Maestría en Estadística Aplicada

Guía resumida de Estadística Matemática

Dr. rer. nat. Humberto Llinás Solano

Universidad del Norte
Barranquilla - Colombia

Contenido

El autor

HUMBERTO LLINÁS SOLANO.

Licenciado en Ciencias de la Educación, con énfasis en Matemáticas, Física y Estadística de la Universidad del Atlántico. Magister en Matemáticas, convenio Universidad del Valle-Universidad del Norte. Doctor en Estadística (Dr. rer. nat.) de la Universidad Johannes Gutenberg de Mainz (Alemania). Desde 1998 se desempeña como profesor de tiempo completo de la Universidad del Norte y pertenece a los grupos de investigación *Estadística e Investigación operativa* (*GEIO*) y *Enfermedades tropicales* de dicha institución. Autor de los textos:

- *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad* (2005)
- *Estadística inferencial* (2006)
- *Medida e integración* (2007)

CAPÍTULO 1

Distribuciones muestrales

1.1 Modelos estadísticos

Se parte de un *problema de aplicación* y se supone que puede ser expresado por medio de una variable uni- o multidimensional y formulada en el lenguaje común o en el de la respectiva aplicación. Generalmente estamos interesados en ciertas características de esta variable.

Como primer paso, escogemos un MODELO PROBABILÍSTICO corespondiente al problema. Es decir, la variable de interés se representa por una variable aleatoria X, cuya distribución depende de un parámetro $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^t$ de cierto subespacio Θ de $\mathbb{R}^k$, donde la notación x^t representa la transpuesta del vector x. Dicho parámetro consiste en un vector de números desconocidos y debe representar las características de la variable del problema.

Como los análisis estadísticos deben llegar a ciertos conocimientos acerca del parámetro, entonces, como segundo paso, se oberva n veces a la variable X, obtieniendo así una MUESTRA ALEATORIA $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ de TAMAÑO n. Es importante recalcar que cada VARIABLE MUESTRAL X_i tiene el mismo tipo de distribución que la de X, pero puede depender del número i de la observación. Los valores concretos $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ de la muestra X son los DATOS u OBSERVACIONES.

Para el análisis estadístico, se deben cumplir siempre las siguientes condiciones:

(a) Las variables muestrales X_i deben ser *independientes*.

(b) La muestra X debe ser REGULAR. Esto quiere decir que todas las X_i son discretas con función de probabilidad $f_i(x_i, \theta)$ o todas son continuas con función de densidad $f_i(x_i, \theta)$. En este caso, por (a), la distribución conjunta de X viene dada por

$$f_\theta(x) := f(x, \theta) \; = \; f_1(x_1, \theta) \cdots f_n(x_n, \theta)$$

Utilizaremos las notaciones

$$X_i \sim f_i(x_i, \theta), \quad X \sim f(x, \theta) \quad \text{ó} \quad X \sim f_\theta$$

(c) El parámetro debe ser IDENTIFICABLE, es decir, si $\theta^* \neq \theta$, entonces $f_{\theta^*} \neq f_\theta$. En otras palabras, si el modelo se trabaja con otro parámetro $\theta^* \neq \theta$, el modelo cambia inmediatamente.

Definición 1.1.1 *A la familia de distribuciones f_θ de la muestra aleatoria X, con $\theta \in \Theta$, se le llama* MODELO ESTADÍSTICO

A continuación, algunos ejemplos para ilustrar lo explicado anteriormente.

Ejemplo 1.1.2 (Un modelo de Bernoulli) *Se tiene interés en el problema de controlar la calidad de un producto verificando si estos están defectuosos o no. En tales situaciones es natural representar las respuestas (defectuoso o no) por una variable de Bernoulli, es decir, una variable aleatoria X con posibles valores " 1" (si está defectuoso) y "0" (si no lo está). En principio, el parámetro de interés es $p = P(X = 1)$.*

Para obtener un modelo estadístico *se toma una muestra de tamaño n productos y se apunta si cada uno de ellos está defectuoso o no, obteniéndose los valores $x_i \in \{0, 1\}$*

de las variables aleatorias X_i, *con* $i = 1, \ldots, n$ *y* n *parámetros* $p_i = P(X_i = 1)$. *La función de probabilidad conjunta de* $X_1, \ldots, X_n$ *es*

$$f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) \; = \; \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i}(1 - p_i)^{1-x_i} \qquad \blacktriangleleft$$

Ejemplo 1.1.3 (Un modelo de regresión lineal, normal) *Se tiene interés en el problema de medir la dependencia del desgaste de una llanta de carro para diferentes cargas a las que se somete dicha llanta. Se parte de un* modelo probabilístico *de regresión lineal*

$$Y = \delta + \beta x + e$$

Es decir, se supone que la carga es una variable determinística $x \in \mathbb{R}$ *y que el desgaste es una variable aleatoria* Y *que depende linealmente de* x. *Además, que* e *es una variable aleatoria que representa el error de esta medición. Por supuesto, debemos verificar que el modelo ees suficientemente adecuado para el problema planteado.*

Para obtener un modelo estadístico *se aplican* n *cargas* $x_1, \ldots, x_n$ *a una llanta midiendo los desgastes correspondientes de la llanta. De esta forma, obtenemos las observaciones* $y_1, \ldots, y_n$ *de las variables muestrales*

$$Y_i = \delta + \beta x_i + \epsilon_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Además, se supone que las Y_i *son* independientes *y que los errores* ϵ_i *tienen* distribución normal *con media 0 y varianza* σ^2, *igual para todas las* n *mediciones. Entonces, se puede demostrar que* Y_i *dado que* $X_i = x_i$ *tiene distribución normal con parámetros* $\delta + \beta x_i$.

El vector de parámetros es $\theta = (\delta, \beta, \sigma^2)^t$, *siendo* $\delta, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $\sigma^2 > 0$.

Para $x_i, \ldots, x_n$ *fijos, la densidad conjunta de la muestra* $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^t$ *es*

$$f(y_1, \ldots, y_n, \delta, \beta, \sigma^2) \; = \; \frac{1}{\sqrt{(2\,\pi\,\sigma^2)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[y_i - (\delta + \beta x_i)]^2\right)$$

Es importante aclarar que hay situaciones en donde debemos suponer que las X_i *son variables aleatorias con valores posibles* x_i.

Implicitamente se ha supuesto que las x_i *sean diferentes. Observe que al menos se debe suponer que no todos los* x_i *son iguales para asegurar que el parámetro sea identificable.* ◀

1.2 Estadísticos y distribuciones muestrales

Estadístico

Considere un modelo estadístico $X \sim f_\theta$, con $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Es decir, los datos $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ son valores de una muestra aleatoria $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ cuya distribución conjunta f_θ depende de un parámetro de interés $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)^t \in \Theta$. Además, se supone que las variables $X_1, \ldots, X_n$ son independientes.

Para facilitar el trabajo y el manejo de los datos, se utiliza una *reducción de los datos*. En este proceso no se trabaja con los datos originales x, sino que estos se van a reducir mediante una función T que dependa de ellos como, por ejemplo,

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Definición 1.2.1 *Un* ESTADÍSTICO *dentro del modelo estadístico es alguna función $T(X)$ de la muestra X, que no depende de θ, siendo T una función (medible) de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ con $1 \leq m \leq n$.*

En los casos típicos de estimación se trabajará unicamente con estadísticos que tienen la misma dimensión ($m = k$) del parámetro. Así, a cada componente θ_k de θ le corresponde una función componente $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de $T = (T_1, \ldots, T_k)^t$

Ejemplo 1.2.2 *Algunos ejemplos típicos de estadísticos son la media muestral, la mediana muestral, la moda muestral, el rango muestral, la varianza muestral, la desviación estándar muestral y la proporción muestral, entre otros.*

Distribución muestral

Debido a que un estadístico muestral también es una variable aleatoria (por ser función de variables aleatorias), entonces, ese estadístico posee una distribución. Esto conduce a la siguiente definición:

Definición 1.2.3 *La distribución de un estadístico muestral recibe el nombre de* DISTRIBUCIÓN MUESTRAL *o* DISTRIBUCIÓN EN EL MUESTREO.

Para ilustrar la importancia del concepto de distribución muestral, consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.2.4 *Supongamos que un supervisor tiene a su cargo a seis empleados, cuyas experiencias (medidas en años de trabajo) son 2, 4, 6, 6, 7 y 8. Se eligen al azar cuatro de estos empleados y se les asigna una nueva tarea. Se puede determinar que el número medio de años de experiencias para los seis empleados es 5,5. Estamos interesados, de todos modos, en el número medio de años de experiencia para los cuatros empleados concretos a los que se les ha asignado el cambio de tarea. De modo que podemos pensar en este ejemplo como en una muestra aleatoria simple de cuatro valores extraídos de una población de seis. Así, el número de muestras diferentes que pueden ser seleccionadas es* $\binom{6}{4} = 15$. *En la tabla* 1.1 *aparece cada una de las posibles muestras con su correspondiente media muestral.*

Tabla 1.1: Posibles muestras de cuatro observaciones con sus correspondientes medias muestrales para la población 2, 4, 6, 6, 7 y 8

Muestra	Media	Muestra	Media	Muestra	Media
2,4,6,6	4,50	2,4,7,8	5,25	4,6,6,7	5,75
2,4,6,7	4,75	2,6,6,7	5,25	4,6,6,8	6,00
2,4,6,8	5,00	2,6,6,8	5,50	4,6,7,8	6,25
2,4,6,7	4,75	2,6,7,8	5,75	4,6,7,8	6,25
2,4,6,8	5,00	2,6,7,8	5,75	6,6,7,8	6,75

En la tabla 1.2 *se muestra distribución de frecuencias de la media.*

Tabla 1.2: Distribución de frecuencias para las medias muestrales de la tabla 1.1

Media muestral	4,50	4,75	5,00	5,25	5,50	5,75	6,00	6,25	6,75
Frecuencia	1	2	2	2	1	3	1	2	1

La distribución muestral de $\overline{X}$ *es como se muestra en la tabla* 1.3 *y el gráfico de esta función de probabilidad aparece en la figura* 1.1.

Tabla 1.3: Distribución de probabilidades para la media muestral

$\overline{x}$	4,50	4,75	5,00	5,25	5,50	5,75	6,00	6,25	6,75
$f_{\overline{X}}$	1/15	2/15	2/15	2/15	1/15	3/15	1/15	2/15	1/15

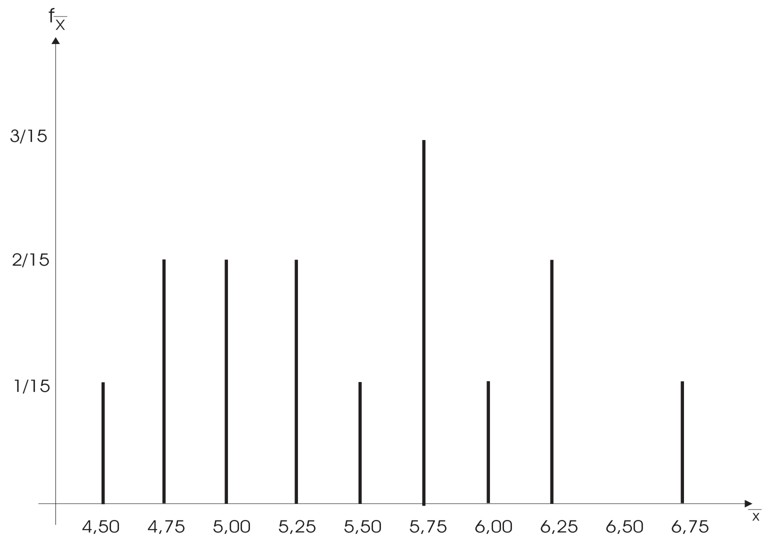


Figura 1.1: Función de probabilidad de la distribución muestral de la media de cuatro observaciones extraídas de la población 2, 4, 6, 6, 7 y 8.

Observemos que, mientras el número de años de trabajo de los 6 trabajadores está entre 2 y 8, los valores de la media muestral tienen un rango mucho más restringido: de 4,5 a 6,75. ◄

En la siguiente sección, analizaremos la distribución de la media muestral (para poblaciones más generales) y también para otros estadísticos. Ahora consideraremos un ejemplo donde la muestra aleatoria se obtiene de una distribución continua.

Ejemplo 1.2.5 *El tiempo que se utiliza para atender un cliente en una ventanilla de un banco es una variable aleatoria, que tiene distribución exponencial con parámetro* λ. *Sean* X_1 *y* X_2 *variables aleatorias independientes que representan los tiempos* *para atender a dos clientes diferentes. Si $X = X_1 + X_2$ representa el tiempo total de atención, halle:*

(a) *La función de distribución acumulada de X.*

(b) *La función de densidad de X.*

(c) *La función de densidad de $\overline{X} = X/2$.*

(d) $E(\overline{X})$, $V(\overline{X})$, $E(X)$ *y* $V(X)$.

SOLUCIÓN:

(a) *Si f_{X_i} es la función de densidad marginal de X_i, $i = 1, 2$, entonces, por hipótesis,*

$$f_{X_i}(x_i) \;=\; \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_i}, & \text{si } x_i \geq 0; \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Ahora, si f es la función de distribución conjunta de X_1 y X_2, entonces, por la independencia de estas dos variables, se tiene que:

$$f(x_1, x_2) \;=\; f_{X_1}\, f_{X_2} \;=\; \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, & \text{si } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0; \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

Sean $A := \{(x_1, x_2) \,/\, x_1 + x_2 \leq t\}$ y F_X la función de distribución acumulada de X. Entonces, para $t \geq 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} F_X(t) \;&=\; P(X_1 + X_2 \leq t) \;=\; \iint_A f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\ &=\; \int_0^t \int_0^{t-x_1} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}\, dx_2\, dx_1 \;=\; \int_0^t \left[\lambda e^{-\lambda x_1} - \lambda e^{-\lambda t}\right] dx_1 \\ &=\; 1 \,-\, e^{-\lambda t} \,-\, \lambda t e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

(b) *La función de densidad de X se obtiene al derivar F_X y es una gamma con parámetros $\alpha = 2$ y $\beta = 1/\lambda$:*

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

(c) *La función de densidad de* $\overline{X} = X/2$ *se obtiene de la relación "*$\{\overline{X} \leq x\}$ *si y sólo si* $\{X \leq 2x\}$*" como:*

$$f_{\overline{X}}(x) \;=\; \begin{cases} 4\lambda^2 x e^{-2\lambda x}, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

(d) *La media y la varianza de la distribución exponencial son* $\mu = 1/\lambda$ *y* $\sigma^2 = 1/\lambda^2$*, respectivamente. Con esto y con los incisos (b) y (c), podemos verificar que* $E(\overline{X}) = 1/\lambda$*,* $V(\overline{X}) = 1/(2\lambda^2)$*,* $E(X) = 2/\lambda$ *y* $V(X) = 2/\lambda^2$*.* ◄

1.3 Distribución muestral de la media

Primero consideraremos el caso en que la muestra aleatoria proviene de una población normal.

Teorema 1.3.1 *Sea* $X_1, \ldots, X_n$ *una muestra aleatoria de una población que tiene distribución normal con media* μ *y varianza* σ^2*. Además, sean* $S^2_{(n)}$ *y* $\overline{X}_{(n)}$ *la varianza y media empírica de* $X_1, \ldots, X_n$*, respectivamente. Si* $\mathcal{T}(n)$ *representa la distribución t de Student con n grados de libertad, entonces:*

(a) $\overline{X}_{(n)} \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

(b) Si σ^2 *es desconocida, entonces* $\frac{\overline{X}_{(n)} - \mu}{S_{(n)}/\sqrt{n}} \stackrel{d}{=} \mathcal{T}(n-1)$.

Para el caso en que la muestra aleatoria provenga de poblaciones no normales o desconocidas, se puede aplicar el teorema central del límite de Lindeberger-Lévy (véase el teorema 3.3.1 de LLinás *[5]). Para la solución de problemas prácticos se puede tener en cuenta el diagrama* A.1.

DEMOSTRACIÓN:

(a) Aplique los teoremas 1.10.1 y 2.5.6(a) de LLinás [5].

(b) Es exactamente el teorema 2.5.10(b) de LLinás [5]. ■

Ejemplo 1.3.2 *Supongamos que el incremento porcentual de los salarios de los funcionarios de todas las corporaciones medianas se distribuye siguiendo una normal con media* $12,2\%$ *y desviación típica* $3,6\%$*. Si se toma una muestra aleatoria de* *nueve observaciones de esta población según los incrementos porcentuales de salario, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral sea mayor del 10%?*

SOLUCIÓN:
Tenemos que $\mu = 12,2$, $\sigma = 3,6$ *y* $n = 9$. *Ahora, como la población es normal y la varianza poblacional es conocida, entonces la distribución muestral de la media muestral es normal o, lo que es equivalente, la variable* Z *tiene normal estándar. Por tanto, la probabilidad requerida es:*

$$P(\overline{X} > 10) \ = \ P\left(Z > \frac{10 - 12,2}{1,2}\right) \ = \ P(Z > -1,83) \ = \ 1 - 0,0336 \ = \ 0,9664$$

Concluimos, entonces, que la probabilidad de que la media muestral sea mayor que un 10% *es aproximadamente de 0,97.* ◀

Ejemplo 1.3.3 *Una empresa emplea 1.500 personas. La cantidad promedio gastada, durante un año determinado, en servicios médicos personales por empleado fue de 2.575 dólares y la desviación típica de 525 dólares. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria de 100 empleados (seleccionados sin reemplazo) arroje una media comprendida entre 2.500 y 2.700 dólares?*

SOLUCIÓN:
Tenemos que $N = 1.500$, $\mu = 2.575$, $\sigma = 525$ *y* $n = 100$. *Nos piden calcular* $P(2.500 \leq \overline{X} \leq 2.700)$. *Teniendo en cuenta que la población dada es finita y que la varianza poblacional se conoce, entonces, la media y desviación estándar de la distribución muestral de* $\overline{X}$ *son:*

$$\mu_{\overline{X}} \ = \ \mu \ = \ 2.575 \qquad y \qquad \sigma_{\overline{X}} \ = \ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \ = \ \left(\frac{575}{\sqrt{100}}\right)\sqrt{\frac{1.400}{1.499}} \approx 50,74.$$

Ahora, como la distribución de la población se desconoce y la varianza poblacional es conocida, entonces, por el teorema central del límite, la probabilidad requerida es:

$$\begin{aligned} P(2.500 < \overline{X} < 2.700) \ &= \ P\left(\frac{2.500 - 2.575}{50,74} < Z < \frac{2.700 - 2.575}{50,74}\right) \\ &= \ P(-1,48 < Z < 2,46) \ = \ P(Z < 2,46) \ - \ P(Z < -1,48) \\ &= \ 0,9931 \ - \ 0,0694 \ = \ 0,9237. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la probabilidad pedida es aproximadamente del $0,9237$. ◀

Ejemplo 1.3.4 *Una muestra aleatoria de seis autos de un determinado modelo evidencia que cada uno de ellos consume las siguientes cantidades en kilómetros por litro:*

$$18,6 \quad 18,4 \quad 19,2 \quad 20,8 \quad 19,4 \quad 20,5.$$

Determine la probabilidad de que el consumo de gasolina medio muestral de automóviles sea menor que 17,6 kilómetros por litro, suponiendo que la distribución de la población es normal con media 17.

SOLUCIÓN:
Tenemos que $\mu = 17$ *y que la muestra escogida es de tamaño* $n = 6$. *La media de la muestra dada es* $\overline{x} = 19,4833$ *y, con esto, la varianza de esta muestra es* $s^2 = 0,96$. *Por consiguiente, la desviación estándar de esta muestra es* $s = \sqrt{0,96} = 0,98$. *Debido a que la población es normal con varianza desconocida y a que* $n < 30$, *entonces, la distribución muestral de la media muestral es la* t *de Student con* $n-1 = 5$ *grados de libertad. Ahora,*

$$\mu_{\overline{X}} \; = \; \mu \; = \; 17 \qquad y \qquad \sigma_{\overline{X}} \; = \; \frac{s}{\sqrt{n}} \; = \; \frac{0,98}{\sqrt{6}} \; = \; 0,4.$$

Con esto, el valor de t_5 *para 17,6 es:*

$$t_5 \; = \; \frac{\overline{X} - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}} \; = \; \frac{17,6 - 17}{0,4} \; = \; 1,47$$

y con ayuda de la tabla t *de Student con 5 grados de libertad, entonces, la probabilidad pedida será:*

$$P(\overline{X} \leq 17,6) \; = \; P(t_5 \leq 1,47) \; = \; 1 - P(t_5 > 1,47) \; = \; 1 - 0,10 \; = \; 0,90. \qquad \blacktriangleleft$$

1.4 Distribución muestral de la proporción

Teorema 1.4.1 (Teorema central del límite de Moivre-Laplace) *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población que tiene distribución $\mathcal{B}(n,p)$. Si $\overline{p}_{(n)}$ representa la proporción muestral de éxitos en la muestra, entonces,*

$$\frac{\overline{p}_{(n)} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$$

En la práctica, el teorema será válido si $n \geq 30$ o si $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$. Véase el diagrama A.2.

DEMOSTRACIÓN:
Véase el corolario 3.3.2 de LLinás [5]. ■

Ejemplo 1.4.2 *Se desea estudiar una muestra de 20 personas para saber la proporción de ellas que tiene más de 40 años. Sabiendo que la proporción en la población es del 40%, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción en la muestra sea menor del 50%?*

SOLUCIÓN:
Aquí, $n = 20$ y $p = 0,4$. Se observa que $n < 30$. Pero, debido a que $np = 8 \geq 5$ y $n(1-p) = 12 \geq 5$, entonces, por el teorema de De Moivre-Laplace, la distribución de la proporción muestral será aproximadamente normal con

$$\mu_{\overline{p}} \;=\; p \;=\; 0,4 \qquad y \qquad \sigma_{\overline{p}} \;=\; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \;=\; \sqrt{\frac{(0,4)(0,6)}{20}} \;\approx\; 0,1095$$

Por consiguiente, la probabilidad pedida es:

$$P(\overline{p} < 0,5) \;=\; P\left(Z < \frac{0,5-0,4}{0,1095}\right) \;=\; P(Z < 0,91) \;=\; 0,8186$$

Por tanto, la probabilidad de que la proporción en la muestra sea menor del 50% es aproximadamente de 0,82. ◄

Ejemplo 1.4.3 *Hallar la probabilidad de que, en 200 lanzamientos de una moneda auténtica, el número de caras esté comprendido en el 40% y el 60%.*

SOLUCIÓN:
En este caso, $n = 200 \geq 30$ *y* $p = P(\text{“cara”}) = 0,5$*. Tenemos que:*

$$\mu_{\overline{p}} \;=\; p \;=\; 0,5 \qquad y \qquad \sigma_{\overline{p}} \;=\; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \;=\; \sqrt{\frac{(0,5)(0,5)}{200}} \;=\; 0,035$$

Por consiguiente, la probabilidad requerida es:

$$\begin{aligned} P(0,4 < \overline{p} < 0,6) &= P\left(\frac{0,4-0,5}{0,035} < Z < \frac{0,6-0,5}{0,035}\right) \\ &= P(-2,83 < Z < 2,83) \\ &= P(Z < 2,83) \;-\; P(Z < -2,83) \\ &= 0,9977 \;-\; 0,0023 \;=\; 0,9954. \end{aligned}$$

Y, en conclusión , la probabilidad de que, en 200 lanzamientos de una moneda auténtica, el número de caras esté comprendido en el 40% y el 60%, es aproximadamente de 0,995. ◀

Ejemplo 1.4.4 *Se desea estudiar una muestra de 20 personas para saber la proporción de ellas que tiene más de 40 años. Sabiendo que la proporción en la población es del 40%, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción en la muestra sea menor del 50%?*

SOLUCIÓN:
tenemos que:

$$\mu_{\overline{p}} \;=\; p \;=\; 0,4 \qquad y \qquad \sigma_{\overline{p}} \;=\; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \;=\; \sqrt{\frac{(0,4)(0,6)}{20}} \;\approx\; 0,1095.$$

Por consiguiente, la probabilidad pedida es:

$$P(\overline{p} < 0,5) \;=\; P\left(Z < \frac{0,5-\mu_{\overline{p}}}{\sigma_{\overline{p}}}\right) \;=\; P\left(Z < \frac{0,5-0,4}{0,1095}\right) \;=\; P(Z < 0,91) \;=\; 0,82$$

Es decir, la probabilidad de que la proporción en la muestra sea menor del 50% es aproximadamente de 0,82. ◀

1.5 Distribución muestral de la diferencia de medias (el caso de muestras independientes)

Teorema 1.5.1 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población que tiene distribución normal con media μ_1 y varianza σ^2. Sea $Y_1, \ldots, Y_m$ otra muestra aleatoria (independiente de la primera) de otra población que tiene distribución normal con media μ_2 y varianza σ^2. Además, sean $S^2_{(n)}$ y $\overline{X}_{(n)}$ y $S^2_{(m)}$ y $\overline{Y}_{(m)}$ la varianza y media empírica de $X_1, \ldots, X_n$ y de $Y_1, \ldots, Y_m$, respectivamente. Supongamos que $\mathcal{T}(n)$ representa la distribución t de Student con n grados de libertad. Si σ^2 es desconocida y si $S^2_{(n,m)}$ es la llamada* VARIANZA MUESTRAL COMBINADA *de $S^2_{(n)}$ y $S^2_{(m)}$, definida por*

$$S^2_{(n,m)} = \frac{(n-1)S^2_{(n)} + (m-1)S^2_{(m)}}{m+n-2}$$

Entonces

$$t := \frac{\left(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}\right) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2_{(n,m)}}{m} + \frac{S^2_{(n,m)}}{n}}} \stackrel{d}{=} \mathcal{T}(m+n-2)$$

Este es el caso en que las muestras provienen de poblaciones normales con varianzas desconocidas e iguales. La distribución muestral de la diferencia de medias muestrales en otras situaciones se muestra en el diagrama A.3.

DEMOSTRACIÓN:
Es exactamente el teorema 2.5.10(c) de LLINÁS [5]. ■

Ejemplo 1.5.2 *Suponga que dos drogas, A y B, de las que se dice que reducen el tiempo de respuesta de las ratas a determinado estímulo, se están comparando en un experimento de laboratorio. El experimentador sabe que en las respectivas poblaciones los tiempos de respuesta al estímulo están distribuidos normalmente. Se administra la droga A a 12 ratas y la droga B a 13. Cuando se lleva a cabo el experimento, la reducción promedio de tiempo de respuesta al estímulo por parte de las ratas que están recibiendo la droga A es 30,45 milisegundos con una desviación típica de 5 milisegundos. Los datos correspondientes a la droga B son 24,9 y 6 milisegundos. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia entre la reducción promedio de tiempo de respuesta al estímulo por parte de las ratas que están recibiendo la* *droga A y la de las ratas que están recibiendo la droga B sea menor o igual a la observada en el experimento? Suponga que no hay diferencia alguna entre las dos drogas con respecto a la reducción promedio en tiempos de respuestas y que las drogas son igualmente efectivas. Además, suponga que las poblaciones tienen distribución normal con varianzas iguales.*

SOLUCIÓN:
Como las dos poblaciones en cuestión son normales y los tamaños de las muestras son pequeños (obsérvese que los tamaños muestrales son estrictamente menores que 30), entonces:

- *La distribución muestral de* $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ *es aproximadamente la* t *de Student con* $n_A + n_B - 2 = 12 + 13 - 2 = 23$ *grados de libertad.*

- *Debido a que no hay diferencia alguna entre las dos drogas con respecto a la reducción promedio en tiempos de respuestas y que las drogas son igualmente efectivas, entonces,* $\mu_A = \mu_B$. *Por consiguiente, la media de la distribución muestral de* $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ *es igual a* $\mu_A - \mu_B = 0$.

- *Debido a que la varianza muestral combinada* s^2 *está dada por*

$$s^2 \;=\; \frac{(n_A-1)s_A^2 + (n_B-1)s_B^2}{n_A + n_B - 2} \;=\; \frac{(12-1)5^2 + (13-1)6^2}{12+13-2} \;=\; 30,74,$$

entonces, la varianza de la distribución muestral de $\overline{X}_A - \overline{X}_B$ *es:*

$$\frac{s^2}{n_A} + \frac{s^2}{n_B} \;=\; \frac{30,74}{12} + \frac{30,74}{13} \;=\; 4,92$$

Por demás, con base en los datos, el valor t *está dado por:*

$$t \;=\; \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}} \;=\; \frac{5,55 - 0}{2,22} \;=\; 2,5$$

Por consiguiente,

$$P(\overline{X}_A - \overline{X}_B \leq 5,55) \;=\; P(t \leq 2,5) \;=\; 0,99$$

Es decir, la probabilidad de que la diferencia entre la reducción promedio de tiempo de respuesta al estímulo por parte de las ratas que están recibiendo las drogas A y B sea menor o igual a la que se observó en el experimento es de 0,99. ◄

1.6 Distribución muestral de la diferencia de medias (el caso de muestras dependientes o pareadas)

Definición 1.6.1 *Cuando las variables aleatorias X y Y representan variables medidas en las mismas unidades y que cuantifican el mismo aspecto de la unidad experimental sólo que en poblaciones distintas, la muestra aleatoria $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$ se denomina* MUESTRA PAREADA.

De manera general, tomemos una muestra aleatoria de n pares de observaciones que representamos por (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), procedentes de dos poblaciones con medias μ_1 y μ_2. De modo que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corresponden a las observaciones muestrales de una población con media μ_1, mientras que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ corresponden a las observaciones muestrales de una población con media μ_2.

Ahora, si $d_i = x_i - y_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$, entonces, la diferencias $d_1, \ldots, d_n$ se puede pensar como una muestra aleatoria de la población de diferencias de datos pareados. Con esto tenemos que si $\overline{x}$ y $\overline{y}$ son las medias de las muestras $x_1, \ldots, x_n$ y $y_1, \ldots, y_n$, entonces, la media $\overline{d}$ de las diferencias muestrales viene dada por $\overline{d} = \overline{x} - \overline{y}$, lo cual está asociado con el estadístico $\overline{D}$, definido como la diferencia de medias muestrales $\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y}$. A partir de lo anterior, sea s_d la desviación estándar muestral para las n diferencias $d_i = x_i - y_i$. Entonces, la media $\mu_{\overline{D}}$ y la varianza $\sigma^2_{\overline{D}}$ de la distribución muestral de $\overline{D}$ son como aparecen en la tabla 1.4.

Tabla 1.4: Media y varianza del estadístico $\overline{D}$

Estadístico	Media	Varianza
$\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y}$	$\mu_{\overline{D}} = \mu_1 - \mu_2$	$\sigma^2_{\overline{D}} = \frac{s_d^2}{n}$

El objetivo final es determinar la distribución muestral de $\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y}$. En el siguiente teorema, se describe cuál es su distribución para el caso en que los datos son pareados y las muestras son pequeñas. Para otros casos, los resultados son análogos a los presentados en la sección correspondiente a la distribución muestral de la media muestral.

Teorema 1.6.2 *Supongamos que disponemos de una muestra aleatoria de datos pareados procedentes de distribuciones con medias* μ_1 *y* μ_2*. Sean, así,* $\overline{d}$ *y* s_d *la media y la desviación estándar muestral para las* $n < 30$ *diferencias* $d_i = x_i - y_i$*. Si se asume que la distribución de las diferencias es normal, entonces, la distribución muestral del* $\overline{D} = \overline{X} - \overline{Y}$ *es la* t *de Student con* $n-1$ *grados de libertad.*

Este teorema implica que la variable aleatoria $t = \frac{\overline{D}-\mu_{\overline{D}}}{\sigma_{\overline{D}}}$ *tiene distribución* t *con* $n-1$ *grados de libertad. Aquí,* $\mu_{\overline{D}}$ *y varianza* $\sigma^2_{\overline{D}}$ *se calculan como se muestra en la tabla* 1.4.

DEMOSTRACIÓN:
Se deja al lector. ■

1.7 Distribución muestral de la diferencia de proporciones

Teorema 1.7.1 *Sea* $\overline{p}_1$ *la proporción de éxitos observada en una muestra aleatoria de tamaño* n_1*, procedente de una población con proporción* p_1 *de éxitos; y sea, también,* $\overline{p}_2$ *la proporción de éxitos observada en una muestra aleatoria independiente de tamaño* n_2*, procedente de una población con proporción de éxitos* p_1*. Si los tamaños muestrales son grandes, entonces, la distribución muestral de* $\overline{p}_1 - \overline{p}_2$ *es la normal con media* $p_1 - p_2$ *y varianza* $\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}$.

DEMOSTRACIÓN:
Se deja al lector. ■

Este teorema implica que la variable $Z = \frac{(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$ tiene distribución normal estándar. Además, esta aproximación es válida si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

- $n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$.
- $n_1 p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2 p_2 \geq 5$ y $n_2(1-p_2) \geq 5$.

En el siguiente ejemplo se ilustra la distribución muestral de la diferencia entre las proporciones muestrales.

Ejemplo 1.7.2 *Los hombres y mujeres adultos radicados en una ciudad grande de cierto país difieren en sus opiniones sobre el establecimiento de la pena de muerte para personas culpables de asesinato. Se cree que el 12% de los hombres adultos están a favor de la pena de muerte, mientras que sólo el 10% de las mujeres adultas lo están. Si se pregunta a dos muestras aleatorias, una de 150 hombres y otra de 100 mujeres, su opinión al respecto, determine la probabilidad de que el porcentaje de hombres a favor sea al menos 3% mayor que el de mujeres.*

SOLUCIÓN:
Representemos con p_1 el porcentaje de hombres a favor de la pena de muerte y con p_2, el de mujeres. Como consecuencia del teorema 1.7.1, la media de la distribución muestral de las diferencias entre las proporciones muestrales es:

$$\mu_{\overline{p}_1 - \overline{p}_2} = p_1 - p_2 = 0,12 - 0,10 = 0,02.$$

Asimismo, el error estándar de las diferencias entre las proporciones muestrales es:

$$\sigma_{\overline{p}_1 - \overline{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{(0,12)(0,88)}{150} + \frac{(0,10)(0,90)}{100}} = 0,04.$$

Podemos verificar, así, que se cumplen las condiciones necesarias para utilizar la aproximación del teorema 1.7.1. Entonces, el valor Z para $\overline{p}_1 - \overline{p}_2 = 0,03$ está dado por $Z = 0,25$. Por tanto, en virtud de este teorema, la probabilidad pedida será:

$$P(\overline{p}_1 - \overline{p}_2 \geq 0,03) = P(Z \geq 0,25) = 1 - P(Z \leq 0,25) = 1 - 0,5987 = 0,4013$$

De este modo, concluimos así que la probabilidad de que el porcentaje de hombres a favor de la pena de muerte para culpables de asesinatos sea al menos 3% mayor que el de mujeres comprende la cantidad de 0,4013. ◀

1.8 Distribución muestral de la varianza

Teorema 1.8.1 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población que tiene distribución normal con media μ y varianza σ^2. Sea $S^2_{(n)}$ la varianza empírica de la muestra. Entonces,* $\frac{n-1}{\sigma^2} S^2_{(n)} \stackrel{d}{=} \chi^2(n-1)$.

Puede verse también el diagrama A.4.

DEMOSTRACIÓN:
Es exactamente el teorema 2.5.9(c) de LLinás [5]. ■

El siguiente teorema muestra algunas propiedades sobre la media y la varianza de la distribución de la varianza muestral.

Teorema 1.8.2 *Sea $S^2_{(n)}$ la varianza de una muestra aleatoria de tamaño n. Entonces,*

(a) la distribución muestral de $S^2_{(n)}$ tiene como media σ^2.

(b) La varianza de la distribución muestral de $S^2_{(n)}$ depende de la distribución de la población. Si dicha distribución es normal, entonces, será igual a $\frac{2\sigma^4}{n-1}$.

DEMOSTRACIÓN:
Se deja como ejercicio al lector. ■

Ejemplo 1.8.3 *Cuando un proceso de producción está funcionando correctamente, la resistencia en ohmios de los componentes que produce sigue una distribución normal con desviación típica 3,6. Si toma una muestra aleatoria de cuatro componentes, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza muestral sea mayor que 27?*

SOLUCIÓN:
Tenemos que $n = 4$ y $\sigma = 3,6$. Además, como la población en cuestión es normal, entonces, podemos aplicar el teorema 1.8.1. Por tanto,

$$P(s^2 > 27) \;=\; P\left(\chi^2(3) > \frac{(27)(3)}{12,96}\right) \;=\; P\left(\chi^2(3) > 6,25\right) \;\approx\; 0,10.$$

En consecuencia, la probabilidad de que la varianza sea mayor a 27 es aproximadamente de 0,10. ◀

1.9 Distribución muestral de la razón de varianzas

Teorema 1.9.1 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población que tiene distribución normal con media μ_1 y varianza σ_1^2. Sea $Y_1, \ldots, Y_m$ otra muestra aleatoria (independiente de la primera) de otra población que tiene distribución normal con media μ_2 y varianza σ_2^2. Además, sean $S^2_{(n)}$ y $S^2_{(m)}$ las correspondientes varianzas empíricas de $X_1, \ldots, X_n$ y $Y_1, \ldots, Y_m$, respectivamente. Si $\mathcal{F}(m, n)$ representa la distribución F de Fisher con m y n grados de libertad, entonces,*

$$F \; := \; \frac{S^2_{(n)}/\sigma_1^2}{S^2_{(m)}/\sigma_2^2} \; \stackrel{d}{=} \; \mathcal{F}(n-1, m-1)$$

Puede verse también el diagrama A.4.

DEMOSTRACIÓN: Puede aplicarse el teorema 2.5.11(b) de LLINÁS [5]. ■

Ejemplo 1.9.2 *En una prueba sobre la efectividad de dos tipos de píldoras para dormir, A y B, se utilizarán dos grupos independientes de personas con insomnio. A un grupo de tamaño 61 se le administrará la píldora A y al otro grupo, de tamaño 41, se le administrará la B, registrándose el número de horas de sueño de cada individuo participante en el estudio. Suponiendo que el número de horas de sueño de quienes usan cada tipo de píldora se distribuye normalmente y que $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, calcule la probabilidad de que la razón de las varianzas muestrales de A y B sea mayor que 1,64.*

SOLUCIÓN:
La probabilidad pedida está dada por

$$P(s_A^2/s_B^2 > 1,64) \; = \; P\big(F(60,40) > 1,64\big) \; = \; 0,05$$

Es decir, la probabilidad de que la razón de las varianzas muestrales de A y B sea mayor que 1,64 es de 0,05. ◀

Ejercicios

1.1 Un modelo binomial. Se tiene interés en hacer un control de calidad de N productos, por ejemplo, bombillas u otras piezas de cierta producción (o miembros de cierta producción). O sea, interesa ver si los productos son defectuosos o no. En analogía al modelo del ejemplo 1.1.2, se puede partir de un modelo de Bernoulli. Como base se toma la variable "número de productos defectuosos", representada por $X \sim B(1, p)$, donde el valor 1 significa "defectuoso" con $p = P(X = 1)$ y 0 significa "no defectuoso". Ahora se escogen independientemente n de los N productos disponibles.

  (a) Formule un modelo estadístico binomial.

  (b) En términos del problema o de la selección de la muestra, explique qué significaría la independencia de las variables muestrales X_i.

  (c) En este caso, ¿interesaría conocer el número total N?

  (d) ¿Es siempre deseable este procedimiento de selección de la muestra?

1.2 Un modelo hipergeométrico. Se modifica el modelo del ejercicio 1.1 en no suponer la independencia de las variables muestrales X_i.

  (a) Formule ahora un modelo estadístico hipergeométrico.

  (b) En términos del problema o de la selección de la muestra, explique ahora qué significaría la independencia de las variables muestrales X_i.

  (c) En este caso, ¿interesaría ahora conocer el número total N?

  (d) ¿Es regular la muestra hipergeométrica?

1.3 Un modelo multinomial. Se supone ahora que se tienen objetos de los cuales interesa saber si tienen o no alguna de las posibles K características. O sea, se puede considerar que los objetos están divididos en $K \geq 2$ categorías. En el modelo binomial de un control de calidad como la del ejercicio 1.1 se tienen las dos categorías "defectuoso" y "no defectuoso". En el mismo contexto podría ser adecuado tener, por ejemplo, las tres categorías: "útil", "de menos valor" (dando una rebaja en la venta) y "sin valor". Pero hay muchas otras aplicaciones relevantes, por ejemplo, las proporciones de Hardy-Weinberg (véase el ejercicio 1.4). Escogiendo independientemente n objetos y apuntando a cuál categoría $k \in K$ pertenecen, formule un modelo estadístico multinomial.

1.4 Un modelo multinomial para proporciones de Hardy-Weinberg. Considere una población genética, de la cual interesa sólo una característica que tenga origen en un sólo gen con dos alelos α y β. Como individuos se consideran los tres genotipos $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$ y $\beta\beta$. Para las probabilidades correspondientes, se supone que se cumple la *ley de Hardy-Weinberg*, es decir,

$$p_1 = P(\alpha\alpha) = \theta^2, \quad p_2 = P(\alpha\beta) = 2\theta(1-\theta), \quad p_3 = P(\beta\beta) = (1-\theta)^2$$

donde el parámetro de interés es θ y se refiere a la probabilidad de que exista uno de los alelos (por ejemplo, α) en la población de interés. Observando ahora n individuos, formule un modelo estadístico multinomial.

1.5 Un modelo de regresión lineal, bi-normal. Se tiene interés en el problema, por ejemplo, de cómo depende la estatura de un hijo de la estatura de su papá. Se parte de un modelo probabilístico de regresión lineal

$$Y = \delta + \beta\, x + \epsilon$$

Es decir, se supone que la estatura del hijo (representada por la variable aleatoria Y) depende linealmente de la estatura de su papá (representada por la variable aleatoria X). Esta última variable no es determinística como en el modelo del ejemplo 1.1.3.

(a) Supóngase, además, que se cumple el supuesto de normalidad, es decir, que $(Y,X)^t \sim \mathcal{N}(\mu,\Sigma)$, siendo $\mu = (\mu_0,\mu_1)^t$ y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0^2 & \sigma_0\sigma_1\rho \\ \sigma_0\sigma_1\rho & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

Escriba explicitamente la densidad conjunta $f_{(Y,X)}$ de $(Y,X)^t$.

(b) Utilizando (a), demuestre que para un valor x de X, se cumple que la variable aleatoria condicional

$$(Y/X = x) \sim N\big(M(x), \sigma^2\big)$$

siendo

$$M(x) = \mu_0 - \frac{\rho\sigma_0}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{\rho\sigma_0}{\sigma_1}x, \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2(1-\rho^2)$$

(c) Formule un modelo estadístico correpondiente y compárelo con el modelo encontrado en el ejemplo 1.1.3.

1.6 Un modelo de análisis de varianza. Se tiene interés en los efectos que tienen J diferentes tratamientos a cierta enfermedad. Para esto, se aplica cada tratamiento j a K personas, independientemente entre tratamientos y personas. Así se llega al siguiente modelo estadístico, que se conoce bajo el nombre de *modelo de análisis de varianza*, usando alternativamente las dos formas:

- $Y_{jk} = \mu_j + \epsilon_{jk}$, para $j = 1, \ldots, J$ y $k = 1, \ldots, K$.
- $Y_{jk} = \mu + \nu_j + \epsilon_{jk}$, para $j = 1, \ldots, J$ y $k = 1, \ldots, K$.

(a) Interprete los parámetros μ_j, μ y ν_j.

(b) ¿Cuáles de las dos parametrizaciones es identificable?

(c) En el caso de que no sea identificable, ¿cómo es posible hacerla identificable?

1.7 Supóngase que una variable aleatoria X tiene la distribución uniforme continua

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{si } 4 \leq x \leq 8; \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

Encuéntrese la distribución de la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño $n = 60$.

1.8 Distribución muestral del mínimo. Consideremos una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de variables aleatorias continuas, independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulada F y densidad f. Definamos el mínimo muestral de estas n variables aleatorias por $m_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Halle una fórmula para $P(m_n > t)$ en términos de $F(t)$, siendo $t > 0$.

(b) Encuentre la función de distribución acumulada H_n de m_n y escriba su fórmula en términos de F.

(c) Construya la función de densidad h_n de m_n y escriba su fórmula en términos de f.

1.9 Distribución muestral del mínimo (caso particular). Repita el ejercicio 1.8, pero para el caso particular en que las variables muestrales provienen de una distribución

(a) Uniforme sobre el intervalo $[0, a]$.

(b) Exponencial con parámetro λ.

1.10 Distribución asintótica relacionada con el mínimo. Sea m_n como en el ejercicio 1.8. Demuestre que la sucesión $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias $Y_n := n\,F(m_n)$ converge en distribución, cuando $n \to \infty$, a una variable aleatoria Y distribuida exponencialmente con parámetro 1.

1.11 Distribución asintótica relacionada con el mínimo (caso particular). Aplique el ejercicio 1.10 para determinar la forma de Y_n y para encontrar la distribución asintótica de m_n para el caso en que las variables muestrales provengan de una:

(a) Distribución uniforme sobre el intervalo $[0, a]$.

(b) Distribución exponencial con parámetro λ.

(c) Distribución de Weibull con parámetro $\alpha > 0$, en donde la función de densidad f y la de distribución acumulada F están definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, x^{\alpha-1}, & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ t^{\alpha}, & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 1, & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

(d) Población en donde la función de densidad f y la función de distribución acumulada F están definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \le -1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ -\frac{1}{t}, & \text{si } t \le -1 \\ 1, & \text{si } t > -1 \end{cases}$$

(e) Población con función de densidad $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, con $x \in \mathbb{R}$. En este caso, la función de distribución acumulada viene dada por

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{t}, & \text{si } t < 0 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

(f) Distribución normal estándar. **Sugerencia:** tenga en cuenta el siguiente resultado conocido:

$$\begin{aligned} m_n &\sim -\sqrt{2\ln n} + \frac{\ln\ln n + 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}} + \frac{\ln Y}{\sqrt{2\ln n}} \\ &= \alpha_n + \beta_n \ln Y \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, donde Y es como en el ejercicio 1.10 y

$$\alpha_n := -\sqrt{2\ln n} + \frac{\ln\ln n + 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}}, \qquad \beta_n := \frac{1}{\sqrt{2\ln n}}$$

1.12 Distribución muestral del máximo. Consideremos una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de variables independientes e identicamente distribuidas con función de distribución acumulada F y densidad f. Definamos el máximo muestral de estas n variables aleatorias por $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(a) Encuentre la función de distribución acumulada G_n de M_n y escriba su fórmula en términos de F.

(b) Construya la función de densidad g_n de M_n y escriba su fórmula en términos de f.

1.13 Distribución muestral del máximo. Repita el ejercicio 1.12, pero para el caso particular en que las variables muestrales provienen de una distribución

(a) Uniforme sobre el intervalo $[0, a]$.

(b) Exponencial con parámetro λ.

1.14 Distribución asintótica relacionada con el máximo. Sea M_n como en el ejercicio 1.12. Demuestre que la sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias U_n definidas por $U_n := n\,[1 - F(M_n)]$ converge en distribución, cuando $n \to \infty$, a una variable aleatoria U distribuida exponencialmente con parámetro 1.

1.15 Distribución asintótica relacionada con el máximo (caso particular). Aplique el ejercicio 1.14 para determinar la forma de U_n y para encontrar la distribución asintótica de M_n para el caso en que las variables muestrales provengan de una:

(a) Distribución uniforme sobre el intervalo $[0, a]$.

(b) Distribución exponencial con parámetro λ.

(c) Población con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \\ 0, & \text{de otro modo} \end{cases}$$

(d) Población con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{si } x \geq 1 \text{ y } \alpha > 0 \\ 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1.16 Un curso de estadística tiene 40 estudiantes. Con base en los años de experiencias, el profesor sabe que el tiempo necesario para calificar un primer examen seleccionando al azar, es una variable aleatoria con media de 6 minutos y desviación estándar de 6 minutos.

(a) Si los tiempos para calificar son independientes y el profesor comienza a las 2:50 p.m., haciéndolo en forma continua, ¿cuál es la probabilidad de que termine de calificar antes del inicio de las noticias de las 7:00 p.m.?

(b) Si la sección deportiva empieza a las 7:10, ¿cuál es la probabilidad de que se pierda parte de esa sección si espera hasta terminar para encender el televisor?

1.17 Una industria produce bolsas de azúcar cuyos pesos siguen una distribución normal con una desviación estándar de 1,6 gramos. Se selecciona un muestra de 100 lotes a fin de estimar la media poblacional del peso de las bolsas de azúcar. Establezca la cantidad requerida para que

(a) 0,05 sea la probabilidad de que la media muestral del peso exceda a la media poblacional.

(b) 0,1 sea la probabilidad de que la media muestral del peso esté por debajo de la media poblacional.

(c) 0,15 sea la probabilidad de que la media muestral del peso difiera de la media poblacional.

1.18 Una empresa ha recibido 120 solicitudes de trabajo por parte de estudiantes que acaban de terminar su carrera de administración de empresas. Considerando estas solicitudes como una muestra aleatoria de todos los licenciados, ¿cuál es la probabilidad de que entre un 35% y un 45% de las solicitudes correspondan a mujeres si se sabe que el 40% de los administradores de empresas recién graduados lo son?

1.19 En una ciudad, se cree que el 40% de los habitantes está de acuerdo con un referendo. En otra ciudad se cree, en cambio, que sólo el 15% de los habitantes lo está. Siendo estas cifras correctas, ¿cuál es la probabilidad de que muestras aleatorias simples de 100 habitantes de cada ciudad arrojen una diferencia de 0,40 o de más en la proporción de habitantes que están de acuerdo con el referendo?

1.20 La tabla de abajo recoge los datos de consumo de gasolina correspondientes a una muestra aleatoria de 8 automóviles norteamericanos de dos modelos diferentes. Se formaron pares con las dos muestras y cada elemento de un determinado par fue conducido por la misma ruta y por el mismo piloto.

x_i (auto A)	19,4	18,8	20,6	17,6	19,2	20,9	18,3	20,4
y_i (auto B)	19,6	17,5	18,4	17,5	18,0	20,0	18,8	19,2

(a) Determine la media y la desviación muestral de las diferencias en el consumo de gasolina.

(b) Suponiendo que la distribución de las diferencias poblacionales es normal con media -0,807, encuentre la probabilidad de que el consumo promedio muestral de gasolina del auto A sea mayor que el del auto B.

1.21 Para comparar los pesos promedios de niños y niñas de sexto grado en una escuela de instrucción media, se usará una muestra aleatoria de 20 niños y otra igual de 25 niñas. Se sabe que, en niños y niñas, los pesos siguen una distribución normal. En concreto, el promedio de los pesos de todos lo niños de sexto grado de esa escuela es de 100 libras y su desviación estándar es de 14,142, mientras que el promedio de los pesos de todas las niñas del sexto grado es de 85 libras y su desviación estándar es de 12,247. Encuentre la probabilidad de que el promedio de los pesos de los 20 niños sea al menos 20 libras más grande que el de las 25 niñas.

1.22 Se quiere someter a todos los docentes de matemáticas de cierta ciudad a un examen de 100 preguntas. Inicialmente, en un estudio piloto, se somete a este examen a una muestra aleatoria de 20 docentes. Supongamos que, para la población completa de todos los docentes de la ciudad, la distribución del número de respuestas correctas sigue una normal con varianza 250. ¿Cuál es la probabilidad de que la varianza muestral sea: (a) menor que 100, (b) mayor que 500?

1.23 A una muestra aleatoria de 15 empresarios se le pregunta sobre su predicción acerca de la tasa de desempleo para el próximo año. Supongamos que las predicciones para la población completa de empresarios sigue una distribución normal con una desviación estándar de 1,8. En tal caso,

(a) 0,01 es la probabilidad de que la desviación estándar muestral sea mayor que un número determinado. Identifíquelo.

(b) 0,025 es la probabilidad de que la desviación estándar muestral sea menor que un número determinado. Identifíquelo.

1.24 Se supone que la varianza de las calificaciones de las pruebas de estado en cierto país es la misma para hombres y mujeres. Una muestra aleatoria de 21 hombres y otra muestra aleatoria independiente de 19 mujeres dan varianzas de 876 y 400, respectivamente. Si las calificaciones para hombres y mujeres están normalmente distribuidas y tienen varianzas iguales, ¿cuál es la probabilidad de que las razón de las variables muestrales sea menor que la razón de los valores obtenidos a partir las muestras seleccionadas?

CAPÍTULO **2**

Estimación

2.1 Términos básicos

Es importante recalcar que cualquier inferencia sobre la población tendrá que basarse necesariamente en *estadísticos muestrales*, es decir, en funciones de la información muestral. La elección apropiada de estos estadísticos dependerá de cuál sea el parámetro de interés de la población. Como el verdadero parámetro suele desconocerse en sí, un objetivo será estimar su valor.

Definición 2.1.1 *(a) La* ESTIMACIÓN ESTADÍSTICA *es el proceso mediante el cual intentamos determinar el valor de un parámetro de la población, sin hacer un censo y a partir de la información de una muestra.*

(b) Una ESTIMACIÓN*, en concreto, es el valor numérico que asignamos a un parámetro.*

(c) El ESTIMADOR *es el estadístico de la muestra utilizado para hacer una estimación.*

El siguiente ejemplo aclara la distinción entre *estimador* y *estimación*.

Ejemplo 2.1.2 *Supongamos que queremos estimar el ingreso medio de las familias de un barrio con base en una muestra de 20 familias y que resulta razonable basar nuestras conclusiones en el ingreso medio muestral. Entonces, diremos que el estimador de la media muestral es la media muestral $\overline{X}_{(20)}$. Supongamos luego que, habiendo tomado la muestra, hallamos que el promedio $\overline{x}_{(20)}$ de los ingresos es de \$335.250. Entonces, la estimación de la media de la población es \$335.250.* ◀

Obsérvese que en el ejemplo anterior hemos utilizado la variable aleatoria $\overline{X}_{(n)}$ para designar al estimador y a $\overline{x}_{(n)}$ para designar un valor particular de ese estimador. Igual sucederá con la varianza $S^2_{(n)}$ y $s^2_{(n)}$.

2.2 Algunos criterios para examinar estimadores

2.2.1 Insesgo

Si el valor esperado del estadístico muestral es igual al parámetro poblacional que se estima, se dice que ese estadístico es un *estimador insesgado* del parámetro poblacional.

Definición 2.2.1 *Se dice que un estimador $\widehat{\theta}$ es* INSESGADO, *si el valor esperado del estimador es igual al parámetro θ de la población que está estimando, es decir, $E(\widehat{\theta}) = \theta$. Evidentemente, si $E(\widehat{\theta}) \neq \theta$, se dice que el estimador es* SESGADO. *Llamaremos* SESGO *a la diferencia entre la media del estimador $\widehat{\theta}$ y el parámetro θ, es decir,*

$$\textit{Sesgo } (\widehat{\theta}) = E(\widehat{\theta}) - \theta.$$

Obsérvese que el sesgo de un estimador insesgado es 0.

Algunos estadísticos que son estimadores insesgados de sus correspondientes parámetros poblacionales son la media muestral, la varianza muestral y la proporción muestral.

Ejemplo 2.2.2 *Supóngase que X es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población* *representada por X. Entonces:*[1] *(a)* $E(\overline{X}_{(n)}) = \mu$ *y (b)* $E(S^2_{(n)}) = \sigma^2$. ◀

Sin embargo, hay estadísticos que no son estimadores insesgados del parámetro poblacional correspondiente, como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.2.3 *Debido a que la media de la desviación típica muestral $S_{(n)}$ no es la desviación típica poblacional σ, es decir, debido a que $E(S_{(n)}) \neq \sigma$, entonces, la desviación típica muestral no es un estimador insesgado de la desviación típica poblacional.* ◀

2.2.2 Eficiencia

Definición 2.2.4 *Sean $\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados de θ, obtenidos en muestras del mismo tamaño. Entonces,*

(a) Se dice que $\widehat{\theta}_1$ es MÁS EFICIENTE *que $\widehat{\theta}_2$, si la varianza de la distribución muestral de $\widehat{\theta}_1$ es menor que la de la distribución muestral de $\widehat{\theta}_2$. Es decir, si $V(\widehat{\theta}_1) < V(\widehat{\theta}_2)$.*

(b) La EFICIENCIA RELATIVA *de $\widehat{\theta}_2$, con respecto a $\widehat{\theta}_1$, es el cociente $\frac{V(\widehat{\theta}_2)}{V(\widehat{\theta}_1)}$ de sus varianzas.*

Ejemplo 2.2.5 *Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. La media muestral $\overline{X}_{(n)}$ es un estimador insesgado de la media de la población con varianza:*

$$V(\overline{X}_{(n)}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Si utilizamos como un estimador alternativo la mediana de las observaciones, puede probarse que este estimador tiene distribución normal[2] *y también es insesgado para*

[1] Esto muestra que la media y la varianza son estimadores insesgados de los correspondientes parámetros poblacionales. Por esta razón, al definir la varianza muestral, dividimos la suma de los cuadrados de las discrepancias por $n-1$ en lugar de n. En el primer caso, se obtiene un estimador insesgado, mientras que en el segundo, no, pues la media de la desviación típica muestral no es la desviación típica poblacional. Por tanto, la desviación típica muestral no es un estimador insesgado de la desviación típica poblacional.

[2] Véase, por ejemplo, MAYORGA [6, pág. 25]

μ y que su varianza es:

$$V(Mediana) \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{n} \;\approx\; 1,57V(\overline{X}_{(n)}).$$

Por consiguiente, al tomar muestras de una población de una población normal, se evidencia que la media muestral es más eficiente que la mediana. De manera concreta, la eficiencia relativa de la mediana con respecto a la media es:

$$\textit{Eficiencia relativa} \;=\; \frac{V(Mediana)}{V(\overline{X}_{(n)})} \;=\; 1,57.$$

Es decir, la varianza de la mediana muestral es un 57% mayor que la de la media muestral. O, de otra manera, para obtener una mediana con la misma varianza que la media debe tomarse una muestra con un 57% más de observaciones. Sabemos de antemano que que una ventaja de la mediana sobre la media es que da mucho menos peso a observaciones extremas. Observando la eficiencia relativa, vemos una desventaja potencial de utilizar la mediana muestral como una medida de centralización. ◀

2.2.3 Varianza mínima

En algunos problemas de estimación, el estimador puntual con la menor varianza posible puede encontrarse dentro de un grupo de estimadores insesgados; pero, sólo en pocos casos, puede encontrarse el más eficiente de *todos* los estimadores insesgados de un parámetro.

Definición 2.2.6 *Si $\widehat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ y no hay ningún otro estimador insesgado que tenga menor varianza, entonces, se dice que $\widehat{\theta}$ es el* ESTIMADOR INSESGADO MÁS EFICIENTE *o* DE MÍNIMA VARIANZA *de θ.*

Ejemplo 2.2.7 *Algunos ejemplos de estimadores insesgados de mínima varianza son:*

(a) La media muestral, cuando la muestra proviene de una distribución normal.

(b) La varianza muestral, también cuando la muestra proviene de una una distribución normal.

(c) La proporción muestral binomial.

Las propiedades de los estimadores insesgados de mínima varianza los hace muy atractivos, pero, lamentablemente, no siempre es posible encontrar un estimador de este tipo. ◀

2.2.4 Consistencia

Otra propiedad asociada con los buenos estimadores puntuales es la consistencia, propiedad que se puede definir como se indica a continuación:

Definición 2.2.8 *Un estimador puntual $\widehat{\theta}$ de θ es* CONSISTENTE *para θ si sus valores tienden a acercarse al parámetro poblacional θ conforme se incrementa el tamaño de la muestra. De otro modo, el estimador se llama* INCONSISTENTE.

Es importante recalcar que no todos los estimadores insesgados son consistentes, como también que no todos los estimadores consistentes son insesgados.

Ejemplo 2.2.9 *Al muestrear de una población normal, la desviación típica muestral es consistente para la desviación típica poblacional. Lo anterior también es cierto para el caso de la media y la varianza en relación con sus correspondientes parámetros poblacionales. Igualmente, la proporción muestral es consistente para la proporción poblacional.* ◀

2.2.5 Suficiencia

Es natural pedir que la "reducción de los datos" de X a $T(X)$ sea "suficientemente informativa" para el parámetro θ. O sea, que no se pierda alguna información relevante para el problema. Por esta razón es importante la siguiente definición.

Definición 2.2.10 *Un estadístico $S(X)$ es* SUFICIENTE *para θ si y sólo si, para todo valor s de $S(X)$, la distribución condicional de X dado $S(X) = s$ no depende de θ.*

Con $g(s,\theta)$ notaremos la distribución de la estadística $S(X)$ y con $h(x/s)$ la distribución condicional de X dado $S(X) = s$, la cual no depende de θ cuando $S(X)$ sea suficiente.

Ejemplo 2.2.11 *Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ una muestra aleatoria con variables muestrales $X_i \sim \mathcal{B}(1,p)$. Entonces, $S(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico que consiste en mirar sólo a $s = S(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, en lugar de mirar todos los datos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, siendo $x_i \in \{0,1\}$. Entonces, $S(X)$ es un estadístico suficiente para p.*

Nótese que este resultado es una justificación para afirmar que, al tomar a $\sum_{i=1}^{n} X_i$ como una muestra de tamaño 1, en lugar de la muestra original $(X_1, \ldots, X_n)^t$ de tamaño n, no se pierde información. ◀

Ejemplo 2.2.12 *Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ una muestra aleatoria con variables muestrales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Supongamos que σ^2 es conocida, es decir, el parámetro es $\theta = \mu$. Entonces, $S(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es un estadístico estadístico suficiente para μ.*

Para el caso en que la varianza σ^2 sea desconocida, es decir, con $\theta = (\mu, \sigma^2)^t$ como parámetro, ¿existe un estadístico estadístico suficiente $S(X) = \big(S_1(X), S_2(X)\big)^t$ para θ? ¿Cuál sería? Véase el ejemplo 2.2.17. ◀

A veces, no es obvio cuáles estadísticos son suficientes. Aunque se puedan "adivinar", los cálculos para $h(x/s)$ pueden resultar muy dispendiosos. En muchos casos, no son necesarios como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.13 (Teorema de factorización de Fisher-Neyman) *Un estadístico $S(X)$ es suficiente para el parámetro θ si y sólo si existen funciones (medibles) G y H tales que*

$$f(x,\theta) \; = \; G\big(S(x),\theta\big)\cdot H(x)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \Theta$.

DEMOSTRACIÓN:
Ver la demostración en la literatura citada. ■

Ejemplo 2.2.14 *(a) En el ejemplo 2.2.11 se puede tomar $G\big(S(x),p\big) = f(x,p)$ y*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si cada } x_i \in \{0,1\}; \\ 0, & \text{de otro modo.} \end{cases}$$

(b) En el ejemplo 2.2.12 se puede tener en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \; = \; n\mu^2 - 2s\mu + \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad S(x) = s$$

para obtener la factorización

$$G\big(S(x),\mu\big) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(n\mu^2-2s\mu)\right),$$
$$H(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$ ◀

Para el caso en que la función de distribución depende de dos ó mas parámetros se tiene la siguiente defincición.

Definición 2.2.15 *Sea $X = (X_1,\ldots,X_n)^t$ una muestra aleatoria de una población con función de distribución $f(x,\theta)$, donde $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Los estadísticos $S_1,\ldots,S_k$ con $S_i := S_i(X)$ para cada $i = 1,\ldots,k$, se denominan* ESTADÍSTICOS CONJUNTAMENTE SUFICIENTES *para θ si y sólo si la distribución de X dado $S_1,\ldots,S_k$ no depende de θ.*

El teorema de factorización también puede ser extendido como se muestra a continuación.

Teorema 2.2.16 (Teorema de factorización de Fisher-Neyman) *Sea Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ una muestra aleatoria de una población con función de distribución $f(x, \theta)$, donde $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. El vector de estadísticos $S = (S_1, \ldots, S_k)^t$ es conjuntamente suficiente para θ si y sólo si se puede encontrar dos funciones no negativas G y H tales que*

$$f(x, \theta) = G(S(x), \theta) \cdot H(x),$$

donde $H(x)$ no depende de θ.

DEMOSTRACIÓN:
Ver la demostración en la literatura citada. ■

Ejemplo 2.2.17 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal de media μ y varianza σ^2. Sea $\theta = (\mu, \sigma^2)^t$. Entonces,*

$$\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n, \theta) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\mu\sum_{i=1}^{n} x_i + n\mu^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp\left\{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&= G\left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \theta\right) \cdot H(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

con $H(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Luego $\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ son conjuntamente suficientes para $\theta = (\mu, \sigma^2)^t$. ◄

2.3 Métodos clásicos de estimación

En general, la definición de insesgo no indica cómo se generan los estimadores insesgados. Por esta razón, en esta sección, se consideran dos métodos[3] para la obtención de estimadores puntuales de parámetros de distribuciones.

El primero, llamado *método de momentos*, es un método sencillo, que propuso originalmente K. PEARSON en 1894.

El segundo, denominado *método de máxima verosimilitud*, es más complejo. Lo usó, en principio, C. F. GAUSS hace más de 170 años para resolver ciertos problemas, fue formalizado por R. A. FISHER a comienzos del siglo XX y se ha usado ampliamente desde entonces.

2.3.1 Método de momentos

Estudiemos primero la siguiente definición:

Definición 2.3.1 *Sean X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria de tamaño n y X cualquier variable aleatoria.*

(a) El k-ÉSIMO MOMENTO (POBLACIONAL) de X se define como la esperanza $E(X^k)$ de X^k.

(b) El k-ÉSIMO MOMENTO MUESTRAL de X_1, X_2, ..., X_n, denotado por M_k, se define como sigue:

$$M_k := \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}$$

Por lo tanto, el primer momento (poblacional) de X es $E(X)$ y el primer momento muestral $M_1 = \overline{X}_{(n)}$. El segundo momento (poblacional) de X es

[3]Existen otros métodos de estimación como, por ejemplo, el método por analogía, el método de estimación bayesiana, etc. Si se quiere detalles al respecto, véase la literatura recomendada.

$E(X^2)$ y el segundo momento muestral es $M_2 = \sum X_i^2/n$. Sobre lo anterior, es importante aclarar que los momentos poblacionales serán funciones de algunos parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, \ldots$.

Definición 2.3.2 *Sea X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria de tamaño n. Supongamos que cada X_i tiene la misma distribución de probabilidad con parámetros desconocidos $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Entonces, los* ESTIMADORES DE MOMENTOS *$\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_m$ se obtienen al igualar los primeros m momentos muestrales con los correspondientes primeros m momentos poblacionales y despejar $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Este procedimiento se conoce como* MÉTODO DE MOMENTOS.

Es importante precisar que hay casos en que el estimador de momentos falla.

Ejemplo 2.3.3 *Un silvicultor planta cinco hileras de 20 plantas de pino, pretendiendo que cada una de las cuales sirva como barrera contra el viento. Las condiciones de suelo y viento a que están sometidas las plantas son similares.*

(a) Use el método de momentos para obtener un estimador de p, relativo a la proporción de plantas por hilera que sobrevive al primer invierno.

(b) Si al realizar el experimento se obtienen $x_1 = 18$, $x_2 = 15$, $x_3 = 20$, $x_4 = 17$ y $x_5 = 19$, siendo x_i el número de plantas en la i-ésima hilera que sobrevive al primer invierno, halle una estimación puntual de p.

SOLUCIÓN:

(a) La variable que se estudia es X, entendida como el número de plantas por hilera que sobrevive al primer invierno. Se trata, además, de una muestra aleatoria de tamaño $m = 5$ de una distribución binomial con parámetros $n = 20$ y p desconocida. Por consiguiente, $E(X) = np = 20p$. Ahora, se sustituye el primer momento de X, $E(X)$, con su estimador $M_1 = \frac{\sum_{i=1}^{5} X_i}{5} = \overline{X}_{(5)}$, para obtener la ecuación $\overline{X}_{(5)} = 20\widehat{p}$. Esta ecuación se resuelve para $\widehat{p}$ a fin de obtener el estimador: $\widehat{p} = \frac{\overline{X}_{(5)}}{20}$.

(b) Para estos datos $\overline{x}_{(5)} = 17,8$. De modo que la estimación de p, con el método

de momento es:

$$\widehat{p} \;=\; \frac{\overline{x}_{(5)}}{20} \;=\; \frac{17,8}{20} \;=\; 0,89 \qquad \blacktriangleleft$$

En ocasiones, se estiman dos parámetros, θ_1 y θ_2, a partir de una sola muestra, como se describe en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3.4 *Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución gamma, con parámetros α y β desconocidos. Sabemos que $E(X) = \alpha\beta$ y $V(X) = \alpha\beta^2$. Recuerde que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, por lo que los primeros dos momentos de X son funciones de α y β. Las ecuaciones que relacionan los momentos con estos parámetros desconocidos son:*

$$E(X) = \alpha\beta, \qquad E(X^2) - [E(X)]^2 = \alpha\beta^2$$

A continuación, se sustituyen $E(X)$ y $E(X^2)$ por sus estimadores, M_1 y M_2, respectivamente, para obtener:

$$M_1 = \widehat{\alpha}\,\widehat{\beta}, \qquad M_2 - M_1^2 = \widehat{\alpha}\,\widehat{\beta}^2.$$

Y, al resolver simultáneamente este conjunto de ecuaciones, se puede observar que $M_2 - M_1^2 = M_1\widehat{\beta}$. Ello implica que:

$$\widehat{\beta} = \frac{M_2 - M_1^2}{M_1}, \qquad \widehat{\alpha} = \frac{M_1}{\widehat{\beta}} = \frac{M_1^2}{M_2 - M_1^2} \qquad \blacktriangleleft$$

2.3.2 Método de máxima verosimilitud (ML-estimación)

Este método es uno de los mejores para obtener un estimador puntual de un parámetro. Tal como su nombre lo implica, el estimador será el valor del parámetro que maximiza la *función de verosimilitud.*

Definición 2.3.5 *Sea X_1, X_2, ..., X_n una muestra aleatoria con función de probabilidad (o de densidad) conjunta*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n),$$

donde x_1, x_2, ..., x_n son los valores muestrales observados y los parámetros θ_1, θ_2, ..., θ_n son desconocidos. La FUNCIÓN DE VEROSIMILITUD *de la muestra se obtiene fijando los valores muestrales y escribiendo f como una función que depende sólo de los parámetros, es decir, es la función L, definida por:*

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n).$$

Las ESTIMACIONES DE MÁXIMA VEROSIMILITUD *de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ son los valores de las θ_i que maximizan a L, de modo que*

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \leq L(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_n)$$

para toda $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Así, cuando las x_i son sustituidas por las X_i, resultan los ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSIMILITUD. *Este procedimiento se conoce como* MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD.

Sea f_i la función de probabilidad (o de densidad) marginal con parámetro θ_i de la variable muestral X_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, debido que las X_i son independientes entre sí, tenemos que:

$$L(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \;=\; f_1(x_1; \theta_1)\, f_2(x_2; \theta_2) \cdots f_n(x_n; \theta_n) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \theta_i)$$

para todo valor muestral x_i de X_i. A continuación, ilustraremos con algunos ejemplos la aplicación del método de máxima verosimilitud para estimar parámetros.

Ejemplo 2.3.6 *Para variables muestrales X_i, $i = 1, \ldots, n$, con función de probabilidad de Bernoulli con parámetro p, aplique el estimador de máxima verosimilitud para hallar $\widehat{p}$ y verifique si el estimador de máxima verosimilitud es insesgado.*

SOLUCIÓN:

Para cada $i = 1, \ldots, n$, *la función de probabilidad* f_i *de* X_i *está dada por:*

$$f_i(x_i; p) \;=\; \begin{cases} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, & x_i = 0, 1; \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Por tanto, la función de verosimilitud L *de una muestra de tamaño* n *depende únicamente de* p *y es:*

$$L(p) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; p) \;=\; \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \;=\; p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Se observa que si $\widehat{p}$ *maximiza* $L(p)$*, entonces, también maximiza* $\mathcal{L}(p) := \ln L(p)$*. Por lo tanto,*

$$\mathcal{L}(p) \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(p) \,+\, \left(n \,-\, \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p).$$

Ahora bien, como:

$$\frac{d\,\mathcal{L}(p)}{dp} \;=\; \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} \,-\, \frac{n \,-\, \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p},$$

al igualar a cero la expresión anterior y resolver para p*, se tiene que* $\widehat{p} = \overline{x}$*. En consecuencia, el estimador de máxima verosimilitud de* p *es* $\widehat{p} = \overline{X}_{(n)}$*. Se puede verificar que* $E(\widehat{p}) = p$*, lo cual demuestra que* $\widehat{p}$ *es un estimador insesgado de* p*.* ◀

Ejemplo 2.3.7 *Para variables muestrales* X_i*,* $i = 1, \ldots, n$*, con función de densidad exponencial con parámetro* λ*, aplique el estimador de máxima verosimilitud para hallar* $\widehat{\lambda}$ *y verifique si el estimador de máxima verosimilitud es insesgado.*

SOLUCIÓN:
Para cada $i = 1, \ldots, n$*, la función de densidad* f_i *de* X_i *está dada por:*

$$f_i(x_i; p) \;=\; \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x_i}, & x_i \geq 0; \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Por tanto, la función de verosimilitud L *de una muestra de tamaño* n *depende únicamente de* λ *y es:*

$$L(\lambda) \;=\; \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i; \lambda) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \lambda\, e^{-\lambda x_i} \;=\; \lambda^n\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Como se explicó en el ejemplo anterior, si $\widehat{\lambda}$ *maximiza* $L(\lambda)$*, entonces, también maximiza* $\mathcal{L}(\lambda) := \ln L(\lambda)$*. Por lo tanto,*

$$\mathcal{L}(\lambda) \;=\; n\ln(\lambda) \;-\; \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ahora,

$$\frac{d\,\mathcal{L}(\lambda)}{d\lambda} \;=\; \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

De manera que, al igualar a cero la expresión anterior y resolver para λ*, se tiene que* $\widehat{\lambda} = 1/\overline{x}$*.*

En consecuencia, el estimador de máxima verosimilitud de λ *es* $\widehat{\lambda} = 1/\overline{X}_{(n)}$*. Pero, debido a que* $E(1/\overline{X}_{(n)}) \neq 1/E(\overline{X}_{(n)})$*, podemos afirmar que* $\widehat{\lambda}$ *no es un estimador insesgado de* λ*.* ◄

Propiedades de los estimadores de máxima verosimilitud

En primer lugar, podemos decir que los estimadores de máxima verosimilitud tienen la *propiedad de invarianza*, la cual se describe en el siguiente teorema, el cual presentamos sin demostración:

Teorema 2.3.8 (Principio de invarianza) *Si* $\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2,\ \ldots,\ \widehat{\theta}_k$ *son los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros* $\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_k$*, respectivamente, entonces, el estimador de cualquier función* $h(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$ *de estos parámetros es la misma función* $h(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \ldots, \widehat{\theta}_k)$ *de los estimadores* $\widehat{\theta}_1,\ \widehat{\theta}_2,\ \ldots,\ \widehat{\theta}_k$*.*

DEMOSTRACIÓN:
Ver la demostración en la literatura citada. ■

Ejemplo 2.3.9 *Encuéntrese el estimador de máxima verosimilitud de la desviación* σ *para el caso de la distribución normal con parámetros* μ *y* σ^2*.*

SOLUCIÓN:

Se puede demostrar que que los estimadores de máxima verosimilitud de μ y σ^2 son:

$$\widehat{\mu} = \overline{X}_{(n)}, \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_{(n)})^2,$$

respectivamente. Definamos una función h como $h(\mu, \sigma^2) = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$ y, para obtener el estimador de máxima verosimilitud de σ, sustituimos los estimadores de máxima verosimilitud en la función h de la siguiente manera:

$$\widehat{\sigma} \;=\; \sqrt{\widehat{\sigma}^2} \;=\; \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_{(n)})^2}$$

Observamos que el estimador máxima verosimilitud de σ no es la desviación estándar muestral S, aunque estén muy cerca, a menos que n sea muy pequeña. ◀

En segundo lugar, podemos afirmar que, para muestras grandes, los estimadores de máxima verosimilitud tienen buenas propiedades *asintóticas*, como se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 2.3.10 *El estimador de máxima verosimilitud $\widehat{\theta}$ de cualquier parámetro θ es insesgado para n grande y tiene una varianza casi tan pequeña como la que puede obtenerse con otro estimador. Esto implica que el estimador de máxima verosimilitud $\widehat{\theta}$ es, de manera aproximada, el estimador insesgado más eficiente (o de mínima varianza) de θ para n grande.*

DEMOSTRACIÓN:
Ver la demostración en la literatura citada. ■

✍ Ejercicios

2.1 Para variables muestrales X_i, $i = 1, \ldots, n$, con función de densidad normal con parámetros μ y σ^2, aplique el estimador de máxima verosimilitud para hallar $\widehat{\mu}$ y $\widehat{\sigma^2}$. Verifique, también, si los estimadores correspondientes de máxima verosimilitud son insesgados o no.

2.2 Sea X_1, ..., X_n una muestra aleatoria de tiempos de servicios de n clientes en cierta planta, donde se supone que la distribución fundamental es exponencial con parámetro λ desconocido. Utilice, a partir de estos datos, el método de momentos para demostrar que $\widehat{\lambda} = 1/\overline{X}_{(n)}$ (compárese con el ejemplo 2.3.7).

2.3 Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución binomial negativa, con parámetros r y p desconocidos. Utilice el método de momentos para demostrar que:[4]

$$\widehat{p} = \frac{\overline{X}_{(n)}}{(\sum X_i^2/n) - \overline{X}^2_{(n)}}, \qquad \widehat{r} = \frac{\overline{X}^2_{(n)}}{(\sum X_i^2/n) - \overline{X}^2_{(n)} - \overline{X}_{(n)}}$$

2.4 Tomando en cuenta las variables muestrales X_i, $i = 1, \ldots, n$, con función de densidad f_i de Rayleigh, definida por:

$$f_i(x_i) = \frac{x_i}{\theta^2} e^{-x_i^2/2\theta^2}, \quad x_i > 0,$$

siendo $\theta > 0$ el parámetro de la distribución, aplique el método de máxima verosimilitud para demostrar que

$$\widehat{\theta}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

2.5 Mediante el uso de una varilla cuya longitud es μ, construya un cuadrado en el cual la longitud de cada lado sea μ. Entonces, el área del cuadrado será μ^2. Sin embargo, si se desconoce el valor de μ, entonces se toman n mediciones independientes $X_1, \ldots, X_n$. Supongamos que cada X_i media μ y varianza σ^2.

(a) Halle $E\left(\overline{X}^2_{(n)}\right)$ y, con esto, demuestre que $\overline{X}^2_{(n)}$ es un estimador sesgado de μ^2.

(b) Determine la magnitud del sesgo del estimador con respecto a μ^2.

(c) ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño de n?

(d) ¿Para cuál valor de k el estimador $Y := \overline{X}^2_{(n)} - kS^2_{(n)}$es insesgado para μ^2.

2.6 Sea X_1 y X_2 una muestra aleatoria de dos observaciones de una población con media μ y varianza σ^2. Considere al respecto los siguientes tres estimadores puntuales de μ:

$$\overline{X}_{(n)} = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2, \qquad \widehat{\mu}_1 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2, \qquad \widehat{\mu}_2 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2.$$

[4] Aún cuando r debe ser positiva por definición, el denominador de $\widehat{r}$ podría ser negativo, indicando que la distribución binomial negativa no es apropiada (o que el estimador de momentos falla).

(a) Demuestre que los tres estimadores son insesgados.

(b) ¿Cuál de los tres estimadores es más eficiente?

(c) Halle la eficiencia relativa de $\overline{X}_{(n)}$ con respecto a los otros dos estimadores.

2.7 Sea $\widehat{\theta}_1$ un estimador insesgado de θ_1 y $\widehat{\theta}_2$ un estimador insesgado de θ_2.

(a) Pruebe que $\widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2$ es un estimador insesgado de $\theta_1 + \theta_2$.

(b) Pruebe, también, que $\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2$ es un estimador insesgado de $\theta_1 - \theta_2$.

2.8 Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n que proviene de una distribución con media μ y varianza σ^2. Sea $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_{(n)})^2$.

(a) Demuestre que $E(\widehat{\sigma}^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)\sigma^2$ y, de aquí, que $\widehat{\sigma}^2$ es un estimador sesgado para σ^2.

(b) Determine el sesgo del estimador.

(c) ¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta n?

2.9 Para una muestra con $X_i \sim B(m_i, p)$ y valores $y_i \in \{0, 1, \ldots, m_i\}$ para $i = 1, 2 \ldots, n$ demuestre que la ML-estimación de p es

$$\widehat{p} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

2.10 Si X es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p, demuestre que:

(a) $\widehat{p} = X/n$ es un estimador insesgado de p.

(b) $p' = \frac{X+\sqrt{n/2}}{n+\sqrt{n}}$ es un estimador sesgado de p.

(c) El estimador p' del inciso (b) se vuelve insesgado cuando $n \to \infty$.

2.11 Cierta clase de maíz tiene una producción esperada por acre de μ_1, con varianza σ^2; mientras que la producción esperada para una segunda clase de maíz es μ_2 con la misma varianza σ^2. Represente con $S^2_{(n)}$ y $S^2_{(m)}$ las varianzas muestrales de producciones, basadas en tamaños muestrales n y m, respectivamente, de las dos clases de maíz. Demuestre que el siguiente estimador (combinado) es insesgado para σ^2:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)S^2_{(n)} + (m-1)S^2_{(m)}}{n+m-2}$$

2.12 Considere una muestra aleatoria X_1, ..., X_n, de una población representada por X, la cual tiene función de densidad

$$f(x;\lambda) = 0,5(1+\lambda x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq \lambda \leq 1$$

(a) Halle $E(X)$.

(b) Calcule $E(\overline{X}_{(n)})$.

(c) Demuestre que $\widehat{\lambda} = 3\overline{X}_{(n)}$ es un estimador insesgado de λ.

2.13 Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ una muestra con variables muestrales X_i (discretas) distribuidas uniformemente en el conjunto discreto $\{1, 2, \ldots, \theta\}$. Es decir,

$$X_i \;\sim\; f_i(x_i, \theta) \;=\; \begin{cases} 1/\theta, & \text{si } x_i \in \{1, 2, \ldots, \theta\}; \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ el máximo muestral de estas variables.

(a) Aplique el teorema de factorización para demostrar que $S(X) = M_n$ es un estadístico suficiente para θ.

(b) Demuestre que $\widehat{\theta} = M_n$ es la ML-estimación de θ.

2.14 Sean X y M_n como en el ejercicio 2.13.

(a) Halle la función de distribución acumulada de M_n.

(b) La función de probabilidad de M_n.

(c) La función de probabilidad condicional de X sabiendo que $M_n = t$.

(d) Demuestre directamente que $S(X) = M_n$ es un estadístico suficiente para θ.

2.15 Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ una muestra con variables muestrales X_i (continuas) distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, \theta]$.

(a) Utilice el método de máxima verosimilitud para demostrar que $\widehat{\theta}$ es el máximo de las observaciones muestrales.

(b) Encuentre un estadístico suficiente para θ.

2.16 Para el modelo de regresión lineal y normal del ejemplo 1.1.3 en donde $\theta = (\delta, \beta, \sigma^2)^t$:

(a) Encuentre un estadístico $S(Y) = \big(S_1(Y), S_2(Y), S_3(Y)\big)^t$ suficiente para θ.

(b) Demuestre que $\left(\overline{Y},\quad \sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_{(n)})(Y_i-\overline{Y}_{(n)}),\quad \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y}_{(n)})^2\right)^t$ también es suficiente para θ.

(c) Encuentre la ML-estimación de θ.

2.17 Para una variable multinomial

$$N=(N_1,\dots,N_k)^t \;\sim\; M(n,p_1,\dots,p_k)$$

muestre que $(N_1,\dots,N_{k-1})^t$ es sufciente para $(p_1,\dots,p_{k-1})^t$.

2.18 Para una muestra $X=(X_1,\dots,X_n)^t$ con variables muestrales $X_i\sim\mathcal{B}(m_i,p)$, muestre que $S(X)=\sum_{i=1}^{n}X_i$ es suficiente para p:

(a) Directamente.

(b) Usando el teorema de factorización.

2.19 Para variables muestrales $X_1,\dots,X_n$ que tienen distribución de Poisson con parámetro λ, encuentre la ML-estimación $\widehat{\lambda}$.

2.20 Suponga el modelo multinomial para proporciones de Hardy-Weinberg (véase el ejercicio 1.4).

(a) Muestre que la ML-estimación de θ es $\theta=(2n_1+n_2)/2n$, siendo n_1 el número de los individuos con genotipo $\alpha\alpha$; n_2 el número de los individuos con genotipo $\alpha\beta$; n_3 el número de los individuos con genotipo $\beta\beta$ y $n=n_1+n_2+n_3$ el tamaño de la muestra. Dé una interpretación del resultado.

(b) Para una muestra de 50 genotipos se observan 5, 30 y 15 de los tipos $\alpha\alpha$, $\alpha\beta$ y $\beta\beta$, respectivamente. Calcule $\widehat{\theta}$ y $p_i(\widehat{\theta})$ para cada $i=1,2,3$.

2.21 (a) Para cada $j=1,2\dots,J$ se supone el modelo

$$Y_{jk}=\mu_j+\epsilon_{jk},\quad \epsilon_{jk}\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2),\quad k=1,\dots,K,\quad \text{independientes}$$

Demuestre que las ML-estimaciones para la j-ésima muestra $(Y_{j1},\dots,Y_{jK})^t$ son

$$\widehat{\mu}_j=\frac{\sum_{k=1}^{K}y_{jk}}{K}=:\overline{y}_{j\bullet},\qquad \widehat{\sigma}^2=\sum_{k=1}^{K}(y_{jk}-\overline{y}_{j\bullet})^2/K$$

(b) En el modelo (a) se supone adicionalmente que $\sigma_j^2 = \sigma^2$ para cada j y que la independencia no sólo vale entre $k = 1, \ldots, K$ sino también entre $j = 1, \ldots, J$. Entonces se tiene una muestra $(Y_{11}, \ldots, Y_{Jk})^t$ de tamaño $n = JK$. Demuestre que las ML-estimaciones para toda la muestra son

$$\widehat{\mu}_j = \overline{y}_{j\bullet}, \qquad \widehat{\sigma}^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(y_{jk} - \overline{y}_{j\bullet})^2/n$$

2.22 Para variables muestrales $(Y_{1k}, Y_{2k})^t$ con $k = 1, 2, \ldots, K$ bi-normales de la forma $(Y_{1k}, Y_{2k})^t \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, siendo $\mu = (\mu_1, \mu_2)^t$ y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

y donde los K vectores son independientes entre sí, demuestre que las ML-estimaciones de los parámetros μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 y ρ son, respectivamente:

(a) Para μ_1 y σ_1^2 en Y_{1k}:

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{Y}_{1\bullet}, \qquad \widehat{\sigma}_1^2 = \sum_{k=1}^{K}(Y_{1k} - \overline{Y}_{1\bullet})^2/K$$

(b) Para μ_2 y σ_2^2 en Y_{2k}:

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{Y}_{2\bullet}, \qquad \widehat{\sigma}_2^2 = \sum_{k=1}^{K}(Y_{2k} - \overline{Y}_{2\bullet})^2/K$$

(c) Para ρ:

$$\widehat{\rho} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{K}(Y_{1k} - \overline{Y}_{1\bullet})(Y_{2k} - \overline{Y}_{2\bullet})}{\sqrt{\left[\sum\limits_{i=1}^{K}(Y_{1k} - \overline{Y}_{1\bullet})^2\right]\left[\sum\limits_{i=1}^{K}(Y_{2k} - \overline{Y}_{2\bullet})^2\right]}}$$

CAPÍTULO 3

Intervalos de confianza

3.1 Introducción

3.1.1 Intervalo de confianza

Hasta ahora se ha presentado un concepto fundamental del análisis estadístico: el problema de la estimación (puntual) de un parámetro de interés θ usando un estadístico adecuado $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X)$ cuyo valor $\widehat{\theta}(x)$, con base en un dato x, se toma como valor estimado del valor desconocido θ. Pero, existe un problema obvio relacionado con el uso de las estimaciones puntuales: aunque sólo está implícito un parámetro, el número disponible de estimaciones es generalmente muy grande, pues una de las muestras posibles que se pueden sacar de la población de interés arroja una estimación. Para el estudio de las distribuciones muestrales realizadas anteriormente, sabemos que algunas estimaciones estarán más cerca del parámetro que se está calculando que otras. Sin embargo, no sabemos qué tan cerca está nuestra única estimación puntual del parámetro verdadero. Incluso, en una situación determinada, podemos considerar sumamente improbable que la estimación puntual sea exactamente igual al parámetro, pero no estamos en condiciones de decir en cuánto nos hemos equivocado.

Por esta razón, ahora, se presenta un segundo concepto fundamental para el trabajo práctico de un estadístico, el cual usa y complementa los análisis basados en el concepto anterior. Un *intervalo de confianza* puede interpretarse como una "estimación por un intervalo" alrededor de la estimación puntual y dará una mejor idea sobre la precisión de tal estimación.

Definición 3.1.1 *(a) Según el problema se tiene un parámetro $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ e interesa "estimar" el valor real $\eta = q(\theta)$, siendo $q : \Theta \to \mathbb{R}$ una función unidimensional.*

(b) Se forma una muestra $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ de tamaño n, cuya distribución f_θ debe ser conocida para cada θ, observando un dato concreto $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$.

(c) Se buscan dos estadísticos unidimensionales $U(X)$ y $W(X)$ con $U(X) \leq W(X)$, para cada posible dato x, tal que

$$P\big(U(X) < \eta < W(X)\big) \;\geq\; 1 - \alpha \tag{3.1}$$

para cierto α fijo y lo más pequeño posible.

(d) Al intervalo aleatorio $I(Y) = \big(U(X), W(X)\big)$ se le llama INTERVALO DE CONFIANZA *para η con un* GRADO DE CONFIANZA*, del $(1-\alpha)$100%. También a su valor se llama intervalo de confianza.*

Se usarán las notaciones U, W e I para abreviar tanto las expresiones aleatorias $U(X)$, $W(X)$ e $I(X)$ como sus valores reales $U(x)$, $W(x)$ e $I(x)$ correspondientes al dato x. En la práctica, se usan los grados de confianza $1 - \alpha = 90\%, 95\%$ ó 99%.

3.1.2 Intervalo de confianza como estimación

En muchas aplicaciones se usa una estimación (puntual) $\widehat{\eta} = q(\widehat{\theta})$, para tomar $U = \eta - D$ y $W = \eta + D$ con un estadístico $D = D(Y)$ escogido de tal manera que se cumpla 3.1. O sea, buscar un intervalo de confianza de la forma

$I = (\widehat{\eta} - D, \widehat{\eta} + D)$, o más brevemente,[1] $I = \widehat{\eta} \pm D$, que contiene con una probabilidad de por lo menos $1 - \alpha$, el valor verdadero η "alrededor" de la estimación puntual $\widehat{\eta} = \widehat{\eta}(x)$ con una "desviación" a lo más de D, para un dato observado x. Entre más pequeña sea $D(x)$, o la longitud del intervalo $2D(x)$, más precisa será la estimación. Pero, D puede depender o no de x como se explicará más adelante.

3.2 Intervalos de confianza para la media poblacional

El caso de muestras grandes

Imaginemos que se extrae una muestra aleatoria de una distribución con media desconocida. Nuestro objetivo es hallar un intervalo de confianza para la media poblacional suponiendo que se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- La población es normal con varianza conocida.
- La población es normal con varianza desconocida y el tamaño de la muestra es grande.
- La forma de la población es desconocida (o no normal), su varianza es conocida o desconocida y el tamaño de la muestra es grande.

El siguiente ejemplo muestra una situación en donde se cumple la primera condición, es decir, que la población es normal con varianza conocida.

Ejemplo 3.2.1 *(a) Se tiene una variable de interés con media μ desconocida y varianza σ^2* conocida. *Entonces, se toma como parámetro $\theta = \mu \in \mathbb{R}$.*

(b) Se supone que las variables muestrales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ forman una muestra X de tamaño n para la variable de inteés.

(c) Se sabe que $\widehat{\mu} = \widehat{\mu}(X) = \overline{X}_{(n)}$ es una estimación puntual razonable para μ. Por lo tanto, se buscará un intervalo de confianza $I = (\overline{X}_{(n)} - D, \overline{X}_{(n)} + D)$, donde se debe determinar el estadístico D tal que

[1] También escribiremos, a veces, $\widehat{\eta} - D < \eta < \widehat{\eta} + D$.

$$P(\mu \in I) \;=\; P(\overline{X}_{(n)} - D < \mu < \overline{X}_{(n)} + D) = 1-\alpha, \quad \textit{para } \alpha \textit{ dado}$$

El procedimiento es el siguiente: Se reescriben las desigualdades de manera equivalente, así:

$$-\frac{D}{\sigma/\sqrt{n}} \;<\; \frac{\overline{X}_{(n)} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;<\; \frac{D}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Lo importante es que la distribución de la variable aleatoria

$$Z \;=\; \frac{\overline{X}_{(n)} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \;\sim\; \mathcal{N}(0,1)$$

no depende del parámetro y se encuentra tabulada. Por consiguiente, abreviando $z := \frac{D}{\sigma/\sqrt{n}}$ *y usando la simetría de la función de distribución normal estándar* Φ*, resulta que*

$$1-\alpha \;=\; P(\overline{X}_{(n)} - D < \mu < \overline{X}_{(n)} + D) \;=\; \Phi(z) - \Phi(-z) \;=\; 2\,\Phi(z) - 1$$

de donde

$$\Phi(z) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Fijando α*, de la tabla para* $\mathcal{N}(0,1)$ *se obtiene el valor* z *(que, de ahora, en adelante, escribiremos* $Z_{\alpha/2}$*) y, así, el valor del estadístico será*

$$D = Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

En resumen, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ *para* μ *con* σ^2 *conocida es*

$$\overline{X}_{(n)} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;<\; \mu \;<\; \overline{X}_{(n)} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

siendo $Z_{\alpha/2}$ *el valor de* $Z = \frac{\overline{X}_{(n)}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ *a la derecha del cual se tiene un área de* $\alpha/2$ *en la distribución normal. Observe que* D *no depende realmente del valor de la muestra y que, aumentando el tamaño* n *de la muestra, se puede obtener un intervalo de confianza de* $(1-\alpha)100\%$ *de una longitud tan pequeña como se quiera.* ◄

El resultado encontrado en el ejemplo 3.2.1 y otros, con las demás situaciones explicadas al inicio de esta sección, se presentan en el teorema 2.2.1 de LLinás [4, pág. 104]. Estos resultados también se encuentran resumidos en el diagrama A.5.

Ejemplo 3.2.2 *Un fabricante produce bolsas de arroz. El peso del contenido de estas bolsas tiene una distribución normal con desviación típica 15 gramos. A su vez, los contenidos de una muestra aleatoria de 25 bolsas tienen un peso medio de 100 gramos. Calcúlese un intervalo de confianza del 95% para el verdadero peso medio de todas las bolsas de arroz producidas por el fabricante.*

SOLUCIÓN:
Como buscamos un intervalo de confianza del 95%, tenemos que $1 - \alpha = 95\%$, *por lo que* $\alpha = 5\% = 0,05$. *Al verificar los supuestos del diagrama* A.5, *el intervalo de confianza del 95% para la media poblacional* μ *es*

$$\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

De la tabla normal estándar, encontramos que $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$ *porque* $P(Z > 1,96) = 0,025$. *Con esto y debido a que* $\overline{x} = 100$, $\sigma = 15$ *y* $n = 25$, *el intervalo buscado es*

$$100 - \frac{(1,96)(15)}{\sqrt{25}} < \mu < 100 + \frac{(1,96)(15)}{\sqrt{25}}$$

o bien

$$94,12 < \mu < 105,88.$$

Por lo tanto, podemos concluir que, con una confianza del 95%, el verdadero peso medio de todas las bolsas de arroz producidas por el fabricante está entre 94,14 y 105,88 gramos. ◀

El caso de muestras pequeñas

Ejemplo 3.2.3 *Es más realista suponer en el ejemplo* 3.2.1 *que* σ^2 *no se conoce. Entonces se obtienen las siguientes modificaciones:*

(a) El parámetro es $\theta = (\mu, \sigma^2)$, *con* $\eta = q(\theta) = \mu$ *que es lo que se quiere estimar.*

(d) La variable Z *del ejemplo* 3.2.1 *será reemplazada por la variable aleatoria*

$$t = \frac{\overline{X}_{(n)} - \mu}{S_{(n)}/\sqrt{n}} \sim \mathcal{T}(n-1)$$

Es decir, σ^2 *se reemplaza por su estimación insesgada*

$$S_{(n)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_{(n)}\right)^2}{n-1}$$

Como la distribución t de Student también es simétrica, primero se determina un valor t (que, de ahora, en adelante, escribiremos $t_{\alpha/2}$) en de una tabla para $\mathcal{T}(n-1)$ tal que $P(T \geq t)) = \frac{\alpha}{2}$. Por tanto, el valor de la estadística será

$$D = t_{\alpha/2}\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}$$

que ahora sí depende de la muestra. En resumen, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para μ con σ^2 desconocida es

$$\overline{X}_{(n)} - t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}} \ < \ \mu \ < \ \overline{X}_{(n)} + t_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S_{(n)}}{\sqrt{n}}$$

siendo $t_{\alpha/2}$ el valor de $t = \frac{\overline{X}_{(n)}-\mu}{S_{(n)}/\sqrt{n}}$ a la derecha del cual se tiene un área de $\alpha/2$ en la distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. ◀

El resultado encontrado en el ejemplo 3.2.3 se presenta. en el teorema 2.2.5 de LLinás [4, pág. 106]. Estos resultados también se encuentran resumidos en el diagrama A.5.

Ejemplo 3.2.4 *Los contenidos de 7 recipientes similares de ácido sulfúrico son 9,8; 10,2; 10,4; 9,8; 10,0; 10,2 y 9,6 litros. Encuéntrese un intervalo de confianza del 95% para la media de todos los recipientes, suponiendo que la población de valores tiene distribución normal.*

SOLUCIÓN:
Tenemos que $n = 7$. Además, la media y desviación de los datos dados son $\overline{x} = 10,0$ y $s = 0,283$ litros, respectivamente. Debido, entonces, a que $t_{\alpha/2} = t_{0,025} = 2,447$, el intervalo buscado será

$$10,0 \ - \ \frac{(2,447)(0,283)}{\sqrt{7}} \ < \ \mu \ < \ 10,0 \ + \ \frac{(2,447)(0,283)}{\sqrt{7}}$$

O bien,

$$9,74 < \mu < 10,26$$

Es decir, con una confianza del 95%, podemos afirmar que la media de todos los recipientes se encuentra entre 9,74 y 10,26 litros. ◀

3.3 Intevalo de confianza para la proporción poblacional

Ejemplo 3.3.1 *(a) El parámetro es $\theta = p$.*

(b) Se supone que las variables muestrales $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$ forman una muestra X de tamaño n para la variable de interés.

Se sabe por el teorema central de límite de Moivre-Laplace (véase el corolario 3.3.2 de LLINÁS *[5]) que*

$$\widehat{p} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

Y por la ley débil de los grandes números (véase el teorema 3.2.8 de LLINÁS *[5]) que*

$$\widehat{p} \xrightarrow{P} p$$

Además,

$$\widehat{p}(1-\widehat{p}) \xrightarrow{P} p(1-p)$$

Por consiguiente, un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para p está dado por

$$\widehat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/n} \; < \; p \; < \; \widehat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/n}$$

Como este intervalo exige que tamaño de la muestra sea grande, para la práctica, es suficiente verificar que $n \geq 30$ o que $n\widehat{p} > 5$ y $n(1-\widehat{p}) > 5$. ◀

El resultado encontrado en el ejemplo 3.2.4 se presenta en el teorema 2.3.1 de LLINÁS [4, pág. 110]. Estos resultados también se encuentran resumidos en el diagrama A.6.

Ejemplo 3.3.2 *Hay empresas especializadas en ayudar a otras a ubicar y asegurar talento para la alta gerencia. Tales firmas son responsables de la ubicación de muchos de los mejores directores ejecutivos de la nación. Una reconocida revista reportó que: "uno de cada cuatro directores ejecutivos es una persona con más de 35 años de edad". Si en una muestra aleatoria de 350 compañías de cierto país, 77 tienen directores ejecutivos con más de 35 años de edad, ¿un intervalo de confianza del 99% apoyaría la afirmación?*

SOLUCIÓN:

Tenemos que $n = 350$ *y que* $\overline{p} = \frac{77}{350} = 0,22$. *Debido a que* $n \geq 30$ *y a que* $Z_{\alpha/2} = Z_{0,005} = 2,58$, *entonces, un intervalo de confianza para la proporción poblacional* p *es:*

$$0,22 - (2,58)\sqrt{\frac{(0,22)(0,78)}{350}} \; < \; p \; < \; 0,22 + (2,58)\sqrt{\frac{(0,22)(0,78)}{350}}$$

O bien,

$$0,163 < p < 0,277$$

Por consiguiente, con una confianza del 99%, se puede afirmar que aproximadamente entre el 16,3% y el 27,7% de las empresas del país tienen directores ejecutivos con más de 35 años de edad. Y, en conclusión, la afirmación está apoyada por tales descubrimientos, ya que el 25% está contenido dentro del intervalo. ◄

3.4 Intervalos de confianza para la diferencia de dos medias poblacionales (muestras independientes)

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una población normal con valor esperado μ_1 y varianza σ_1^2 y $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ una muestra aleatoria de tamaño m de una población normal con valor esperado μ_2 y varianza σ_2^2. Las dos poblaciones son estadísticamente independientes. Los casos que se presentan a continuación corresponden a los supuestos que se hacen sobre las varianzas poblacionales (y los tamaños muestrales):

- Varianzas poblacionales conocidas o desconocidas y muestras grandes.
- Varianzas poblacionales iguales, desconocidas y muestras pequeñas.
- Varianzas poblacionales diferentes, desconocidas y muestras pequeñas.

3.4.1 Primer caso: varianzas poblacionales conocidas o desconocidas y muestras grandes

Ejemplo 3.4.1 *Un intervalo de confianza de* $(1-\alpha)100\%$ *para la diferencia de promedios de dos poblaciones independientes, cuando* σ_1^2 *y* σ_2^2 *son conocidas se* *desarrolla de la siguiente manera: Por el teorema* 1.3.1,

$$\overline{X}_{(n)} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right), \quad y \quad \overline{Y}_{(m)} \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta el teorema 2.5.6d de LLinás *[5], se tiene que*

$$\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)} \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

Por consiguiente,

$$Z \;=\; \frac{(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \;\sim\; \mathcal{N}(0,1)$$

A partir de esta variable, puede construirse un intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ *para* $\mu_1 - \mu_2$*, así:*

$$(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \;<\; \mu_1 - \mu_2 \;<\; (\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}$$

donde $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ *es el valor de* Z *que deja un área de* $\frac{\alpha}{2}$ *a la derecha de la distribución normal.*

Es importante recalcar que para el caso en que las muestras aleatorias provengan de poblaciones no normales o desconocidas, se puede aplicar el teorema central del límite de Lindeberger-Lévy (véase el teorema 3.3.1 de LLinás *[5]) y, de esta forma, encontrar un intervalo aproximado semejante al anterior. Para el caso en que las varianzas poblacionales son desconocidas, utilizamos las desviaciones muestrales respectivas como estimación de las correspondientes desviaciones poblacionales.* ◀

El resultado encontrado en el ejemplo 3.4.1 se presenta en el teorema 2.5.2 de LLinás [4, pág. 119]. Estos resultados también se encuentran resumidos en el diagrama A.7.

Ejemplo 3.4.2 *Para una muestra aleatoria de* 321 *fumadores, el número medio de horas de absentismo laboral al mes fue de 3,01 y la desviación típica fue de 1,09 horas al mes. Para una muestra aleatoria independiente de 94 trabajadores que nunca han fumado, el número medio de horas fue de 2,88 y la desviación típica muestral fue de 1,01 horas al mes. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las dos medias poblacionales.*

SOLUCIÓN:
Dado que los tamaños muestrales son grandes, podemos utilizar las varianzas muestrales en lugar de las varianzas poblacionales desconocidas de la siguiente manera:

$$(\overline{x}_{(n)} - \overline{x}_{(m)}) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s^2_{(n)}}{n} + \frac{s^2_{(m)}}{m}} \;<\; \mu_1 - \mu_2 \;<\; (\overline{x}_{(n)} - \overline{x}_{(m)}) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s^2_{(n)}}{n} + \frac{s^2_{(m)}}{m}},$$

siendo

$$\begin{array}{lll} n = 321, & \overline{x}_{(n)}=3{,}01, & s_{(n)} = 1,09; \\ m = 94, & \overline{x}_{(m)}=2{,}88, & s_{(m)} = 1,01. \end{array}$$

Y, dado que, para un intervalo de confianza del 95%, se tiene que $Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}025} = 1,96$. *Entonces, el intervalo es:*

$$(3,01-2,88)-(1,96)\sqrt{\tfrac{(1{,}09)^2}{321} + \tfrac{(1{,}01)^2}{94}} \;<\; \mu_1-\mu_2 \;<\; (3,01-2,88)+(1,96)\sqrt{\tfrac{(1{,}09)^2}{321} + \tfrac{(1{,}01)^2}{94}}$$

o bien,

$$-0,11 < \mu_1 - \mu_2 < 0,37.$$

Por consiguiente, como el cero está dentro del intervalo de confianza, no hay suficiente evidencia en los datos para rechazar la idea de que ambas poblaciones tienen la misma media. ◄

3.4.2 Segundo caso: varianzas poblacionales iguales, desconocidas y muestras pequeñas

Ejemplo 3.4.3 *Un intervalo de confianza de* $(1-\alpha)100\%$ *para la diferencia de promedios poblaciones correspondientes a dos poblaciones independientes, bajo el supuesto de que las varianzas poblacionales son desconocidos pero iguales, se desarrolla teniendo en cuenta lo siguiente: Sea* $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. *Entonces, en el ejemplo* 3.4.1, *hemos demostrado que*

$$Z \;=\; \frac{(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{m}}} \;\sim\; \mathcal{N}(0,1)$$

Por otro lado, por el teorema 2.5.9 de LLinás *[5], sabemos que*

$$\frac{(n-1)S^2_{(n)}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \quad y \quad \frac{(m-1)S^2_{(m)}}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

Como las poblaciones son estadísticamente independientes, entonces, por los teoremas 1.10.4(a) y 2.5.6(b) de LLINÁS *[5], se cumple que*

$$\frac{(n-1)S^2_{(n)} + (m-1)S^2_{(m)}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

Con estos resultados y el teorema 2.5.10(a) de LLINÁS *[5] (compárese el resultado con la parte (c) de ese mismo teorema), la variable*

$$t = \frac{(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2_{(n,m)}}{n} + \frac{S^2_{(n,m)}}{m}}} \sim \mathcal{T}(n+m-2)$$

donde

$$S^2_{(n,m)} = \frac{(n-1)S^2_{(n)} + (m-1)S^2_{(m)}}{(n+m-2)}$$

es el estimador de la varianza común σ^2, llamado varianza muestral combinada. Por consiguiente, el intervalo de confianza del $(1-\alpha)100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$ basado en esta variable es

$$(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) \; - \; t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)\,\sigma_{(n,m)} \; < \; \mu_1 - \mu_2 \; < \; (\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) \; + \; t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)\,\sigma_{(n,m)}$$

donde $\sigma^2_{(n,m)} := \frac{S^2_{(n,m)}}{n} + \frac{S^2_{(n,m)}}{m}$ y $t_{\frac{\alpha}{2}}$ es el valor de $t(\nu)$ con $\nu = n+m-2$ grados de libertad, que deja un área de $\frac{\alpha}{2}$ a la derecha de la distribución t de Student con $\nu = n+m-2$ grados de libertad.

El resultado encontrado en el ejemplo 3.4.3 se presenta en el teorema 2.5.5 de LLINÁS [4, pág. 121]. Estos resultados también se encuentran resumidos en el diagrama A.7.

Ejemplo 3.4.4 *En un estudio sobre los efectos de la planificación en el rendimiento financiero de los bancos, se extrajo una muestra aleatoria de seis instituciones financieras que contaban con un sistema de planificación formal, comprobándose que el porcentaje medio anual de crecimiento de los ingresos netos en dicha muestra era de 9,972 con una desviación típica de 7,470. La media de dicho crecimiento, en otra muestra aleatoria independiente de nueve bancos que no recurrían a la planificación fue de 2,098 con una desviación típica de 10,834. Suponiendo que las dos poblaciones son normales y tienen la misma varianza, calcule un intervalo de confianza del 90% para la diferencia de medias.*

SOLUCIÓN:
Los datos muestrales son

$$\begin{array}{lll} n = 6, & \overline{x}_{(n)} = 9,972, & s_{(n)} = 7,470; \\ m = 9, & \overline{x}_{((m)} = 2,098, & s_{(m)} = 10,834. \end{array}$$

Claramente, podemos verificar que se cumplen los supuestos señalados en este segundo caso. Además, debido a que el valor de la varianza muestral combinada es:

$$s^2_{(n,m)} = \frac{(6-1)(7,470)^2 + (9-1)(10,834)^2}{6+9-2} \approx 93,7$$

y a que $t_{\alpha/2} = t_{0,05} = 1,771$ *es el valor de una variable aleatoria que tiene distribución* t *de Student con* $\nu = n + m - 2 = 13$ *grados de libertad, entonces, el intervalo de confianza del 90% para la diferencia de los incrementos medios porcentuales es:*

$$-1,161 < \mu_1 - \mu_2 < 16,909.$$

Como el intervalo incluye el cero, no existe evidencia suficiente en la muestra para rechazar la idea de la igualdad de medias entre ambas poblaciones. ◀

3.4.3 Tercer caso: varianzas poblacionales diferentes, desconocidas y muestras pequeñas

Ejemplo 3.4.5 *Queda como ejercicio para el lector demostrar que cuando las poblaciones son normales con varianzas distintas y desconocidas, se cumple que*

$$t = \frac{(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n} + \frac{S^2_{(m)}}{m}}} \sim t(\nu)$$

siendo

$$\nu \approx \frac{\left(\frac{S^2_{(n)}}{n} + \frac{S^2_{(m)}}{m}\right)^2}{\frac{\left(S^2_{(n)}/n\right)^2}{n-1} + \frac{\left(S^2_{(m)}/m\right)^2}{m-1}}$$

el cual se debe redondear al entero más cercano. Por tanto, un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ *para la diferencia de las medias* $\mu_1 - \mu_2$ *de dos poblaciones independientes, viene dada por*

$$(\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) - t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n} + \frac{S^2_{(m)}}{m}} < \mu_1 - \mu_2 < (\overline{X}_{(n)} - \overline{Y}_{(m)}) + t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)\sqrt{\frac{S^2_{(n)}}{n} + \frac{S^2_{(m)}}{m}}$$

siendo $t_{\frac{\alpha}{2}}(\nu)$ *es el valor de* $t(\nu)$ *con* ν *grados de libertad, que deja un área de* $\frac{\alpha}{2}$ *a la derecha de la distribución* t *de Student con* ν *grados de libertad.* ◀

El resultado encontrado en el ejemplo 3.4.5 se presenta en el teorema 2.5.8 de LLinás [4, pág. 123]. Estos resultados también se encuentran resumidos en el diagrama A.7.

Ejemplo 3.4.6 *El departamento de zoología de cierto instituto llevó a cabo un estudio para estimar la diferencia en la cantidad de cierta sustancia química medida en dos estaciones diferentes de un río. La sustancia se mide en miligramos por litro, reuniéndose 15 muestras de la estación 1 y 12 muestras de la estación 2. Las 15 muestras de la estación 1 tuvieron un contenido promedio de sustancia química de 3,84 miligramos por litro y una desviación estándar de 3,07 miligramos por litro, mientras que las 12 de la estación 2 tuvieron un contenido promedio de 1,49 miligramos por litro y una desviación estándar de 0,80. Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en el contenido promedio real de sustancia en estas dos estaciones. Suponga que las observaciones vienen de poblaciones normalmente distribuidas con varianzas diferentes.*

SOLUCIÓN:
Tenemos que

$$n = 15, \quad \overline{x}_{(n)} = 3,84, \quad s_{(n)} = 3,07, \quad m = 12, \quad \overline{x}_{(m)} = 1,49, \quad s_{(m)} = 0,80$$

Como las varianzas poblacionales se suponen diferentes, sólo podemos encontrar un intervalo de confianza de 95% aproximado basado en la distribución t *de Student con*

$$\nu \;=\; \frac{\left[\frac{(3{,}07)^2}{15} - \frac{(0{,}80)^2}{12}\right]^2}{\frac{((3{,}07)^2/15)^2}{15-1} + \frac{((0{,}80)^2/12)^2}{12-1}} \;=\; 16,3 \;\approx\; 16$$

grados de libertad. Y, debido a que $t_{\alpha/2} = t_{0{,}025} = 2,120$ *para* $\nu = 16$ *grados de libertad, entonces, el intervalo buscado es*

$$0,60 < \mu_1 - \mu_2 < 4,10$$

Por todo ello, tenemos una confianza del 95% en que el intervalo de 0,60 a 4,10 miligramos por litro contiene la diferencia de los contenidos promedio reales de sustancia para estos dos lugares y, como el 0 no está incluido en el intervalo, podemos afirmar que estos dos contenidos promedios son diferentes. ◀

3.5 Intervalos de confianza para la diferencia de dos medias poblacionales (muestras dependientes o pareadas)

Considerando las notaciones introducidas y los resultados obtenidos en la sección 1.6 para el caso de muestras dependientes o pareadas, los intervalos del $(1-\alpha)100\%$ de confianza son análogos a los descritos en la sección 3.2.

Ejemplo 3.5.1 *Se compararon por pares los niños matriculados en un jardín infantil de cierta escuela, siguiendo un cotejo ciudadoso de criterios tales como la inteligencia, la edad cronológica, el estado socio-económico de los padres y el estado de salud. Un miembro de cada par (seleccionado al azar) se asignó a una clase del jardín cuya profesora contaba con tres auxiliares. Al final del año, se le administró a cada niño una prueba de habilidad de lectura y se obtuvieron los resultados que aparecen en la siguiente tabla:*

Par	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Con auxiliar (x_i)	25	36	27	39	38	36	24	29	26	28	31	33	30
Sin auxiliar (y_i)	32	29	21	32	27	33	25	22	33	33	22	24	28
Par	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Con auxiliar (x_i)	36	34	32	31	26	30	29	39	33	25	30	35	
Sin auxiliar (y_i)	24	30	27	31	23	31	20	33	30	22	28	33	

Suponiendo que la población de diferencias promedio entre los puntajes de habilidad en lectura está normalmente distribuida, construya un intervalo de confianza del 95% para esta diferencia promedio de puntajes.

SOLUCIÓN:
Sea $d_i = x_i - y_i$ las diferencias muestrales entre los puntajes de habilidad en lectura de ambos grupos (con y sin auxiliar). Además, sean $\overline{d}$ y s_d^2 la media y varianza de las diferencias d_i (compárese con las notaciones de la sección 1.6). Tomando los datos de la muestra, hallamos las diferencias d_i como se muestra en la siguiente tabla:

Con lo anterior, $\overline{d} = 3,56$, $s_d^2 = 26,0067$ y $s_d = 5,10$. Por consiguiente, teniendo en cuenta los supuestos correspondientes, el intervalo pedido se halla de acuerdo con:

$$\overline{d} - t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} < \mu_{\overline{D}} < \overline{d} + t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}},$$

Par	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
d_i	-7	7	6	7	11	3	-1	7	-7	-5	9	9	2
Par	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
d_i	12	4	5	0	3	-1	9	6	3	3	2	2	

siendo $t_{\alpha/2} = t_{0,025} = 2,0639$ *el valor de una variable aleatoria que tiene distribución* t *de Student con* $n-1 = 24$ *grados de libertad y* $\mu_{\overline{D}} = \mu_{\text{con auxiliar}} - \mu_{\text{sin auxiliar}}$.

Reemplazando, luego, los datos calculados, encontramos que $1,45 < \mu_{\overline{D}} < 5,67$. *Por lo tanto, podemos afirmar con una confianza del 95% que hay una diferencia significativa entre los los puntajes de habilidad en lectura de ambos grupos.* ◀

3.6 Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones poblacionales

Se deja como ejercicio al lector la construcción de tal intervalo. El resultado se presenta en el teorema 2.5.8 de LLinás [4, pág. 123]. Este resultado también se encuentra resumidos en el diagrama A.6.

Ejemplo 3.6.1 *Se extrajeron dos muestras aleatorias independientes de estudiantes universitarios de estadística con base en el sexo. De 120 hombres, 107 esperaban disfrutar un trabajo de tiempo completo en un máximo de 6 años. En tanto que, de 141 mujeres encuestadas, 73 tenían esta esperanza. Hállese un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre las proporciones poblacionales.*

SOLUCIÓN:
Los datos muestrales son

$$n_1 = 120, \quad \overline{p}_1 = \frac{107}{120} = 0,892, \quad n_2 = 141, \quad \overline{p}_2 = \frac{73}{141} = 0,518.$$

Debido a que $n_1 > 30$ *y* $n_2 > 30$ *y a que* $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025} = 1,96$, *entonces, un intervalo de confianza para la la diferencia entre las proporciones poblacionales* $\overline{p}_1 - \overline{p}_2$ *es*

$$(0,892 - 0,518) \; - \; (1,96)\sqrt{\frac{(0,892)(0,108)}{120} + \frac{(0,518)(0,482)}{141}} \; < \; p_1 - p_2$$
$$< \; (0,892 - 0,518) \; + \; (1,96)\sqrt{\frac{(0,892)(0,108)}{120} + \frac{(0,518)(0,482)}{141}}$$

o bien,

$$0,275 < p_1 - p_2 < 0,473.$$

Como el cero no se encuentra en este intervalo, podemos afirmar, con una confianza del 95%, que la proporción de hombres que esperan trabajar a tiempo completo en un máximo de 6 años es mayor que la de las mujeres. ◀

3.7 Intervalos de confianza para la varianza poblacional

Ejemplo 3.7.1 *Considere la siguiente situación:*

(a) *Se tiene una variable de interés con media μ (conocida o desconocida) y varianza σ^2* desconocida. *Entonces, $\theta = (\mu, \sigma^2)$, con $\eta = q(\theta) = \sigma^2$ que es lo que se quiere estimar.*

(b) *Se supone que las variables muestrales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ forman una muestra X de tamaño n para la variable de inteés.*

Un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para σ^2 se basa en la variable aleatoria (compárese con el teorema 2.5.9(c) de LLinás *[5]):*

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2_{(n)}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

Por lo tanto el cálculo del intervalo de confianza es como sigue: Se tiene que

$$1-\alpha \;=\; P(U < \sigma^2 < W) \;=\; P\left(\frac{(n-1)S^2_{(n)}}{W} < X^2 < \frac{(n-1)S^2_{(n)}}{U}\right)$$

Se acostumbra a elegir $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{(n-1)S^2_{(n)}}{W}$ y $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{(n-1)S^2_{(n)}}{U}$. Así, el intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ para σ^2 es

$$\frac{(n-1)S^2_{(n)}}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}} \;<\; \sigma^2 \;<\; \frac{(n-1)S^2_{(n)}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Se puede ver más detalles al respecto en Mayorga [6, pág. 131]. ◀

El resultado encontrado en el ejemplo 3.7.1 se presenta en el teorema 2.3.1 de LLinás [4, pág. 127]. Estos resultados también se encuentran resumidos en el diagrama A.8.

Ejemplo 3.7.2 *Un fabricante de detergente líquido está interesado en la uniformidad de la máquina utilizada para llenar las botellas. De manera específica, es deseable que la desviación estándar σ del proceso de llenado sea menor que 0,5 onzas de líquido. De otro modo, existiría un porcentaje mayor del deseable de botellas con un contenido menor de detergente. Supóngase que la distribución del volumen de llenado es aproximadamente normal. Al tomar una muestra aleatoria de 20 botellas, se obtiene una varianza muestral $s^2 = 0,00153$ (onzas de fluido)^2. Calcule un intervalo de confianza del 90% para σ.*

SOLUCIÓN:
Debido a que $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0,05} = 30,144$ y $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0,95} = 10,117$ con $\nu = n-1 = 19$ grados de libertad, el intervalo de confianza del 90% para la varianza poblacional σ^2 viene dado por:

$$\frac{(20-1)(0,0153)}{30,144} < \sigma^2 < \frac{(20-1)(0,0153)}{10,117},$$

de donde

$$0,00964 < \sigma^2 < 0,0287$$

Así, un intervalo de confianza del 90% para la desviación típica poblacional es:

$$0,098 < \sigma < 0,17$$

Por consiguiente, debido a que $\sigma < 0,17$, con una confianza del 95%, podemos decir que los datos no apoyan la afirmación de que la desviación estándar del proceso es menor que 0,5 onzas de líquido. ◀

3.8 Intervalos de confianza para la razón de varianzas poblacionales

Ejemplo 3.8.1 *Considere la siguiente situación:*

(a) *Se tiene dos variables de interés X y Y, independientes, con medias μ_1 y μ_2 (conocidas o desconocidas) y varianzas σ_1^2 y σ_2^2* desconocidas, *respectivamente.*

Entonces, $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2\sigma_2^2)$, *con* $\eta = q(\theta) = (\sigma_1^2, \sigma_2^2)$ *que es lo que se quiere estimar.*

(b) *Se supone que las variables muestrales* $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ *forman una muestra* X *de tamaño* n *y que las variables muestrales* $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ *forman una muestra* Y *de tamaño* m, *para las dos variables de inteés.*

Un intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ *para* $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ *se basa en la variable aleatoria (compárese con el teorema 2.5.11(b) de* LLinás *[5]):*

$$F = \frac{S^2_{(n)}/\sigma_1^2}{S^2_{(m)}/\sigma_2^2} \sim \mathcal{F}(n-1, m-1)$$

Por lo tanto el cálculo del intervalo de confianza es como sigue: Se tiene que

$$1-\alpha \;=\; P\left(U < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < W\right) \;=\; P\left(\frac{S^2_{(n)}}{S^2_{(m)}}\cdot\frac{1}{W} < F < \frac{S^2_{(n)}}{S^2_{(m)}}\cdot\frac{1}{U}\right)$$

Si $\nu_1 = n-1$ *y* $\nu_2 = m-1$, *usualmente se acostumbra a elegir*

$$U \;=\; \frac{S^2_{(n)}}{S^2_{(m)}\,F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} \qquad y \qquad W \;=\; \frac{S^2_{(n)}}{S^2_{(m)}\,F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} \;=\; \frac{S^2_{(n)}}{S^2_{(m)}}\,F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)$$

Así, el intervalo de confianza de $(1-\alpha)100\%$ *para* σ_1^2/σ_2^2 *es*

$$\frac{S^2_{(n)}}{S^2_{(m)}F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} \;<\; \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \;<\; \frac{S^2_{(n)}}{S^2_{(m)}}F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2,\nu_1)$$

Se puede ver más detalles al respecto en Mayorga [6, pág. 134]. ◀

El resultado encontrado en el ejemplo 3.8.1 se presenta en el teorema 2.6.4 de LLinás [4, pág. 129]. Estos resultados también se encuentran resumidos en el diagrama A.8.

Ejemplo 3.8.2 *Una compañía fabrica propulsores para uso en motores de turbina. Para ello, una de las operaciones consiste en esmerilar el terminado de una superficie particular con una aleación de titanio. Pueden emplearse dos procesos de esmerilado, y ambos producen partes que tienen la misma rigurosidad superficial promedio. Al ingeniero de manufactura le gustaría seleccionar, no obstante, el proceso que tenga la menor variabilidad en la rigurosidad de la superficie, para lo cual toma una muestra* *de $n = 12$ partes del primer proceso, que tiene una desviación estándar muestral de $s_{(n)} = 5,1$ micropulgadas. También toma una muestra aleatoria de $m = 15$ partes del segundo proceso, la cual tiene una desviación estándar muestral de $s_{(m)} = 4,7$ micropulgadas. Lo que el ingeniero busca, con otras palabras, es encontrar un intervalo de confianza del 90% para el cociente de las dos varianzas σ_1^2/σ_2^2. Supóngase que los dos procesos son independientes y que la rigurosidad de la superficie está distribuida normalmente.*

SOLUCIÓN:
Para un intervalo de confianza del 90%, $\alpha = 0,1$. Por tanto, $F_{0,05}(14,11) \approx 2,74$ y $F_{0,05}(11,14) \approx 2,564$. Entonces, el intervalo de confianza del 90% para σ_1^2/σ_2^2 es:

$$\frac{(5,1)^2}{(4,7)^2} \cdot \frac{1}{2,564} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{(5,1)^2}{(4,70)^2} \cdot (2,74),$$

de donde

$$0,46 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3,23.$$

Y, en conclusión, puesto que este intervalo de confianza incluye a la unidad, no es posible afirmar que las desviaciones estándares de la rigurosidad de la superficie de los dos procesos sean diferentes con un grado de confianza del 90%. ◀

✍ Ejercicios

3.1 Para obtener una idea de qué efecto tienen dos somníferos 1 y 2, se hizo el siguiente experimento. Se escogieron $K = 10$ personas, se aplicaron a todas las personas los dos somníferos (con ciertos intervalos de tiempo) y se midieron para cada persona k las horas y_{jk} que dormían más con el somnífero j comparando con el tiempo que dormían sin ningún somnífero. Los datos del experimento fueron:

y_{1k}	1,9	0,8	1,1	0,1	-0,1	4,4	5,5	1,6	4,6	3,4
y_{2k}	0,7	-1,6	-0,2	-1,2	-0,1	3,4	3,7	0,8	0,0	2,0

(a) Tomando como variables muestrales $Y_k = Y_{1k} - Y_{2k}$, para $k = 12, \ldots, n$ y $n = 10$, halle un intevalo del 99% de confianza para $\mu = \mu_1 - \mu_2$ con el fin de determinar cuál de los dos somníferos es el mejor.

(b) Encuentre un intervalo del 99% de confianza para $\mu = \mu_1 - \mu_2$ considerando sólo las primeras:

- cuatro (4) observaciones.
- dos (2) observaciones.

Dé una interpretación y compare con el intervalo hallado en la parte (a) correspondiente a todas las 10 observaciones.

(c) Encuentre un intevalo del 99,9% de confianza para $\mu = \mu_1 - \mu_2$ y dé un interpretación de su resultado.

(d) Bajo el modelo de la parte (a) del ejercicio 2.21, calcule los valores para las estimaciones $\widehat{\mu}_1$, $\widehat{\mu}_2$, $\widehat{\sigma}_1^2$ y $\widehat{\sigma}_2^2$. Nótese que sólo se requiere la independencia de las Y_{1k} entre sí y de las Y_{2k} entre sí, respectivamente.

(e) Comparando las estimaciones $\widehat{\sigma}_1^2$ y $\widehat{\sigma}_2^2$ encontradas en la parte (d), ¿qué sospecha se puede tener? ¿Por qué no se puede aplicar el modelo de la parte (b) del ejercicio 2.21?

(f) Bajo el supuesto adicional de que las variables muestrales $(Y_{1k}, Y_{2k})^t$ con $k = 1, 2, \ldots, K$ son bi-normales de la forma como en el ejercicio 2.22 y donde los K vectores son independientes entre sí, calcule el valor de $\widehat{\rho}$ e interprete el resultado.

3.2 Considere los datos del ejercicio 3.1 y suponga que las variables muestrales $Y_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) Halle $S^2_{(n)}$ y la ML-estimación $\widehat{\sigma}^2$. Compárelas.

(b) ¿Cuál es la distribución de la variable $Y = \frac{n\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}$?

(c) Construya un intervalo del (a) 99%, (b) 99,9% de confianza para σ^2. Observe que estos resultados dan una idea “cuantificada” sobre la precisión/bondad de las estimaciones $S^2_{(n)}$ y $\widehat{\sigma}^2$ calculadas en (a)

3.3 Una máquina produce varillas metálicas usadas en el sistema de supensión de un automóvil. Se selecciona una muestra aleatoria de 10 varillas y se mide el diámetro. Los datos resultantes (en centímetros) se encuentran a continuación:

$$1,014 \quad 1,009 \quad 1,041 \quad 0,962 \quad 1,058 \quad 1,024 \quad 1,019 \quad 1,020 \quad 1,002 \quad 0,958$$

Asumiendo que el diámetro de las varillas provienen de una población normal, encuentre un intervalo de 99% de confianza para el diámetro medio de las varillas.

3.4 Los siguientes datos representan el incremento porcentual de las utilidades de 18 empresas durante el año pasado:

44,5	35,7	33,5	23,5	45,6	32,5	31,5	34,0	46,7
39,3	22,0	51,2	41,4	37,2	51,5	36,4	42,5	46,9

(a) Trace un diagrama de caja para estos datos y comente sobre sus interesantes propiedades.

(b) ¿Es factible que se haya seleccionado la muestra de una población con distribución normal? Explique.

(c) Calcule un intervalo de confianza de 98% para el incremento porcentual promedio.

3.5 Un auditor del departamento estatal de seguros desea determinar la proporción de reclamaciones pagadas por una compañía de seguros de salud dentro de los dos meses siguientes a la recepción de la solicitud. Se selecciona una muestra aleatoria de 1.000 reclamaciones y se determina que 228 se pagaron en menos de 2 meses. Encuentre el intervalo de confianza de 99% para la proporción de la población de reclamaciones pagadas en el lapso requerido.

3.6 Un determinado estudio muestra el salario mensual (en miles de pesos) de algunos empleados del sector público, así:

422	425	427	418	421	421	431	463	465
446	447	448	453	454	434	437	439	

(a) Trace un diagrama de caja de los datos y comente sus propiedades de interés.

(b) ¿Es factible que estas observaciones muestrales se hayan seleccionado de una distribución normal?

(c) Calcule un intervalo de confianza del 95% para el salario mensual promedio real. ¿Podría indicar ese intervalo que 440 es un valor factible del salario mensual promedio real de los empleados? ¿Y 450?

(d) Si 5 de estos 17 empleados son extranjeros, construya un intervalo del 95% de confianza para la verdadera proporción de extranjeros en la empresa.

3.7 En una muestra aleatoria de 85 soportes para la pieza de un motor de automóvil, 10 tienen un pequeño defecto. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la proporción p de piezas de motor que tienen un pequeño defecto en la población.

3.8 Considérese el proceso de fabricación de soportes para piezas de motores descrito en el ejercicio 3.7. Supóngase que se hace una modificación al proceso de acabado de la superficie y que, de manera subsecuente, se toma una segunda muestra aleatoria de 85 ejes. Si el número de soportes defectuosos en esta segunda muestra es 8, calcule un intervalo de confianza del 95% para la diferencia en la proporción de los soportes defectuosos producidos por ambos procesos.

3.9 Una empresa de teléfonos precisa estimar, a nivel nacional, la proporción de viviendas que comprarían una línea adicional si estuviera disponible a un costo de instalación reducido sustancialmente. En la ciudad A, se selecciona una muestra aleatoria de 1.000 viviendas, indicando los resultados que 250 de las viviendas comprarían la línea adicional en las condiciones previstas. En otra ciudad B, 275 de 1.000 viviendas comprarían la línea adicional. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre la proporción de viviendas en las ciudades A y B que comprarían la línea adicional a un costo adicional de instalación reducida. Interprete su respuesta.

3.10 Una encuesta respondida por 1.000 estudiantes de un colegio A concluye que 726 no tienen hábito de lectura. En otro colegio B se realizó la misma encuesta a 760 estudiantes, concluyéndose que 240 de ellos tienen hábito de lectura. Calcule un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre la proporción de estudiantes que tienen hábito de lectura entre las dos encuestas. ¿Hay una diferencia significativa?

3.11 La tabla de abajo muestra las pulsaciones por minuto que se registraron en 12 sujetos antes y después de haber ingerido cierta cantidad fija de una bebida alcóholica. Construya un intervalo de confianza del 95% para la diferencia promedio de las pulsaciones. Interprete sus respuestas. Suponga que las poblaciones en cuestión son normales.

Individuo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Antes	68	58	70	59	79	68	80	64	75	75	61	62
Después	80	65	80	70	88	77	90	75	87	82	70	74

3.12 Un científico intenta estimar la efectividad de un medicamento en la habilidad de los individuos para realizar una determinada tarea de coordinación psicomotriz. Los elementos de una muestra aleatoria de 9 personas tomaron el medicamento antes de realizar la prueba. La calificación media obtenida fue

$9,78$ y la varianza muestral $17,64$. Otra muestra aleatoria independiente de 10 personas, que no tomó el medicamento, se empleó como grupo de control. La calificación media y varianza muestral de este grupo de control fueron $15,10$ y $27,01$, respectivamente. Suponiendo que la distribuciones poblacionales son normales con varianzas iguales, calcule un intervalo de confianza del 90% para la diferencia entre las dos calificaciones medias. ¿Hay diferencia significativa? Explique.

3.13 Una muestra de 12 bolsas de azúcar, producidas por una determinada empresa, produjo los siguientes pesos netos (medidos en libras):

12,1	12,1	11,8	11,9	11,8	12,0	12,3	11,8	12,0	11,9	12,2	11,6

Si se supone que los pesos netos se distribuyen normalmente, construya un intervalo del 95% de confianza para la varianza y la desviación estándar de la población de pesos netos de todas las bolsas de azúcar producidas por la empresa.

3.14 Se sabe que la exactitud de una balanza digital es del 2% en toda su escala. Una muestra de cinco lecturas del medidor sobre el mismo objeto produjo las medidas: 350, 348, 348, 352 y 351. Construya un intervalo confiable en un 95% para σ, suponiendo que la población de las medidas se distribuye normalmente.

3.15 Un equipo de profesores de educación física administró a dos grupos universitarios pruebas de resistencia después de un programa de ejercicios. Los puntajes del grupo 1, que constaba de 16 sujetos, arrojaron una varianza muestral de 4.685,40. Para el grupo 2, que constaba de 25 sujetos, la varianza muestral fue de 1.193,70. Suponiendo que los dos grupos de puntajes constituían muestras aleatorias simples independientes de poblaciones normalmente distribuidas, construya un intervalo de confianza del 95% para determinar si las varianzas poblacionales de ambos grupos son iguales.

3.16 Los puntajes de una prueba de aptitud escolar tomados en una muestra aleatoria de $n = 21$ estudiantes de séptimo grado de la escuela distrital 1 y de otra muestra aleatoria de $m = 16$ estudiantes del mismo grado de la escuela distrital 2 arrojaron varianzas de $s^2_{(n)} = 176$ y $s^2_{(m)} = 110$, respectivamente. Suponga que las muestras son independientes y que las poblaciones de puntajes están normalmente distribuidas. Construya un intervalo de confianza del 90% para determinar si las varianzas poblacionales son iguales.

3.17 Encuentre una fórmula para el tamaño muestral que nos permita estimar la media poblacional μ.

3.18 Encuentre una fórmula para el tamaño muestral que nos permita estimar la proporción poblacional p.

CAPÍTULO 4

Pruebas de hipótesis

4.1 Preliminares

En capítulos anteriores, vimos que la información obtenida a partir de muestras aleatorias sirve para estimar los parámetros desconocidos de la población, mediante el cálculo de los estimadores puntuales o intervalos de confianza. En este capítulo, veremos que la información muestral también se puede utilizar para probar la validez de una *afirmación*, *conjetura* o HIPÓTESIS acerca del valor del parámetro de la población.

4.1.1 Hipótesis estadística, nula y alternativa

En general, una *hipótesis* es una explicación propuesta que puede, o no, ser cierta. Nuestra discusión se limitará a las *hipótesis estadísticas*.

Definición 4.1.1 *Una* HIPÓTESIS ESTADÍSTICA *es una afirmación cuantitativa acerca de una o más poblaciones o, lo que es más frecuente, un conjunto de afirmaciones sobre uno o más parámetros de una o más poblaciones.*

Las hipótesis estadísticas son de dos tipos: *hipótesis nula* e *hipótesis alternativa.*

Definición 4.1.2 *La* HIPÓTESIS NULA, *que se simboliza por H_0, es la hipótesis que se debe comprobar. La* HIPÓTESIS ALTERNATIVA, *simbolizada por H_1, es la hipótesis elegida como contraste a H_0.*

En general, si θ es un parámetro poblacional y k es cualquier número real, entonces, la hipótesis alternativa $H_1 : \theta \neq k$ se llama ALTERNATIVA BILATERAL *y las hipótesis alternativas $H_1 : \theta < k$ y $H_1 : \theta > k$,* ALTERNATIVAS UNILATERALES.

4.1.2 Pasos para realizar un prueba de hipótesis

Una prueba de hipótesis está dada por los siguientes pasos:

(a) Se parte de un *modelo probabilístico* asociado al *problema*, donde la variable de interés tiene una distribución que depende de un parámetro de interés θ. Según el problema se escoge una *hipótesis (nula)* $H_0 : \theta \in \Theta_0$ junto con una *alternativa* $H_1 : \theta \in \Theta_1$, donde $\Theta_0 \cup \Theta_1$ es unión disyunta del espacio de parámeros Θ. Observe que Θ_1 no es necesariamente la alternativa lógica.

(b) El *modelo estadístico* correspondiente está formado por una muestra $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ de tamaño n, cuya distribución f_θ debe ser conocida para cada θ y calculable por lo menos para $\theta \in \Theta_0$. De una observavión concreta resultan los datos $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$.

(c) Se escoge un estadístico $T(X)$ unidimensional de tal manera que tiene sentido para el problema "rechazar H_0" con base en x si y sólo si $T(x) \geq c$, donde c es determinado según uno de los siguientes criterios dados en las secciones 4.1.3, 4.1.4 ó 4.1.5.

- A la variable $T(X)$ se le llama ESTADÍSTICO DE PRUEBA.
- Al número c, VALOR CRÍTICO.
- Al conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \,/\, T(x) \geq c\}$ de todos los datos x para los cuales se rechaza H_0 se le llama REGIÓN CRÍTICA.

Considere el siguiente problema.

Ejemplo 4.1.3 *Un productor de fármacos afirma que tiene una droga cuya aplicación debe aumentar la probabilidad para que nazca una niña, del porcentaje de 50% hasta 70%, por lo menos. Se quiere mirar la validez de esta afirmación. La solución podría consistir en los siguientes pasos:*

(a) *Se puede asociar al problema el* modelo probabilístico, *en el cual la variable de interés "nacimiento de un bebé" está representada por la variable aleatoria* $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ *con las codificaciones*

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si el bebé es una niña;} \\ 0, & \text{si el bebé es un niño.} \end{cases}$$

Es decir, el parámetro de interés es $\theta = p$, *la probabilidad de que nazca una niña. Como hipótesis* H_0 *se puede escoger* $p = 0,5$ *que refleja la situación normal, contra la alternativa* H_1 *de que* $p = 0,7$ *que refleja la afirmación del productor.*

(b) *Para ver cómo realmente actúa la droga en cuestión, se escogen, digamos* $n = 20$ *mujeres, independientemente. Se aplica la droga a cada una de ellas y se observa, después si la mamá* i *da a luz a una niña o a un niño. Así se obtiene el modelo estadístico correspondiente, dado por una muestra* $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ *de tamaño* $n = 20$, *con variables* $X_i \sim \mathcal{B}(1, p)$. *Para un experimento concreto se obtienen los datos* $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$, *siendo cada* $x_i \in \{0, 1\}$.

(c) *Se apuntará* $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, *el número de las niñas entre los* $n = 20$ *bebés nacidos, que es un valor del estadístico* $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$ *(compárese con el teorema 2.5.3 de* LLinás *[5]).*

(d) *Intuitivamente se rechazará la hipótesis* H_0 *si* $T(x) \geq c$ *para un valor de* c *"suficientemente grande", (o sea, si hay "muchas" niñas).*

- *Es claro que para* $T(x) = 20$ *se rechazará* H_0 *en favor de la afirmación del productor.*
- *Para* $T(x) = 19$ *también se rechazará* H_0 *en favor de la afirmación del productor.*
- *Pero, ¿con cuál número empiezan las dudas? ¿Desde cuál número se va a creer más en* H_0 *que en* H_1*? Para dar respuestas a estas inquietudes, véase los criterios de las secciones siguientes.* ◀

4.1.3 Criterio del error de tipo I

Se escoge un c tal que, para cierto $\alpha \in (0,1)$ fijo se cumple que

$$P\big(T(X) \geq c \,/\, H_0\big) \;=\; \sup_{\theta \in \Theta_0} P\big(T(X) \geq c \,/\, \theta\big) \leq \alpha \tag{4.1}$$

y que esta probabilidad sea lo más cercana posible a α. Aquí:

- "$T(X) \geq c \,/\, H_0$" significa "rechazar H_0 a pesar de que H_0 fuese correcta", una decisión errónea del investigador y es llamado ERROR DE TIPO I.
- "$T(X) \geq c \,/\, \theta$" significa "rechazar H_0 a pesar de que θ está en Θ_0".

Entonces, escogiendo c como antes, significa que se "controla" la probabilidad del error de tipo I por medio del llamado NIVEL DE SIGNIFICANCIA α. También es usual decir que se rechaza al nivel de α. Para la práctica, los niveles más usados son $\alpha = 5\%$, 1% ó $0,1\%$.

Ejemplo 4.1.4 *Considere la situación planteada en el ejemplo* 4.1.3.

(a) *En ese ejemplo, ya hemos dicho que el estadístico de prueba es* $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(20, p)$ *y que* $H_0 : p = 0,5$. *Ahora, utilizando una tabla binomial* $\mathcal{B}(20; 0,5)$, *podemos determinar los posibles valores críticos c junto con las probabilidades del error de tipo I. En la tabla* 4.1 *se presenta esta información.*

Tabla 4.1: Probabilidades del error de tipo I para algunos valores de c para la situación del ejemplo 4.1.3

c	13	14	15	16	17	18	19
$P\big(T(x) \geq c \,/\, 0,5\big)$	0,1316	0,0577	0,0207	0,0059	0,0013	0,0002	0,00002

Entonces, la condición (4.1) *se interpreta de la siguiente manera:*

- *Se rechaza* H_0 *al nivel de 5% si* $T(x) \in \{15, 16, \ldots, 20\}$.
- *Se rechaza* H_0 *al nivel de 1% si* $T(x) \in \{16, 17, \ldots, 20\}$.
- *Se rechaza* H_0 *al nivel de 0,1% si* $T(x) \in \{18, 19, 20\}$.

(b) *En resumen, podemos formular las siguientes conclusiones:*

- *Si se observan* $t = 0, 1, 2, \ldots, 14$ *nacimientos de niñas, entonces se acepta* $H_0 : p = 0,5$*, rechazando la afirmación del productor.*
- *Si se observan* $t = 15$ *nacimientos de niñas, esto puede ser un indicio para que el productor tenga la razón.*
- *Si se observan* $t = 16$ *ó* 17*, esto se interpreta como desviación significativa de* H_0*, creyendo más en la afirmación del productor.*
- *Y, finalmente, si se observan por lo menos* $t = 18$*, entonces se acepta de manera muy significativa la afirmación del productor.* ◀

4.1.4 Criterio del P-valor

Este criterio es muy importante para la práctica y está muy relacionado con el criterio del error de tipo I (véase la sección 4.1.3). Como la escogencia de un nivel α, desde un principio, depende mucho de la opinión subjetiva, se calcula alternativamente el valor $P\big(T(X) \geq t \,/\, H_0\big)$ para $t = T(x)$, que resulta de los datos x. A este valor se le llama *P-valor* (o *valor P*), correspondiente a la hipótesis H_0 y a la observación concreta x.

Definición 4.1.5 *El P-VALOR (o VALOR P) es el mínimo nivel de significancia en el cual la hipótesis nula H_0 sería rechazada cuando se utiliza un procedimiento de prueba especificado con un conjunto dado de información. Una vez que el P-valor haya sido calculado (véase el teorema 4.1.6), la conclusión en cualquier nivel de significancia α particular resulta de comparar el P-valor con α. Así, entonces:*

(a) Si P-valor $\leq \alpha$, entonces, rechace H_0 al nivel α.

(b) Si P-valor $> \alpha$, entonces, no rechace H_0 al nivel α.

De acuerdo al criterio del error de tipo I , un P-valor se interpreta con:

(a) P-valor $\leq 0,1\%$ como DESVIACIÓN MUY SIGNIFICATIVA de H_0.

(b) $0,1\% < P$-valor $\leq 1\%$ como DESVIACIÓN SIGNIFICATIVA de H_0.

(c) $1\% < P$-valor $< 5\%$ como DESVIACIÓN CASI SIGNIFICATIVA de H_0.

A menor P-valor, mayor tranquilidad para rechazar la hipótesis H_0, porque la probabilidad de cometer un error de tipo I será más pequeña. Por el contrario, para un P-valor $> 5\%$, "se acepta la hipótesis H_0" en el sentido de que "no se pudo encontrar una desviación algo significativa". Lo más conveniente, es hablar de "no rechazar H_0".

El P-valor que se calcula dependerá siempre de la distribución utilizada (normal, t de Student, Chi-cuadrada o F de Fisher) y del tipo de prueba que vayamos a realizar (prueba de una cola a la izquierda, prueba de una cola a la derecha o prueba de dos colas), como se presenta en el siguiente teorema:

Teorema 4.1.6 *Supongamos que la distribución muestral del estadístico de prueba X es la normal estándar, t de Student, F de Fisher o Chi-cuadrada, en donde los grados de libertad de las últimas tres distribuciones dependerán de los supuestos que se deben verificar para realizar un determinado procedimiento de prueba. Si x es el valor calculado de X, entonces el P-valor es:*

$$P\text{-}valor = \begin{cases} P(X \leq x), & \textit{para una prueba de una cola a la izquierda,} \\ P(X \geq x), & \textit{para una prueba de una cola a la derecha,} \\ 2\,P(X \geq |x|), & \textit{para una prueba de dos colas.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN:
Ver la demostración en la literatura citada. ■

Ejemplo 4.1.7 *Considere nuevamente la situación planteada en el ejemplo* 4.1.3. *Sabemos que $n = 20$ y que $H_0 : p = 0,5$. Supongamos que tenemos una prueba de una cola a la derecha y que la proporción muestral de niñas es de $\overline{p} = 0,30$. Se puede observar que podemos aplicar el teorema de aproximación de la binomial a la normal (véase el teorema 3.3.4 de* LLINÁS *[5]). Por tanto, un valor del estadístico de prueba Z será*

$$Z = \frac{0,3 - 0,5}{\sqrt{(0,5)(1 - 0,5)/20}} = -1,79$$

Por consiguiente, de la tabla normal y teniendo en cuenta el teorema 4.1.6, *el P-valor es:*

$$P\text{-valor} = P(Z \geq -1,79) = 1 - 0,0367 = 0,9633$$

Por tanto, de acuerdo con la definición 4.1.5*,* H_0 *no se rechazaría para cualquier nivel* α*.* ◀

4.1.5 Criterio de los errores de tipo I y II

Hasta ahora se ha usado solamente un criterio sobre un tipo de error que puede cometer el investigador. Pero para llegar a pruebas de hipótesis más confiables, se debe tener en cuetna también el otro tipo de error posible. Este criterio considera la posibilidad de controlar los dos tipos de errores.

Ahora se trata de escoger un valor crítico c tal que se cumpla (4.1) y que, además, para cierto $\beta \in (0,1)$ fijo, se cumpla:

$$P\big(T(X) < c \,/\, H_1\big) \;=\; \sup_{\theta\in\Theta_1} P\big(T(X) < c \,/\, \theta\big) \leq \beta \tag{4.2}$$

y que esta probabilidad sea lo más cercana posible a β (lo más pequeño posible). Aquí:

- "$T(X) < c \,/\, H_1$" significa "aceptar H_0 a pesar de que H_1 fuese correcta", una decisión errónea del investigador y es llamado ERROR DE TIPO II.
- "$T(X) < c \,/\, \theta$" significa "aceptar H_0 a pesar de que θ_1 está en Θ_1".

Sería deseable asegurar que la probabilidad del error de tipo II esté "cerca" de 0. Pero, desafortunadamente, no es posible controlar las probabilidades de ambos errores al mismo tiempo, si el tamaño n de la muestra es fijado de antemano. Una solución a este dilema es diseñar la prueba de tal manera que el error de tipo II no sea tan grave. Es decir, se deben escoger H_0 y H_1 adecuadamente. Otra solución, a veces posible, es aumentar n hasta que sí se puedan cumplir (4.1) y (4.2). En este caso, como n es grande, se usan aproximaciones de la distribución del estadístico de prueba, preferiblemente con una distribución normal.

Ejemplo 4.1.8 *Considere nuevamente la situación planteada en el ejemplo* 4.1.3*. Siguiendo el criterio de la sección* 4.1.5*, se busca ahora el tamaño muestral* n *más grande posible y el valor* c*, tales que se cumplan simultaneamente las dos condiciones siguientes:*

(a) $P\big(T(X) \geq c \,/\, p = 0,5\big) \;=\; \alpha$, *por ejemplo, con* $\alpha = 0,01$;

(b) *y* $P\big(T(X) < c \,/\, p = 0,7\big) \;=\; \beta$, *por ejemplo, con* $\beta = 0,05$.

Para n *grande, podemos aplicar el teorema de aproximación de la binomial a la normal (véase el teorema 3.3.4 de* LLINÁS *[5]). En este caso, la probabilidades anteriores se pueden reescribir de la siguiente manera:*

(a) $0,01 \;=\; P\big(T(X) \geq c \,/\, p = 0,5\big) \;=\; 1 - P\big(T(X) \leq c - 1 \,/\, p = 0,5\big) \;=\; 1 - \Phi\left(\frac{c-0,5n-0,5}{\sqrt{0,25n}}\right)$. *Al aplicar la tabla normal, obtenemos:*

$$\frac{c - 0,5n - 0,5}{\sqrt{0,25n}} \;=\; 2,325 \tag{4.3}$$

(b) $0,05 \;=\; P\big(T(X) \leq c - 1 \,/\, p = 0,7\big) \;=\; \Phi\left(\frac{c-0,5n-0,5}{\sqrt{0,21n}}\right)$. *Al aplicar la tabla normal, obtenemos:*

$$\frac{c - 0,7n - 0,5}{\sqrt{0,21n}} \;=\; -1,64 \tag{4.4}$$

Al resolver simultaneamente las dos ecuaciones (4.3) *y* (4.4)*, obtenemos que se deben escoger* $n = 92$ *y* $c = 58$*. En conclusión:*

- *Si se observan* $t = 58, 59, \ldots, 92$ *nacimientos de niñas, entonces se rechaza* $H_0 : p = 0,5$*, aceptando la afirmación del productor y cometiendo un error de tipo I con una probabilidad máxima de un 1%.*
- *Si se observan* $t = 0, 1, \ldots, 57$ *nacimientos de niñas, entonces no se acepta la afirmación del productor y se comete un error de tipo II con una probabilidad máxima de 5%.* ◀

4.1.6 Medición de la potencia de un contraste

Para una prueba de hipótesis como la descrita en la sección 4.1.2 puede ser conveniente analizar la llamada *función potencia*.

Definición 4.1.9 *La función* $\mathcal{P}(\theta) \;=\; P\big(T(X) \geq c \,/\, \theta\big)$*, para* $\theta \in \Theta$*, recibe nombre de* FUNCIÓN POTENCIA.

Si $\mathcal{P}$ es creciente en θ y $\theta_0 < \theta_1$, entonces son equivalentes las dos pruebas siguientes:

(a) $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$

(b) $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta \geq \theta_1$

porque, en este caso, valen

$$\sup_{\theta \leq \theta_0} \mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta_0), \qquad \sup_{\theta \geq \theta_1} [1 - \mathcal{P}(\theta)] = 1 - \mathcal{P}(\theta_1)$$

Además, a mayor n, mayor es la pendiente de la función de potencia entre θ_0 y θ_1. En la figura 4.1 aparece una gráfica típica de una función potencia.

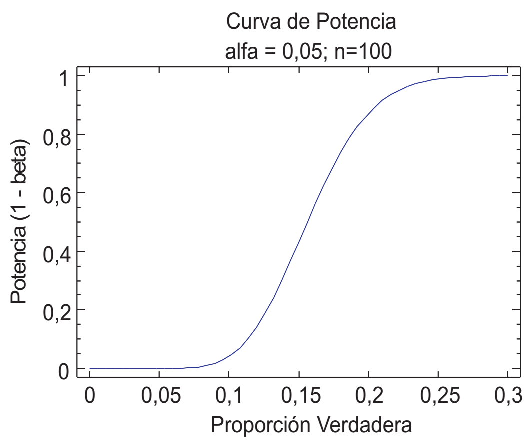


Figura 4.1: Gráfica de una función potencia

Ejemplo 4.1.10 *Se sabe que cierto tipo de metal no presenta daños visibles el 25% de las veces en que se pone a prueba a temperaturas de 150 grados centígrados. Con el fin de aumentar este porcentaje, se ha propuesto un tipo de pintura para el metal. Sea p la proporción de todas las muestras de metales sometidos a temperaturas de 150 grados centígrados que no presentan daño visible con esta nueva pintura. Las hipótesis son $H_0 : p = 0,25$ (sin mejoría) vs $H_1 : p > 0,25$. Para el experimento se han seleccionado $n = 20$ muestras de metal con esta nueva pintura. De manera intuitiva, supongamos que H_0 debe ser rechazada si un número importante de los metales no muestra daño (digamos, más de 7) y respóndanse las siguientes cuestiones:*

(a) Si X es la variable aleatoria que representa el número de metales de la muestra sin daño visible, ¿cuál es la distribución de X cuando H_0 es verdadera?

(b) *Halle la probabilidad* α *de cometer un error de tipo I. Interprete su respuesta.*

(c) *Halle* $\beta(0,3)$, *es decir, la probabilidad* β *de cometer un error de tipo II cuando* $p = 0,3$. *Interprete su respuesta.*

(d) *Halle* β *para cada uno de los siguientes valores de* p: *0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 y 0,8.*

SOLUCIÓN:

(a) *Cuando* H_0 *es verdadera,* X *tiene distribución binomial con parámetros* $n = 20$ *y* $p = 0,25$.

(b) *Con base en el inciso (a), tenemos que:*

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\textit{error tipo I}) \;=\; P(H_0 \textit{ es rechazada cuando es verdadera}) \\ &= P(X \geq 8 \textit{ cuando } X \textit{ es binomial con } n = 20 \textit{ y } p = 0,25) \\ &= 1 \;-\; B(7;20;0,25) \;=\; 1 - 0,898 \;=\; 0,102 \end{aligned}$$

Es decir, cuando H_0 *es verdadera, aproximadamente 10% de todos los experimentos formados por 20 muestras de metal con la nueva pintura podrían llevar a que* H_0 *sea incorrectamente rechazada.*

(c) *El valor de* β *cuando* $p = 0,3$ *es:*

$$\begin{aligned} \beta(0,3) &= P(\textit{error tipo II cuando } p = 0,3) \\ &= P(H_0 \textit{ no es rechazada cuando es falsa porque } p = 0,3) \\ &= P(X \leq 7 \textit{ cuando } X \textit{ es binomial con } n = 20 \textit{ y } p = 0,3) \\ &= B(7;20;0,3) \;=\; 0,772 \end{aligned}$$

Cuando p *es en realidad* $p = 0,3$, *en lugar de 0,25 (una "pequeña" desviación de* H_0*), casi 77% de todos los experimentos formados por 20 muestras de metal con la nueva pintura podrían llevar a que* H_0 *no fuese incorrectamente rechazada.*

(d) *La siguiente tabla muestra* β *para los valores seleccionados de* p *(cada uno calculado para la región de rechazo* $X \geq 8$*):*

p	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\beta(p)$	0,772	0,416	0,132	0,021	0,001	0,000

Se puede observar que β *disminuye a medida que el valor de* p *se aleja a la derecha del valor nulo de 0,25. De manera intuitiva, cuanto mayor sea la desviación de* H_0 *es menos probable que dicha desviación no sea detectada.* ◄

4.2 Pruebas de la razón de verosimilitud (LR-pruebas)

4.2.1 Pasos para la LR-prueba

En esta sección se presentará otro método para construir pruebas de hipótesis y útil para la mayoría de los problemas que aparecen en las aplicaciones. Su gran ventaja es que está basado en estimaciones de máxima verosimilitud para el parámetro de interés, para el cual se quiere "comprobar" o "rechazar" cierta hipótesis "contra" alguna alternativa. En la presentación se siguen los mismos pasos generales de la sección 4.1.2:

(a) Interesa una hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contra una alternativa $H_1 : \theta \in \Theta_1$.

(b) Se observa un dato $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, suponiendo que éste es un valor de una muestra $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$ con función de densidad f_θ, y se calcula $L(\theta) = f_\theta(x) = f(x, \theta)$, que es la función de verosimilitud correspondiente al dato x.

(c) Como estadístico de prueba se escoge la RAZÓN DE VEROSIMILITUD (en inglés: Likelihood Ratio) o, más brevemente, LR-ESTADÍSTICA:

$$\lambda(X) = \frac{L(\widehat{\theta}_1)}{L(\widehat{\theta}_0)} = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_1} L(\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} L(\theta)}$$

donde

- $\Theta_0 \cup \Theta_1$ es una unión disyunta de Θ.
- $\widehat{\theta}_0$ es la ML-estimación de θ bajo H_0 y $\widehat{\theta}_1$ es la ML-estimación de θ bajo H_1. Es decir, el subíndice indica si la estimación corresponde a la hipótesis nula o a la alternativa.

(d) Si $\lambda(x)$ es una observación concreta de la estadística $\lambda(X)$, entonces se rechaza H_0 con base en x si y sólo si $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 1$, para un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, si el máximo valor de la función de verosimilitud es para H_1 "significativamente" más grande que en H_0.

(e) Se determina λ_0 como valor crítico según el criterio (compárese con la sección 4.1.3)

$$P(\lambda(X) \geq \lambda_0 \,/\, H_0) \;\leq\; \alpha, \quad \text{para un } \alpha \text{ dado}$$

O, alternativamente, se puede calcular el P-valor (compárese con la sección 4.1.4), que es igual a

$$P\text{-valor} \;=\; P\big(\lambda(X) \geq \lambda(x) \,/\, H_0\big)$$

4.2.2 Pasos para la LR-prueba en problemas concretos

El procedimiento de una LR-prueba, como se describió en la sección 4.2.1, se simplifica en problemas concretos según las siguientes modificaciones:

(a) Por lo general no es fácil determinar la distribución del estadístico $\lambda(X)$ bajo H_0. Pero sí es posible encontrar un estadístico $T(X)$ tal que $\lambda(X) = h\big(T(X)\big)$, cuya distribución bajo H_0 se encuentra tabulada. Aquí, h es una función estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Entonces rechazar H_0 con base en x es equivalente a la condición $T(x) \geq c$ y se puede determinar el valor crítico c para un nivel α, o bien, calcular el P-valor para $c = T(x)$.

(b) Muchas veces es más fácil calcular el valor $\lambda(x)$ por medio del cociente

$$\lambda(x) \;=\; \frac{L(\widehat{\theta})}{L(\widehat{\theta}_0)}, \quad \text{para los } x \text{ con } \lambda(x) > 1$$

siendo $\widehat{\theta}$ la ML-estimación de θ, pero sin restricción alguna. Este hecho sigue de $\widehat{\theta}_1(x) = \widehat{\theta}(x)$ para todos los x con $\lambda(x) > 1$.

4.2.3 Ejemplos

Antes de dar un primer ejemplo ilustrativo, nótese que el método para construir LR-pruebas se basa en la misma idea e interpretación que el método para construir ML-estimaciones. O sea, se rechaza la hipótesis si los valores de la alternativa son "significativamente más verosímiles" que los valores de la hipótesis.

Ejemplo 4.2.1 *Considere nuevamente la situación planteada en el ejemplo* 4.1.3*, en donde $\theta = p$. La LR-prueba para $H_0 : p = 0,5$ contra $H_1 : p = 0,7$ rechaza H_0 con base en $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ si y sólo si*

$$\lambda(x) \;=\; \frac{L(0,7)}{L(0,5)} \;=\; \lambda_0$$

Como la función de verosimilitud es igual a

$$L(p) \;=\; \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \;=\; p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i} \;=\; \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum x_i}(1-p)^n,$$

entonces el valor $\lambda(x)$ de la LR-estadística $\lambda(X)$ está dado por

$$\lambda(x) \;=\; \frac{(\frac{7}{3})^{\sum x_i}(0,3)^n}{(0,5)^n} \;=\; \left(\frac{7}{3}\right)^{\sum x_i}\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

y es una función creciente de $T(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$. ◀

A continuación se presentarán dos problemas para los cuales las LR-pruebas conducen a diferentes tipos de pruebas que usulamente se llaman PRUEBAS t, porque pueden ser determinadas por estadísticos que están distribuidos de acuerdo a la t de Student.

Ejemplo 4.2.2 (Prueba t para una muestra) *Considere la siguiente situación:*

(a) *Estamos interesados en las hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ y $H_1 : \mu > \mu_0$; con μ_0 fijo, siendo el parámetro μ la esperanza de una variable de interés, cuya varianza σ^2 no se conoce.*

(b) *Se suponen que las variables muestrales $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.*

(c) *A continuación, calcularemos las ML-estimaciones de $\theta = (\mu, \sigma^2)$, por una parte, en*

$$\Theta_0 = \{(\mu_0, \sigma^2)^t \,/\, \sigma^2 > 0\}$$

y, por otra parte, en (véase la sección 4.2.2*)*

$$\Theta = \{(\mu, \sigma^2)^t \,/\, \mu \geq \mu_0,\ \sigma^2 > 0\}$$

Primer paso (estimaciones en Θ_0):
Al maximizar $L(\mu_0, \sigma^2)$ con respecto a $\sigma^2 > 0$, fijando μ_0, obtenemos las siguientes ML-estimaciones en Θ_0:

$$\widehat{\mu} = \mu_0, \qquad \widehat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{n}$$

Segundo paso (estimaciones en Θ):
Al maximizar $L(\mu, \sigma^2)$ con respecto a $\sigma^2 > 0$ y $\mu \geq \mu_0$, obtenemos las siguientes ML-estimaciones en Θ:

$$\widehat{\mu} = \begin{cases} \overline{x}_{(n)}, & si \quad \overline{x}_{(n)} > \mu_0 \\ \mu_0, & si \quad \overline{x}_{(n)} \leq \mu_0 \end{cases}, \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2}{n}$$

Esto se puede comprobar de la siguiente manera.

(i) Primero hallaremos $\widehat{\mu}$. Es claro que $\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} = \frac{n}{\sigma^2}(\overline{x}_{(n)} - \mu)$. Ahora, consideramos dos casos:

- *Si $\overline{x}_{(n)} > \mu_0$, entonces $\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} = 0$ para $\widehat{\mu} = \overline{x}_{(n)}$.*
- *En cambio, si $\overline{x}_{(n)} \leq \mu_0$, entonces $\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} \leq 0$ para todo $\mu \geq \mu_0$, por lo tanto, $L(\mu, \sigma^2)$ decrece para μ, es decir es maximal para $\mu = \mu_0$.*

(ii) Ahora hallaremos $\widehat{\sigma}^2$. Fijando la ML-estimación $\widehat{\mu} = \begin{cases} \overline{x}_{(n)}, & \overline{x}_{(n)} > \mu_0 \\ \mu_0, & \overline{x}_{(n)} \leq \mu_0 \end{cases}$, se obtiene la estimación $\widehat{\sigma}^2$ al resolver

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial(\sigma^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2}{2(\sigma^2)^2} - \frac{n}{2\sigma^2} = 0$$

Entonces, en conclusión tenemos:

- *Si $\overline{x}_{(n)} \leq \mu_0$, entonces, $\widehat{\mu} = \mu_0$, y por lo tanto,*

$$\widehat{\sigma}^2 = \widehat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{n}$$

- *Si $\overline{x}_{(n)} > \mu_0$, entonces, $\widehat{\mu} = \overline{x}_{(n)}$ y con ello,*

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_{(n)})^2}{n}$$

(d) *Una vez calculadas las ML-estimaciones de $\theta = (\mu, \sigma^2)$, determinaremos la LR-estadística $\lambda(X)$. Para ello, nuevamente consideraremos los dos casos posibles:*

- *Para $\overline{x}_{(n)} \leq \mu_0$, se tiene que $\lambda(x) = 1$. Por lo tanto, no se rechaza H_0.*
- *Para $\overline{x}_{(n)} > \mu_0$, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= \frac{L(\widehat{\theta})}{L(\widehat{\theta}_0)} = \frac{(2\pi\widehat{\sigma}^2)^{-n/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_{(n)})^2\right\}}{(2\pi\widehat{\sigma}_0^2)^{-n/2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\widehat{\sigma}_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2\right\}} \\
&= \left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2} \cdot \frac{\exp(-n/2)}{\exp(-n/2)} = \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_{(n)})^2}\right]^{n/2} \\
&= \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_{(n)})^2 + n(\overline{x}_{(n)} - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_{(n)})^2}\right]^{n/2} \\
&= \left[1 + \frac{n(\overline{x}_{(n)} - \mu_0)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_{(n)})^2}\right]^{n/2} > 1 \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

O sea, para este caso, se rechaza H_0. A continuación, determinaremos a partir de que valor $\overline{x}_{(n)}$ se rechaza H_0. Teniendo en cuenta (4.5) y que

$$s_{(n)}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_{(n)})^2$$

tenemos

$$\lambda(x) = \left(1 + \frac{1}{n-1}\left[\frac{\overline{x}_{(n)} - \mu_0}{s_{(n)}/\sqrt{n}}\right]^2\right)^{n/2}$$

Ahora, por el teorema 2.5.10(b) de LLinás [5] y bajo $H_0 : \mu = \mu_0$, se cumple que el estadístico

$$T(X) := \frac{\overline{X}_{(n)} - \mu_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_{(n)})^2\right)/n}} = \frac{\overline{X}_{(n)} - \mu_0}{S_{(n)}/\sqrt{n}}$$

tiene distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. Por tanto, para $\overline{x}_{(n)} > \mu_0$, la LR-estadística será una función creciente del estadístico $T(X)$:

$$\lambda(X) \;=\; \left(1+\frac{T^2(X)}{n-1}\right)^{n/2}, \text{donde } T \sim \mathcal{T}(n-1) \text{ bajo } H_0$$

Según la sección 4.2.2(a), se rechaza H_0 si y solo si $T(x) \geq c > 0$. Ahora bien, se determina c como valor crítico de

$$P(T(X) \geq c/H_0) = \alpha, \quad \text{para un nivel } \alpha \text{ dado}$$

o se calcula el P-valor como

$$P\text{-valor} \;=\; P\big(T(X) > T(x)\big)$$

para la observación x. ◄

Ejemplo 4.2.3 (Prueba t para dos muestras independientes) *Considere ahora un problema caracterizado por dos variables. Se tiene interés en saber si los dos efectos medios, representados por las esperanzas μ_1 y μ_2 de las dos variables, son iguales o no. Una prueba para tales situaciones se obtienen según los siguientes pasos:*

(a) Estamos interesados en las hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ y $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Aquí se supone que μ_1 y μ_2 son desconocidas, inclusive también se desconocen las varianzas y sólo se sabe que son iguales a σ^2 (o sea, se supone que la medición de ambas variables se puede hacer con la misma precisión). En este caso, el parámetro es

$$\theta = \left(\mu_1, \mu_2, \sigma^2\right)^t, \quad \mu_1 \in \mathbb{R},\ \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0$$

(b) Se observan dos muestras independientes, una para cada variable de interés, y se supone que las variables muestrales

$$\begin{aligned} X_{1k} &\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2), \quad k = 1, \ldots, n_1 \\ X_{2j} &\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2), \quad j = 1, \ldots, n_2 \end{aligned}$$

siendo $n = n_1 + n_2$ el tamaño total.

(c) Las ML-estimaciones de θ se muestran a continuación:

- *En* $\Theta_0 = \{(\mu, \mu, \sigma^2)^t \,/\, \mu \in \mathbb{R},\, \sigma^2 > 0\}$*:*

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mu} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_1} x_{1k} + \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}\right) = \frac{1}{n}\left(n_1\,\overline{x}_{1\bullet} + n_2\,\overline{x}_{2\bullet}\right),\\
\widehat{\sigma}_0^2 &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_2}(x_{1k}-\widehat{\mu}_0)^2 + \sum_{j=1}^{n_1}(x_{2j}-\widehat{\mu}_0)^2\right)
\end{aligned}
$$

- *En* $\Theta = \{(\mu_1, \mu_2, \sigma^2)^t \,/\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\, \sigma^2 > 0\}$*:*

$$
\widehat{\mu}_1 = \overline{x}_{1\bullet}, \qquad \widehat{\mu}_2 = \overline{x}_{2\bullet} \qquad \widehat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n_1}(x_{1k}-\overline{x}_{1\bullet})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\overline{x}_{2\bullet})^2\right)
$$

Sea $x = (x_1, x_2)^t$*. Según la sección* 4.2.2(b)*, se calcula* $\lambda(x)$ *como cociente:*

$$
\begin{aligned}
\lambda(x) &= \frac{L(\widehat{\theta})}{L(\widehat{\theta}_0)}\\
&= \frac{(2\pi\widehat{\sigma}^2)^{-n/2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\widehat{\sigma}^2}\left(\sum_{k=1}^{n_1}(x_{1k}-\overline{x}_{1\bullet})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\overline{x}_{2\bullet})^2\right)\right\}}{(2\pi\widehat{\sigma}_0^2)^{-n/2}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2\widehat{\sigma}_0^2}\left(\sum_{k=1}^{n_2}(x_{1k}-\widehat{\mu}_0)^2 + \sum_{j=1}^{n_1}(x_{2j}-\widehat{\mu}_0)^2\right)\right\}}\\
&= \left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\widehat{\sigma}^2}\right)^{n/2}\\
&= \left(\frac{\sum_{k=1}^{n_1}(x_{1k}-\overline{x}_{1\bullet})^2 + n_1(\overline{x}_{1\bullet}-\widehat{\mu}_0)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\overline{x}_{2\bullet})^2 + n_2(\overline{x}_{2\bullet}-\widehat{\mu}_0)^2}{\sum_{k=1}^{n_1}(x_{1k}-\overline{x}_{1\bullet})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\overline{x}_{2\bullet})^2}\right)^{n/2}
\end{aligned}
$$

Reescribiendo

$$
\begin{aligned}
n_1(\overline{x}_{1\bullet}-\widehat{\mu}_0)^2 + n_1(\overline{x}_{2\bullet}-\widehat{\mu}_0)^2 &= \frac{n_1\,n_2^2}{n^2}(\overline{x}_{1\bullet}-\overline{x}_{2\bullet})^2 + \frac{n_2\,n_1^2}{n^2}(\overline{x}_{2\bullet}-\overline{x}_{1\bullet})^2\\
&= \frac{n_1\,n_2}{n}(\overline{x}_{2\bullet}-\overline{x}_{1\bullet})^2
\end{aligned}
$$

se obtiene que la LR-estadística tiene valores

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1, x_2) &= \frac{L(\widehat{\theta})}{L(\widehat{\theta}_0)} = \left(1 + \frac{\frac{n_1\, n_2}{n}(\overline{x}_{2\bullet} - \overline{x}_{1\bullet})^2}{\sum\limits_{k=1}^{n_1}(x_{1k} - \overline{x}_{1\bullet})^2 + \sum\limits_{j=1}^{n_2}(x_{2j} - \overline{x}_{2\bullet})^2}\right)^{n/2} \\
&= \left(1 + \frac{T^2(x_1, x_2)}{n-2}\right)^{n/2}
\end{aligned}$$

y es una función estrictamente creciente de $|T(x)|$, siendo

$$T(X) \;:=\; T(X_1, X_2) \;=\; \frac{\overline{X}_{2\bullet} - \overline{X}_{1\bullet}}{\sqrt{\frac{S^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}}$$

siendo

$$S^2 \;=\; \frac{1}{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n_1}(X_{1k} - \overline{X}_{1\bullet})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(X_{2j} - \overline{X}_{2\bullet})^2\right)$$

la llamada varianza muestral combinada.

(d) Bajo $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, el estadístico $T(X)$ tiene distribución t de Student con $n-2$ grados de libertad (véase el teorema 2.5.10(c) de LLinás [5]). Por lo tanto, según la sección 4.2.2(a), se rechaza H_0 si y solo si $|T(x_1, x_2)| \geq c > 0$. Ahora bien, se determina c como valor crítico de

$$P(|T(x_1, x_2)| \geq c \,/\, H_0) \;=\; 2\,P(T(x_1, x_2) \geq c) \;=\; \alpha,$$

para un nivel α dado o se calcula el P-valor como

$$P\text{-valor} \;=\; P\big(|T(X_1, X_2)| \;>\; |T(x_1, x_2)|\big) \;=\; 2\,P\big(T(X_1, X_2) \;>\; |T(x_1, x_2)|\big)$$

para la observación

$$(x_1^t, x_2^t) = (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}, x_{21}, \ldots, x_{2n_2})^t$$

Obsérvese que aquí se ha utilizado la simetría de la distribución t de Student alrededor del origen. ◄

✍ Ejercicios

4.1 Para el ejemplo 4.1.3 con $n = 20$, calcule la probabilidad del error de tipo II, para las pruebas a nivel de $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$ y $\alpha = 0,1\%$. ¿Cómo se pueden interpretar, en este ejemplo, los errores del tipo I y II? ¿Qué significan los valores concretos para las probabilidades correspondientes?

4.2 (a) Haga una prueba a nivel del $\alpha = 5\%$ para el ejemplo 4.1.3 con $n = 20$, para las siguientes hipótesis: $H_0 : p = 0,7$ vs $H_1 : p = 0,5$.

(b) Calcule la probabilidad del error de tipo II. Interprete los valores y compare con el ejercicio 4.1.

(c) ¿Por qué no tiene efecto el intercambio de hipótesis y alternativa en el caso de que se controlen las probabilidades de los dos tipos de errores por el mismo nivel $\alpha = \beta$?

4.3 (a) Haga una prueba a nivel del $\alpha = 5\%$ para el ejemplo 4.1.3 con $n = 20$, para las siguientes hipótesis: $H_0 : p = 0,5$ vs $H_1 : p = 0,6$.

(b) Calcule la probabilidad del error de tipo II. Interprete esta situación y compare con el ejercicio 4.1.

(c) Para la alternativa de la parte (a), haga una prueba de hipótesis controlando las probabilidades de los errores de tipo I con $\alpha = 1\%$ y de tipo II con $\beta = 5\%$ y compare con el resultado del ejemplo 4.1.3.

4.4 Repita los incisos (a) y (b) del ejemplo 3, pero utilizando la aproximación a una normal (con corrección).

4.5 Para el ejemplo 4.1.3, haga pruebas de hipótesis a nivel de $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$ y $\alpha = 0,1\%$ con la modificación de escoger una muestra de $n = 5$. Interprete los resultados.

4.6 Para el ejemplo 4.1.3, haga pruebas de hipótesis a nivel de $\alpha = 5\%$, $\alpha = 1\%$ y $\alpha = 0,1\%$ con la modificación de escoger una muestra de $n = 900$. Calcule la probabilidad de cometer un error de tipo II e interprete los resultados.

4.7 Para el ejemplo 4.1.3, muestre que la función de potencia $\mathcal{P}(p)$ es creciente entre los valores $\mathcal{P}(0)$ y $\mathcal{P}(1)$ con:

(a) $\mathcal{P}(p) = \sum_{k=c}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, usando la distribución exacta.

(b) $\mathcal{P}(p) \approx 1 - \Phi\left(\frac{c - np - 0,5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$, usando la aproximación normal.

(c) ¿Qué consecuencias tienen los resultados anteriores para el ejemplo 4.1.3 y los ejercicios correspondientes?

4.8 Una prueba de hipótesis está dada por:

(i) La hipótesis $H_0 : \mu = 0$ y la alternativa $H_1 : \mu > 0$, siendo μ la esperanza de una variable de interés, de la cual se conoce su varianza σ^2.

(ii) Una muestra de tamaño n de variables muestrales $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ para la variable de interés.

(iii) El estadístico de prueba $T(X) = \overline{X}$ tal que se rechaza H_0 si y sólo si $T(x) \geq c$.

Con base en lo anterior, resuelva los siguientes incisos:

(a) Muestre que $\mathcal{P}(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,(c-\mu)}{\sigma}\right)$ es la función de potencia.

(b) Muestre que $\mathcal{P}$ crece entre el valor mínimo $\mathcal{P}(0)$ y $\lim\limits_{\mu\to\infty} \mathcal{P}(\mu) = 1$.

(c) ¿Cómo se obtiene el valor crítico $c = c(n)$ de una prueba al nivel del $\alpha = 5\%$?

(d) ¿Por qué no es posible hacer grande el valor $\mathcal{P}(\mu)$ para tales valores de la alternativa que están "cerca" del valor de la hipótesis, ni tampoco para n grande? ¿Qué implicaciones tiene esto para la probabilidad de los errores de tipo I y II?

4.9 Considere la situación del ejercicio 3.1. Suponga que se tiene interés en verificar si hay una diferencia "significativa" entre los dos somníferos. La variable de interés es entonces la diferencia entre las horas que se duerme con somnífero 1 y con somnífero 2.

(a) ¿Cuál es el resultado de la prueba de hipótesis, según el ejercicio 4.8, para los datos del ejercicio 3.1 si se toma como valor fijo para σ^2 el valor 1,51.

(b) ¿Cambia algo si se cambia al nivel α? ¿Cuál es el P-valor? ¿Cómo se interpreta?

(c) Calcule la función potencia $\mathcal{P}(\mu)$ para $\mu = 0,1$. ¿Qué significa esto para la probabilidad del error de tipo II para todos los $\mu \geq 0,1$?

(d) Determine el tamaño n tal que la probabilidad de cometer el error de tipo I sea igual a $\alpha = 5\%$ y la de cometer un error de tipo II, para $\mu \geq 0,1$, sea igual a $\beta = 5\%$. ¿Por qué basta considerar sólo los valores $\mu \geq 0,1$ de la alternativa?

4.10 Considere una prueba de hipótesis de dos colas, tomando en el ejercicio 4.8 la alternativa $H_1 : \mu \neq 0$.

(a) ¿Cuál es un estadístico de prueba razonable que defina la región de rechazo de la hipótesis H_0?

(b) Determine la expresión para la función de potencia $\mathcal{P}(\mu)$.

(c) Muestre que $\mathcal{P}$ crece para $\mu > 0$ y decrece para $\mu < 0$.

(d) ¿Cómo se modifica la parte (d) del ejercicio 4.9?

4.11 Si en el ejemplo 4.2.1 se usa como alternativa $H_1 : \theta \geq 0,7$, muestre que la LR-prueba sigue siendo equivalente a la prueba del ejemplo 4.1.3. **Sugerencia:** Siga los siguientes pasos:

(a) $L(\theta)$ es cóncava con máximo para $\theta = \overline{x}$.

(b) Si $\overline{y} \leq 0,7$, entonces se obtiene inmediatamente el resultado.

(c) Si $0,7 < \overline{x} < 1$, entonces $\lambda(x)$ es una función estrictamente creciente de $\overline{x}$.

4.12 Considere la situación del ejercicio 3.1. Suponga que se tiene interés (como en el ejercicio 4.9) en verificar si hay una diferencia "significativa" entre los dos somníferos.

(a) Haga una prueba t para una muestra, tomando como variables muestrales las diferencias

$$Y_k = Y_{1k} - Y_{2k} \;\sim\; \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad k = 1, 2 \ldots, 10$$

para la hipótesis $H_0 : \mu = 0$ contra la alternativa $H_1 : \mu > 10$, siendo $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Compare el procedimiento y el resultado de la prueba usada en los incisos (a) y (b) del ejercicio 9.

(b) Usando el resultado de la parte (f) del ejercicio 3.1, ¿por qué no es justificado aplicar una prueba t para dos muestras Y_{1k} y Y_{2k}, con $k = 1, \ldots, 10$, para la hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (contra la hipótesis alternativa $H_1 : \mu_1 > \mu_2$)?

4.13 Suponga que en el ejemplo 4.2.2, $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ se reemplaza por alguna de las dos modificaciones:

(i) $H_0 : \mu_1 \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 > \mu_0$,

(ii) $H_0 : \mu_1 = \mu_0$ vs $H_1 : \mu_1 \neq \mu_0$

Muestre que:

(a) La LR-prueba de (i) rechaza H_0 si y sólo si $T(x) \geq c$. **Sugerencia:** Haga uso del hecho que

$$\sup_{\mu \leq \mu_0} P\big(T(X) \geq c \,/\, \mu\big) \;=\; P\big(T(X) \geq c \,/\, \mu = \mu_0\big)$$

(b) La LR-prueba de (ii) rechaza H_0 si y sólo si $|T(x)| \geq c$.

4.14 Para una prueba t para dos muestras como en el ejemplo 4.2.3, derive las fórmulas para las ML-estimaciones:

(a) $\widehat{\mu}_0$ para μ y $\widehat{\sigma}_0^2$ para σ^2 en Θ_0.

(b) $\widehat{\mu}_1$ para μ_1, $\widehat{\mu}_2$ para μ_2 y $\widehat{\sigma}^2$ para σ^2 en Θ.

4.15 Suponga que en el ejemplo 4.2.3, $H_0 : \mu = \mu_1$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_2$ se reemplaza por alguna de las dos modificaciones:

(i) $H_0 : \mu_1 = \mu_1$ vs $H_1 : \mu_1 < \mu_2$,

(ii) $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ vs $H_1 : \mu_1 < \mu_2$

En ambos caso, muestre que la LR-prueba rechaza H_0 si y sólo si $T(x_1, x_2) \geq c > 0$. **Sugerencia:** Haga uso del hecho que

$$\sup_{\mu_1 \geq \mu_1} P\big(T(X_1, X_2) \geq c \,/\, \mu_1, \mu_2\big) \;=\; P\big(T(X_1, X_2) \geq c \,/\, \mu_1 = \mu_2\big)$$

4.16 Considere el problema que se refiere al hecho de conocer si cierto tratamiento a una tierra aumenta o no la producción. Suponga que se trataron 5 tierras con 500 libras de cierto material orgánico en la época de lluvia anterior a la cosecha y se midió después la producción y_{2k}. En tierras de control, no tratadas con el material orgánico, se midió la producción y_{1k}. Resultaron los siguientes datos:

y_{1k}	794	1800	576	411	897
y_{2k}	2012	3498	2092	2477	1808

Haga una prueba t para dos muestras para determinar si el tratamiento mejora la producción. ¿Cuál pareja (H_0, H_1) del ejemplo 4.2.3 o del ejercicio 4.15 es la más adecuada?

4.17 Una prueba t de independencia lineal. Al igual que en el ejemplo 4.2.3, considere un problema caracterizado por dos variables. Pero, a diferencia de ese ejemplo en donde la prueba t se basa en observar independendientemente una muestra para cada variable (de tamaños iguales o desiguales como en el ejercicio 4.16), ahora se trata de problemas en los cuales se presume independencia entre las dos variables. Para verificar esto, se puede hacer la siguiente *prueba t de independencia*:

(a) Se hace la hipótesis $H_0 : \rho = 0$ vs $H_1 : \rho \neq 0$, siendo ρ el supuesto coeficiente de correlación entre las dos variables de interés. Sobre las esperanzas μ_1 y μ_2 y las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 no se supone nada. O sea, el parámetro es:

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^t, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \quad \sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0, \quad \rho \in (-1, 1)$$

(b) Se observa una muestra aleatoria bidimensional $(Y_{1i}, Y_{2i})^t$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ y se supone que es bi-normales de la forma como en el ejercicio 2.22 y donde los n vectores sí son independientes entre sí.

(c) Muestre que la LR-estadística es

$$\lambda \;=\; \lambda(Y_1, Y_2) \;=\; \frac{1}{\sqrt{(1-\widehat{\rho})^n}}$$

siendo $Y_1 = (Y_{11}, \ldots, Y_{1n})^t$, $Y_2 = (Y_{21}, \ldots, Y_{2n})^t$ y

$$\widehat{\rho} \;=\; \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i} - \overline{Y}_{1\bullet})(Y_{2i} - \overline{Y}_{2\bullet})}{\sqrt{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i} - \overline{Y}_{1\bullet})^2\right]\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{2i} - \overline{Y}_{2\bullet})^2\right]}}$$

(d) Muestre que para el t-estadístico

$$T \;:=\; T(Y_1, Y_2) \;=\; \frac{\widehat{\rho}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\widehat{\rho}^2}}$$

es válido que $|T|$ es una función estrictamente creciente de λ. Es decir, la LR-prueba rechaza H_0 con base en (y_1^t, y_2^t) si y sólo si $|T(y_1, y_2)| \geq c > 0$, siendo c un valor crítico según el criterio del error de tipo I o el del P-valor. **Sugerencia:** Use el resultado (sin demostración): Bajo $H_0 : \rho = 0$ se cumple que $T \sim \mathcal{T}(n-2)$.

4.18 Considere los datos del ejercicio 3.1. ¿Cuál es el resultado de la prueba t de independencia? Interprete sus resultados. **Sugerencia:** Haga uso del valor $\widehat{\rho}$ calculado en la parte (f) del ejercicio 3.1.

4.19 Considere los siguientes datos da un experimento que se hizo con 10 hombres midiendo su nivel de colesterol en la sangre (y_{1i}) y el cociente "peso/talla" (y_{2i}):

y_{1i}	254	240	279	284	315	250	298	384	310	337
y_{2i}	2,71	2,96	2,62	2,19	2,68	2,64	2,37	2,61	2,12	1,94

¿Cuál es el resultado de la prueba t de independencia? Interprete sus resultados.

4.20 Una prueba F para la igualdad de varianzas. Al igual que en el ejemplo 4.2.3, considere un problema caracterizado por dos variables, independientes entre sí. La prueba t de ese ejemplo se basa en suponer que las varianzas de las dos variables son iguales. Para verificar esto se puede hacer la siguiente "prueba F":

(a) Se hace la hipótesis $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, por ejemplo, tomando como parámetro

$$\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^t, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \quad \sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$$

(b) Se observan dos muestras aleatorias independientemente, una para cada variable y se supone que

$$\begin{aligned} Y_{1k} &\sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad k = 1, 2, \ldots, n_1 \\ Y_{2j} &\sim N(\mu_2, \sigma_2^2), \quad j = 1, 2, \ldots, n_2 \end{aligned}$$

siendo $n = n_1 + n_2$ el tamaño total.

(c) Muestre que la LR-estadística es

$$\lambda = \lambda(Y_1, Y_2) = \frac{\sqrt{(n_1 F + n_2)^n}}{\sqrt{n^n F^{n_1}}}$$

siendo

$$F = F(Y_1, Y_2) = \frac{\sum_{k=1}^{n_1} (Y_{1k} - \overline{Y}_{1\bullet})^2 / n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_{2j} - \overline{Y}_{2\bullet})^2 / n_2} = \frac{\widehat{\sigma}_1^2}{\widehat{\sigma}_2^2}$$

Sugerencia: Muestre los siguientes pasos:

(i) $\widehat{\mu}_1 = \overline{Y}_{1\bullet}$ y $\widehat{\mu}_2 = \overline{Y}_{2\bullet}$ son las ML-estimaciones de μ_1 y μ_2, respectivamente, sin importar si se hace o no la hipótesis H_0.

(ii) $\widehat{\sigma}_1^2$ y $\widehat{\sigma}_2^2$ son las ML-estimaciones de σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, sin hacer la hipótesis H_0.

(iii) Si $\sigma^2 := \sigma_1^2 = \sigma_2^2$, entonces la ML-estimación de σ^2 bajo la hipótesis H_0 viene dada por:

$$\widehat{\sigma}^2 \;=\; \left(\sum_{k=1}^{n_1} (Y_{1k} - \overline{Y}_{1\bullet})^2 \;+\; \sum_{j=1}^{n_2} (Y_{2j} - \overline{Y}_{2\bullet})^2 \right) /n$$

(d) Muestre que para $F > 1$, la LR-estadística λ es una función estrictamente creciente de F. Es decir, la LR-prueba rechaza H_0 con base en (y_1^t, y_2^t) si y sólo si $F(y_1, y_2) \geq c > 1$, siendo c un valor crítico según el criterio del error de tipo I o el del P-valor. **Sugerencia:** Aplique el teorema 2.5.11 de LLINÁS [5].

4.21 Como parte de un proceso de ensamblaje, se usa un taladro para hacer agujeros en una lámina de metal. Cuando el taladro funciona adecuadamente, los diámetros de estos agujeros tienen una distribución normal con media de 2 centímetros y desviación típica de 0,06 centímetros. Periódicamente, se miden los diámetros de una muestra aleatoria de agujeros para controlar que el taladro funciona según estos parámetros. Asumamos que la desviación típica no varía y que una muestra aleatoria de seis medidas da un diámetro medio de 1,95 centímetros. Pruebe la hipótesis de que la media poblacional es 2 centímetros frente a una alternativa de otro valor. Use un nivel de significancia de 0,05.

4.22 Cuando funciona correctamente, una máquina llena bolsas de azúcar con un contenido, en promedio, de 200 gramos. Una muestra aleatoria de nueve bolsas de azúcar de una remesa presentó los siguientes pesos (en gramos) para el contenido: 208, 201, 197, 203, 209, 214, 197, 197, 206. Asumiendo que la distribucción de la población es normal, contraste al nivel del 5%, la hipótesis nula de que la máquina está funcionando correctamente frente a la alternativa bilateral.

4.23 De una muestra aleatoria de 802 clientes de supermercados, 378 pagaron sus artículos con tarjetas de crédito. Contrástese, al nivel del 10%, la hipótesis nula de que al menos la mitad de los compradores pagan sus artículos con tárjetas de crédito frente a la alternativa de que la proporción poblacional es menor de la mitad.

4.24 El director de personal de una gran compañía de seguros está interesado en reducir la tasa de rotación del personal de apoyo en el procesamiento de datos durante el primer año de contratación. Los registros históricos indican que 25% de todos los nuevos ingresos ya no están contratados al final del año. Se implantaron nuevos programas de capacitación para una muestra de 150 nuevos ingresos y, después de un año, 29 de ellos ya no estaban en la compañía. Para un nivel de significancia de 0,01, ¿existe evidencia de que la proporción de empleados de procesamiento de datos que tomaron la nueva capacitación y ya no están en la empresa sea menor que 0,25?

4.25 Un rector de cierta universidad afirma que la proporción de hombres con auto en el campus es mayor a la proporción de mujeres. Un profesor de estadística se interesa en la afirmación y entrevista aleatoriamente a 100 hombres y a 100 mujeres, encontrando que 34 hombres y 27 mujeres tienen autos en el campus. ¿Puede concluirse con un nivel del 5% que la afirmación del rector es falsa?

4.26 En cierto país, se llevó a cabo un estudió entre los usuarios de teléfonos, un año después de que empresas distintas de la Empresa de Telefonía EMT dispusieran de servicio de comunicación a larga distancia. De una muestra aleatoria de 368 usuarios de la EMT, 92 manifestaron estar intentando aprender más sobre sus opciones, mientras que para una muestra aleatoria independiente de 116 usuarios de otras empresas, 37 manifestaron lo mismo. Contraste, al nivel de significancia del 5%, la hipótesis nula de que las proporciones poblacionales son iguales frente a una alternativa bilateral.

4.27 Un equipo médico midió el nivel de cierto producto químico en la sangre de 15 sujetos antes y después afrontar una situación que producía ansiedad. La tabla de abajo muestra los resultados. Con base en esos datos y al nivel de 0,05, verifíquese si las situaciones que producen ansiedad aumentan el nivel de este producto químico en la sangre. Suponga que las poblaciones en cuestión están normalmente distribuidas.

Par	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Antes (y_i)	8	15	20	18	12	10	22	18	7	14	7	20	9	17	14
Después (x_i)	28	10	15	14	12	21	25	22	11	16	10	27	10	22	24

4.28 En un establecimiento escolar suburbano, se seleccionó al azar una muestra aleatoria de 25 alumnos de quinto grado (grupo 1) de una población de estudiantes perteneciente a familias en que ambos padres trabajan. Se seleccionó también una muestra aleatoria al azar de 15 estudiantes (grupo 2) del mismo grado y establecimiento escolar entre aquellos estudiantes que pertenecen a familias en que solamente el padre trabaja. El análisis de los puntajes de rendimiento escolar (en escala de 1 a 100) de los dos grupos dio los siguientes resultados: un puntaje promedio de 78 para el grupo 1 y de 85 para el grupo 2. La experiencia muestra que las poblaciones de puntajes para ambos grupos están distribuidas en forma aproximadamente normal, con varianzas de $\sigma_1^2 = 81$ y $\sigma_2^2 = 25$. Utilizando un nivel de significancia del 5% y con base en estos datos, determínese si es posible concluir que la media de la población de la que se seleccionó el grupo 1 es inferior a la media de la población de la que se seleccionó el grupo 2.

4.29 Se llevó a cabo un estudio que pretendía valorar el efecto de la presencia de un moderador sobre el número de ideas generadas por un grupo. Se observaron cuatro miembros, con y sin moderadores. Para una muestra aleatoria de cuatro grupos con moderador, el número medio de ideas generadas por grupo fue de 78, con una desviación típica de 24,4. Al mismo tiempo, que para una muestra aleatoria independiente de cuatro grupos sin moderador, el número medio de ideas generadas por grupo fue de 63,5, con una desviación típica de 20,2. Asumiendo que las distribuciones poblacionales son normales con igual varianza, contrástese la hipótesis nula de que las medias poblacionales son iguales frente a la alternativa de que la verdadera media es mayor para los grupos con moderador. Use un nivel de significancia del 10%.

4.30 Se llevó a cabo un experimento para comparar el deterioro abrasivo de dos materiales laminados diferentes. Para este menester, se probaron doce piezas del material 1, exponiendo cada una a una máquina para medir el deterioro. De la misma manera, se probaron diez piezas del material 2. En cada caso, se observó la profundidad del deterioro. Las muestras del material 1 dieron un deterioro promedio (registrado) de 85 unidades con una desviación estándar muestral de 4, mientras que las del material 2 dieron un promedio de 81 y una desviación estándar muestral de 5. ¿Puede concluirse que el deterioro abrasivo del material 1 excede al del material 2 por más de 2 unidades? Asúmase que las poblaciones son aproximadamente normales con varianzas iguales.

4.31 El departamento de zoología de cierto instituto llevó a cabo un estudio para estimar la diferencia en la cantidad de cierta sustancia química medida en dos estaciones diferentes de un río. La sustancia se mide en miligramos por litro y se reunieron 15 muestras de la estación 1 y 12 de la estación 2. Las 15 muestras de la estación 1 tuvieron un contenido promedio de sustancia química de 3,84 miligramos por litro y una desviación estándar de 3,07 miligramos por litro, mientras que las 12 muestras de la estación 2 tuvieron un contenido promedio de 1,49 miligramos por litro y una desviación estándar de 0,80 miligramos por litro. Determínese si los contenidos promedios reales de sustancia en estas dos estaciones son diferentes, suponiendo que las observaciones vienen de poblaciones normalmente distribuidas con varianzas diferentes.

4.32 Un empresario está interesado en conocer los efectos sobre las ventas de unos costosos planes de publicidad para sus productos. El empresario plantea vender 20 productos diferentes y elige aleatoriamente diez de ellos para aplicarles el plan de publicidad más costoso. A los diez restantes se les hace una publicidad sencilla. Para aquellos con publicidad cara, el promedio de ventas durante el primer año fue de 9,254 millones de pesos con una desviación típica de 2,107 millones de pesos. Para los productos con publicidad tradicional, el promedio de venta durante el primer año fue de 8,167 millones de pesos con una desviación típica de 1,681 millones de pesos. Asumiendo que las dos poblaciones tienen distribución normal con la misma varianza, contraste la hipótesis nula de que las dos medias poblacionales son iguales frente a la alternativa de que la verdadera media es mayor para los productos con publicidad cara.

4.33 Con el fin de cumplir las normas establecidas, es importante que la varianza en el porcentaje de impurezas de unas remesas de productos químicos no supere el 4%. Una muestra aleatoria de 20 envíos evidenció una varianza muestral de 5,62 en el porcentaje de impureza. Contrástese la hipótesis nula de que la varianza de la población no es mayor que 4. Supóngase que la distribución de la población es normal.

4.34 Al probar la diferencia en el desgaste abrasivo de los dos materiales en el ejercicio 4.30, se asumió que las varianzas poblacionales desconocidas eran iguales. ¿Es esta justificación correcta?

4.35 Una fábrica de queso verifica continuamente el nivel de contenido graso de su leche. El porcentaje de grasa no debe desviarse mucho del 2% (una desviación estándar del 10% es aceptable). Se obtuvo una muestra de 20 empaques de queso y se registró el porcentaje de grasa en cada uno. Los resultados fueron:

1,85	2,25	2,01	1,90	1,97	1,80	2,05	2,23	1,65	1,86
2,02	2,09	2,04	2,07	2,14	1,93	2,08	2,17	1,91	1,93

(a) Construya un intervalo del 95% de confianza para la varianza de porcentajes de grasa respecto al 2%.

(b) Haga una prueba al nivel del 5% para determinar si la varianza en los porcentajes de grasa excede el 1%.

4.36 Cuando un proceso de producción de bolas de rodamiento funciona correctamente, el peso de las bolas tiene una distribución normal con media 5 gramos y desviación típica 0,1 gramos. Al llevarse a cabo una modificación del proceso, el director de la fábrica sospecha que esto ha incrementado el peso medio de las bolas producidas, sin modificar la desviación típica. Se toma, entonces, una muestra aleatoria de 16 bolas.

(a) ¿Qué condición deben cumplir los valores del peso medio muestral $\overline{X}$ para que $H_0 : \mu = 5$ no se rechace en favor de la alternativa $H_1 : \mu > 5$ usando un nivel de significancia de 0,05?

(b) Determine la probabilidad de que H_0 no sea rechazada si el verdadero peso medio es 5,05 gramos.

(c) Halle la potencia del contraste cuando el verdadero peso medio es 5,05 gramos.

4.37 Dos empresas diferentes de telefonía celular desean posicionarse en el mercado. Denote por p la proporción de suscriptores potenciales registrados que prefieren la primera empresa sobre la segunda y compruebe $H_0 : p = 0,5$ contra $H_1 : p \neq 0,5$, con base en una muestra aleatoria de 25 individuos. Para lo anterior, sea X la variable aleatoria que representa el número de suscriptores en la muestra que está a favor de la primera empresa y x, el valor observado de X.

(a) ¿Cuál de las siguientes regiones de rechazo es la más adecuada y por qué?

- $A = \{x : x \leq 7 \text{ ó } x \geq 18\}$
- $B = \{x : x \leq 8\}$
- $C = \{x : x \geq 17\}$

(b) En el contexto de este problema, describa cuáles son los errores de tipo I y tipo II.

(c) ¿Cuál es la distribución de probabilidad del estadístico de prueba X cuando H_0 es verdadera? Utilícela para calcular la probabilidad de un error tipo I.

(d) Calcule la probabilidad de un error tipo II para la región seleccionada cuando $p = 0,3$. Hágalo, de nuevo, cuando $p = 0,4$, $p = 0,6$ y $p = 0,7$.

(e) Mediante el uso de la región seleccionada, ¿qué concluye si 6 de los 25 individuos favorecieron a la primera empresa?

4.38 Se ha determinado la altura de cada una de las 16 ventanas construidas por cierto carpintero, obteniéndose una altura promedio de $\overline{x} = 94,32$ centímetros. Suponga que la altura es normal con $\sigma = 1,20$ centímetros.

(a) Pruebe $H_0 : \mu = 95$ contra $H_1 : \mu \neq 95$, utilizando un nivel de 0,01.

(b) Si se utiliza una prueba de nivel 0,01, ¿cuál es $\mathcal{P}(94)$?

4.39 Se proporcionan dos pares de zapatos de fútbol (de marcas A y B) a cada uno de los 20 jugadores que conforman un equipo de cierta ciudad. Después de varias semanas de jugar con los dos pares de zapatos, se le pide a cada jugador que establezca su preferencia. Represente con p la proporción de los jugadores que prefieran los zapatos de marca A en vez de la B, y sea X la cantidad de jugadores que prefieren la marca A. Si los zapatos de marca A son más costosos, examine la hipótesis nula de que a lo sumo 50% de los jugadores prefieren la marca A. Esto se simplifica a $H_0 : p = 0,5$, con la intención de rechazar H_0 sólo si la evidencia de la muestra favorece a la marca A en forma concluyente.

(a) ¿Cuál de las regiones de rechazo $A = \{15, 16, \ldots, 20\}$, $B = \{0, 1, \ldots, 5\}$ o $C = \{0, 1, 2, 3, 17, 18, 19, 20\}$ es la más apropiada y por qué las otras dos no lo son?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de un error tipo I para la región seleccionada de la parte (a)? ¿Especifica ésta la región de una prueba de nivel 0,05? ¿Es la mejor prueba de nivel 0,05?

(c) Si 60% de todos los futbolistas prefieren la marca A, calcule la probabilidad de la parte (a). Hágalo, también, considerando que 80% de todos los futbolistas prefieren la marca A.

(d) Si de 20 jugadores, 13 prefieren zapatos de marca A, ¿debería rechazarse H_0 si se utiliza un nivel de significancia de 0,10?

4.40 Una empresa ha desarrollado un nuevo reloj, utilizando tecnología digital. Sea p la probabilidad de que un reloj de este tipo seleccionado al azar funcione incorrectamente antes de un año de uso normal. La empresa ha determinado continuar con su producción a menos que se determine que p es demasiado grande, para lo cual especifica el valor de frontera aceptable de p en 0,10. Para mayor certeza, la empresa decide someter n de estos relojes a una prueba acelerada (apróximadamente 1 año de su uso normal). Entonces, sea X la variable aleatoria que representa el número entre los n relojes que funcionan incorrectamente antes de que concluya la prueba. Como ya se ha dicho, si $p = 0,10$, la probabilidad de no seguir debe ser a lo sumo 0,10, mientras que si $p = 0,30$ la probabilidad de proseguir debe ser a lo sumo 0,10.

(a) ¿Se puede utilizar $n = 10$?

(b) ¿Cuál es la región de rechazo adecuada para la n seleccionada?

(c) ¿Cuáles son las probabilidades de error al utilizar esta región?

A

Apéndice de tablas

A.1 La función de distribución binomial

La tabla muestra la probabilidad $P(X \leq k) = B(k; n, p)$ de que ocurran máximo k éxitos en n ensayos independientes, cada uno con probabilidad de éxito p.

Estas probabilidades se calculan para $n = 5$, 10, 15, 20 y 25.

(a) Tabla binomial para $n = 5$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,774	0,590	0,328	0,237	0,168	0,078	0,031	0,010	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,977	0,919	0,737	0,633	0,528	0,337	0,188	0,087	0,031	0,016	0,007	0,000	0,000
2	0,999	0,991	0,942	0,896	0,837	0,683	0,500	0,317	0,163	0,104	0,058	0,009	0,001
3	1,000	1,000	0,993	0,984	0,969	0,913	0,812	0,663	0,472	0,367	0,263	0,081	0,023
4	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,990	0,969	0,922	0,832	0,763	0,672	0,410	0,226
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

(b) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 10$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,599	0,349	0,107	0,056	0,028	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,914	0,736	0,376	0,244	0,149	0,046	0,011	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,988	0,930	0,678	0,526	0,383	0,167	0,055	0,012	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,999	0,987	0,879	0,776	0,650	0,382	0,172	0,055	0,011	0,004	0,001	0,000	0,000
4	1,000	0,998	0,967	0,922	0,850	0,633	0,377	0,166	0,047	0,020	0,006	0,000	0,000
5	1,000	1,000	0,994	0,980	0,953	0,834	0,623	0,367	0,150	0,078	0,033	0,002	0,000
6	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,945	0,828	0,618	0,350	0,224	0,121	0,013	0,001
7	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,988	0,945	0,833	0,617	0,474	0,322	0,070	0,012
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,989	0,954	0,851	0,756	0,624	0,264	0,086
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,972	0,944	0,893	0,651	0,401

(c) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 15$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,463	0,206	0,305	0,013	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,829	0,549	0,167	0,080	0,035	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,964	0,816	0,398	0,236	0,127	0,027	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,995	0,944	0,648	0,461	0,297	0,091	0,018	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,999	0,987	0,836	0,686	0,515	0,217	0,059	0,009	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	0,998	0,939	0,852	0,722	0,403	0,151	0,034	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000
6	1,000	1,000	0,982	0,943	0,869	0,610	0,304	0,095	0,015	0,004	0,001	0,000	0,000
7	1,000	1,000	0,996	0,983	0,950	0,787	0,500	0,213	0,050	0,017	0,004	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,999	0,996	0,985	0,905	0,696	0,390	0,131	0,057	0,018	0,000	0,000
9	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,966	0,849	0,597	0,278	0,148	0,061	0,002	0,000
10	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,991	0,941	0,783	0,485	0,314	0,164	0,013	0,000
11	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,982	0,909	0,703	0,539	0,352	0,056	0,005
12	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,973	0,873	0,764	0,602	0,184	0,036
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,965	0,920	0,833	0,451	0,171
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,995	0,987	0,965	0,794	0,537

(d) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 20$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,358	0,122	0,012	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,736	0,392	0,069	0,024	0,008	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,925	0,677	0,206	0,091	0,035	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,984	0,867	0,411	0,225	0,107	0,016	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,997	0,957	0,630	0,415	0,238	0,051	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	1,000	0,989	0,804	0,617	0,416	0,126	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	0,998	0,913	0,786	0,608	0,250	0,058	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	1,000	0,968	0,898	0,772	0,416	0,132	0,021	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,990	0,959	0,887	0,596	0,252	0,057	0,005	0,001	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	0,997	0,986	0,952	0,755	0,412	0,128	0,017	0,004	0,001	0,000	0,000
10	1,000	1,000	0,999	0,996	0,983	0,872	0,588	0,245	0,048	0,014	0,003	0,000	0,000
11	1,000	1,000	1,000	0,999	0,995	0,943	0,748	0,404	0,113	0,041	0,010	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,979	0,868	0,584	0,228	0,102	0,032	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,942	0,750	0,392	0,214	0,087	0,002	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,979	0,874	0,584	0,383	0,196	0,011	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,949	0,762	0,585	0,370	0,043	0,003
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,984	0,893	0,775	0,589	0,133	0,016
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,965	0,909	0,794	0,323	0,075
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,992	0,976	0,931	0,608	0,264
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,988	0,878	0,642

(e) Probabilidades binomiales acumuladas para $n = 25$

	p												
k	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75	0,80	0,90	0,95
0	0,277	0,072	0,004	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,642	0,271	0,027	0,007	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,873	0,537	0,098	0,032	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,966	0,764	0,234	0,096	0,033	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,993	0,902	0,421	0,214	0,090	0,009	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,999	0,967	0,617	0,378	0,193	0,029	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	1,000	0,991	0,780	0,561	0,341	0,074	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	1,000	0,998	0,891	0,727	0,512	0,154	0,022	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	1,000	1,000	0,953	0,851	0,677	0,274	0,054	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	1,000	1,000	0,983	0,929	0,811	0,425	0,115	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	1,000	1,000	0,994	0,970	0,902	0,586	0,212	0,034	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
11	1,000	1,000	0,998	0,980	0,956	0,732	0,345	0,078	0,006	0,001	0,000	0,000	0,000
12	1,000	1,000	1,000	0,997	0,983	0,846	0,500	0,154	0,017	0,003	0,000	0,000	0,000
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,922	0,655	0,268	0,044	0,020	0,002	0,000	0,000
14	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,966	0,788	0,414	0,098	0,030	0,006	0,000	0,000
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,987	0,885	0,575	0,189	0,071	0,017	0,000	0,000
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,946	0,726	0,323	0,149	0,047	0,000	0,000
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,978	0,846	0,488	0,273	0,109	0,002	0,000
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,926	0,659	0,439	0,220	0,009	0,000
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,971	0,807	0,622	0,383	0,033	0,001
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	0,910	0,786	0,579	0,098	0,007
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,967	0,904	0,766	0,236	0,034
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	0,968	0,902	0,463	0,127
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,993	0,973	0,729	0,358
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,928	0,723

A.2 La función de distribución de Poisson

La función tabulada es la función de distribución acumulada

$$P(k;\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}$$

para algunos valores de λ.

(a) Tabla de Poisson para $\lambda \leq 1$

	λ									
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,905	0,819	0,741	0,670	0,607	0,549	0,497	0,449	0,407	0,368
1	0,995	0,982	0,963	0,938	0,910	0,878	0,844	0,809	0,772	0,736
2	1,000	0,999	0,996	0,992	0,986	0,977	0,966	0,953	0,937	0,920
3	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,994	0,991	0,987	0,981
4	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,996
5	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
6	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

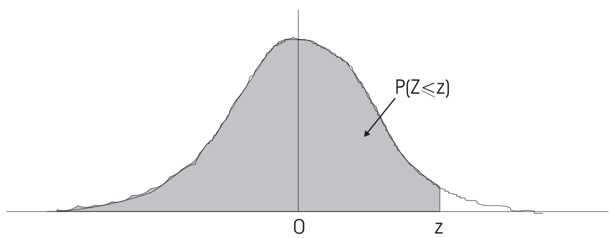
(b) Tabla de Poisson para $2 \leq \lambda \leq 20$

	λ										
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0	0,135	0,050	0,018	0,007	0,002	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,406	0,199	0,092	0,040	0,017	0,007	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000
2	0,677	0,423	0,238	0,125	0,062	0,030	0,014	0,006	0,003	0,000	0,000
3	0,857	0,647	0,433	0,265	0,151	0,082	0,042	0,021	0,010	0,000	0,000
4	0,947	0,815	0,629	0,440	0,285	0,173	0,100	0,055	0,029	0,001	0,000
5	0,983	0,916	0,785	0,616	0,446	0,301	0,191	0,116	0,067	0,003	0,000
6	0,995	0,966	0,889	0,762	0,606	0,450	0,313	0,207	0,130	0,008	0,000
7	0,999	0,988	0,949	0,867	0,744	0,599	0,453	0,324	0,220	0,018	0,001
8	1,000	0,996	0,979	0,932	0,847	0,729	0,593	0,456	0,333	0,037	0,002
9	1,000	0,999	0,992	0,968	0,916	0,830	0,717	0,587	0,458	0,070	0,005
10	1,000	1,000	0,997	0,986	0,957	0,901	0,816	0,706	0,583	0,118	0,011
11	1,000	1,000	0,999	0,995	0,980	0,947	0,888	0,803	0,697	0,185	0,021
12	1,000	1,000	1,000	0,998	0,991	0,973	0,936	0,876	0,792	0,268	0,039
13	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,987	0,966	0,926	0,864	0,363	0,066
14	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,983	0,959	0,917	0,466	0,105
15	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,992	0,978	0,951	0,568	0,157
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,973	0,664	0,221
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,995	0,986	0,749	0,297
18	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,998	0,993	0,819	0,381
19	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,997	0,875	0,470
20	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,917	0,559
21	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,947	0,644
22	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,967	0,721
23	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,981	0,787
24	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,989	0,843
25	1,000	1,000	1,000	0,994	0,970	0,902	0,586	0,212	0,034	0,994	0,888
26	1,000	1,000	1,000	0,998	0,980	0,956	0,732	0,345	0,078	0,997	0,922
27	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,983	0,846	0,500	0,154	0,998	0,948
28	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,922	0,655	0,268	0,999	0,966
29	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,966	0,788	0,414	1,000	0,978
30	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,987	0,885	0,575	1,000	0,987
31	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,946	0,726	1,000	0,992
32	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,978	0,846	1,000	0,995
33	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,926	1,000	0,997
34	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,971	1,000	0,999
35	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,991	1,000	0,999
36	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	1,000	1,000

A.3 La función de distribución normal estándar

La tabla muestra la probabilidad $P(Z \leq z)$ de que una variable estándar Z sea menor que el número z.

Por ejemplo, la probabilidad de que una variable aleatoria estándar sea menor que $1,96$ es $P(Z \leq 1,96) = 0,975$.



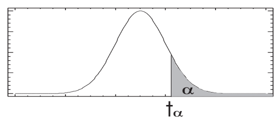
(a) Áreas para valores negativos de Z

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3.1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0352	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0722	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4009	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

(b) Áreas para valores positivos de Z

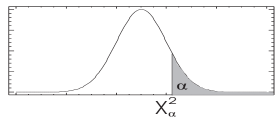
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9278	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9948	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9961	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9971	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

A.4 Valores críticos para la distribución t



	α						
ν	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,620
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	1,383	1.833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,795
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
32	1,309	1,694	2,037	2,449	2,738	3,365	3,622
34	1,307	1,691	2,032	2,441	2,728	3,348	3,601
36	1,306	1,688	2,028	2,434	2,719	3,333	3,582
38	1,304	1,686	2,024	2,429	2,712	3,319	3,566
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,496
60	1,296	1.671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	1,282	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
$\infty(=z)$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

A.5 Distribución chi-cuadrada

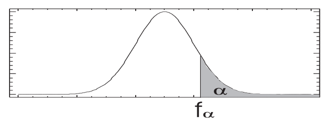


	α									
ν	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,80	0,75	0,70	0,50
1	0,000	0,000	0,000	0,001	0,00393	0,0158	0,0642	0,102	0,148	0,4550
2	0,010	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	0,446	0,575	0,713	1,386
3	0,0717	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,005	1,213	1,424	2,366
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,649	1,923	2,195	3,357
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	2,343	2,675	3,000	4,351
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	3,070	3,455	3,828	5,348
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	3,822	4,255	4,671	6,346
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	4,594	5,071	5,527	7,344
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	5,380	5,899	6,393	8,343
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	6,179	6,737	7,267	9,342
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	6,989	7,584	8,148	10,341
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	7,807	8,438	9,034	11,340
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	8,634	9,299	9,926	12,340
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	9,467	10,165	10,821	13,339
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	10,307	11,036	11,721	14,339
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	11,152	11,912	12,624	15,338
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	12,002	12,792	13,531	16,338
18	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	13,716	14,562	15,352	18,338
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	14,578	15,452	16,266	19,337
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	15,445	16,344	17,182	20,337
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	16,314	17,240	18,101	21,337
23	9,260	10,196	11,293	11,688	13,091	14,848	17,187	18,137	19,021	22,337
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	18,062	19,037	19,943	23,337
25	10,520	11,524	12,692	13,120	14,611	16,473	18,940	19,939	20,867	24,337
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	19,820	20,843	21,792	25,336
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	20,703	21,749	22,719	26,336
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	21,588	22,657	23,647	27,336
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	22,475	23,567	24,577	28,336
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	23,364	24,478	25,508	29,336
31	14,457	15,655		17,538	19,280	21,433				
32	15,134	16,362		18,291	20,072	22,271				
33	15,815	17,073		19,046	20,866	23,110				
34	16,501	17,789		19,806	21,664	23,952				
35	17,191	18,508		20,569	22,465	24,796				
36	17,887	19,233		21,336	23,269	25,643				
37	18,584	19,960		22,105	24,075	26,492				
38	19,289	20,691		22,878	24,884	27,343				
39	19,994	21,425		23,654	25695	28,196				
40	20,706	22,164		24,433	26,509	29,050				

(b) Valores críticos $\chi^2_\alpha(\nu)$ (continuación)

	α									
ν	0,30	0,25	0,20	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,005	0,001
1	1,074	1,323	1,642	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635	7,879	10,827
2	2,408	2,773	3,219	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210	10,597	13,815
3	3,665	4,108	4,642	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345	12,838	16,268
4	4,878	5,385	5,989	5,779	9,488	11,143	11,668	13,277	14,860	18,465
5	6,064	6,626	7,289	9,236	11,070	12,832	13,388	15,086	16,750	20,517
6	7,231	7,841	8,558	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812	18,548	22,457
7	8,383	9,037	9,803	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475	20,278	24,322
8	9,524	10,219	11,030	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090	21,955	26,125
9	10,656	11,389	12,242	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666	23,589	27,877
10	11,781	12,549	13,442	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209	25,188	29,588
11	12,899	13,701	14,631	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725	26,757	31,264
12	14,011	14,845	15,812	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217	28,300	32,909
13	15,119	15,984	16,985	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688	29,819	34,528
14	16,222	17,117	18,151	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141	31,319	36,123
15	17,322	18,245	19,311	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578	32,801	37,697
16	18,418	19,369	20,465	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000	34,267	39,252
17	19,511	20,489	21,615	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409	35,718	40,790
18	20,601	21,605	22,760	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805	37,156	42,312
19	21,689	22,718	23,900	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191	38,582	43,820
20	22,775	23,828	25,038	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566	39,997	45,315
21	23,858	24,935	26,171	29,615	32,671	35,479	36343	38,932	41,401	46,797
22	24,939	26,039	27,301	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289	42,796	48,268
23	26,018	27,141	28,429	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638	44,181	49,728
24	27,096	28,241	29,553	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980	45,558	51,179
25	28,172	29,339	30,675	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314	46,928	52,620
26	29,246	30,434	31,795	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642	48,290	54,052
27	30,319	31,528	32,912	36,741	40,113	43,194	44,140	46,963	49,645	55,476
28	31,391	32,620	34,027	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278	50,993	56,893
29	32,461	33,711	35,139	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588	52,336	58,302
30	33,530	34,800	36,250	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892	53,672	59,703
31				41,422	44,985	48,231		52,190	55,000	
32				42,585	46,194	49,480		53,486	56,328	
33				43,745	47,400	50,724		54,774	57,646	
34				44,903	48,602	51,966		56,061	58,964	
35				46,059	49,802	53,203		57,340	60,272	
36				47,212	50,998	54,437		58,619	61,581	
37				48,363	52,192	55,667		59,891	62,880	
38				49,513	53,384	56,896		61,162	64,181	
39				50,660	54,572	58,119		62,426	65,473	
40				51,805	55,758	59,342		63,691	66,766	

A.6 Valores críticos para la distribución F



(a) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,05$

	ν_1								
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

(b) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,05$

	ν_1									
ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,94	3,87	384	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

(c) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,01$

	ν_1								
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41

(d) Valores críticos $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ para $\alpha = 0,01$

	ν_1									
ν_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99,40	99,42	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	27,23	27,05	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	14,55	14,37	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	10,05	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	3,09	2,96	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	3,06	2,93	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	3,03	2,90	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	3,00	2,87	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	2,47	2,34	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	2,32	2,18	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

A.7 Resumen de distribuciones muestrales, intervalos de confianza y pruebas de hipótesis

Tabla A.1: Distribución de la media muestral

	¿FORMA DE LA POBLACIÓN?	¿ES σ^2 CONOCIDA?	¿TAMAÑO DE LA MUESTRA?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z Ó t?
1.	Normal	Sí	No importa	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
2.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
3.			Pequeño ($n < 30$)	t de Student, $\nu = n-1$ grados de libertad	$t = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
4.	No normal o desconocida	Sí	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
5.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	
6.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$Z = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}$
7.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	

Tabla A.2: Distribución de la proporción muestral y de la diferencia de proporciones muestrales

	¿ESTADÍSTICO?	¿SUPUESTO?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z?
1.	Proporción muestral	$n \geq 30$	Normal	$Z = \frac{\overline{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$
2.		$np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$	Normal	
3.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{(\overline{p}_1-\overline{p}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}+\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$
4.		$n_1p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2p_2 \geq 5$, $n_2(1-p_2) \geq 5$	Normal	

Tabla A.3: Distribución de la diferencias de medias muestrales

	¿FORMA DE LAS POBLACIONES?	¿SON σ_1^2 y σ_2^2 CONOCIDAS?	¿SON σ_1^2 y σ_2^2 IGUALES?	¿TAMAÑO DE AMBAS MUESTRAS?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿Z Ó t?
1.	No normal	Sí	No importa	Grandes $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
2.		No	No importa	Grandes $n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$Z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$
3.	Normal	Sí	No importa	No importa	Normal	$Z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
4.		No	Si	Pequeño $n_1 < 30$, $n_2 < 30$	t de Student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad	$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$, $s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$
5.			No	Pequeño $n_1 < 30$, $n_2 < 30$	t de Student con $\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$ (redondear al entero más cercano)	$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

Tabla A.4: Distribución de la varianza muestral y de la razón de varianzas muestrales

	¿ESTADÍSTICO?	¿FORMA DE LA POBLACIÓN?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿χ^2 Ó F?
1.	Varianza muestral	Normal	Chi-cuadrada con $\nu = n-1$ grados de libertad	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$
2.	Razón de varianzas muestrales	Ambas normales	F de Fisher con $\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$ grados de libertad	$F = \dfrac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ Regla: $F_{1-\alpha}(a,b) = \dfrac{1}{F_\alpha(b,a)}$

Tabla A.5: Intervalos de confianza para la media poblacional

	¿FORMA DE LA POBLACIÓN?	¿ES σ^2 CONOCIDA?	¿TAMAÑO DE LA MUESTRA?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA?
1.	Normal	Sí	No importa	Normal	$\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
2.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
3.			Pequeño ($n < 30$)	t de Student, $\nu = n-1$ grados de libertad	$\overline{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
4.	No normal o desconocida	Sí	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
5.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	
6.		No	Grande ($n \geq 30$)	Normal	$\overline{x} - Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
7.			Pequeño ($n < 30$)	Callejón sin salida	

Tabla A.6: Intervalos para la proporción poblacional y para la diferencia de proporciones poblacionales

	¿ESTADÍSTICO?	¿SUPUESTOS?	¿DISTR. MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA?
1.	Proporción muestral	$n \geq 30$	Normal	$\overline{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \ < \ p \ < \ \overline{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}$
2.		$np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$	Normal	
3.	Diferencia de proporciones muestrales	$n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$	Normal	$(\overline{p}_1 - \overline{p}_2) \ - \ Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)}{n_1} + \frac{\overline{p}_2(1-\overline{p}_2)}{n_2}} \ < \ p_1 - p_2 \ <$ $< \ (\overline{p}_1 - \overline{p}_2) \ + \ Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)}{n_1} + \frac{\overline{p}_2(1-\overline{p}_2)}{n_2}}$
4.		$n_1p_1 \geq 5$, $n_1(1-p_1) \geq 5$, $n_2p_2 \geq 5$, $n_2(1-p_2) \geq 5$	Normal	

Tabla A.7: Intervalos de confianza para la diferencias de medias poblacionales

	¿FORMA DE LAS POBLACIONES?	¿σ_1^2 y σ_2^2 CONOCIDAS?	¿σ_1^2 y σ_2^2 IGUALES?	¿TAMAÑO DE LAS MUESTRAS?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA? (AQUÍ: $\theta := \mu_1 - \mu_2$)
1.	No normal	Sí	No importa	Grandes ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$)	Normal	$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \theta < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
2.		No	No importa	Grandes ($n_1 \geq 30$, $n_2 \geq 30$)	Normal	$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \theta < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$
3.	Normal	Sí	No importa	No importa	Normal	$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \theta < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
4.		No	Si	Pequeño ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$)	t de Student con $\nu = n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad	$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}} < \theta < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}$, $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$
5.			No	Pequeño ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$)	t de Student con $\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1}+\frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$ (redondear al entero más cercano)	$(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \theta < (\overline{x}_1 - \overline{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

Tabla A.8: Intervalos para la varianza poblacional y para la razón de varianzas poblacionales

	¿ESTADÍSTICO?	¿FORMA DE LA POBLACIÓN?	¿DISTRIBUCIÓN MUESTRAL?	¿INTERVALO DE CONFIANZA?
1.	Varianza muestral	Normal	Chi-cuadrada con $\nu = n-1$ grados de libertad	$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$
2.	Razón de varianzas muestrales	Ambas normales	F de Fisher con $\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$ grados de libertad	$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_2, \nu_1)$ Regla: $F_{1-\alpha}(a,b) = \frac{1}{F_\alpha(b,a)}$

Bibliografía & Referencias

[1] Hogg, R., *Introduction to mathematical statistic*. 6th ed. Prentice Hall, 2005.

[2] Larsen, R., *An Introduction to mathematical statistics and its applications*. 4th ed. Prentice Hall, 2006.

[3] Llinás, H.; Rojas, C., *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad*. Barranquilla: Ediciones Uninorte, 2005.

[4] Llinás, H., *Estadística Inferencial*. Barranquilla: Ediciones Uninorte, 2006.

[5] Llinás, H., *Notas de clase: Guía resumida de teoría de probabilidad*. Maestría en Estadística aplicada. Barranquilla, 2009.

[6] Mayorga, H., *Inferencia Estadística*, Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia, 2003.

[7] Rao, C.R., *Linear Stadistical Inference and Its A pliccations*. 2nd Edition, New York: Jonh Wiley & Sons, 1973.

Índice