Portafolio 1_Topología

Elvis Mauricio Sánchez Rogel

Curso de Topología

Contents

1 Portafolio 1

1.1 Ejercicio 1 (1.5 pts)

Sea d una distancia definida en un conjunto arbitrario X, sea $k \in \mathbb{R}$.Estudiar para que valores de k la aplicación d' definida como $d'(x, y) = d(x, y) + k$ sería también una métrica.

Demostración:

Claramente hay que comprobar que se cumpla la primera condición de métrica. Para que $d'(x, x) = d(x, x)+k$ sea métrica debe de cumplirse que la distancia $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$, Es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= d'(x, x) \\ 0 &= d(x, x) + k \\ 0 &= 0 + k \\ 0 &= k \end{aligned}$$

Por tanto, el único valor k para que $d'(x, y) = d(x, y) + k$ se una métrica es que sea $k = 0$.

1.2 Ejercicio 2 (1.5 pts)

Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las bolas cerradas son conjuntos cerrados.

Demostración:

Sea $\hat{x} \in X$ y $r > 0$, entonces $\overline{B}(\hat{x}, r) = \{\hat{y} \in X \mid d(\hat{y}, \hat{x}) \leq r\}$ es un conjunto cerrado, pués $X \ \ \overline{B}(\hat{x}, r) = \{\hat{y} \in X \mid d(\hat{y}, \hat{x}) > r\} = A$ es un conjunto abierto.

Para ello demostraremos $X \ \ \overline{B}(\hat{x}, r) = \{\hat{y} \in X \mid d(\hat{y}, \hat{x}) > r\} = A$ es un abierto.

Sea $\hat{y} \in A$, entonces $d(\hat{y}, \hat{x}) > r$, y sea $\epsilon = d(d\hat{x}, \hat{y}) - r > 0$, tomamemos un $\hat{z} \in B(\hat{y}, \epsilon)$, tal que se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{rcl} d(\hat{y},\hat{x}) & \leq & d(\hat{y},\hat{z}) + d(\hat{z},\hat{x}) \\ d(\hat{y},\hat{x}) + r - d(\hat{y},\hat{x}) < d(\hat{y},\hat{x}) - d(\hat{y},\hat{z}) & \leq & d(\hat{z},\hat{x}) \\ r & < & d(\hat{z},\hat{x}) \end{array}$$

Por lo tanto, $\hat{z} \in A$, esto prueba $B(\hat{y},\epsilon) \subset A$, por lo tanto A es un conjunto abierto, probando así que $\overline{B}(\hat{x}, r)$ es cerrado.

1.3 Ejercicio 3 (1.5 pts)

Sea X un conjunto y $p \in X$ un punto arbitrario. Demostrar que la familia $\tau_p = \{U \subset X \mid p \in U\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología

Demostración:

Claramente se observa que el vacío forma parte $\emptyset \in \tau_p$. Por otro lado, $p \in X$, en consecuencia $X \in \tau_p$.

Sea $\{U_j\}_{j\in I} \subset \tau_p$, si $U_j = \emptyset$ para todo $j \in I$, entonces $\bigcup\limits_{j\in J} U_j = \emptyset$, en consecuencia $\bigcup\limits_{j\in J} U_j \in \tau_p$. Por otro lado, si existe $U_i \neq \emptyset$, entonces $p \in U_i$, en consecuencia $p \in \bigcup\limits_{j\in J} U_j$, por lo tanto $\bigcup\limits_{j\in J} U_j \in \tau_p$.

Ahora sea $\{U_j\}_{j=1}^{k} \subseteq \tau_p$, si para algún $i \in \{1, \dots, k\}$ sucede que $U_i = \emptyset$, entonces $\bigcap\limits_{j=1}^{k} U_j = \emptyset$, por tanto $\bigcap\limits_{j=1}^{k} U_j \in \tau_p$. Por otro lado si sucede que $U_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, se tiene que $p \in U_j$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, así que $p \in \bigcap\limits_{j=1}^{k} U_j$, por lo tanto $\bigcap\limits_{j=1}^{k} U_j \in \tau_p$.

1.4 Ejercicio 4 (2 pts)

Se considera el conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Indicar justificadamente si las siguientes familias constituyen topologías en X.

a) $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

b) $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

c) $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$

d) $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{d\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

a) $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

Demostración:

Claramente el vacio $\emptyset$ y el X estan en la topología τ_1.

Por otro lado, las uniones e interseciones:

Unión	Intersección
$\{a\} \cup \emptyset = \{a\}$	$\{a\} \cap \{c,d\} = \emptyset$
$\{a\} \cup \{c,d\} = \{a,c,d\}$	$\{a\} \cap \{a,c,d\} = \{a\}$
$\{a\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\}$	$\{a\} \cap \{a,b,c,d,e\} = \{a\}$
$\{c,d\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\}$	$\{c,d\} \cap \{a,c,d\} = \{c,d\}$
$\{a,c,d\} \cup \{a,b,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$	$\{a,c,d\} \cap \{a,b,c,d,e\} = \{a,c,d\}$
$\{a,b,c,d,e\} \cup \{a,b,c,d,e,f\} = X$	$\{a,b,c,d,e\} \cap \{a,b,c,d,e,f\} = \{a,b,c,d,e\}$

las uniones y las intersecciones de los subconjuntos estan en la topología τ_1. Por lo tanto τ_1 es una topología sobre X

b) $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,e\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d,e\}\}$

Demostración:

Claramente el vacio $\emptyset$ y el X estan en la topología τ_2.

Por otro lado, las uniones e interseciones:

Unión	Intersección
$\{a\} \cup \emptyset = \{a\}$	$\{a\} \cap \{c,d\} = \emptyset$
$\{a\} \cup \{c,d\} = \{a,c,d\}$	$\{a\} \cap \{a,c,e\} = \{a\}$
$\{a\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\}$	$\{a\} \cap \{b,c,d\} = \emptyset$
$\{c,d\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\}$	$\{c,d\} \cap \{a,c,e\} = \{c\}$
$\{a,c,d\} \cup \{a,b,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$	$\{a,c,e\} \cap \{b,c,d\} = \{c\}$
$\{a,b,c,d,e\} \cup \{a,b,c,d,e,f\} = X$	$\{b,c,d\} \cap \{a,b,c,d,e,f\} = \{b,c,d\}$

Como $\{c,d\} \cap \{a,c,e\} = \{c\} \notin \tau_2$. Por lo tanto τ_2 no es una topología sobre X

c) $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{f\}, \{a,f\}, \{a,c,f\}, \{b,c,d,e,f\}\}$

Demostración:

Claramente el vacio $\emptyset$ y el X estan en la topología τ_3.

Por otro lado, las uniones e interseciones:

Unión	Intersección
$\{a\} \cup \emptyset = \{a\}$	$\{a\} \cap \{f\} = \emptyset$
$\{a\} \cup \{f\} = \{a,f\}$	$\{a\} \cap \{a,f\} = \{a\}$
$\{a\} \cup \{a,c,f\} = \{a,c,f\}$	$\{a\} \cap \{b,c,d,e,f\} = \emptyset$
$\{a\} \cup \{b,c,d,e,f\} = X$	$\{f\} \cap \{a,f\} = \{f\}$
$\{a,f\} \cup \{a,c,f\} = \{a,c,f\}$	$\{a,f\} \cap \{a,c,f\} = \{a,f\}$
$\{a,c,f\} \cup \{b,c,d,e,f\} = X$	$\{a,c,f\} \cap \{b,c,d,e,f\} = \{c,f\}$

Como $\{a,c,f\} \cap \{b,c,d,e,f\} = \{c,f\} \notin \tau_3$. Por lo tanto τ_3 no es una topología sobre X

d) $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{d\}, \{a,d\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c,d,e\}\}$

Demostración:

Claramente el vacio $\emptyset$ y el X estan en la topología τ_4.

Por otro lado, las uniones e interseciones:

Unión	Intersección
$\{b\} \cup \emptyset = \{b\}$	$\{b\} \cap \{d\} = \emptyset$
$\{b\} \cup \{a,d\} = \{a,b,d\}$	$\{d\} \cap \{a,d\} = \{d\}$
$\{b\} \cup \{d\} = \{b,d\}$	$\{a,d\} \cap \{a,b,d\} = \{a,d\}$
$\{a,d\} \cup \{a,b,d\} = \{a,b,d\}$	$\{a,d\} \cap \{d\} = \{d\}$
$\{a,b,d\} \cup \{a,b,c,d,e\} = \{a,b,c,d,e\}$	$\{a,f\} \cap \{a,c,f\} = \{a,f\}$
$\{a,d\} \cup X = X$	$\{a,b,d\} \cap \{a,b,c,d,e\} = \{a,b,d\}$

Como $\{b\} \cup \{d\} = \{b,d\} \notin \tau_4$. Por lo tanto τ_4 no es una topología sobre X. ## Ejercico 5 (1.5 pts)

Probar que el conjunto $\mathcal{B} = \{(a,\infty), a \in \mathbb{R}\}$ es una base de topología en $\mathbb{R}$. La topología generada por cada base se llama topología de Kolmogorov.

Sea $x \in \mathbb{R}$,entonces existe $x \in B_o = (a,\infty)$, con $B_o = \{y \in \mathbb{R} \mid y > a\}$, tal que $B_o \in \mathcal{B}$, cumpliendo así, la primera condición.

Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 = (a_1,\infty)$ y $B_2 = (a_2,\infty)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si tomamos $a = max(a_1, a_2)$, tal que se cumple $B_1 \cap B_2 = (a,\infty)$, entonces existe $B_3 = (a,\infty) \in \mathcal{B}$, en consecuencia $x \in B_3 \subset B_1 \cap B2$. Por lo tanto, se ha comprobado la segunda condición.

1.5 Ejercicio 6 (2pts)

Considera $X = \mathbb{R}$. Indicar si los siguientes conjuntos son abiertos y/o cerrados considerando la topología usual τ_u y la topología de Kolmogorov τ_K descrita en el ejemplo anterior.

a) $(0,1)$
b) $(0,1]$
c) $[0,1]$
d) $[1,\infty)$
e) $(-\infty,0]$

a) $(0,1)$

Demostración: Según la topología usual:

Supongamos que $[0,1]$ es cerrado, entonces su $\mathbb{R}\ \ [0,1]$ es abierto, $(-\infty,0)U(1,\infty)$,

1.6 Ejemplo de metricas

Sea X un conjunto no vacio y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface lo siguiente:

a) $d(x,y) = 0$, si y solo si $x = y$
b) $d(x,y) = d(x,z) + d(y,z)$

Probar que es métrica

Demostración:

Sabemos de la primera condición, $d(x,y) = 0$, si y solo si $x = y$.

Por otro lado, comprobaremos la segunda condición de simetría, para ello tenemos:

Sea $z = x \in X$, entonces:

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &\leq d(x,z) + d(y,z) \\
d(x,y) &\leq d(x,x) + d(y,x) \\
d(x,y) &\leq d(y,x)
\end{aligned}
$$

Ahora si $y = z$

$$
\begin{aligned}
d(y,x) &\leq d(y,z) + d(x,z) \\
d(y,x) &\leq d(y,y) + d(x,y) \\
d(y,x) &\leq d(x,y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $d(x,y) \leq d(y,x) \leq d(x,y)$, entonces $d(x,y) = d(y,x)$.

Finalmente, la propiedad de la desigualdad del triángulo, se cumple por la condición de simetría de la prueba anterior

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &\leq d(x,z) + d(y,z) = d(z,y) \\
d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se cumple la desigualdad del triángulo pedida.

1.7 Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que

$\alpha(x,y) = min\{1, d(x,y)\}$; $\beta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ son métricas en X.

Demostración:

Como sabemos el menor valor de distancia que la métrica $d(x,y)$ puede tomar es cero, si y solo $x = y$. Claramente $\alpha(x,y) = d(x,y)$, cumpliendose así todas las condiciones de métrica. Por lo tanto $\alpha(x,y)$ es una métrica sobre X.

En el caso de $\beta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, es una métrica

Demostración:

Notemos si $\beta(x,y) = 0$, tenemos

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \\
0 &= d(x,y)
\end{aligned}
$$

como $d(x,y) = 0$ y es métrica, entonces $\beta(x,y) = 0$, la primera condición se cumple.

Notemos que si $d(x,y) = d(y,x)$, entonces

$$
\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)}
$$

¡Hasta aqui me quede!