Problemas de problemas de valores iniciales para resolver EDOS. Métodos multipaso, sistemas y ecuaciones diferenciales de órden superior.

(1) Usar los métodos de Adams-Bashford de órdenes 3 y 4 para aproximar la solución del problema siguiente de valores iniciales. Comparar los resultados con la solución exacta:

$$y' = 1 + \frac{y}{t},\ 1 \leq t \leq 2,\ y(1) = 2,\ h = 0.2,$$

con solución exacta $y(t) = t\ln(t) + 2t$. Para hallar los valores iniciales necesarios usar la solución exacta.

(2) Usar los métodos de Adams-Bashford de órdenes 3 y 4 para aproximar la solución del problema siguiente de valores iniciales. Comparar los resultados con la solución exacta:

$$y' = 1 + \frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2,\ 1 \leq t \leq 3,\ y(1) = 0,\ h = 0.2,$$

con solución exacta $y(t) = t\tan(\ln(t))$. Para hallar los valores iniciales necesarios usar el método de Runge-Kutta 4.

(3) Repetir los ejercicios anteriores pero en lugar de usar los métodos de Adams-Bashford de órdenes 3 y 4, usar los métodos de Adams-Moulton de órdenes 2 y 3.

(4) La ecuación diferencial de Gompertz:

$$N'(t) = \alpha N(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right),$$

sirve para modelar el crecimiento de tumores donde $N(t)$ es el número de células tumorosas en el tiempo t. El número máximo de células soportadas es K y α es un parámetro relacionado con la habilidad proliferativa de las células.
En un determinado tipo de cáncer, $\alpha = 0.0439$, $K = 12000$ y t se mide en meses. En el tiempo inicial $t = 0$, se detecta un tumor con $N(0) = 4000$. Usar el método predictor-corrector de Adams-Bashsord y Adams-Moulton con $h = 0.5$ para hallar el número de meses necesarios para que $N(t) = 11000$, número letal para dicho tipo de cáncer.

(5) Usar el método de Runge-Kutta 4 para sistemas para aproximar las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones y ecuaciones diferenciales de orden superior y comparar los resultados obtenidos con las soluciones exactas:

a)

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2,\ u_1(0) = 1, \\ u_2' &= -u_1 - 2\mathrm{e}^t + 1,\ u_2(0) = 0, \\ u_3' &= -u_1 - \mathrm{e}^t + 1,\ u_3(0) = 1, \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 2$, $h = 0.5$ y solución exacta $u_1(t) = \cos t + \sin t - \mathrm{e}^t + 1$, $u_2(t) = -\sin t + \cos t - \mathrm{e}^t$, $u_3(t) = -\sin t + \cos t$.

b) $t^2y'' + ty' - 4y = -3t$, $1 \leq t \leq 3$, $y(1) = 4$, $y'(1) = 3$, $h = 0.2$ con solución exacta $y(t) = 2t^2 + t + \frac{1}{t^2}$.

(6) El estudio de modelos matemáticos para predecir la dinámica de poblaciones de especies competitivas ha sido el origen en trabajos independientes publicados en el siglo XX por A. J. Lotka y V. Volterra. Consideramos el problema de predecir la población de dos especies, una de ellas es depredadora, a la que llamaremos $x_2(t)$ y la otra es la presa, a la que llamaremos $x_1(t)$.
Supondremos que las presas tienen suficiente alimento y que su tasa de nacimientos en un tiempo t es proporcional al número de presas en dicho tiempo t, es decir $k_1x_1(t)$. La tasa de muertes de las presas depende del número de presas y del número de depredadores que hay en dicho tiempo t. Por simplicidad, supondremos que dicha tasa vale $k_2x_1(t)x_2(t)$.
La tasa de nacimientos de los depredadores depende del alimento disponible en cada instante de tiempo t, $x_1(t)$ y del número de depredadores para su reproducción. Supondremos que dicha tasa vale por tanto $k_3x_1(t)x_2(t)$. Supondremos que la tasa de muertes de los depredadores es simplemente proporcional a los depredadores que hay en el instante de tiempo t, es decir $k_4x_2(t)$.
Como $x_1'(t)$ y $x_2'(t)$ representan las tasas de cambio en las poblaciones de las presas y depredadores, respectivamente, la cantidad de presas y depredadores $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente, verifican el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$x_1'(t) = k_1x_1(t) - k_2x_1(t)x_2(t), \quad x_2'(t) = k_3x_1(t)x_2(t) - k_4x_2(t).$$

Resolver el sistema diferencial anterior usando el método de Runge-Kutta 4 para $0 \leq t \leq 4$ suponiendo que la población inicial de las presas es 1000 y la de depredadores, 500, y el valor de las constantes, $k_1 = 3$, $k_2 = 0.002$, $k_3 = 0.0006$ y $k_4 = 0.5$. Realizar un gráfico de las soluciones de dicho problema y describir el fenómeno representado.