Problemas de métodos de ortogonalización para resolver sistemas lineales. Cálculo de inversas y determinantes. Análisis del error

(1) Haz un programa que dado un sistema de ecuaciones, lo resuelva usando la descomposición QR de la matriz del sistema y aplicarlo al siguiente sistema de ecuaciones con 4 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

(2) Dada una matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, demostrar que hallar el determinante de $\mathbf{A}$ a partir de la definición requiere $n! \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$ productos/divisiones y $n! - 1$ sumas/restas. ¿Cuál es el órden de computación si usamos el método de Gauss, es decir, si $T(n)$ representa el número total de operaciones básicas usando el método de Gauss para calcular el determinante de una matriz $n \times n$, cuál es el valor de k tal que $T(n) = O(n^k)$?

(3) Haz un programa que, dada un matriz $\mathbf{A}$, halle halle su inversa y su determinante a partir de la descomposición LU de dicha matriz y aplicarlo a la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, es decir, hallar su determinante y su inversa usando el algoritmo descrito anteriormente.

(4) Demostrar que para toda matriz cuadrada $\mathbf{A}$ y para toda norma matricial $\|\cdot\|$, el número de condición de la matriz $\mathbf{A}$, $\mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ siempre es mayor o igual que 1: $\mu(\mathbf{A}) \geq 1$.

(5) Consideremos un sistema lineal $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Supongamos que perturbamos el sistema anterior de la forma siguiente: $(\mathbf{A} + \delta(\mathbf{A}))(\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x})) = \mathbf{b} + \delta(\mathbf{b})$, con

$$\delta(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix}, \ \delta(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix},$$

con ϵ un valor pequeño. Acotar el error relativo de la solución $\|\mathbf{x}\|$, $\frac{\|\delta(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$, en función de ϵ, fijando una norma vectorial junto con la norma matricial subordinada.