Problemas de métodos directos para resolver sistemas lineales. Descomposición LU y variantes.

(1) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Haz un programa que resuelva un sistema de ecuaciones usando el método LU y aplicarlo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones con 4 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3. \end{aligned}$$

(3) Consideremos la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. Comprobar que no se puede aplicar la descomposición LU a dicha matriz y hallar una factorización de $\mathbf{A}$ de la forma $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{\top}\mathbf{L}\mathbf{U}$, siendo $\mathbf{P}$ una matriz de permutación.

(4) Haz un programa que dada una matriz $\mathbf{A}$ halle la descomposición de Choleski de dicha matriz, es decir, que halle una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\top}$. Aplicarlo a hallar la descomposición de Choleski de la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

(5) Haz un programa que dada una matriz tridiagonal $\mathbf{A}$ halle la descomposición de Crout de dicha matriz y aplicarlo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones tridiagonal:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= -1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 7, \\ 2x_2 + 5x_3 &= 9. \end{aligned}$$

(6) Supongamos que una especie de escarabajo tiene un vida media de 4 años. El $100p_1\%$ sobreviven el primer año, el $100p_2\%$ de los que sobreviven el primer año sobreviven el segundo año y el $100p_3\%$ de los que sobreviven 2 años sobreviven 3 años. Cada hembra de primer año hace que nazcan b_1 nuevos escarabajos hembras; cada hembra de segundo año, b_2; cada hembra de tercer año, b_3 y cada hembra de último año, b_4 nuevos escarabajos hembras. Podemos modelar el comportamiento de la especie usando una matriz $\mathbf{A}$, 4×4 de la forma siguiente: sean $x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)}$ y $x_4^{(t)}$ el número de escarabajos hembras el año t de 1, 2, 3 y 4 años de edad. Entonces el número de escarabajos hembra el año $t+1$ será:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(t+1)} \\ x_2^{(t+1)} \\ x_3^{(t+1)} \\ x_4^{(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(t)} \\ x_2^{(t)} \\ x_3^{(t)} \\ x_4^{(t)} \end{bmatrix}$$

a) Usando la descomposición $\mathbf{LU}$ o la descomposición $\mathbf{P}^\top\mathbf{LU}$ con $b_1 = 0$, $b_2 = \frac{1}{8}$, $b_3 = \frac{1}{4}$, $b_4 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ y $p_3 = \frac{1}{8}$, hallar el número de escarabajos hembra de cada edad que se necesitan si la población de escarabajos hembra al cabo de un año son de 175 de 1 año de edad, 100, de dos años de edad, 50, de tres años de edad y 25 de cuatro años de edad.

b) Repetir el apartado anterior pero cambiando el número de escarabajos hembra al cabo de un año por 100 escarabajos de cada edad.