

Portafolio 1_Topología

Elvis Mauricio Sánchez Rogel

Curso de Topología

Contents

1 Portafolio 1	1
1.1 Ejercicio 1 (1.5 pts)	1
1.2 Ejercicio 2 (1.5 pts)	1
1.3 Ejercicio 3 (1.5 pts)	2
1.4 Ejercicio 4 (2 pts)	2
1.5 Ejercicio 6 (2pts)	4
1.6 Ejemplo de metricas	4
1.7 Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que	5

1 Portafolio 1

1.1 Ejercicio 1 (1.5 pts)

Sea d una distancia definida en un conjunto arbitrario X , sea $k \in \mathbb{R}$. Estudiar para que valores de k la aplicación d' definida como $d'(x, y) = d(x, y) + k$ sería también una métrica.

Demostración:

Claramente hay que comprobar que se cumpla la primera condición de métrica. Para que $d'(x, x) = d(x, x) + k$ sea métrica debe de cumplirse que la distancia $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$, Es decir:

$$\begin{aligned} 0 &= d'(x, x) \\ 0 &= d(x, x) + k \\ 0 &= 0 + k \\ 0 &= k \end{aligned}$$

Por tanto, el único valor k para que $d'(x, y) = d(x, y) + k$ sea una métrica es que sea $k = 0$.

1.2 Ejercicio 2 (1.5 pts)

Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las bolas cerradas son conjuntos cerrados.

Demostración:

Sea $\hat{x} \in X$ y $r > 0$, entonces $\overline{B}(\hat{x}, r) = \{\hat{y} \in X \mid d(\hat{y}, \hat{x}) \leq r\}$ es un conjunto cerrado, pues $X \setminus \overline{B}(\hat{x}, r) = \{\hat{y} \in X \mid d(\hat{y}, \hat{x}) > r\} = A$ es un conjunto abierto.

Para ello demostraremos $X \setminus \overline{B}(\hat{x}, r) = \{\hat{y} \in X \mid d(\hat{y}, \hat{x}) > r\} = A$ es un abierto.

Sea $\hat{y} \in A$, entonces $d(\hat{y}, \hat{x}) > r$, y sea $\epsilon = d(\hat{y}, \hat{x}) - r > 0$, tomamemos un $\hat{z} \in B(\hat{y}, \epsilon)$, tal que se tiene lo

siguiente:

$$\begin{aligned} d(\hat{y}, \hat{x}) &\leq d(\hat{y}, \hat{z}) + d(\hat{z}, \hat{x}) \\ d(\hat{y}, \hat{x}) + r - d(\hat{y}, \hat{x}) &< d(\hat{y}, \hat{x}) - d(\hat{y}, \hat{z}) \leq d(\hat{z}, \hat{x}) \\ r &< d(\hat{z}, \hat{x}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{z} \in A$, esto prueba $B(\hat{y}, \epsilon) \subset A$, por lo tanto A es un conjunto abierto, probando así que $\overline{B}(\hat{x}, r)$ es cerrado.

1.3 Ejercicio 3 (1.5 pts)

Sea X un conjunto y $p \in X$ un punto arbitrario. Demostrar que la familia $\tau_p = \{U \subset X \mid p \in U\} \cup \{\emptyset\}$ es una topología

Demostración:

Claramente se observa que el vacío forma parte $\emptyset \in \tau_p$. Por otro lado, $p \in X$, en consecuencia $X \in \tau_p$.

Sea $\{U_j\}_{j \in I} \subset \tau_p$, si $U_j = \emptyset$ para todo $j \in I$, entonces $\bigcup_{j \in I} U_j = \emptyset$, en consecuencia $\bigcup_{j \in I} U_j \in \tau_p$. Por otro lado, si existe $U_i \neq \emptyset$, entonces $p \in U_i$, en consecuencia $p \in \bigcup_{j \in I} U_j$, por lo tanto $\bigcup_{j \in I} U_j \in \tau_p$.

Ahora sea $\{U_j\}_{j=1}^k \subseteq \tau_p$, si para algún $i \in \{1, \dots, k\}$ sucede que $U_i = \emptyset$, entonces $\bigcap_{j=1}^k U_j = \emptyset$, por tanto

$\bigcap_{j=1}^k U_j \in \tau_p$. Por otro lado si sucede que $U_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, se tiene que $p \in U_j$ para todo

$j \in \{1, \dots, k\}$, así que $p \in \bigcap_{j=1}^k U_j$, por lo tanto $\bigcap_{j=1}^k U_j \in \tau_p$.

1.4 Ejercicio 4 (2 pts)

Se considera el conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Indicar justificadamente si las siguientes familias constituyen topologías en X .

- a) $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$
- b) $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$
- c) $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$
- d) $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{d\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

a) $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

Demostración:

Claramente el vacío \emptyset y el X están en la topología τ_1 .

Por otro lado, las uniones e intersecciones:

Unión	Intersección
$\{a\} \cup \emptyset = \{a\}$	$\{a\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
$\{a\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\}$	$\{a\} \cap \{a, c, d\} = \{a\}$
$\{a\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\}$	$\{a\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a\}$
$\{c, d\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\}$	$\{c, d\} \cap \{a, c, d\} = \{c, d\}$
$\{a, c, d\} \cup \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$	$\{a, c, d\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, c, d\}$
$\{a, b, c, d, e\} \cup \{a, b, c, d, e, f\} = X$	$\{a, b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d, e, f\} = \{a, b, c, d, e\}$

las uniones y las intersecciones de los subconjuntos estan en la topología τ_1 . Por lo tanto τ_1 es una topología sobre X

b) $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

Demostración:

Claramente el vacío \emptyset y el X estan en la topología τ_2 .

Por otro lado, las uniones e intersecciones:

Unión	Intersección
$\{a\} \cup \emptyset = \{a\}$	$\{a\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
$\{a\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\}$	$\{a\} \cap \{a, c, e\} = \{a\}$
$\{a\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\}$	$\{a\} \cap \{b, c, d\} = \emptyset$
$\{c, d\} \cup \{a, c, d\} = \{a, c, d\}$	$\{c, d\} \cap \{a, c, e\} = \{c\}$
$\{a, c, d\} \cup \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$	$\{a, c, e\} \cap \{b, c, d\} = \{c\}$
$\{a, b, c, d, e\} \cup \{a, b, c, d, e, f\} = X$	$\{b, c, d\} \cap \{a, b, c, d, e, f\} = \{b, c, d\}$

Como $\{c, d\} \cap \{a, c, e\} = \{c\} \notin \tau_2$. Por lo tanto τ_2 no es una topología sobre X

c) $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$

Demostración:

Claramente el vacío \emptyset y el X estan en la topología τ_3 .

Por otro lado, las uniones e intersecciones:

Unión	Intersección
$\{a\} \cup \emptyset = \{a\}$	$\{a\} \cap \{f\} = \emptyset$
$\{a\} \cup \{f\} = \{a, f\}$	$\{a\} \cap \{a, f\} = \{a\}$
$\{a\} \cup \{a, c, f\} = \{a, c, f\}$	$\{a\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \emptyset$
$\{a\} \cup \{b, c, d, e, f\} = X$	$\{f\} \cap \{a, f\} = \{f\}$
$\{a, f\} \cup \{a, c, f\} = \{a, c, f\}$	$\{a, f\} \cap \{a, c, f\} = \{a, f\}$
$\{a, c, f\} \cup \{b, c, d, e, f\} = X$	$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\}$

Como $\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\} \notin \tau_3$. Por lo tanto τ_3 no es una topología sobre X

d) $\tau_4 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{d\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$

Demostración:

Claramente el vacío \emptyset y el X están en la topología τ_4 .

Por otro lado, las uniones e intersecciones:

Unión	Intersección
$\{b\} \cup \emptyset = \{b\}$	$\{b\} \cap \{d\} = \emptyset$
$\{b\} \cup \{a, d\} = \{a, b, d\}$	$\{d\} \cap \{a, d\} = \{d\}$
$\{b\} \cup \{d\} = \{b, d\}$	$\{a, d\} \cap \{a, b, d\} = \{a, d\}$
$\{a, d\} \cup \{a, b, d\} = \{a, b, d\}$	$\{a, d\} \cap \{d\} = \{d\}$
$\{a, b, d\} \cup \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$	$\{a, f\} \cap \{a, c, f\} = \{a, f\}$
$\{a, d\} \cup X = X$	$\{a, b, d\} \cap \{a, b, c, d, e\} = \{a, b, d\}$

Como $\{b\} \cup \{d\} = \{b, d\} \notin \tau_4$. Por lo tanto τ_4 no es una topología sobre X . ## Ejercicio 5 (1.5 pts)

Probar que el conjunto $\mathcal{B} = \{(a, \infty), a \in \mathbb{R}\}$ es una base de topología en \mathbb{R} . La topología generada por cada base se llama topología de Kolmogorov.

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces existe $x \in B_o = (a, \infty)$, con $B_o = \{y \in \mathbb{R} \mid y > a\}$, tal que $B_o \in \mathcal{B}$, cumpliendo así, la primera condición.

Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, entonces $B_1 = (a_1, \infty)$ y $B_2 = (a_2, \infty)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si tomamos $a = \max(a_1, a_2)$, tal que se cumple $B_1 \cap B_2 = (a, \infty)$, entonces existe $B_3 = (a, \infty) \in \mathcal{B}$, en consecuencia $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Por lo tanto, se ha comprobado la segunda condición.

1.5 Ejercicio 6 (2pts)

Considera $X = \mathbb{R}$. Indicar si los siguientes conjuntos son abiertos y/o cerrados considerando la topología usual τ_u y la topología de Kolmogorov τ_K descrita en el ejemplo anterior.

- a) $(0, 1)$
- b) $(0, 1]$
- c) $[0, 1]$
- d) $[1, \infty)$
- e) $(-\infty, 0]$

a) $(0, 1)$

Demostración: Según la topología usual:

Supongamos que $[0, 1]$ es cerrado, entonces su $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ es abierto, $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$,

1.6 Ejemplo de métricas

Sea X un conjunto no vacío y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface lo siguiente:

- a) $d(x, y) = 0$, si y solo si $x = y$
- b) $d(x, y) = d(x, z) + d(y, z)$

Probar que es métrica

Demostración:

Sabemos de la primera condición, $d(x, y) = 0$, si y solo si $x = y$.

Por otro lado, comprobaremos la segunda condición de simetría, para ello tenemos:

Sea $z = x \in X$, entonces:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\leq d(x, z) + d(y, z) \\d(x, y) &\leq d(x, x) + d(y, x) \\d(x, y) &\leq d(y, x)\end{aligned}$$

Ahora si $y = z$

$$\begin{aligned}d(y, x) &\leq d(y, z) + d(x, z) \\d(y, x) &\leq d(y, y) + d(x, y) \\d(y, x) &\leq d(x, y)\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(x, y) \leq d(y, x) \leq d(x, y)$, entonces $d(x, y) = d(y, x)$.

Finalmente, la propiedad de la desigualdad del triángulo, se cumple por la condición de simetría de la prueba anterior

$$\begin{aligned}d(x, y) &\leq d(x, z) + d(y, z) = d(z, y) \\d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y)\end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple la desigualdad del triángulo pedida.

1.7 Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que

$\alpha(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$; $\beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$ son métricas en X .

Demostración:

Como sabemos el menor valor de distancia que la métrica $d(x, y)$ puede tomar es cero, si y solo $x = y$. Claramente $\alpha(x, y) = d(x, y)$, cumpliéndose así todas las condiciones de métrica. Por lo tanto $\alpha(x, y)$ es una métrica sobre X .

En el caso de $\beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$, es una métrica

Demostración:

Notemos si $\beta(x, y) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}0 &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \\0 &= d(x, y)\end{aligned}$$

como $d(x, y) = 0$ y es métrica, entonces $\beta(x, y) = 0$, la primera condición se cumple.

Notemos que si $d(x, y) = d(y, x)$, entonces

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)}$$

La cmoida 45 |

¡Hasta aquí me quede! Elvis Sanchez Rogel 0996211676 α Así tenemos que la tutoría significa grandes avances en la matemática