Problemas de algebra lineal numérica

(1) Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, calcular (si se puede), $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{D}^{-1}$.

(2) Hallar los valores y vectores propios de las matrices del ejercicio anterior. ¿Son diagonalizables? En caso afirmativo, hallar la matriz de semejanza $\mathbf{C}$ tal que nos trasforme la matriz correspondiente en la matriz diagonal de los valores propios y comprobar la relación entre dichas matrices.

(3) Indicar si las matrices del ejercicio anterior son:

a) diagonal dominantes,
b) definidas positivas.

(4) Calcular las normas 1, euclídea y la norma infinito de las matrices de los ejercicios anteriores.

(5) Una matriz es **persimétrica** si es simétrica respecto ambas diagonales. Es decir, la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$, $n \times n$ es **persimétrica** si $a_{ij} = a_{ji} = a_{n+1-i,n+1-j}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Estas matrices se usan en problemas de **Teoría de comunicación**. Consideremos la matriz **persimétrica** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Usando el Teorema de Gersgorin y el hecho de que la matriz $\mathbf{A}$ sea simétrica para demostrar que si λ es el valor propio de $\mathbf{A}$ de módulo mínimo, entonces $|\lambda - 4| = \rho(\mathbf{A} - 4\mathbf{Id})$, siende $\rho(\cdot)$ el radio espectral.
b) Calcular el valor del valor propio de módulo mínimo λ de la matriz $\mathbf{A}$ hallando todos los valores propios de $\mathbf{A} - 4\mathbf{Id}$. Hallar el vector propio correspondiente.

(6) Dada la matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, hallar la matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D}$, donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal.

(7) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices $n \times n$ no singulares. Demostrar que las matrices $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{BA}$ son semejantes. Indicación: considerar la matriz $\mathbf{B}$ como matriz de cambio de base.

(8) Demostrar que si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$ son matrices $n \times n$ tal que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son semejantes y $\mathbf{B}$ y $\mathbf{D}$ son semejantes, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{D}$ son semejantes.