	0,998	0,991	0,973	0,936	0,876	0,792	0,268	0,039
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,987	0,966	0,926	0,864	0,363	0,066
14	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,983	0,959	0,917	0,466	0,105
15	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,992	0,978	0,951	0,568	0,157
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,973	0,664	0,221
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,986	0,749	0,297
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,993	0,819	0,381
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,875	0,470
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,917	0,559
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,947	0,644
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,967	0,721
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,981	0,787
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,989	0,843
25	1,000	1,000	1,000	0,994	0,970	0,902	0,586	0,212	0,034	0,994	0,888
26	1,000	1,000	1,000	0,998	0,980	0,956	0,732	0,345	0,078	0,997	0,922
27	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,983	0,846	0,500	0,154	0,998	0,948
28	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,922	0,655	0,268	0,999	0,966
29	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,966	0,788	0,414	1,000	0,978
30	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,987	0,885	0,575	1,000	0,987
31	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,946	0,726	1,000	0,992
32	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,978	0,846	1,000	0,995
33	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,926	1,000	0,997
34	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,971	1,000	0,999
35	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	1,000	0,999
36	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	1,000	1,000

3.Distribución normal estándar

La tabla muestra la probabilidad $P(Z \leq z)$.

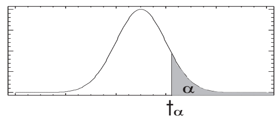
(a) Áreas para valores negativos de Z

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3.1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4009	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

(b) Áreas para valores positivos de Z

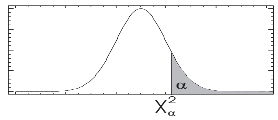
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9278	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9948	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9961	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9971	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

4. Distribución t de Student



	α						
v	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,620
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1.833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,795
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,496
60	1,296	1.671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	1,282	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
$\infty (= z)$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

5. Distribución chi-cuadrada

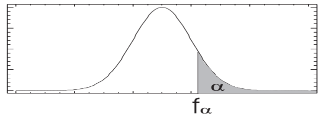


	α									
v	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,00393	0,0158	0,0642	0,102	0,148	0,4550
2	0,010	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,575	0,713	1,386
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,213	1,424	2,366
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	1,923	2,195	3,357
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	2,675	3,000	4,351
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,455	3,828	5,348
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,255	4,671	6,346
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,071	5,527	7,344
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	5,899	6,393	8,343
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	6,737	7,267	9,342
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	7,584	8,148	10,341
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	8,438	9,034	11,340
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,299	9,926	12,340
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,165	10,821	13,339
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,036	11,721	14,339
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	11,912	12,624	15,338
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	12,792	13,531	16,338
18	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	15,452	16,266	19,337
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	16,344	17,182	20,337
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	17,240	18,101	21,337
23	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	18,137	19,021	22,337
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,037	19,943	23,337
25	10,520	11,524	12,692	13,120	14,611	16,473	18,940	19,939	20,867	24,337
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	20,843	21,792	25,336
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	21,749	22,719	26,336
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	22,657	23,647	27,336
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	23,567	24,577	28,336
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	24,478	25,508	29,336
31	14,457	15,655	17,042	17,538	19,280	21,433	24,255	25,390	26,440	30,336
32	15,134	16,362	17,783	18,291	20,072	22,271	25,148	26,304	27,373	31,336
33	15,815	17,073	18,527	19,046	20,866	23,110	26,042	27,219	28,307	32,336
34	16,501	17,789	19,275	19,806	21,664	23,952	26,938	28,136	29,242	33,336
35	17,191	18,508	20,027	20,569	22,465	24,796	27,836	29,054	30,178	34,336
36	17,887	19,233	20,783	21,336	23,269	25,643	28,735	29,973	31,115	35,336
37	18,584	19,960	21,542	22,105	24,075	26,492	29,636	30,893	32,053	36,336
38	19,289	20,691	22,304	22,878	24,884	27,343	30,537	31,815	32,992	37,336
39	19,994	21,425	23,069	23,654	25695	28,196	31,441	32,737	33,932	38,335
40	20,706	22,164	23,838	24,433	26,509	29,050	32,345	33,660	34,872	39,335

Valores críticos $\chi^2_\alpha(\nu)$ (continuación)

	α									
ν	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	1,074	1,323	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	2,408	2,773	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	3,665	4,108	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	4,878	5,385	5,989	5,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	6,064	6,626	7,289	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750	20,517
6	7,231	7,841	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	8,383	9,037	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	9,524	10,219	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	10,656	11,389	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	11,781	12,549	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	12,899	13,701	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	14,011	14,845	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	15,119	15,984	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	16,222	17,117	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	17,322	18,245	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	18,418	19,369	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	19,511	20,489	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	20,601	21,605	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	21,689	22,718	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	22,775	23,828	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	23,858	24,935	26,171	29,615	32,671	35,479	36343	38,932	41,401	46,797
22	24,939	26,039	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	26,018	27,141	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	27,096	28,241	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,179
25	28,172	29,339	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	29,246	30,434	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	30,319	31,528	32,912	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	31,391	32,620	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	33,530	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703
31	34,598	35,887	37,359	41,422	44,985	48,231	49,226	52,190	55,003	61,098
32	35,665	36,973	38,466	42,585	46,194	49,480	50,487	53,486	56,328	62,487
33	36,731	38,058	39,572	43,745	47,400	50,724	51,743	54,774	57,646	63,870
34	37,795	39,141	40,676	44,903	48,602	51,966	52,995	56,061	58,964	65,247
35	38,859	40,223	41,778	46,059	49,802	53,203	54,244	57,340	60,272	66,619
36	39,922	41,304	42,879	47,212	50,998	54,437	55,489	58,619	61,581	67,985
37	40,984	42,383	43,978	48,363	52,192	55,667	56,731	59,891	62,880	69,346
38	42,045	43,462	45,076	49,513	53,384	56,896	57,969	61,162	64,181	70,703
39	43,105	44,540	46,173	50,660	54,572	58,119	59,204	62,426	65,473	72,055
40	44,165	45,616	47,269	51,805	55,758	59,342	60,436	63,691	66,766	73,402

6. Distribución F de Fisher



(a) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,05$

	ν_1								
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

(b) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,05$

	ν_1									
ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,94	3,87	384	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

(c) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ para $\alpha = 0,01$

	ν_1								
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

(d) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,01$

	ν_1									
ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

7. Algunas distribuciones discretas

NOMBRE	FUNCIÓN	PARÁMETROS	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$f(x_k) = \frac{1}{n}$, $k = 1,2,\dots,n$	$x_i < x_{i+1}$, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$
De dos puntos	$f(x_1) = p$, $f(x_2) = 1-p$	$x_1 < x_2$, $0 < p < 1$	$x_1 p + x_2(1-p)$	$(x_1-x_2)^2 a$, a=p(1-p)
Bernoulli	$f(0) = p$, $f(1) = 1-p$	p	p	$p(1-p)$
Binomial	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,2,\dots,n$	$0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}$	np	$np(1-p)$
Poisson	$f(k) = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \lambda^k$, $k = 0,1,2,3,\dots$	$\lambda > 0$	λ	λ
Hiper-geométrica	$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \le n$, $k \le M$	$M \in \mathbb{N}_0$, $n, N \in \mathbb{N}$, $n \le M \le N$	$n \cdot \frac{M}{N}$	$na\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$, $p = \frac{M}{N}$, $a = p(1-p)$
Binomial negativa	$\binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k$, $k = 0,1,2,\dots$	$r > 0$, $0 < p < 1$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
Geomé-trica	$f(k) = p(1-p)^k$, $k = 0,1,2,\dots$	$0 < p < 1$	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$

8. Algunas distribuciones continuas

NOMBRE	FUNCIÓN	PARÁMETROS	$E(X)$	$V(X)$
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a < x < b$	$a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$	μ	σ^2
Normal estándar	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$		0	1
Gamma	$f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$, $x > 0$	$\alpha > 0$, $\beta > 0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
Exponencial	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
t de Student	$f(x) = a_n\left(1 + n x^2\right)^{-(n+1)/2}$, $a_n := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sqrt{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}$, $x \in \mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$	0, $n \ge 2$	$\frac{n}{n-2}$, $n \ge 3$
Chi-cuadrada	$\frac{1}{a_n} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x/2}$, $a_n := 2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, $x > 0$	$n > 0$	n	$2n$
F de Fisher	$f(x) = \frac{a_n x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{(m+n)/2}}$, $a_n := \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$, $x > 0$	$m, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n}{n-2}$, $n \ge 3$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, $n \ge 5$
Erlang	$\frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \lambda e^{-\lambda x}$	$k \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$	$\frac{k}{\lambda}$	$\frac{k}{\lambda^2}$, $x > 0$

9. Resumen de distribuciones muestrales e intervalos de confianza

Cuadro A.1: Distribución de la media muestral

	¿FORMA DE LA POBLACIÓN?	¿ES σ^2 CONOCIDA?	¿TAMAÑO DE LA MUESTRA?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z Ó t?
1.	Normal	Sí	No importa	Normal	$Z = \dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
2.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \dfrac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
3.			Pequeño ($n < 30$)	t de Student, $\nu = n-1$ grados de libertad	$t = \dfrac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
4.	No normal o desconocida	Sí	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
5.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	
6.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \dfrac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
7.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	

Cuadro A.2: Distribución relacionadas con proporciones

	¿ESTADÍSTICO?	¿SUPUESTO?	¿DIST. MUESTRAL	¿Z?
1.	Proporción muestral	$n \geq 30$	Normal	$Z = \dfrac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$
2.		$np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$	Normal	
3.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \dfrac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$
4.		$n_1p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2p_2 \geq 5$, $n_2(1-p_2) \geq 5$	Normal	

Cuadro A.3: Distribución de la diferencias de medias muestrales

X representa la población y para las dos últimas posibilidades de la tabla:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad \nu' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

	¿X?	¿σ_1^2 y σ_2^2 SE CONOCEN?	¿$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$?	¿n_1 y n_2?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z Ó t? $d := \overline{x}_1 - \overline{x}_2$, $\mu := \mu_1 - \mu_2$
1.	No normal	Sí	No importa	Grandes $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
2.		No	No importa	Grandes $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$
3.	Normal	Sí		No importa	Normal	$Z = \frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
4.		No	Sí	Pequeño $n_1 < 30$, $n_2 < 30$	t de Student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad	$t = \frac{d-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$
5.			No	Pequeño $n_1 < 30$, $n_2 < 30$	t de Student con ν' grados de libertad (redondear al entero más cercano)	$t = \frac{d-\mu}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

Cuadro A.4: Distribución de la varianza muestral y de la razón de varianzas muestrales

	ESTADISTÍCO	¿POBLACIÓN?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿χ^2 Ó F?
1.	s^2	Normal	Chi-cuadrada con $\nu = n-1$ grados de libertad	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$
2.	s_1^2/s_2^2	Ambas normales	F de Fisher con $\nu_1 = n_1-1$, $\nu_2 = n_2-1$ grados de libertad	$F = \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ Regla: $F_{1-\alpha}(a,b) = \frac{1}{F_\alpha(b,a)}$

Cuadro A.5: Intervalos de confianza para la media poblacional

	¿POBLACIÓN?	¿σ^2 CONOCIDA?	¿TAMAÑO MUESTRAL?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO? $\overline{x}-b<\mu<\overline{x}+b$, con:
1.	Normal	Sí	No importa	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$
3.			Pequeño ($n < 30$)	t de Student, $\nu = n-1$ grados de libertad	$b := t_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$
4.	No normal o desconocida	Sí	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
5.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	
6.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$
7.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	

Cuadro A.6: Intervalos para la proporción y para la diferencia de proporciones

	¿ESTADÍSTICO?	¿SUPUESTOS?	¿DISTR. MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA? $\overline{p}-b<p<\overline{p}+b$, con:
1.	Proporción muestral	$n \geq 30$	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$
2.		$np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$	Normal	
3.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$\overline{p} := \overline{p}_1 - \overline{p}_2$ $b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)}{n_1}+\frac{\overline{p}_2(1-\overline{p}_2)}{n_2}}$
4.		$n_1 p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2 p_2 \geq 5$, $n_2(1-p_2) \geq 5$	Normal	

Cuadro A.7: Intervalos para la varianza y para la razón de varianzas

		¿POBLACIÓN?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA?
1.	s^2	Normal	Chi-cuadrada con $\nu = n-1$ grados de libertad	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$
2.	s_1^2/s_2^2	Ambas normales	F de Fisher con $\nu_1 = n_1-1$, $\nu_2 = n_2-1$ grados de libertad	$\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)$ Regla: $F_{1-\alpha}(a,b) = \frac{1}{F_\alpha(b,a)}$

Cuadro A.8: Intervalos de confianza para la diferencias de medias poblacionales

X representa la población y para las dos últimas posibilidades de la tabla:

$$s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}, \quad \nu' = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

	¿X?	¿σ_1^2 y σ_2^2 SE CONOCEN?	¿$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$?	¿n_1 y n_2?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO? $d-b<\theta<d+b$, donde $d := \overline{x}_1 - \overline{x}_2$ $\theta := \mu_1 - \mu_2$ y:
1.	No normal	Sí	No importa	Grandes ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
2.		No	No importa	Grandes ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$)	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
3.	Normal	Sí	No importa	No importa	Normal	$b := Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
4.		No	Sí	Pequeño ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$)	t de Student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad	$b := t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}$
5.			No	Pequeño ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$)	t de Student con ν' grados de libertad (redondear al en- (tero más cercano)	$b := t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

B Guía rápida para trabajar con Statgraphics

B.1 Análisis de un solo conjunto de datos

1. Abrir el archivo de datos **calles.sf3**.
2. Seleccionamos *Describe* … *Numeric Data* … *One-Variable Analysis*.
3. Elegimos *Data* = *Longitud* y pulsamos la opción *OK*.
4. Sale la llamada *ventana del análisis*. Los íconos principales de esta ventana son:
   - *Input dialog* (*ícono de diálogos*): para seleccionar o cambiar variables dentro del archivo y análisis seleccionado.
   - *Tabular options* (*ícono de opciones tabulares*): medidas estadísticas, percentiles, tablas de frecuencia, inferencias, etc.
   - *Graphical options* (*ícono de opciones gráficas*): diagramas de dispersión, histogramas, etc.
   - *Save results* (*ícono de salvar resultados*): permite salvar los resultados del análisis.
5. Transformación de una variable:[1] *One Variable Analysis*, activar el botón *Transform* y, en *Operators*, elegir *logaritmo*.

B.2 Análisis simultáneo de dos o más conjuntos de datos

1. *Compare* … *Two Samples* … *Two Sample Comparison* …
2. Para obtener diagramas de cajas múltiples: *Compare* … *Multiple Samples* … *Multiple-Sample Comparison* … *Multiple Data Columns* … *Ok* … *Samples*= (en esta última opción mencionar los datos que queremos comparar)
3. Para obtener diagramas de cajas múltiples: *Plot* … *Exploratory Plots* … *Multiple Box-and-Whishker Plot* … *Data=distancia* … *Level codes=year* …

[1] Por ejemplo, si quisiéramos trabajar con el logaritmo de la variable escribimos LOG(**longitud**) en vez de **longitud**.

B.3 Gráficos de dispersión

Con la opción *Plot…Scatterplots* se pueden realizar:

1. Gráficos univariantes (*Univariate Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y utilizar la variable *mpg*.

2. Gráficos bidimensionales X-Y simples (X-Y *plot*) y múltiples (*Multiple* X-Y *Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y hacer *Y=mpg* y *X=potencia*. Sobre la gráfica, pulsar botón derecho del ratón y elegir *Pane options*. Aparece una pantalla con varios campos. Elegir *Point Codes=model*.

3. Gráficos tridimensionales X-Y-Z simples (X-Y-Z *plot*) y múltiples (*Multiple* X-Y-Z *Plot*). Por ejemplo, abrir archivo de datos **autos.sf3** y hacer *X=accel*, *Y=cilindro*, *Z=price*. Sobre la zona gráfica: botón derecho, *Pane options*, *Point Codes=origin*.

4. Gráficos de matriz (*Matriz Plot*).

5. Gráficos en coordenadas polares (*Polar Coordinates Plot*).

B.4 Diagramas de presentación

Con la opción *Plot…Business Charts* se pueden realizar (abrir siempre el archivo **autos.sf3**):

1. Gráficos de barras simples (*Barchart*). Por ejemplo, realizar un gráfico de barras para la variable *origin* del archivo **autos.sf3**, que contiene el país de origen de los autos. Los valores de la variable *origin* son 1 para los autos norteamericanos, 2 para autos europeos y 3 para autos japoneses. En esta opción sale, entre otros, el campo *Counts* (Frecuencias) que permite introducir la variable que contiene las frecuencias absolutas de los valores de la variable a graficar. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)*. Además, el campo *Labels* (Etiquetas) permite introducir el nombre de la variable que contiene las etiquetas a utilizar para cada barra del gráfico. Como las etiquetas de los valores de la variable *origin* están contenidas *carmakers*, que son *America*, *Europe* y *Japan*, hacemos *Labels=carmakers*.

2. Gráficos de barras múltiples (*Multiple Barchart*). Por ejemplo, realizaremos un gráfico de barras dobles para las variables *origin* y *year* del archivo **autos.sf3**, que contienen el país de origen de los autos y el año de construcción, respectivamente. Los valores de la variable *year* son los intervalos 1978, [1979,1980] y [1981,1982]. Aparecen, entre otros, los siguientes campos:

    - *Columns* (Columnas): En este campo se introducen las variables que contienen las frecuencias absolutas de los valores de las variables a graficar, o una expresión de Statgtraphics que contiene operadores y que genera sus valores. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, y como las frecuencias absolutas de los valores de la variable *year* son: 36 para 1978, 58 para [1979,1980] y 61 para [1981,1982], entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)* y *join3(36;58;61)*.

    - *Labels* (Etiquetas): Hacemos *Labels=carmakers*.

3. Gráficos de sectores (*Piechart*). Por ejemplo, realizaremos un gráfico de sectores para la variable *origin* del archivo **autos.sf3**, que contienen el país de origen de los autos y el año de construcción, respectivamente. Los valores de la variable *origin* son 1 para los autos norteamericanos, 2 para autos europeos y 3 para autos japoneses. Aparecen, entre otros, los siguientes campos:

   - *Counts* (Frecuencias): En este campo se introducen las variables que contienen las frecuencias absolutas de los valores de las variables a graficar, o una expresión de Statgtraphics que contiene operadores y que genera sus valores. Como las frecuencias absolutas de de los valores de la variable *origin* son: 85 para autos norteamericanos, 26 para autos europeos y 44 para autos japoneses, entonces, por esta razón, debemos escribir en este campo *join3(85;26;44)*.

   - *Labels* (Etiquetas): En este campo se debe introducir el nombre de la variable que contiene las etiquetas a utilizar para cada grupo de barras del gráfico. Como las etiquetas de los valores de la variable *origin* están contenidas *carmakers*, que son *America*, *Europe* y *Japan*, hacemos *Labels=carmakers*.

4. Gráficos de componentes de líneas (*Component Line Chart*)

5. Gráficos de escogencias alta y baja (*High-Low-Chose Chart*).

B.5 Variables numéricas multidimensionales

Seleccione la siguiente secuencia de opciones: *Describe…Numeric Data…Multiple-Variable Analysis* y aparecen todas las variables del archivo. Aparece una ventana de diálogo en cuyo campo *Data* introducimos la variables *origin*, *price* y *year*. Luego, pulsamos el botón OK.

B.6 Distribuciones de probabilidad

Plot … Probability Distributions. Escogemos la distribución deseada. Los valores de los parámetros que definen la distribución (están fijados por defecto por el programa) los podemos modificar si pulsamos el botón derecho del ratón y escogemos la opción *Analysis Options*.

B.7 Inferencias basadas en una sola muestra

1. Se escoge *Describe … Numeric Data … One Variable Analysis*. Elegimos la variable que va a ser objeto del análisis y pulsar *OK*. Al pulsar el ícono *Tabular options* aparecen, entre otros:

   - *Confidence Intervals*.
     Calcula intervalos para la media (*Confidence Interval for Mean*) y la desviación típica (*Confidence Interval for Standard Deviation*) de la distribución. Pulsando el botón derecho del ratón y escogiendo *Pane Options* se puede modificar el nivel de confianza (*Confidence Level*) y el tipo de intervalo (*Interval Type*).

   - *Hypothesis Testing*
     Se realizan los contrastes de la media y de la desviación típica. Pulsando el botón derecho del ratón y escogiendo

Pane options se pueden modificar el valor del parámetro para la hipótesis nula (por ejemplo *Mean* = μ_0), del nivel de significancia α (*Alpha*) y de la hipótesis alternativa:

2. *Cálculo de la curva de potencia.*
Describe ... Hypothesis Test ... Normal Mean y en *Null Hypothesis* se elige el valor de la media bajo la hipótesis nula. En la casilla *Sample Sigma* se escoge el valor de la desviación típica de la población. El tamaño de muestra se fija a través de *Sample Size*. Seleccionando el ícono de gráficos se selecciona la única gráfica posible (curva de potencia - *Power Curve*) y se pulsa *OK*.

B.8 Inferencias basadas en dos muestras

1. Elegir *Compare ... Two Samples*, en donde aparecen cuatro (4) opciones: *Two Sample Comparison*, *Paired-Sample Comparison*, *Hypotesis Tests*, *Sample-Size Determination*.

2. Cuando seleccionamos *Two Sample Comparison*[2] el programa pide al usuario que especifique las dos columnas de datos a comparar (*Sample 1* y *Sample 2*). Seleccionando *Tabular options* aparece, entre otros:

   - *Comparison of Means*: Intervalo de confianza para la diferencia de medias y contraste de igualdad de medias.
   - *Comparison of Standard Deviations*: Intervalo de confianza para el cociente de varianzas y contraste de igualdad de varianzas.
   - *Kolmogorov-Smirnov Test*: Prueba de hipótesis para saber si las distribuciones de ambas muestras son idénticas.

B.9 Bondad de ajuste

1. Se selecciona *Describe... Distribution Fitting...Uncensured Data*. Al pulsar *OK* se obtiene, entre otras, la salida de las contrastes de bondad de ajuste.

2. Si, estando situados sobre esta salida, pulsamos el botón derecho del ratón y elegimos la opción *Analysis Options* del menú emergente resultante, obtenemos la caja de diálogo *Probability Distributios Options*, que presenta todas las posibles distribuciones a considerar para el ajuste (observamos que por defecto el ajuste se realiza a una distribución normal).

3. También aparecen los siguientes campos:

   - *Number of Trials* (número de ensayos).
     Se rellena con el número de tiradas cuando la distribución elegida para el ajuste es binomial;
   - *Number of Successes* (número de eventos).
     Se rellena con el número de éxitos cuando la distribución elegida es una binomial negativa.
   - *Population Size* (tamaño de la población).
     Se rellena con el tamaño de la población cuando la distribución elegida es una hipergeométrica.

[2] El procedimiento es idéntico cuando seleccionamos la opción *Paired-Sample Comparison*

4. La opción tabular *Tests for Normality*: realiza los contrastes de normalidad.

5. Opción tabular *Goodness-of-Fit Tests*: realiza los contrastes de la bondad de ajuste de los datos a una distribución dada.

C Guía rápida para trabajar con SPSS

C.1 Definición de las variables

Para definir cada variable hay dos procedimientos:

- Hacer doble clic sobre el encabezamiento de la variable o
- Seleccionar, en la parte inferior, la pestaña *vista de variables*.

Cuando se hace esto, observamos que hay una fila para cada variable del conjunto de datos y que existen 10 columnas: *Nombre*, *Tipo*, *Anchura*, *Decimales*, *Etiqueta*, *Valores*, *Perdidos*, *Columnas*, *Alineación* y *Medida*. La definición de una variable se basa en las opciones que se ofrecen en esa ventana:

1. *Asignar un nombre a cada variable*, cumpliendo las siguientes reglas:

    - Nombres con no más de 8 caracteres (el primero debe ser una letra o @).
    - No utilizar símbolos como &, /, $, etc.
    - No utilizar nunca espacios en blanco.
    - No utilizar expresiones como ALL, AND, BY, EQ, GE, GT, LE, NE, NOT, OR, TO, o WITH.

2. *Asignar un tipo a cada variable*, indicando el máximo número de dígitos que deseamos para anotar las observaciones de la variable y el tipo de la variable con la que vamos a trabajar (*alfanumérica*, *fecha*, *moneda* o *numérica*) indicando en este caso el número de cifras decimales con que queremos que aparezca en el editor. SPSS permite trabajar con los siguientes tipos de variables:

    - *Numéricas*: formato numérico estándar.
    - *Coma*: comas de separación cada tres posiciones. Un punto para la parte decimal.
    - *Punto*: al contrario que el anterior.
    - *Notación Científica*: uso de la E para exponente.
    - *Cadena*: variable alfanumérica (de más de 8 caracteres se considera larga).

- Además están los formatos de *fecha*, *dólar* y *moneda personalizada*.

Si no escogemos el tipo, el sistema lo asigna automáticamente, siendo el formato por defecto: *Numérica 8.2* que significa: Anchura: 8 y Decimales: 2; es decir, una amplitud de columna de 8 espacios, siendo los 2 últimos para los decimales.

3. *Asignar una Etiqueta a cada variable* de no más de 120 caracteres (entre 30 y 40 es el valor recomendado) que nos permita tener más información sobre esa variable.

4. *Asignar Valores*: se trata de asignar etiquetas a los valores de cada variable. No es obligatorio, pero sí muy útil en algunos casos.

5. *Definir Perdidos*: permite definir los valores de los datos especificados como perdidos por el usuario. Sitúese en el campo correspondiente a *Perdidos* de cualquier variable y pulse sobre el recuadro coloreado, aparece: Los códigos asignados a los valores ausentes deben de ser coherentes con el tipo de variables declarado: numéricos para las numéricas y alfanuméricos para las alfanuméricas (máximo 9 caracteres). Se pueden introducir hasta 3 valores perdidos (individuales) de tipo discreto, un rango de valores perdidos o un rango más un valor de tipo discreto. Sólo pueden especificarse rangos para las variables numéricas. Estos valores ausentes son denominados por SPSS "valores ausentes definidos por el usuario" (*user-defined missing values*), a diferencia de los definidos por el sistema (*system-missing values* o *sysmis*). Estos últimos corresponden a los que establece el sistema para los espacios en blanco y caracteres ilegales que puedan haber en el archivo de datos. Aparecen en los listados representados por comas.

6. *Definir Columnas*: consiste en especificar la amplitud de la columna. Podemos hacerlo también desde el propio archivo de datos.

7. *Definir Alineación*: seleccionar la justificación de las entradas de la columna: *Izquierda*, *Derecha* y *Centrado*.

8. *Especificar medida*. Se puede seleccionar uno de los tres niveles de medida:

   - *Escala*: los valores de datos son numéricos en una escala de intervalo. Las variables de escala deben ser numéricas.
   - *Ordinal*: los valores de datos representan categorías con un cierto orden intrínseco (bajo, medio, alto; totalmente de acuerdo, de acuerdo, en desacuerdo). Las variables ordinales pueden ser de cadena o valores numéricos. Notar que para variables de cadena ordinales, se asume que el orden alfabético de los valores de cadena indica el orden correcto de las categorías; en el caso de bajo, medio y alto el orden sería alto, bajo y medio (orden que no es correcto), por lo que es más fiable utilizar códigos numéricos para representar datos ordinales que usar etiquetas de estos códigos.
   - *Nominal*: los valores de datos representan categorías sin un cierto orden intrínseco. Las variables nominales pueden ser de cadena o valores numéricos que representan categorías diferentes, por ejemplo *1 = Hombre* y *2 = Mujer*.

C.1.1. Transformación de una variable

Elegimos *Transformar* … *Calcular*, y realizamos los siguientes pasos:

a) Asignar un nombre y un tipo (por defecto será numérica) a la nueva variable en el cuadro de texto de la *Variable de destino*.

b) Definir la expresión numérica que va a permitir calcular los valores de la misma. Para ello utilizaremos los nombres de las variables del archivo (podemos escribirlos o seleccionarlos del listado que aparece), constantes, operadores y funciones.

c) Pulsar *Aceptar*.

Para construir estas expresiones pueden usarse operadores aritméticos como +, −, *, /, ** y funciones como SQRT, EXP, LG10, LN, ARTAN, COS, SIN, ABS, MOD10, TRUNC, RND, entre otras:

- MOD10 (Resto resultante de dividir entre 10).
- TRUNC (Parte entera de un número).
- RND (Redondeo al entero más cercano).

Pulsando el botón derecho sobre le nombre de la función, aparece su descripción. El argumento de las funciones debe ir entre paréntesis. Existen funciones particulares como UNIFORM y NORMAL, que se utilizan para la generación de variables aleatorias. Son de bastante utilidad en estudios de simulación.

Es importante tener cuidado con el orden de utilización de los operadores y no olvidar que los valores antiguos pierden su vigencia al recodificar una variable sobre el mismo nombre.

El botón *SI*... permite realizar modificaciones similares, pero sujetas a que se verifique una condición lógica. Se incluirán aquellos casos que verifiquen la condición. Los que no la cumplan pasarán a ser valores ausentes definidos por el sistema.

Una expresión lógica es una expresión que puede ser evaluada como verdadera o falsa en función de los valores de las variables en ella relacionadas. El nexo de las variables son los operadores de relación: = , >= , <= , < , > , ~= . Es posible formar expresiones complejas, utilizando los operadores lógicos: AND (&), OR (|), NOT (~).

C.1.2. Recodificación de una Variable

A partir de una variable podemos crear otra cuyos valores sean una recodificación de los de la primera. Esta recodificación podemos hacerla tanto en la misma variable como en variables diferentes. Para ello, seleccionaremos *Transformar ... Recodificar ... En distintas variables*. Se abre una ventana en la que deberemos asignar un nombre (y una etiqueta si queremos) a la nueva variable.[1]

C.1.3. Filtrado de datos

El programa SPSS permite seleccionar determinados casos para un próximo proceso, bien temporalmente o de forma permanente, sobre la base de un criterio lógico o de una decisión aleatoria. Para ello seleccionaremos el menú *Datos ... Seleccionar casos*. La selección de individuos puede ser temporal (*filtrados*) o permanente (*eliminados*). En la selección permanente eliminamos del archivo activo los individuos deseados, mientras que en la temporal, la selección es recuperable (los casos son filtrados). En esta última situación, los individuos (casos) del archivo que no satisfacen la condición aparecerán marcados como excluidos mediante una línea que cruza en diagonal su número de fila. Aparece también una variable llamada *filter*$ que el sistema crea para controlar el filtrado de datos.

Especificaciones:

- *Todos los casos*: indica que quiere procesar todos los casos del archivo de datos de trabajo.

[1] Cuidado!, si se selecciona ... borrarás la variable original.

- *Si se satisface la condición*: indica que quiere procesar sólo los casos que satisfagan una condición lógica. Para especificar o cambiar la condición, pulse en *Si*. Esta alternativa crea la variable *filter*$, que el sistema crea para controlar el filtrado de datos.
- *Muestra aleatoria de casos*: indica que queremos seleccionar los casos de forma aleatoria para su procesamiento. Si ha tecleado las especificaciones de muestreo, éstas aparecerán junto al botón de comando Muestra. Si no, o si quiere cambiarlas, pulse en *Muestra*(véase más adelante). Esta alternativa también crea la variable *filter*$.
- *Basándose en el rango del tiempo o de los casos*: permite seleccionar los casos deseados siempre que sean consecutivos.
- *Usar variable de filtro*: indica que quiere utilizar los valores de una variable numérica existente para controlar el filtrado de casos. Seleccione la variable de la lista de la izquierda. Los casos cuyo valor sea 0, o ausentes, en la variable de filtro se excluyen del análisis.

C.2 Análisis exploratorio de datos

Primero abrir el archivo de datos.

a) **Tablas de frecuencias:** *Analizar* … *Estadísticos descriptivos* … *Frecuencias*. SPSS también cuenta con el menú alternativo *Analizar* … *Tablas personalizadas* que posibilita alterar el formato del resultado.

b) **Estadísticos:** *Analizar* … *Estadísticos descriptivos* … *Descriptivos* donde hay que seleccionar la variable o variables de interés y después *Opciones* para escoger los estadísticos que interesan. Sin embargo con este menú no se pueden obtener los percentiles. Para obtenerlos hay que usar *Analizar* … *Estadísticos descriptivos* … *Frecuencias* y entrar en la opción *Estadísticos* en donde se seleccionan los percentiles deseados.

c) **Gráficos de sectores:** *Gráficos* … *Sectores* y seleccionaremos una o varias variables apareciendo un cuadro de diálogo, cuyas opciones pasamos a comentar:

1) *Resúmenes para grupos de casos*: Genera un gráfico en el que cada sector corresponde a un valor de la variable seleccionada. El tamaño del sector se determina por la opción *Los sectores representan*, esta opción aparece en el cuadro de diálogo que surge después de pulsar el botón *Definir* del cuadro anterior. También es posible que los sectores representen otra cosa, como la media de los valores de otra variable, el valor máximo, etc.; esto se consigue con la opción *Otra función resumen*. Se puede también editar el gráfico haciendo doble clic sobre él, con posibilidad de cambiar colores, tramas, desgajar sectores, etc.

2) *Resúmenes para distintas variables*. Permite que los sectores representen variables en lugar de grupos de casos. Cada sector representa una función de una determinada variable (por ejemplo, la suma de los valores de sus casos).

3) *Valores individuales de los casos*. Se resume una única variable, los casos ya son valores agrupados de la variable. Cada sector representa el valor de un caso individual. Con *Gráficos* … *Interactivos* … *Sectores* podemos obtener representaciones con efectos más llamativos.

d) **Diagramas de barras:** *Gráficos* … *Barras y Gráficos* … *Interactivos* … *Barras*.

e) **Histogramas:** *Gráficos* … *Histograma o Gráficos* … *Interactivos* … *Histograma*.

f) **Gráficos de tallo y hojas:** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Explorar.*

g) **Diagramas de caja:** *Gráficos … Diagrama de cajas.*

h) **Diagramas de dispersión:** *Gráficos … dispersión … simple* o *Gráficos … Interactivos … Diagrama de dispersión*, en donde aparece un cuadro de diálogo en el que se puede elegir qué variable ocupará el eje X y qué otra el eje Y.

C.3 Inferencia sobre una o más poblaciones

Primero abrir el archivo de datos.

a) **Análisis de una muestra:** *Analizar … Comparar medias … Prueba T para una muestra.* Aparece una pantalla en cuyo campo *Contrastar Variables* introducimos las varaibles que queremos contrastar. En esta ventana, seleccione *Opciones*, para introducir el grado de confianza deseado (por defecto es del 95 %). Al final se pulsa *Aceptar*.

b) **Análisis de dos muestras emparejadas o relacionadas (Prueba T para muestras relacionadas).** Para efectuar la prueba T para muestras relacionadas se necesita una columna en los datos para cada una de las variables a comparar. Seleccionamos *Analizar … Comparar medias … Prueba T para muestras relacionadas*. Aparece la ventana en donde seleccionamos las variables en cuya comparación estamos interesados. Al hacer la primera selección en la columna de variables, esta aparece en el recuadro selecciones actuales como *variable 1*, y al realizar la segunda selección aparecerá como *variable 2*. En ese momento, ya seleccionadas las dos, es cuando las podemos introducir en la columna variables relacionadas. Se pulsa *Aceptar*.

c) **Análisis de dos muestras independientes (Prueba T para muestras independientes).** El programa necesita una columna en el editor de datos que contenga los valores de la variable cuyas medias en las dos poblaciones se desea comparar, y otra que indica la población o grupo a que pertenece cada individuo. A continuación, seleccionamos *Analizar … Comparar medias … Prueba T para muestras independientes*. Aparece una ventana en donde, en primer lugar seleccionamos una variable numérica y con el puntero la situamos en la ventana de *Contrastar variables*. A continuación, seleccionamos una única variable de agrupación y pulsamos *Definir grupos*. En esta ventana debemos especificar los dos grupos de la variable de contraste, eligiendo entre:

- *Usar valores especificados*. Escribimos un valor para el Grupo 1 y otro para el Grupo 2. Los casos con otros valores quedarán excluidos.

- *Punto de corte*. Escribimos un número que divida los valores de la variable de agrupación en dos conjuntos.

Si la variable de agrupación es de cadena corta, por ejemplo, *SI* y *NO*, podemos escribir una cadena para el Grupo 1 y otra para el Grupo 2. Los casos con otras cadenas quedarán excluidos del análisis. Una vez completada la ventana y tras pulsar *Continuar*, volvemos a la ventana de *Prueba T para muestras independientes*. Pulsando el botón *Opciones* podemos introducir un valor entre 1 y 99 para el coeficiente de confianza de un intervalo, cuyo valor por defecto es del 95 %. Tras pulsar el botón *Aceptar*.

d) **Pruebas de normalidad.** *Analizar … Estadísticos descriptivos … Explorar*. Aparece la ventana *Explorar*. En el caso de una muestra situamos la variable en la ventana *Dependientes*, y dejamos *Factores* en blanco. Para dos muestras independientes, situamos la variable a contrastar en la ventana *Dependientes*, y la variable que forma los grupos en la de Factores. Para dos muestras emparejadas situamos una variable con la diferencia de las dos originales en la ventana *Dependientes*, y dejamos *Factores* en blanco. A continuación, debemos pulsar el botón

Gráficos y en la nueva ventana escoger la opción de *Histograma* y activar la opción de *Gráficos con pruebas de normalidad.*

D Uso de la calculadora en la estadística

Las explicaciones las basaremos en la utilización de las calculadoras Casio fx-82MS, fx-83MS, fx-85MS, fx-270MS, fx-300MS y fx-350MS.

Cálculos estadísticos

Para realizar cálculos estadísticos en la calculadora, tenga en cuenta los siguientes comentarios:

- Utilice MODE 2 para ingresar el modo estadístico SD.
- Utilice SHIFT CLR 1 = para borrar la memoria.
- Ingrese los datos usando la secuencia de tecla siguiente: <Dato> DT.
- Tenga en cuenta la tabla siguiente para los cálculos que se necesiten:

Para llamar este tipo de valor:	Realice esta operación:
$\sum x^2$	SHIFT S-SUM 1
$\sum x$	SHIFT S-SUM 2
n	SHIFT S-SUM 3
$\overline{x}$	SHIFT S-VAR 1
σ_n	SHIFT S-VAR 2
σ_{n-1}	SHIFT S-VAR 3

Ejemplo D.1

Calcule n, $\sum x$, $\sum x^2$, $\overline{x}$, σ_n y σ_{n-1} para los datos siguientes: 55, 54, 51, 55, 53, 53, 54 y 52.
SOLUCION:

- Primero, ingresamos al modo SD con las teclas MODE 2.
- Luego, borramos la memoria con la secuencia de teclas SHIFT CLR 1 =.
- Posteriormente, ingresamos los datos: 55 DT 54 DT 51 DT 55 DT 53 DT 53 DT 54 DT 52 DT
- Por último, calculamos las medidas estadísticas pedidas:

Suma de los cuadrados de los valores $\sum x^2 = 22{,}805$	SHIFT S-SUM 1 =
Suma de valores $\sum x = 427$	SHIFT S-SUM 2 =
Número de datos $n = 8$	SHIFT S-SUM 3 =
Media aritmética $\overline{x} = 53{,}375$	SHIFT S-VAR 1 =
Desviación estándar poblacional $\sigma_n = 1{,}316956719$	SHIFT S-VAR 2 =
Desviación estándar muestral $\sigma_{n-1} = 1{,}407885953$	SHIFT S-VAR 3 =

Precauciones con el ingreso de datos

- DT DT ingresa el mismo dato dos veces.
- También puede ingresar múltiples entradas del mismo dato usando SHIFT ;. Por ejemplo, para ingresar el dato 110 diez veces presiones 110 SHIFT ; 10 DT.
- Mientras ingresa datos o después de completar el ingreso de datos, puede usar las teclas △ y ▽ para ir visualizando a través de los datos que ha ingresado.
- Si ingresa múltiples ingresos del mismo dato usando SHIFT ; para especificar la frecuencia de datos (número de ítemes de datos) como se describe anteriormente, pasando a través de los datos muetra el ítem de dato y una pantalla separada para la frecuencia de datos (freq).
- Los datos visualizados pueden editarse, si así lo desea. Ingrese el valor nuevo y presione la tecla = para reemplazar el valor antiguo por el valor nuevo. Esto también significa que si desea realizar alguna otra operación (cálculo, llamada de resultados de cálculos estadísticos, etc.), siempre deberá presionar primero la tecla AC para salir de la presentación de datos.
- Presionando la tecla DT en lugar de = después de cambiar un valor sobre la presentación, registra el valor que ha ingresado como un elemento de dato nuevo, y deja el valor antiguo tal como está.
- Puede borrar el valor del dato visualizado usando △ y ▽, y luego presionando SHIFT CL. Borrando un valor de dato ocasiona que todos los valores siguientes se desplacen hacia arriba.
- Después de ingresar los datos en el modo SD, no podrá visualizar o editar más los datos ítemes de datos individuales, después de cambiar a otro modo.

Bibliografía

[1] AGRESTI, A., *Categorical data analysis*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1990.

[2] BARBOSA, R.; LLINÁS, H., *Procesos estocásticos con aplicaciones*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2013.

[3] HOSMER, D. and LEMESHOW S., *Applied Logistic Regression*, Segunda edición, John Wiley and Sons, 2000.

[4] KALB, K. y KONDER, P., *Una visión histórica del concepto moderno de integral*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2006 (editor: Dr. rer. nat. Humberto LLinás).

[5] KLEINBAUM, D. and KLEIN, M., *Logistic Regression: A self Learning Text*, Segunda edición, Ed. Springer, 2002.

[6] LLINÁS, H.; ROJAS, C., *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad*. Barranquilla: Ediciones Uninorte, 2005.

[7] LLINÁS, H., *Precisiones en la teoría de los modelos logísticos*, Revista Colombiana de Estadística, Volumen 29, Número 2, pág. 239-265, 2006.

[8] LLINÁS, H., *Estadística inferencial*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2006.

[9] LLINÁS, H., *Medida e integración*. Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2007.

[10] LLINÁS, H., *Applet: La ley de los grandes números*. Se puede encontrar en el siguiente link: http://ylang-ylang.uninorte.edu.co/Objetos/Estadistica/LeyDeGrandesNumeros/index.html

[11] LLINÁS, H., *Applets de estadística*, 2007. Se puede encontrar en el siguiente link: *http://ylang-ylang.uninorte.edu.co:8080/drupal/?q=node/238*

[12] LLINÁS, H.; ALONSO, J. FLÓREZ, K., *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2012.

[13] LLINÁS, H., *Introducción a la estadística matemática*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.

[14] LLINÁS, H., *Introducción a la teoría de probabilidad*, Barranquilla: Editorial Universidad del Norte, 2014.

[15] NELDER, J.A. and WEDDERBURN, R.W.M., *Generalized linear models*. The Journal of the Royal Statistical Society, serie A 135, pág.370-384, 1972.

[16] PÉREZ, C., *Estadística práctica con Statgraphics*. España: Prentice Hall, 2002.

[17] Página web de datos estadísticos del Institute for Digital Research and Education (IDRE) de la Universidad de California en Los Angeles (UCLA): *https://stats.idre.ucla.edu/*. En especial, consultar: *https://stats.idre.ucla.edu/other/examples/alr2/*