

Problemas de descomposición en valores singulares.

- (1) Haz un programa que, dada una matriz \mathbf{A} de dimensiones $m \times n$, halle la descomposición SVD o en valores singulares de la matriz y aplicarlo a la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- (2) Sea \mathbf{A} una matriz $m \times n$. Demostrar que el rango de la matriz \mathbf{A} es el mismo que el rango de la matriz \mathbf{A}^\top .
- (3) Demostrar que $\dim(\text{Ker}(\mathbf{A})) = \dim(\text{Ker}(\mathbf{A}^\top))$ si, y sólo si, la matriz \mathbf{A} es cuadrada.
- (4) Sea $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$ la descomposición en valores singulares de una matriz \mathbf{A} . Hallar justificadamente la descomposición en valores singulares de \mathbf{A}^\top .
- (5) Sea \mathbf{A} una matriz $m \times n$ con descomposición en valores singulares $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$. Demostrar que los rangos de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{D} son el mismo.
- (6) Sea \mathbf{A} una matriz cuadrada $n \times n$ con descomposición en valores singulares $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$.
- a) Demostrar que la matriz \mathbf{A} tiene inversa \mathbf{A}^{-1} si, y sólo si, existe \mathbf{D}^{-1} .
 - b) Hallar la descomposición en valores singulares de \mathbf{A}^{-1} si estamos en el caso del apartado anterior.