Problemas de métodos de ortogonalización para hallar valores y vectores propios.

(1) Hacer un programa que, dada una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, halle una aproximación de los valores propios de $\mathbf{A}$ usando el método QR con una tolerancia ϵ. Usar el programa anterior para hallar una aproximación de los valores propios de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ con una tolerancia de 0.0001.

(2) La resolución numérica de un determinado tipo de ecuaciones en derivadas parciales requiere la resolución de sistemas lineales cuya matriz del sistema es de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-2\alpha & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1-2\alpha & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 1-2\alpha & \alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha & 1-2\alpha \end{bmatrix}.$$

Se dice que el método de resolución es estable si el radio espectral de dicha matriz es menor que 1. Usando el método QR, averiguar si para $n = 10$, si el método es estable para los siguientes valores de α: $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

(3) Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -5y_1(t) - 2y_2(t), \\ y_2'(t) &= -2y_1(t) + 5y_2(t) + 2y_3(t), \\ y_3'(t) &= 2y_2(t) + 5y_3(t) + y_4(t), \\ y_4'(t) &= y_3(t) - 5y_4(t). \end{aligned}$$

Dicho sistema se puede escribir en forma matricial en la forma siguiente: $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$, con $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ y_4'(t) \end{bmatrix}$. La solución de dicho sistema puede escribirse como:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^{(1)} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \mathbf{v}^{(2)} + c_3 \mathrm{e}^{\lambda_3 t} \mathbf{v}^{(3)} + c_4 \mathrm{e}^{\lambda_4 t} \mathbf{v}^{(4)},$$

donde c_i, $i = 1, 2, 3, 4$ son constantes libres que dependen de las condiciones iniciales del sistema, es decir $y_i(t_0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, λ_i son los valores propios de la matriz $\mathbf{A}$ junto con unos vectores propios $\mathbf{v}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

a) Comprobar que la solución dada por la expresión anterior verifica el sistema de ecuaciones diferenciales.
b) Usando el método QR hallar los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ y λ_4.
c) Usando el método de la potencia inversa hallar unos vectores propios $\mathbf{v}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$.
d) Hallar la solución con condiciones iniciales $\mathbf{y}(0) = (1, 1, 1, 1)^\top$.