Problemas de Aproximación a las soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales.

(1) El sistema no lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 & = 0, \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 & = 0, \end{array}\right\}$$

se puede transformar en un problema de punto fijo:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 = & g_1(x_1,x_2) = \frac{x_1^2+x_2^2+8}{10}, \\ x_2 = & g_2(x_1,x_2) = \frac{x_1x_2^2+x_1+8}{10}. \end{array}\right\}$$

a) Demostrar que la función $\mathbf{G} = (g_1, g_2)^\top$ tiene un único punto fijo en el dominio:

$$\mathbf{D} = \{(x_1, x_2)^\top \mid 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5\}.$$

b) Aplicar la iteración del método del punto fijo para aproximar la solución aproximada del sistema no lineal con una tolerancia de 10^{-5} en la norma $\|\cdot\|_2$.

c) ¿Mejora la convergencia aplicar la aceleración de Gauss-Seidel?

(2) Demostrar que las funciones $\mathbf{G} : \mathbf{D} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene un único punto fijo en el dominio correspondiente $\mathbf{D}$. Aplicar la iteración del punto fijo para hallar dicho punto fijo con una tolerancia de 10^{-5} en la norma $\|\cdot\|_2$.

a)

$$\mathbf{G}(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{\cos(x_2x_3)+0.5}{3}, \frac{1}{25}\sqrt{x_1^2+0.3125} - 0.03, -\frac{1}{20}\mathrm{e}^{-x_1x_2} - \frac{10\pi-3}{6}\right)^\top,$$

en el dominio

$$\mathbf{D} = \{(x_1,x_2,x_3)^\top, \mid -1 \leq x_i \leq 1,\ i = 1,2,3\}.$$

b)

$$\mathbf{G}(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{1}{3}\cos(x_2x_3) + \frac{1}{6}, -\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2+\sin(x_3)+1.06} - 0.1, -\frac{1}{20}\mathrm{e}^{-x_1x_2} - \frac{10\pi-3}{6}\right)^\top,$$

en el dominio

$$\mathbf{D} = \{(x_1,x_2,x_3)^\top, \mid -1 \leq x_i \leq 1,\ i = 1,2,3\}.$$

(3) Usar el método de Newton-Raphson con $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ para calcular una aproximación de los sistemas siguientes no lineales con una tolerancia de 10^{-6} usando la norma $\|\cdot\|_2$:

a)

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 & = 0, \\ \left(\frac{4\pi-1}{4\pi}\right)\left(\mathrm{e}^{2x_1} - \mathrm{e}\right) + 4\mathrm{e}x_2^2 - 2\mathrm{e}x_1 & = 0. \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{ll} 5x_1^2 - x_2^2 & = 0, \\ x_2 - 0.25(\sin(x_1)+\cos(x_2)) & = 0. \end{array}\right\}$$

c)

$$\left.\begin{array}{ll} 10x_1 - 2x_2^2 + x_2 - 2x_3 - 5 & = 0, \\ 8x_2^2 + 4x_3^2 - 9 & = 0, \\ 8x_2x_3 + 4 & = 0. \end{array}\right\}$$

(4) El siguiente sistema no lineal:

$$\left.\begin{array}{ll} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} & = 0, \\ x_1^2 - 625x_2^2 - \frac{1}{4} & = 0, \\ \mathrm{e}^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} & = 0, \end{array}\right\}$$

tiene una matriz jacobiana singular en la solución. Es decir, el determinante de la matriz jacobiana en la solución vale 0. Aplicar el método de Newton-Raphson con $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, -1)^\top$ para hallar una solución aproximada con una tolerancia de 10^{-5}. Observar la lentitud de la convergencia.

(5) Usar el método del gradiente descendente con una tolerancia de 0.05 usando la norma $\|\cdot\|_2$ para hallar una aproximación de los sistemas no lineales siguientes:

a)

$$\left.\begin{array}{ll} 3x_1^2 - x_2^2 & = 0, \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 - 1 & = 0. \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{ll} \sin(4\pi x_1x_2) - 2x_2 - x_1 & = 0, \\ \left(\frac{4\pi-1}{4\pi}\right)\left(\mathrm{e}^{2x_1} - \mathrm{e}\right) + 4\mathrm{e}x_2^2 - 2\mathrm{e}x_1 & = 0. \end{array}\right\}$$

(6) Usar el método del gradiente descendente con una tolerancia de 0.005 usando la norma $\|\cdot\|_2$ para hallar el mínimo de las funciones siguientes:

a) $g(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2) + \sin(x_1) + \cos(x_2)$.
b) $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2.5x_2 - x_3 + 2$.