Problemas de problemas de valores iniciales para resolver EDOS. Problemas bien planteados, método de Euler y métodos de Taylor.

(1) Demostrar que los siguientes problemas de valores iniciales tienen solución única y hallar dicha solución:
  a) $y' = \frac{2}{t}y + t^2 \mathrm{e}^t,\ 1 \leq t \leq 2,\ y(1) = 0.$
  b) $y' = \frac{4t^3 y}{1+t^4},\ 0 \leq t \leq 1,\ y(0) = 1.$

(2) Para las funciones siguientes, decir si verifican la condición de Lipschitz respecto la variable y en el dominio $\mathbf{D} = \{(t, y)\ 0 \leq t \leq 1,\ -\infty < y < \infty\}$ y decir si el problema de valores iniciales $y' = f(t, y)\ 0 \leq t \leq 1,\ y(0) = 1$ es un problema bien planteado.
  a) $f(t, y) = \mathrm{e}^{t-y}$.
  b) $f(t, y) = \frac{1+y}{1+t}$.

(3) El método de Picard para resolver un problema de valores iniciales:

$$y' = f(t, y)\ a \leq t \leq b,\ y(a) = y_0,$$

consiste en lo siguiente:
- Sea $y_0(t) = y_0$ para $t \in [a, b]$.
- A continuación definimos la secuencia de funciones $(y_k(t))_{k\geq 0}$ de la forma siguiente:

$$y_k(t) = y_0 + \int_a^t f(\tau, y_{k-1}(\tau))\, d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots$$

  a) Integrar $y' = f(t, y(t))$ y usar la condición inicial para deducir el método de Picard.
  b) Generar $y_0(t),\ y_1(t),\ y_2(t)$, y $y_3(t)$ para el problema de valores inicial:

$$y' = -y + t + 1,\ 0 \leq t \leq 1,\ y(0) = 1.$$

  c) Comparar los resultados obtenidos en la parte b) con la serie de MacLaurin de la solución exacta $y(t) = t + \mathrm{e}^{-t}$.

(4) Usar el método de Euler para aproximar las soluciones de los problemas siguientes de valores iniciales y comparar los resultados obtenidos con la solución exacta.
  a) $y' = \frac{1}{t^2}(\sin(2t) - \sin(2ty)),\ 1 \leq t \leq 2,\ y(1) = 2,\ h = 0.25$. Solución exacta: $y(t) = \frac{1}{2t^2}(4 + \cos 2 - \cos(2t))$.
  b) $y' = -(y + 1)(y + 3),\ 0 \leq t \leq 2,\ y(0) = -2,\ h = 0.2$. Solución exacta: $y(t) = -3 + \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2t}}$.

(5) Considerar el siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = -10y,\ 0 \leq t \leq 2,\ y(0) = 1,$$

con solución exacta $y(t) = \mathrm{e}^{-10t}$. ¿Qué ocurre si aplicamos el método de Euler a este problema con $h = 0.1$? ¿Violan estos resultados el Teorema que nos da una cota del error cometido $|\hat{y}(t_i) - y(t_i)|$ siendo $\hat{y}(t_i)$ la aproximación por el método de Euler?

(6) En el libro *Looking at History Through Mathematics*, Rashevsky considera un modelo para un problema relacionado con la producción de inconformistas en la sociedad. Supongamos que una sociedad tiene una población $x(t)$ individuos en el tiempo t, en años, y todos los inconformistas que se aparean con otros inconformistas tienen descendencia que resulta inconformista mientras que una proporción fija r de otro tipo de descendencia es también inconformista. Sean b y d las tasas de nacimiento y muerte de la sociedad, respectivamente. Entonces si los conformistas y los inconformistas se aparean de forma aleatoria, podemos modelar el problema de hallar $x(t)$ (individuos en total de la sociedad en el año t) y $x_i(t)$ (individuos inconformistas de la sociedad en el año t) por las ecuaciones:

$$\frac{dx(t)}{dt} = (b-d)x(t), \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = (b-d)x_i(t) + rb(x(t) - x_i(t)).$$

a) Sea $p(t) = \frac{x_i(t)}{x(t)}$ la proporción de inconformistas en el año t. Demostrar que la función $p(t)$ verifica la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{p(t)}{dt} = rb(1-p(t)).$$

b) Suponiendo que $p(0) = 0.01$, $b = 0.02$, $d = 0.015$ y $r = 0.1$, aproximar la solución $p(t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 50$ usando un paso $h = 1$ año usando el método de Euler.

c) Resolver la ecuación diferencial para $p(t)$ de forma exacta y comparar el resultado obtenido con el resultado obtenido en el apartado b) para $t = 50$ años.

(7) Usar el método de Taylor de orden dos y orden 4 para aproximar el siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = \frac{1}{t^2}(\sin(2t) - \sin(2ty)),\ 1 \leq t \leq 2,\ y(1) = 2,\ h = 0.25,$$

con solución exacta: $y(t) = \frac{1}{2t^2}(4 + \cos 2 - \cos(2t))$.

(8) Un depósito grande de 3785 litros de agua contiene 22680 gramos de sal disuelta. Supongamos que una concentración de sal en agua de 2.4 gramos de sal por litro entra en el depósito a una velocidad de 18.92 litros por minuto. Supongamos también que hay un agujero en el fondo del depósito y sale líquido a una velocidad de 11.36 litros por minuto.
Sea $x(t)$ la cantidad en gramos de sal en el depósito en el tiempo t, donde $x(0) = 22680$ gramos. La ecuación diferencial que nos da la tasa de cambio $x'(t)$ de sal medida en gramos por minuto vale:

$$x'(t) = 5 \cdot 2.4 - \frac{11.36x(t)}{3785 + (18.92 - 11.36)t} = 12 - \frac{11.36x(t)}{3785 + 7.56t}.$$

a) Halla el minuto en el que el depósito tiene 3822.85 litros de concentración de sal y agua.

b) Usando el método de Taylor de orden 2 con $h = 0.5$ calcula la concentración de sal cuando el depósito tiene 3822.85 litros de concentración de sal y agua.