Problemas de Aproximación de funciones. Aproximación minimax. Polinomios de Chebyschev.

(1) Hallar la aproximación minimax de grado 1 de las funciones siguientes en los intervalos indicados, es decir, hallar el polinomio de grado menor o igual que 1 que aproxima la norma infinito de las funciones siguientes en los intervalos dados:

a) $f(x) = \cos x$, intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
b) $f(x) = \ln x$, intervalo $[1, 2]$.

(2) Halla el polinomio $\hat{P}_3(x)$ de grado menor o igual que 3 que minimize $\|x^4 - 2x^3 + 5x - 1 - P_3(x)\|_\infty$ en el intervalo $[-1, 1]$ entre todos los polinomios $P_3(x)$ de grado menor o igual que 3, es decir, el polinomio $\hat{P}_3(x)$ debe cumplir:

$$\|x^4 - 2x^3 + 5x - 1 - \hat{P}_3(x)\|_\infty = \min_{P(x) \text{ de grado menor o igual que } 3} \|x^4 - 2x^3 + 5x - 1 - P(x)\|_\infty.$$

Indicación: usar que el polinomio mónico de Chebyschev de grado 4 minimiza la norma infinito en el intervalo $[-1, 1]$ entre todos los polinomios mónicos de grado 4.

(3) Interpolar la función $f(x) = \ln(x + 2)$ en el intervalo $[-1, 1]$ considerando como nodos los ceros del polinomio de Chebyschev $T_3(x)$. Hallar una cota del error cometido en cualquier punto del intervalo $[-1, 1]$.

(4) Interpolar la función $f(x) = x\ln(x)$ en el intervalo $[1, 3]$ considerando como nodos los ceros del polinomio de Chebyschev $T_4(x)$ transformados en el intervalo de interpolación $[1, 3]$. Hallar una cota del error cometido en cualquier punto del intervalo $[1, 3]$.

(5) Demostrar que los polinomios de Chebyschev $T_n(x)$, $n \geq 0$, verifican la siguiente ecuación diferencial:

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

(6) Demostrar que los polinomios de Chebyschev $T_n(x)$, $n \geq 0$, verifican:

$$\int_{-1}^{1} \frac{(T_n(x))^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$