Problemas de problemas de valores iniciales para resolver EDOS. Estabilidad y sistemas Stiff.

(1) Consideremos un problema de valores iniciales,

$$y' = f(t, y),\ a \leq t \leq b,\ y(a) = y_0.$$

a) Demostrar que:

$$y'(t_i) = \frac{-3y(t_i) + 4y(t_{i+1}) - y(t_{i+2})}{2h} + \frac{h^2}{3}y'''(\xi_i),$$

donde t_i es un mallado en el intervalo $[a, b]$ de paso h: $t_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, siendo n el número de valores del mallado y $\xi_i \in (t_i, t_{i+2})$.

b) El apartado anterior nos sugiere el método siguiente multipaso:

$$\hat{y}_{i+2} = 4\hat{y}_{i+1} - 3\hat{y}_i + 2hf(t_i, \hat{y}_i),\ i = 0, 1, \ldots, n-2.$$

Usar dicho método para resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y' = 1 - y,\ 0 \leq t \leq 1,\ y(0) = 0,$$

con $h = 0.1$. Considerar los siguientes valores iniciales $\hat{y}_0 = 0,\ \hat{y}_1 = y(t_1) = 1 - \mathrm{e}^{-0.1}$.

c) Repetir el apartado anterior con $h = 0.01$ y $\hat{y}_1 = 1 - \mathrm{e}^{-0.01}$.

d) Analizar la consistencia, estabilidad y la convergencia del método.

(2) Dado el siguiente método multipaso:

$$\hat{y}_{i+1} = -\frac{3}{2}\hat{y}_i + 3\hat{y}_{i-1} - \frac{1}{2}\hat{y}_{i-2} + 3hf(t_i, \hat{y}_i),\ i = 2, \ldots, n-1,$$

con valores iniciales $\hat{y}_0,\ \hat{y}_1$ y $\hat{y}_2$.

a) Hallar el error local de truncamiento.

b) Estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia.

(3) Resolver el siguiente problema de valores iniciales Stiff usando los métodos de Euler y Runge-Kutta 4 y comparar los resultados con la solución exacta:

$$y' = 15\left(y - \frac{1}{t^3}\right) - \frac{3}{t^4},\ 1 \leq t \leq 3,\ y(1) = 0,\ h = 0.25,$$

con solución exacta: $y(t) = -\mathrm{e}^{-15t} + \frac{1}{t^3}$.

(4) Demostrar que si aplicamos el método de Runge-Kutta 4 a la ecuación diferencial $y' = \lambda y$, la recurrencia que resulta es la siguiente:

$$\hat{y}_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4\right)\hat{y}_i.$$

(5) El método de Euler hacia atrás es el siguiente método implícito:

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + hf(t_{i+1}, \hat{y}_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, n-1$$

Demostrar que dicho método es A-estable.