Tarea de generalización de la expresión de Adams Moulton.

(1) Demostrar que la expresión $\nabla^k f(t_{i+1}, y(t_{i+1})) = \nabla^k f(t_{i+1}, y_{i+1})$ que aparece en la expresión del método multipaso implícito de los métodos de Adams-Moulton se puede escribir de la forma siguiente:

$$\nabla^k f(t_{i+1}, y_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}),$$

y realizar un programa en `Python` que implemente el método de Adams-Moulton de orden m con m arbitrario.

Solución

Haremos la demostración por inducción.
Si $k = 1$, tenemos que:

$$\nabla f(t_{i+1}, y_{i+1}) = f(t_{i+1}, y_{i+1} - f(t_i, y_i) = \binom{1}{0}(-1)^0 \cdot f(t_{i+1-0}, y_{i+1-0}) + \binom{1}{1}(-1)^1 \cdot f(t_{i+1-1}, y_{i+1-1}),$$

por tanto, la expresión funciona para $k = 1$.
Supongamos cierta la expresión para k, esto es,

$$\nabla^k f(t_{i+1}, y_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}).$$

Hemos de demostrar que la expresión es cierta para $k + 1$:

$$\nabla^{k+1} f(t_{i+1}, y_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}).$$

Veámoslo:

$$\nabla^{k+1} f(t_{i+1}, y_{i+1}) = \nabla^k f(t_{i+1}, y_{i+1}) - \nabla^k f(t_i, y_i).$$

Por hipótesis de inducción tenemos:

$$\nabla^k f(t_{i+1}, y_{i+1}) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}),$$

$$\nabla^k f(t_i, y_i) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i-j}, y_{i-j}).$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{k+1} f(t_{i+1}, y_{i+1}) = \nabla^k f(t_{i+1}, y_{i+1}) - \nabla^k f(t_i, y_i) \\
=&\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}) - \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i-j}, y_{i-j}) \\
=&f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}) - \sum_{j'=1}^{k+1} (-1)^{j'-1} \binom{k}{j'-1} f(t_{i+1-j'}, y_{i+1-j'}),
\end{aligned}
$$

donde en el segundo sumatorio hemos realizado el cambio de índice $j' = j + 1$. Entonces si j iba de $j = 0$ hasta $j = k$, j' irá desde $j' = 0 + 1 = 1$ hasta $j' = k + 1$.
Volviendo a llamar j a j' obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\nabla^{k+1} f(t_{i+1}, y_{i+1}) = f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j-1} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}) - (-1)^k \binom{k}{k} f(t_0, y_0) \\
=&f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j-1} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}) + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} f(t_0, y_0) \\
=&f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \right) f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}) + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} f(t_0, y_0) \\
=&f(t_{i+1}, y_{i+1}) + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}) + (-1)^{k+1} \binom{k+1}{k+1} f(t_0, y_0) \\
=&\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} f(t_{i+1-j}, y_{i+1-j}),
\end{aligned}
$$

tal como queríamos demostrar.