布置作业

练习二

10.3 毕奥—萨伐尔定律

电流或运动电荷在其周围产生磁场与哪些因素有关呢？

一、毕－萨定律—实验定律

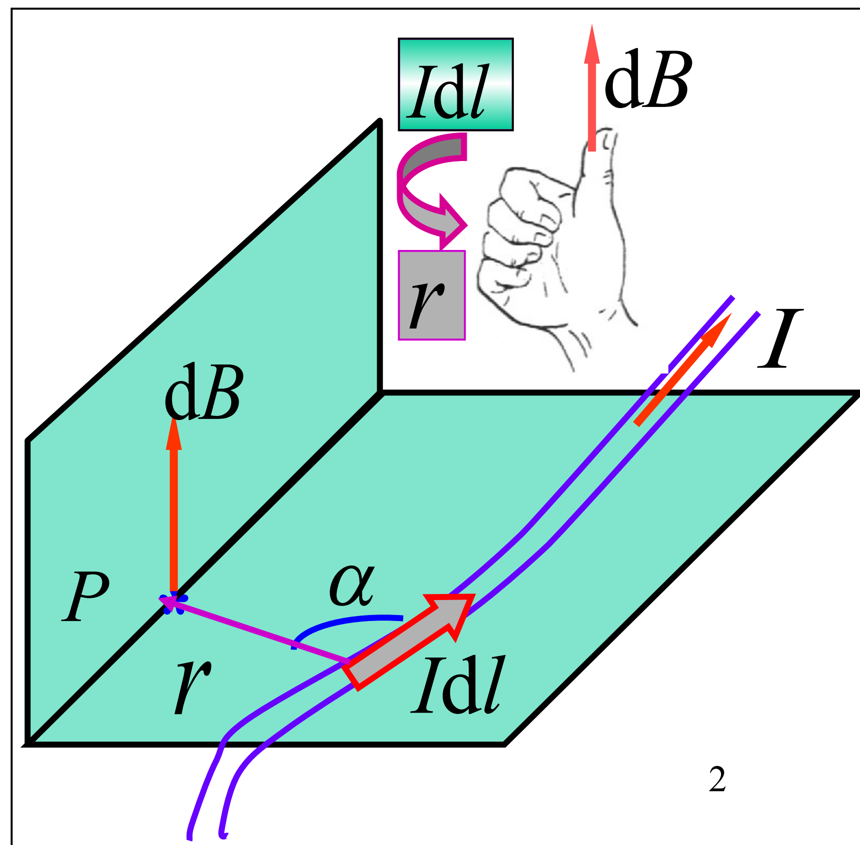
$I \longrightarrow$ 磁场 $\vec{B}$　　　$\vec{B} = \vec{B}(r, I, l)$

1、电流元与磁场：

① $I\vec{dl}$ 称为电流元，电流元有方向，且与电流流向一致。

计算电流元在 P 点产生的磁场 dB，那么，dB 与哪些因素有关呢？

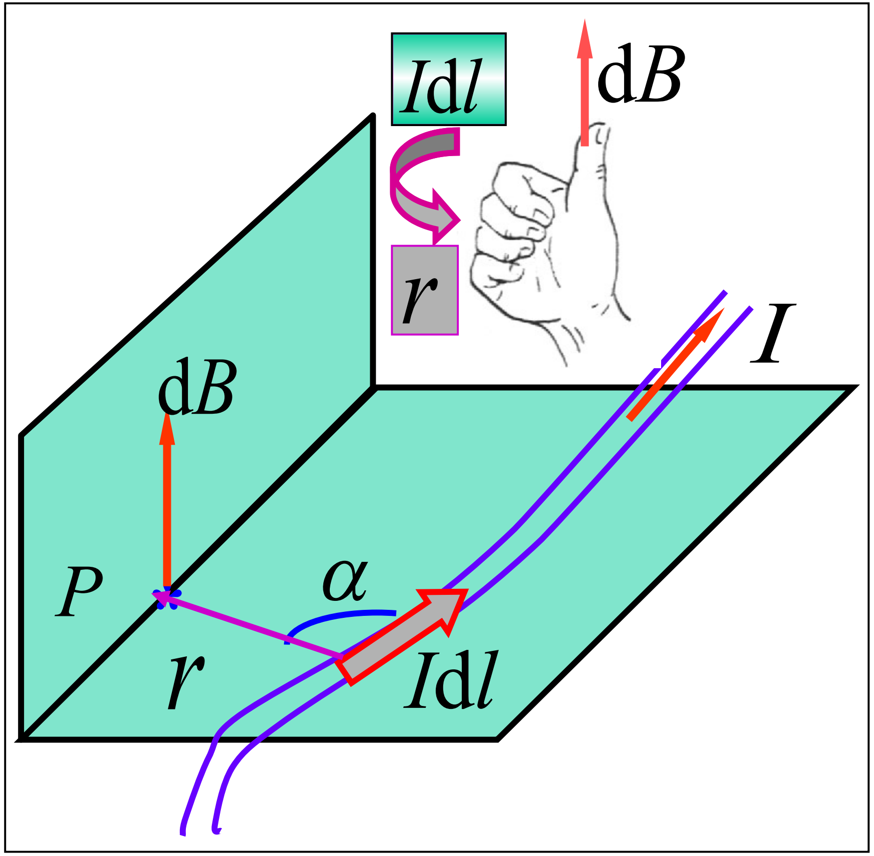
② dB 的方向：右手螺旋



③ dB 的大小：

$$dB \propto \frac{Idl \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

$$dB = k_2 \frac{Idl \cdot \sin\alpha}{r^2}$$



系数有理化：（SI 制）

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$ 与电场比较

$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}$$ —— 真空中电导率

$$k_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}(\mathrm{H\cdot m^{-1}})$$

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m\cdot A^{-1}}$$ —— 真空中磁导率

（电流元在空间 P 点产生的磁场）

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl \cdot \sin\alpha}{r^2}$$

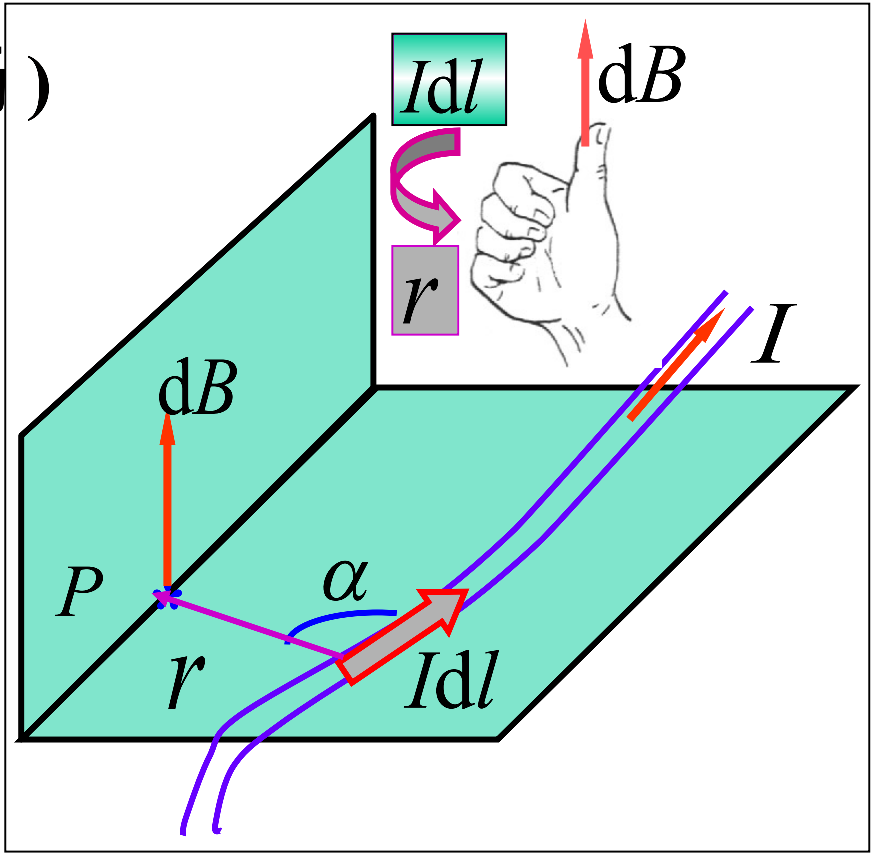
④ dB 的矢量式：

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\vec{dl} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

$\vec{r}_0$ — $\vec{r}$方向的单位矢量

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}}$$

——毕奥—萨伐尔定律



那么，要研究整个导线产生的磁场该如何？

2、载流导线的磁场：

① 迭加原理：矢量和

$$\vec{B}=\sum_i^n \vec{B}_i=\sum_i^n \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\vec{dl}\times\vec{r_i}}{r_i^3}$$

② 载流导线的磁场：

$$\vec{B}=\int d\vec{B}=\int \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\vec{dl}\times\vec{r}_i}{r_i^3}$$

分量式：$d\vec{B}$ 的投影

分量式：$\begin{cases} B_x = \int dB_x \\ B_y = \int dB_y \\ B_z = \int dB_z \end{cases}$ $\qquad \vec{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_x i + \mathbf{B}_y j + \mathbf{B}_z k$

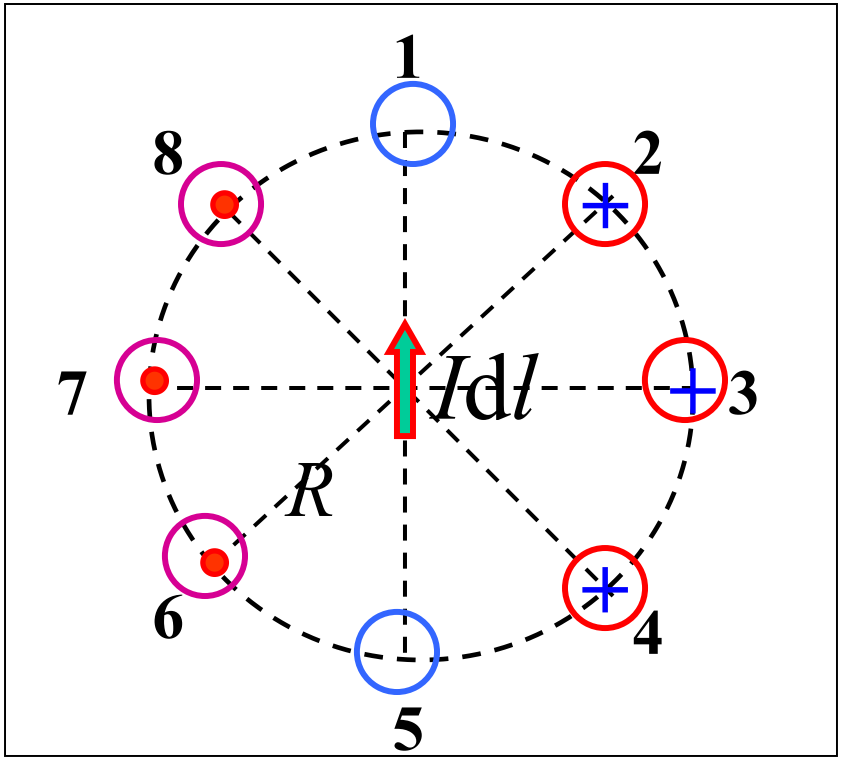
大小： $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

毕 - 萨定律

二　毕 —— 萨定律应用举例

例　判断下列各点磁感强度的方向和大小．



1、 5 点 ：$\mathrm{d}B = 0$

3、 7 点 ：$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}$

2、 4、 6、 8 点 ：

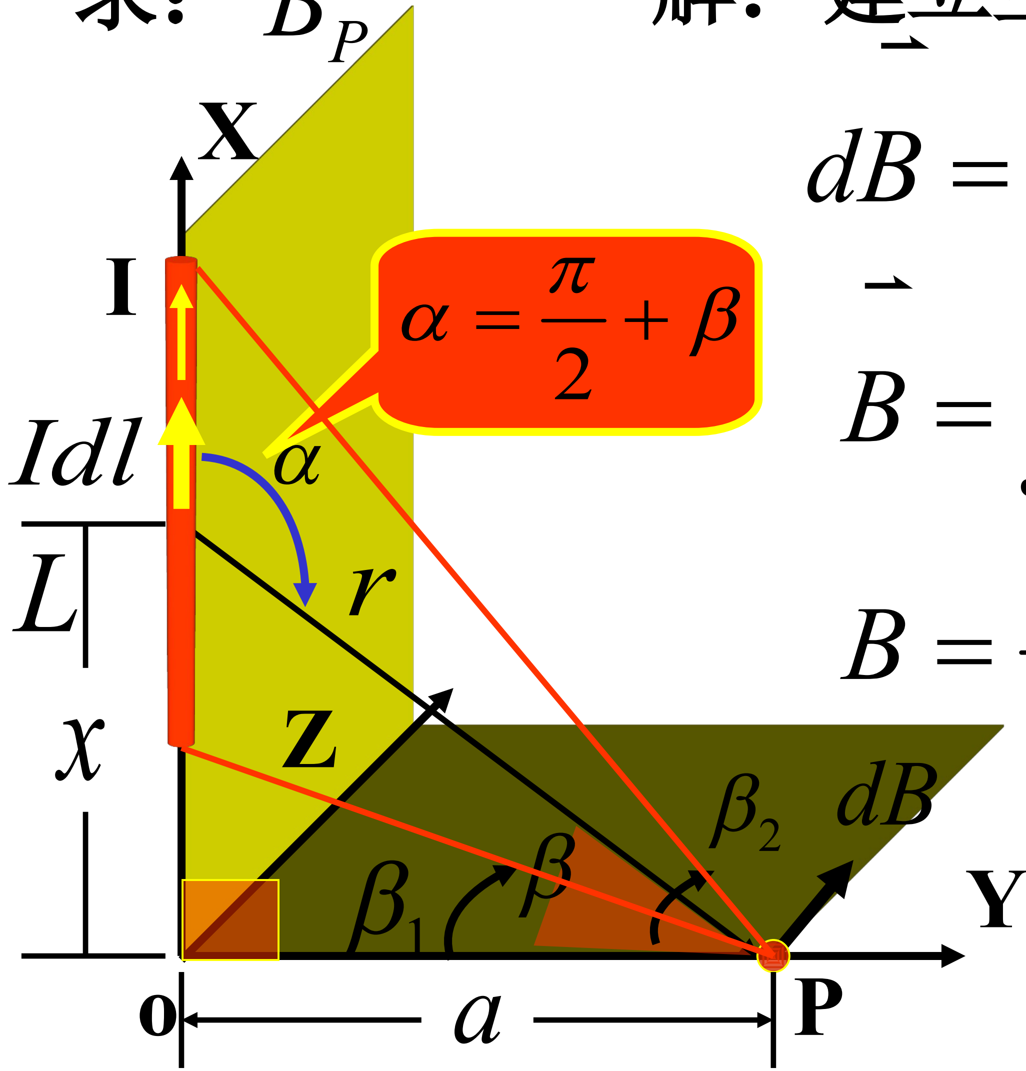
$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}l}{4\pi R^2}\sin 45^0$$

例 1　求载流直导线的磁场中任一点的磁感应强度

已知：$I.L.a.\beta_1.\beta_2$

求：B_P

解：建立坐标系，分割电流。



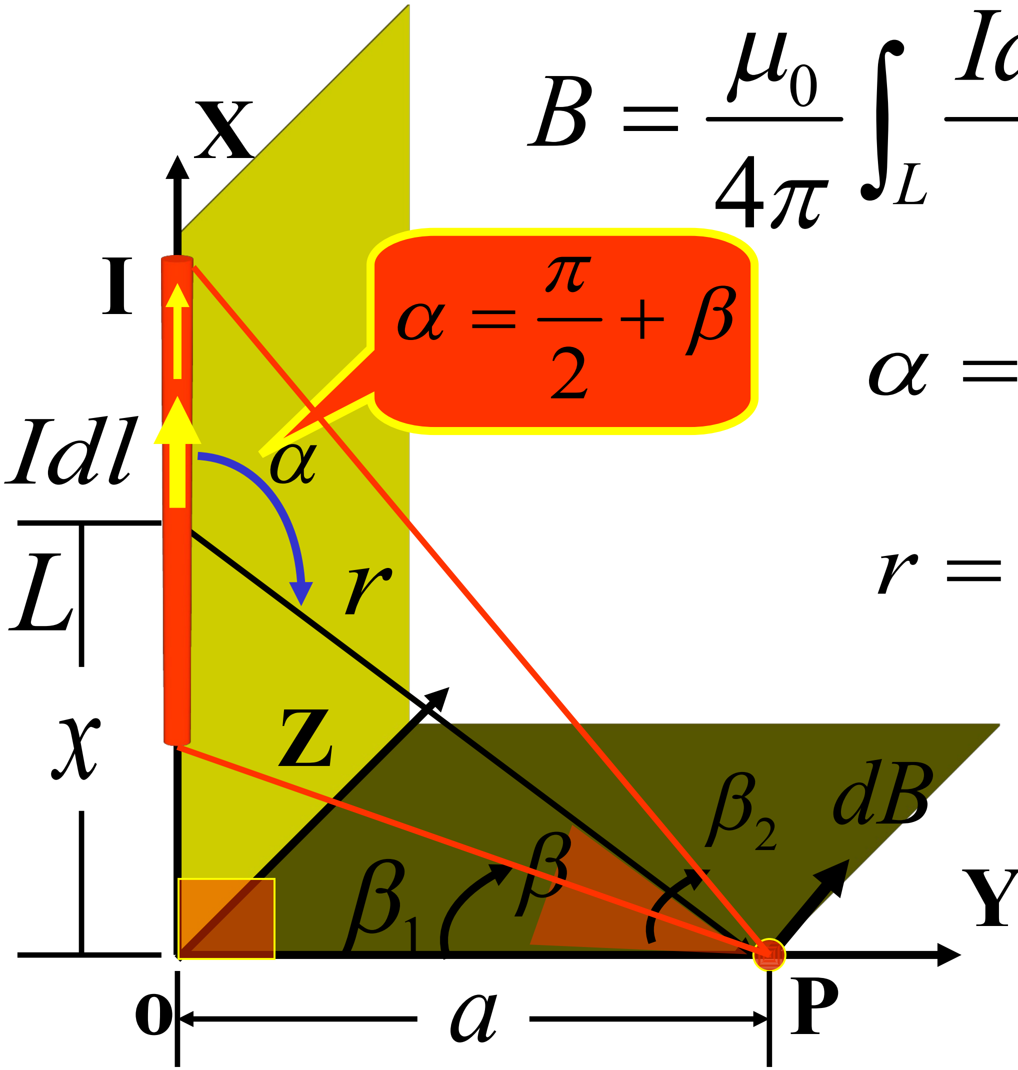
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad \boldsymbol{dl = dx}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Idx\sin\alpha}{r^2}$$

统一变量：

$$\sin\alpha = \cos\beta$$



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_L \frac{Idx\sin\alpha}{r^2}$$ 统一变量：

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \qquad \sin\alpha = \cos\beta$$

$$r = \frac{a}{\cos\beta} \qquad x = atg\beta$$

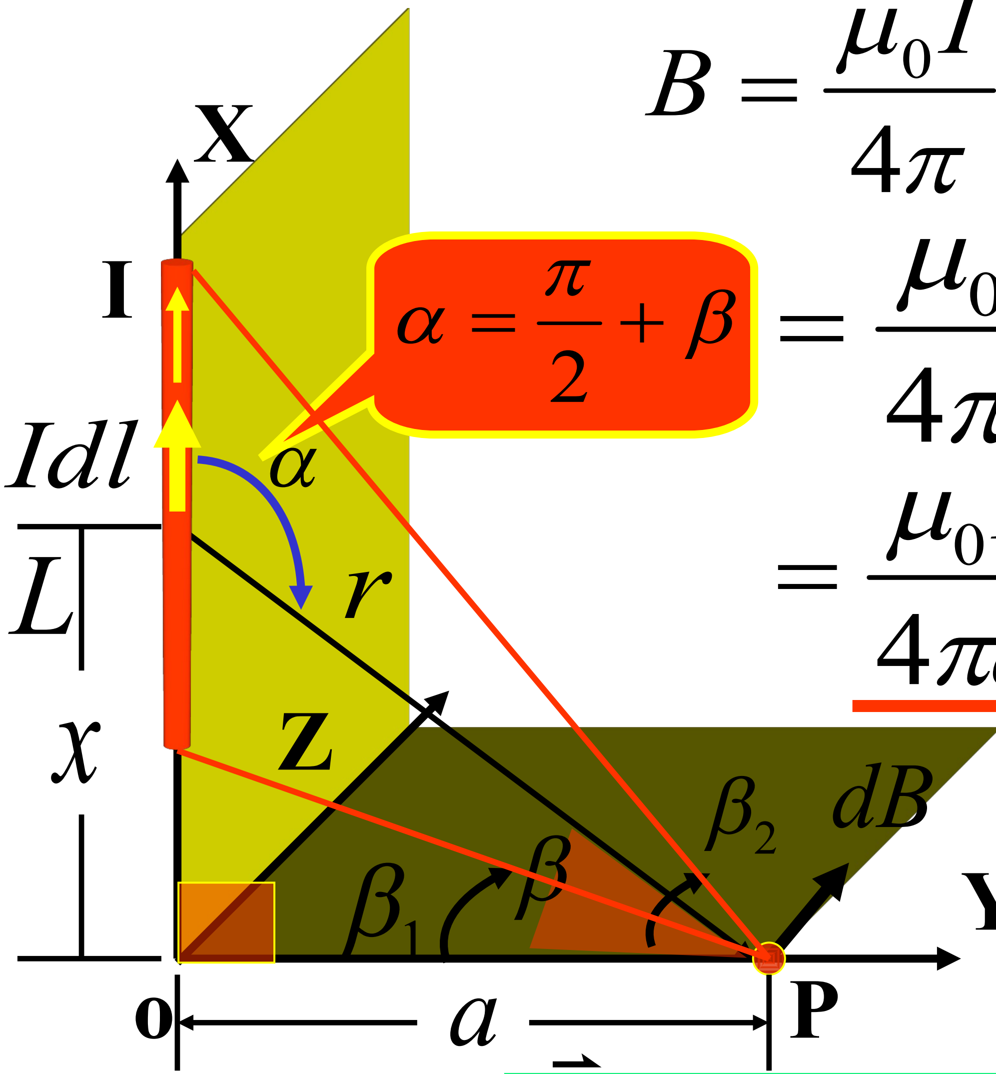
$$dx = a\sec^2\beta d\beta$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{a\sec^2\beta d\beta\cdot\cos\beta}{a^2\sec^2\beta}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{a\sec^2\beta d\beta\cdot\cos\beta}{a^2\sec^2\beta}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\cos\beta d\beta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)$$



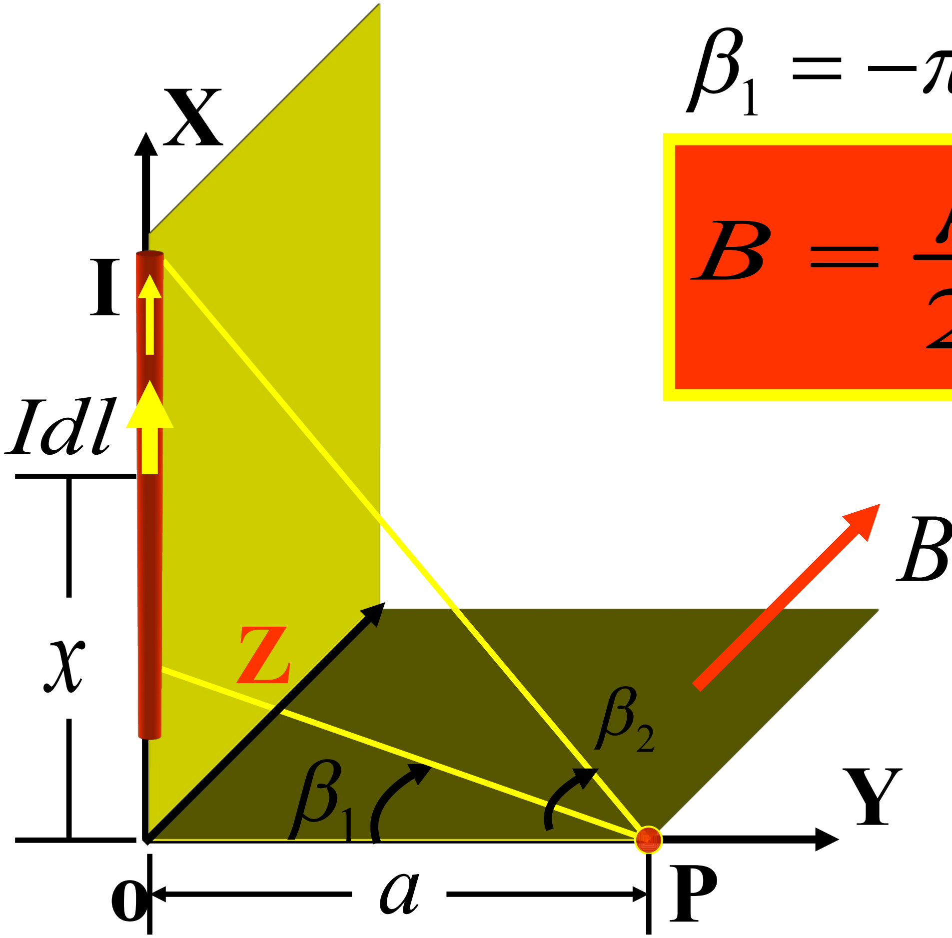
方向沿 Z 轴

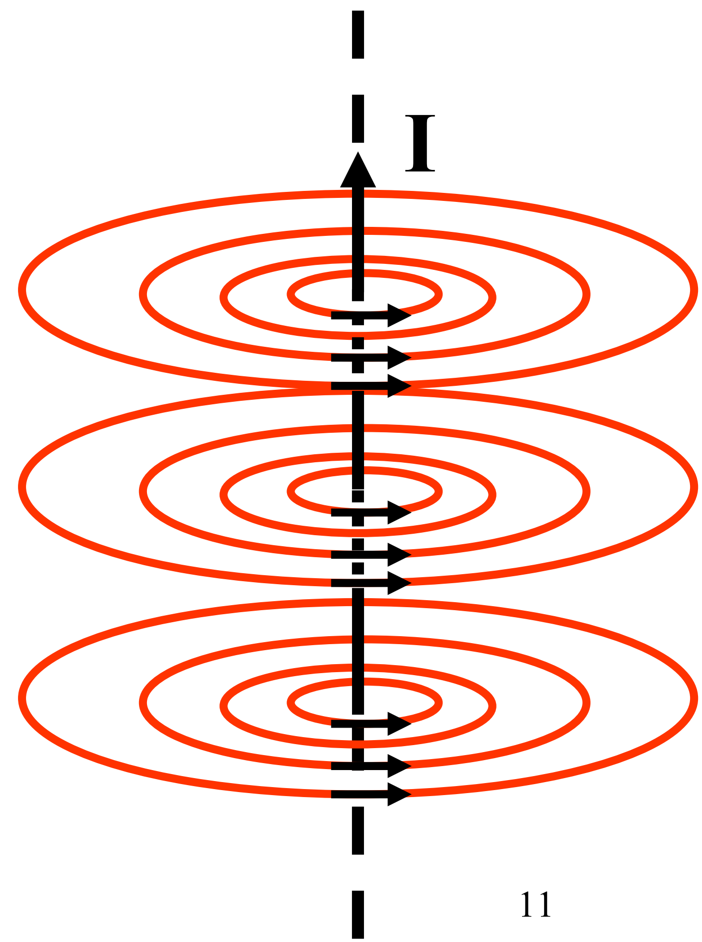
$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)\hat{k}}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\hat{k}$$

$$\beta_1 = -\pi/2 \qquad \beta_2 = \pi/2$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$





讨论：$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1)\hat{k}}$$

（1）无限长载流直导线的磁场

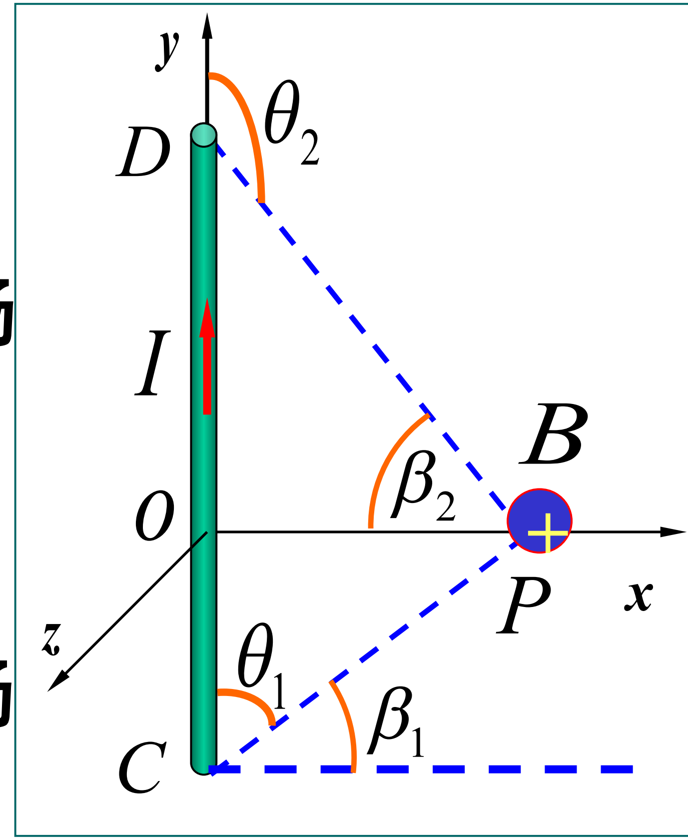
$$\beta_1=-\frac{\pi}{2}\;;\;\beta_2=\frac{\pi}{2} \qquad \boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

（2）半无限长载流直导线的磁场

$$\beta_1=0\;;\;\beta_2=\frac{\pi}{2} \qquad \boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}}$$

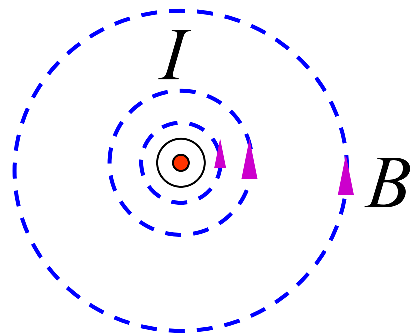
（3）载流直导线延长线上的磁场

$$\beta_1=\pi\;;\;\beta_2=0 \qquad \boxed{B=0}$$



无限长载流长直导线的磁场

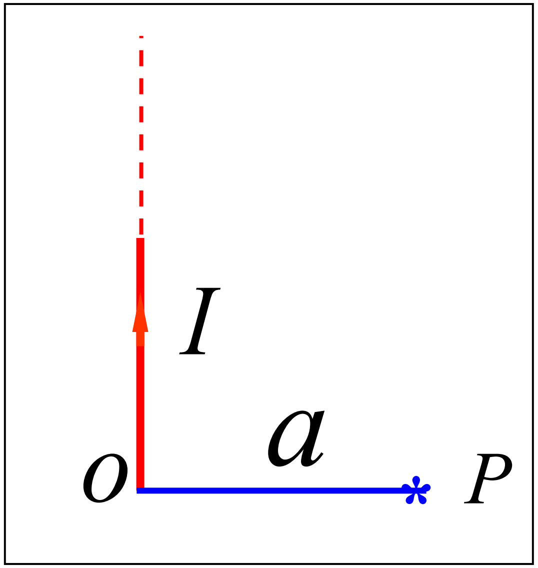
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



电流与磁感应强度成右手螺旋关系

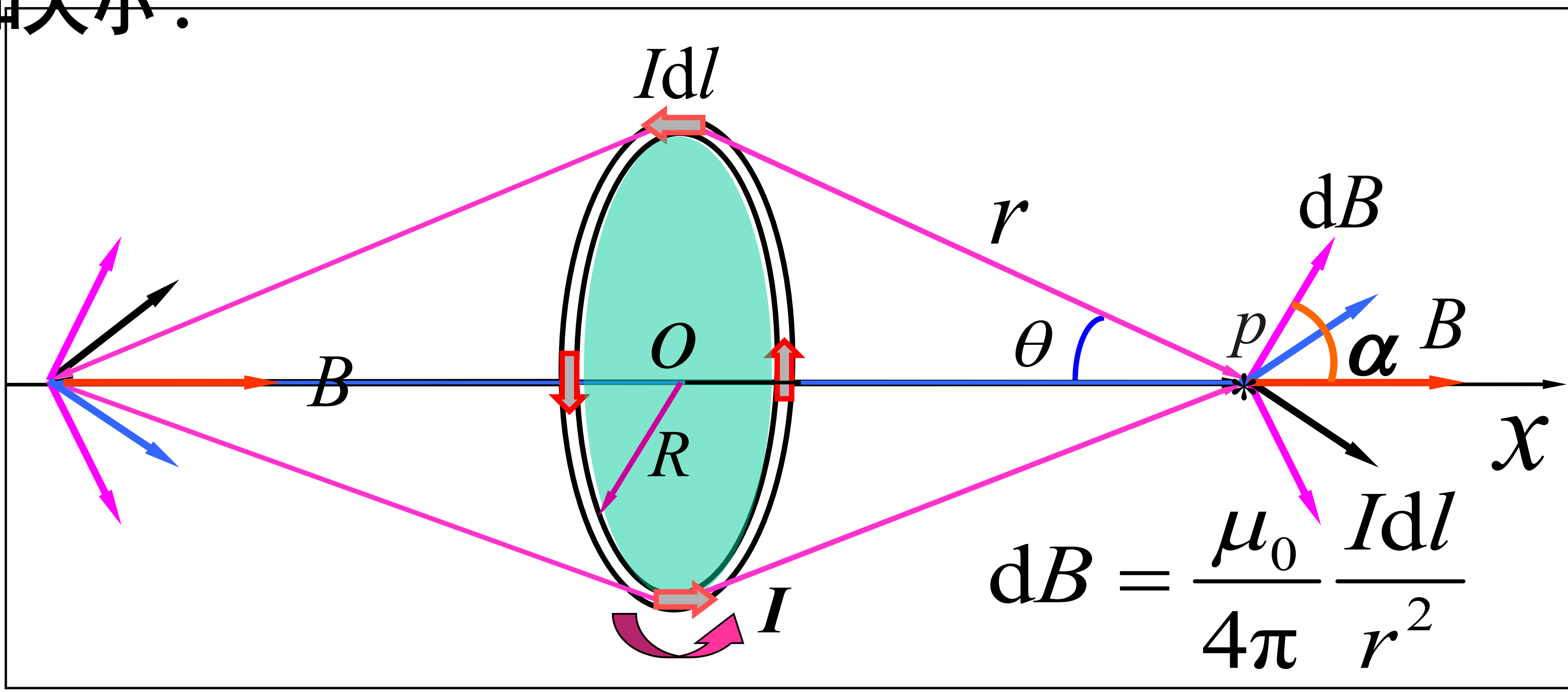
半无限长载流长直导线的磁场

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

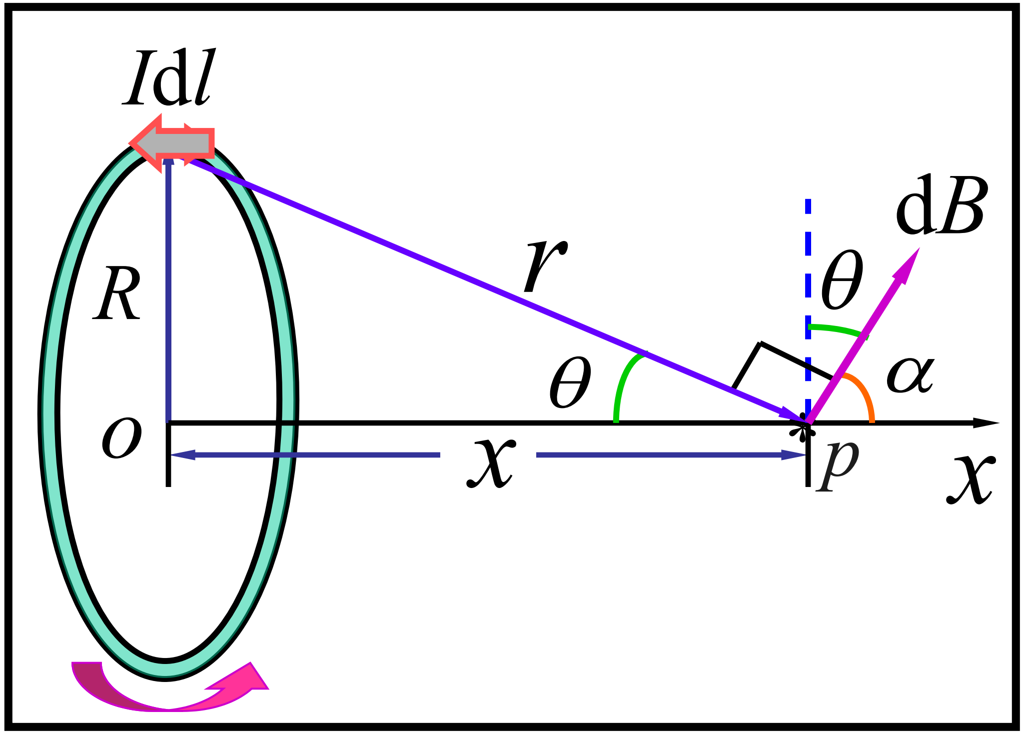


例 2　圆电流轴线上的磁场．

真空中，半径为 R 的载流导线，通有电流 I，称圆电流． 求其轴线上一点 p 的磁感强度的方向和大小．



解　根据对称性分析 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_x = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B}\cos\alpha = \int \mathrm{d}\boldsymbol{B}\sin\theta$



$$\sin\theta = \cos\alpha = \frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{R}^2 + \boldsymbol{x}^2$$

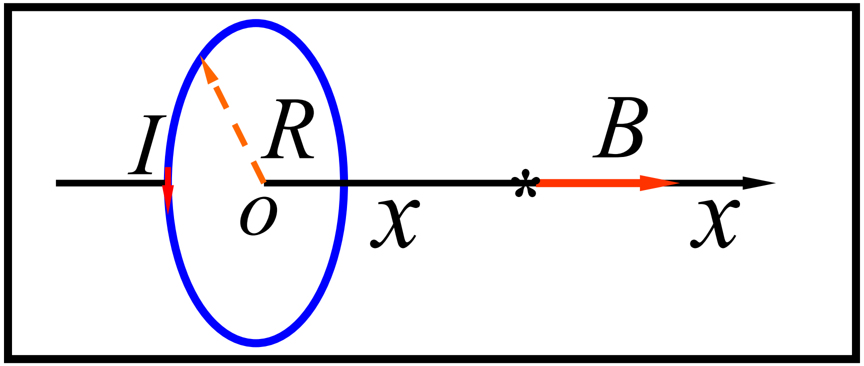
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\cos\alpha \mathrm{d}l}{r^2}$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cos\alpha \mathrm{d}l}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$



$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

讨论 1）若**薄**线圈有 N 匝

$$B=\frac{\boxed{N}\,\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

2）$x<0$　B 的方向不变（I 和 B 成右螺旋关系）

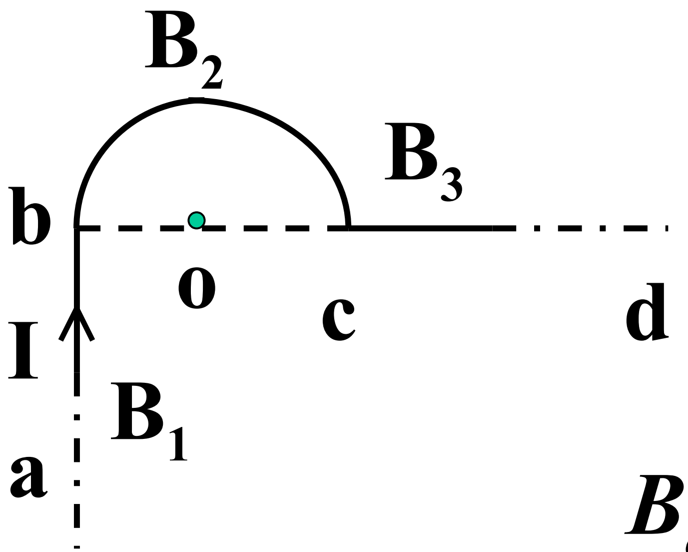
3）圆心　$x=0$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}\qquad B=\frac{N\mu_0 I}{2R}$$

4）$x>>R$　$B=\dfrac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$,　$B=\dfrac{\mu_0 I S}{2\pi x^3}$

5）圆弧圆心　$B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}\cdot\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{\mu_0 I}{2R}\cdot\dfrac{l}{2\pi R}$

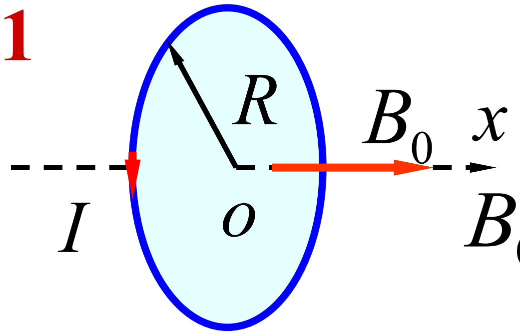
例 3 一导线弯曲成如图的形状，求$\vec{B}_0$



$$\vec{B}_o = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

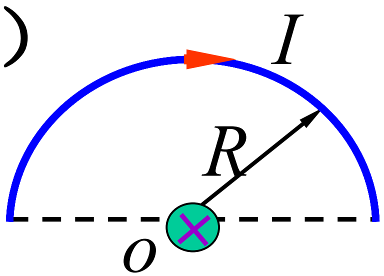
$$B_o = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R} + 0 = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{1}{\pi} + 1\right)$$

(1)



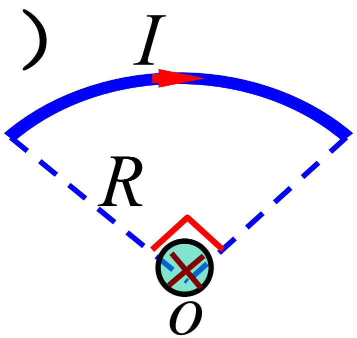
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

(2)



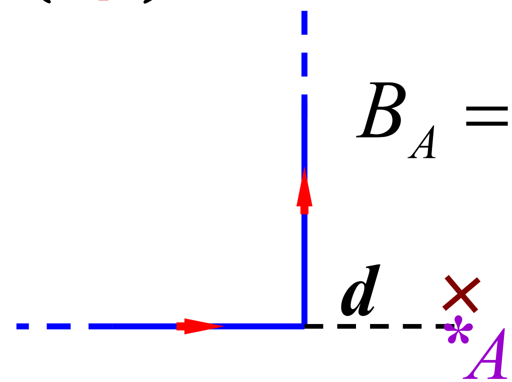
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

(3)



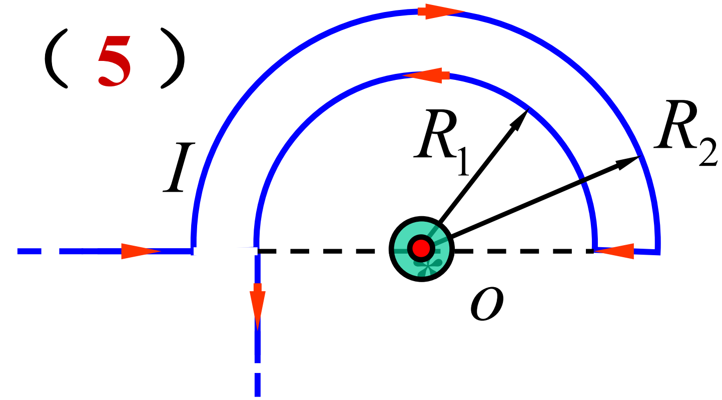
$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$$

(4)



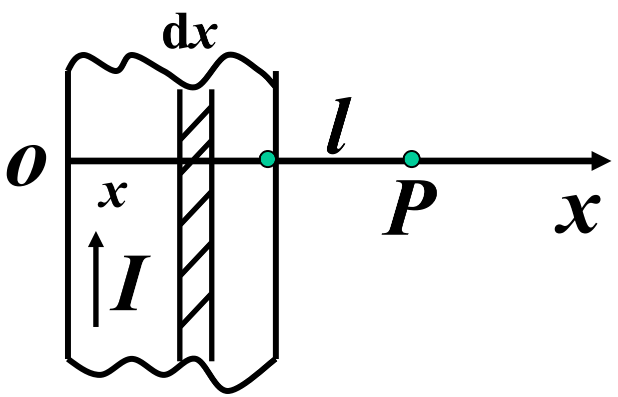
$$B_A = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}$$

(5)



$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

例 4 宽度为 a 的薄金属板（无限长）通电 I，求与其共面的 p 点处的$\vec{B}$

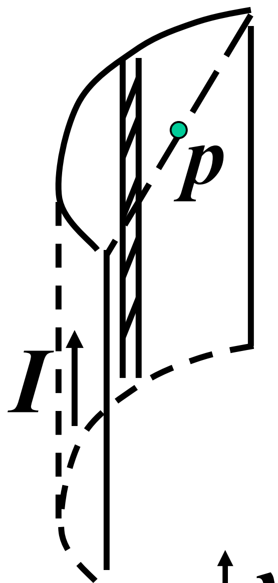


解：把薄金属板分割成无限长载流直导线的电流元，在 x 处取一电流元，

$$dI = \frac{I}{a}dx \rightarrow dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(l+a-x)}$$

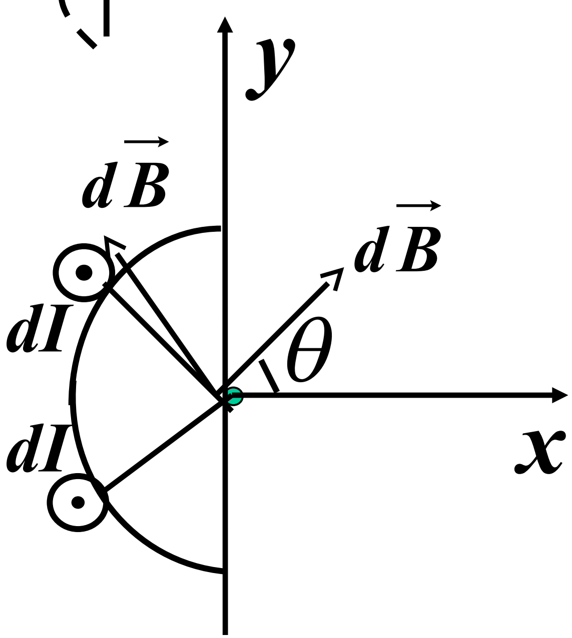
$$B = \int dB = \int_0^a \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(l+a-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{l+a}{l}$$

例 5 半径为 R 的无限长半圆柱形锯片中通有电流 I，求中心轴线上 p 的 $\vec{B}$



解：把半圆柱形锯片看成是无数多个无限长的小狭条宽为 dl ，载有的电流

$$dI = \delta dl = \frac{I}{\pi R} dl = \frac{I}{\pi} d\theta$$



dI 在 p 点产生的 $d\vec{B}$ 大小：

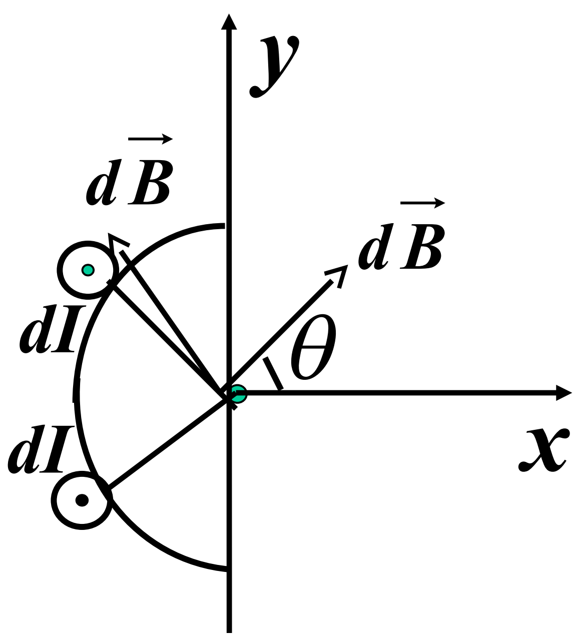
$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} d\theta$$

方向不同，分量式求解

$$dB_x = dB\cos\theta \quad dB_y = dB\sin\theta$$

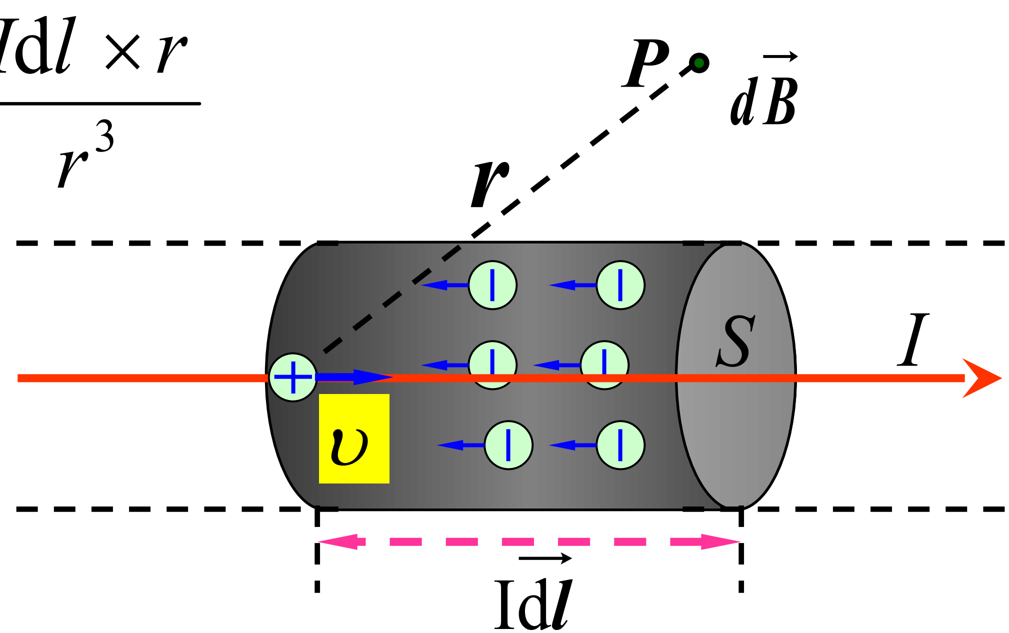
半圆柱关于 x 轴对称， $B_x = 0$
dB 关于 y 轴对称，

$$B_y = \int dB\sin\theta = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$



三 运动电荷的磁场

毕－萨定律 $\mathrm{d}\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}l \times r}{r^3}$



$$I = \delta S_{\perp} = nq\upsilon S$$

$$\boxed{\delta = nq\upsilon}$$

$$\boxed{I\overrightarrow{dl} = nq\upsilon S\overrightarrow{dl}}$$

换（$\vec{\upsilon}$与$I\overrightarrow{dl}$方向一致）

$$\boxed{I\overrightarrow{dl} = nq\vec{\upsilon}S\,dl}$$

$$dV = S\,dl$$

$$\boxed{I\overrightarrow{dl} = q\vec{\upsilon}\cdot n\,dV}$$

$$dN = n\,dV$$

$$\boxed{I\overrightarrow{dl} = dN\cdot q\vec{\upsilon}}$$

代入毕－萨定律 $\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}_0}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{dN \cdot q\vec{\upsilon} \times \vec{r}_0}{r^2}$

单个运动电荷的 $\vec{B}_1$

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{\upsilon} \times \vec{r}_0}{r^2}}$$

方向：右手螺旋关系

大小：

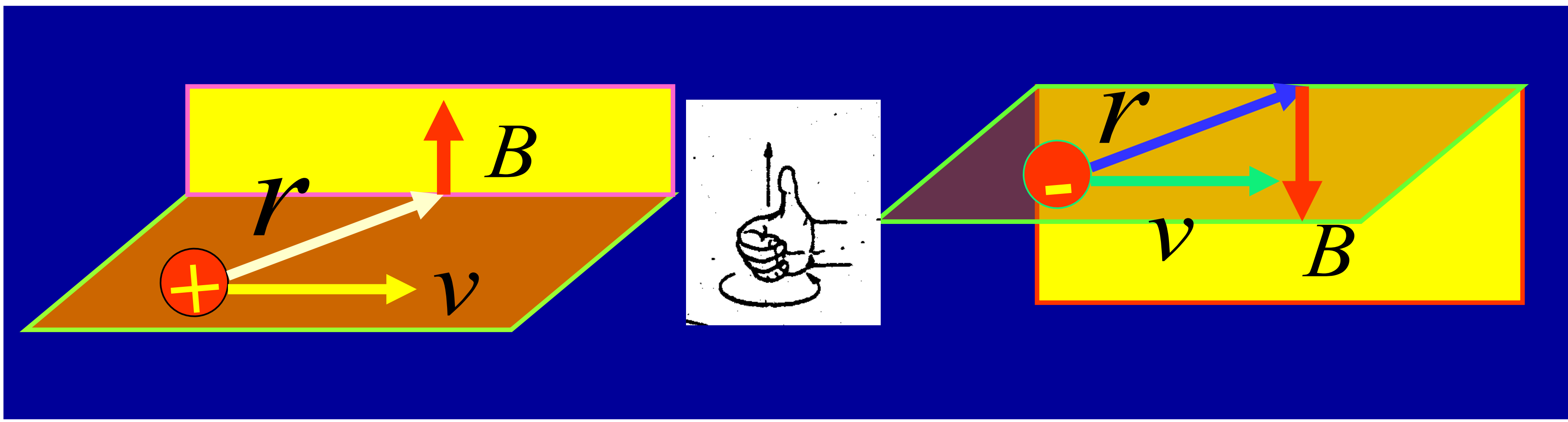
$$\boxed{B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\upsilon \sin\alpha}{r^2}}$$

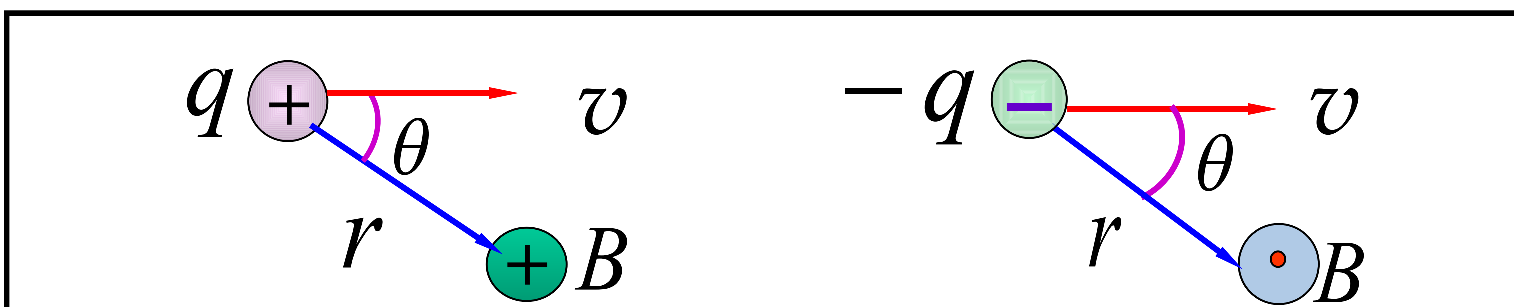
单个运动电荷的 $\vec{B}_1$

$$\vec{B}_1 = \frac{d\vec{B}}{dN} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{\upsilon} \times \vec{r}_0}{r^2}$$

适用条件 $\quad \upsilon << c$

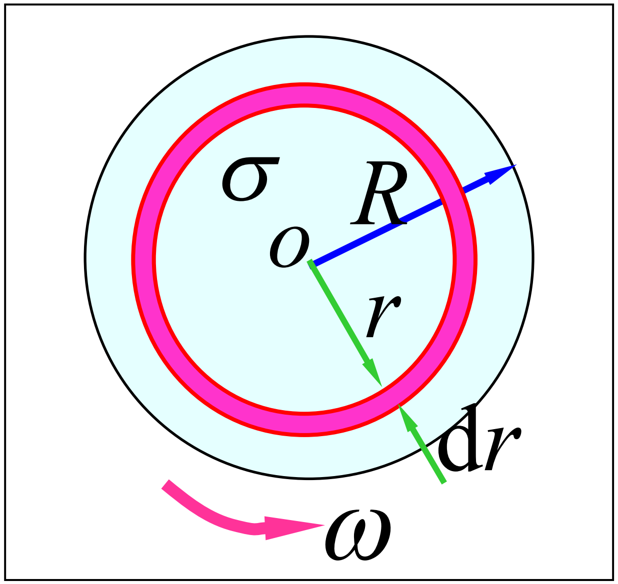
注意：电荷有正负。





例 1 半径为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为 φ并以角速度 绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求圆盘中心的磁感强度.

解一 圆电流的磁场



$$T=\frac{2\pi}{\omega} \qquad dI=\frac{dq}{\Delta t}=\frac{dq}{T}$$

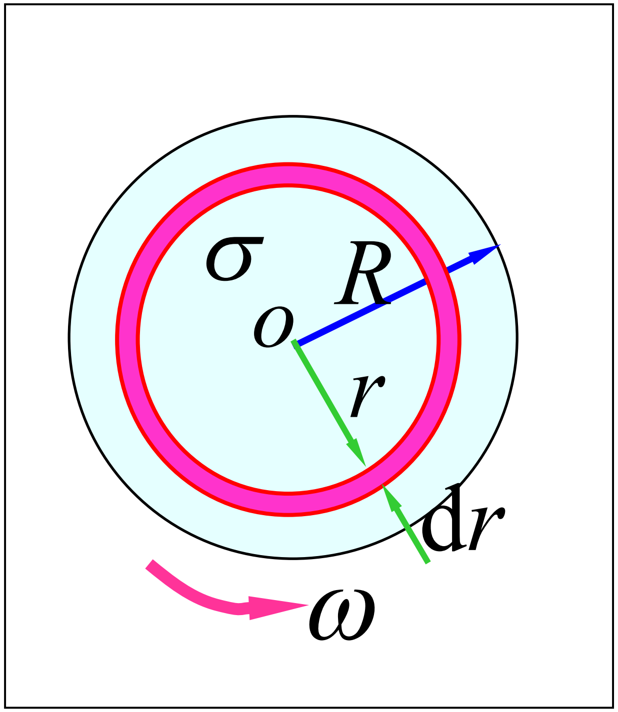
$$dq=\sigma\cdot 2\pi r\cdot dr \qquad B=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$\mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi r\mathrm{d}r=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$\begin{cases}\sigma>0, & B \text{ 向外}\\ \sigma<0, & B \text{ 向内}\end{cases}$$

$$B=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$



解二　　运动电荷的磁场

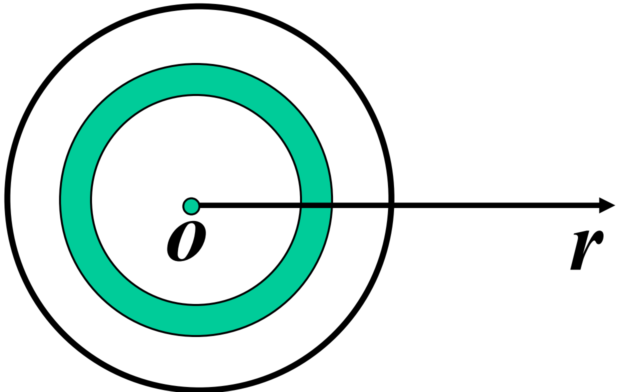
$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q v}{r^2}$$

$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sigma \cdot 2\pi \cdot r\,\mathrm{d}r \cdot \omega r}{r^2} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$v = \omega r \qquad B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

扩展：若是一个均匀带电圆盘，半径为 R ，总电量为 q ，绕盘心以 ω 转，求$B_o = ?\quad m = ?$



解：带电圆盘→ 环形带电体→环形电流，带电圆盘绕盘心转动相当于许多圆形电流组成。

建 or 轴，在 r 处取一圆环→环形电流，在 o 处产生的$d\vec{B}$

$$dB_o = \frac{\mu_0 dI}{2r}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma dS}{T} = \frac{w}{2\pi}\frac{q}{\pi R^2}2\pi r dr = \frac{wqrdr}{\pi R^2}$$

$$dB_o = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R^2} dr$$

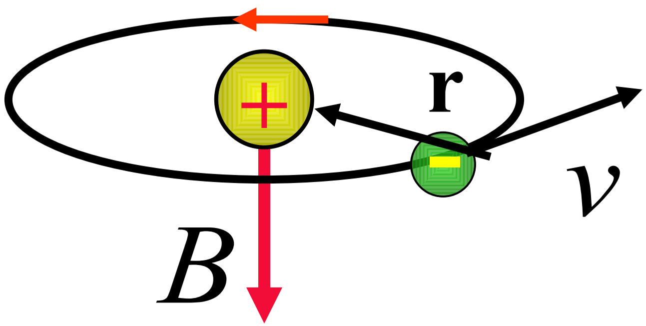
$$B_o = \int dB_o = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R^2}\int_0^R dr = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

$$dI = \frac{wqrdr}{\pi R^2} \qquad \Delta s = \pi r^2 \qquad dm = dI \cdot \Delta s = \frac{wq}{R^2} r^3 dr$$

$$m = \frac{wq}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{wq}{4} R^2$$

例 2 依照玻尔氢原子模型，氢原子中电子以速率 $v=2.2\times10^{6}$m/s 在半径为 r=0.53×10^{-8}cm 圆周上

运动求这电子在轨道中心所产生的磁感应强度及磁矩。

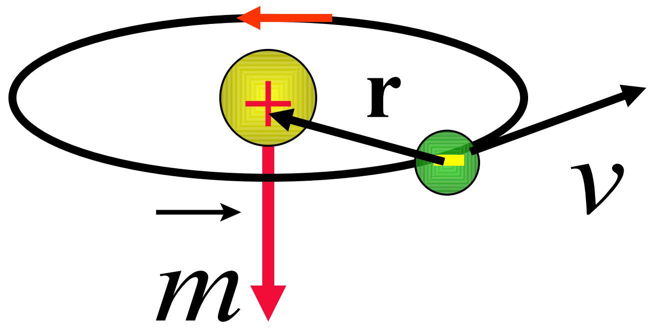


解：

$$\boxed{\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}}$$

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin 90^\circ}{r^2}$$

$$=10^{-7}\frac{1.60\times10^{-19}\times2.2\times10^{6}}{(0.53\times10^{-10})^2}=13(T)$$



解：

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin 90^\circ}{r^2}=13(T)$$

$$\boxed{T=\frac{2\pi r}{\upsilon}}$$

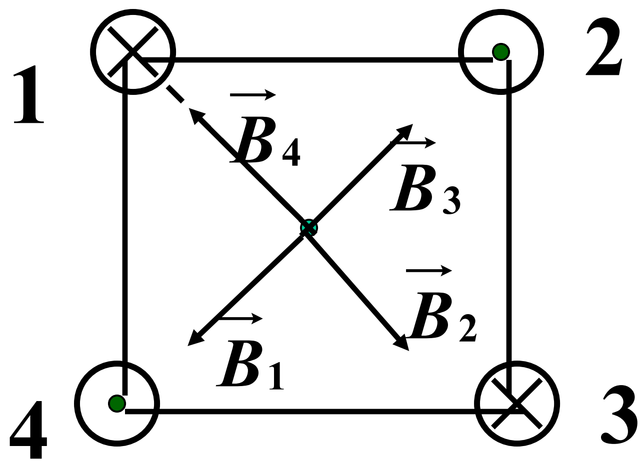
$$I=n|e|=\boxed{\frac{v}{2\pi r}}|e|$$

$$m=IS=\frac{v}{2\pi r}|e|\pi r^2=\frac{1}{2}v|e|r$$

$$=\frac{1}{2}2.2\times10^{6}\times1.60\times10^{-19}\times0.53\times10^{-10}$$

$$=0.93\times10^{-23}(A/m)$$

例 3 四条相互平行的载流长直导线如图所示，电流均为 I，正方形边长为 2a，求正方形中心$\vec{B}$的

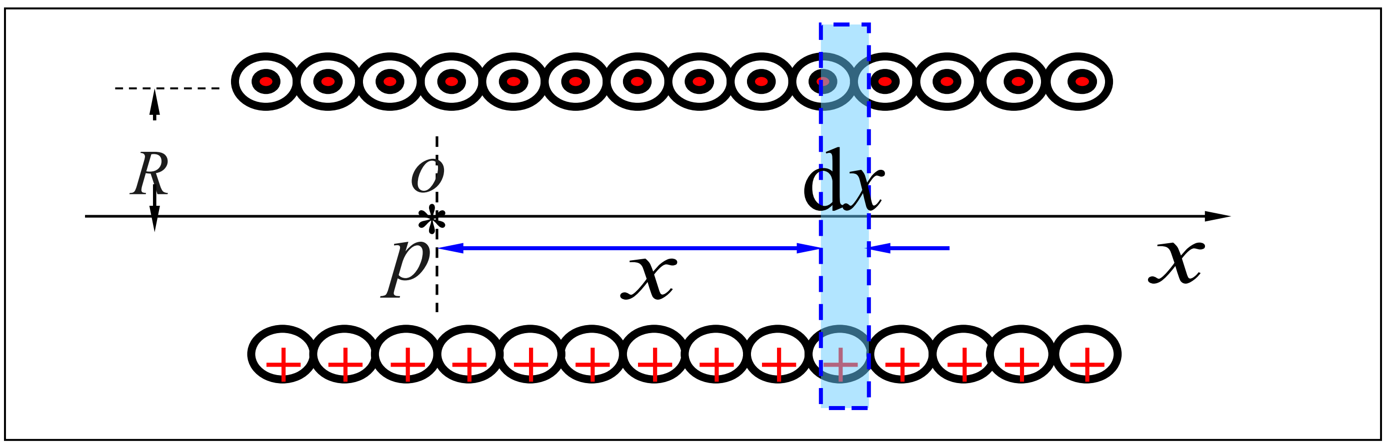


$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{2}\,a}$$

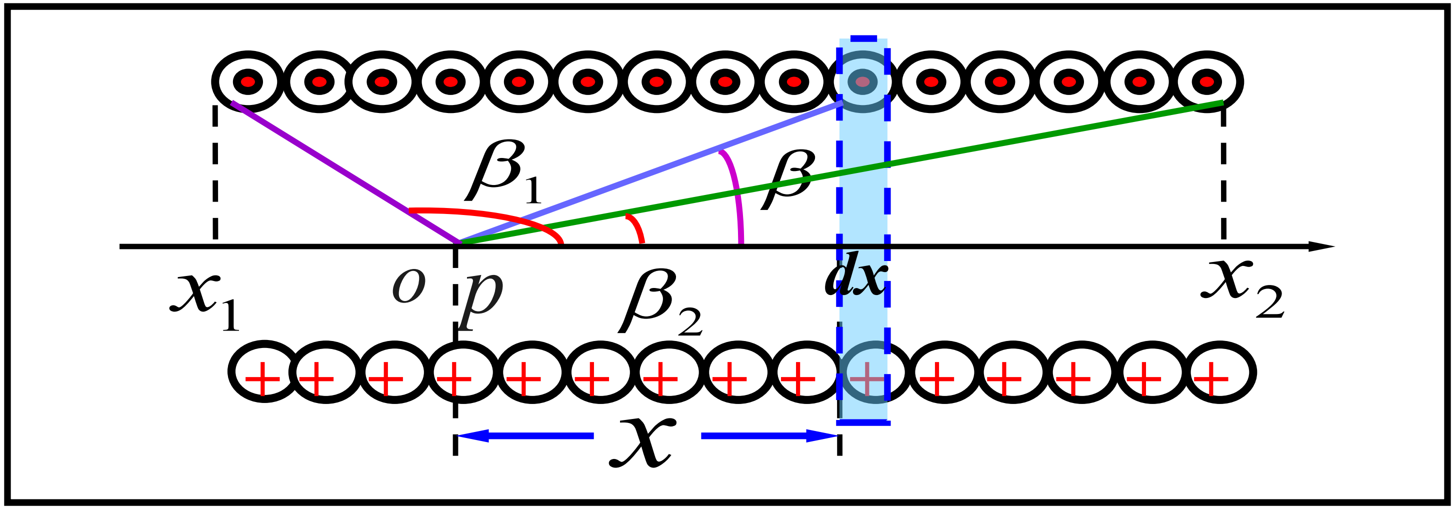
$$B_o=0$$

例 4　载流直螺线管轴线上的磁场

如图所示，有一长为 l，半径为 R 的载流密绕直螺线管，螺线管的总匝数为 N，通有电流 I. 设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度 .



解　由圆形电流磁场公式 $B = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$



$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 \boxed{In\mathrm{d}x}}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$x = R\cot\beta$$

$$\mathrm{d}x = -R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \frac{\mu_0 nI}{2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{R^2\mathrm{d}x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$R^2 + x^2 = R^2\csc^2\beta$$

$$B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{R^3\csc^2\beta\mathrm{d}\beta}{R^3\csc^3\beta} = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$$

讨论

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2 - \cos\beta_1\right)}$$

（1）*P* 点位于管内**轴线中点**

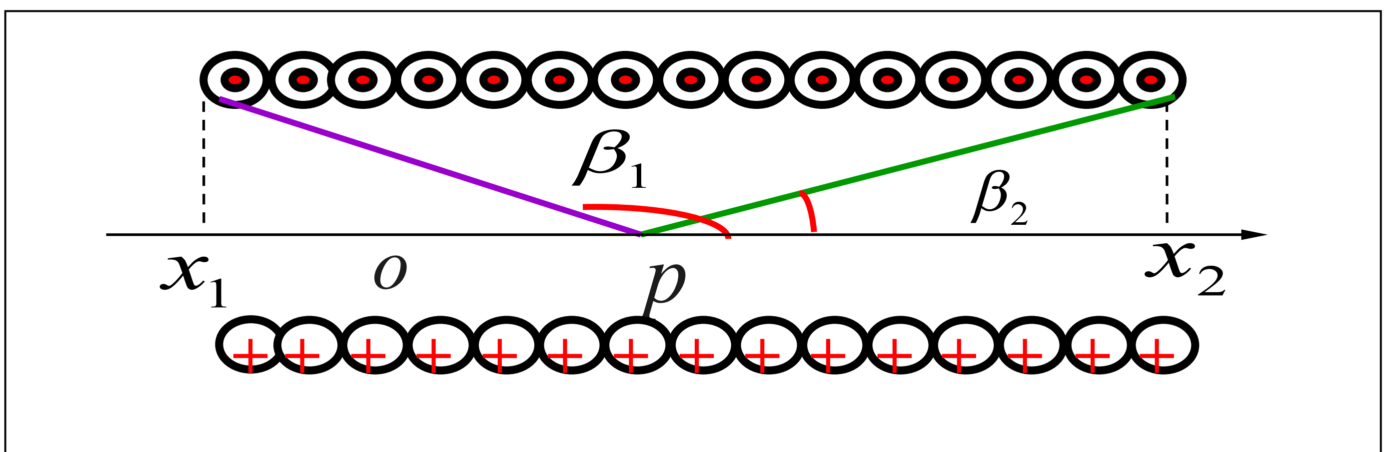
$$\beta_1 = \pi - \beta_2$$

$$\cos\beta_1 = -\cos\beta_2 \qquad \cos\beta_2 = \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + R^2}}$$

$$B = \mu_0 nI\cos\beta_2 = \frac{\mu_0 nI}{2}\frac{l}{\left(l^2/4 + R^2\right)^{1/2}}$$

若 $l >> R$

$$\boxed{B = \mu_0 nI}$$



(2) 无限长的螺线管 （ 3 ）半无限长螺线管 (左端面

$$\boxed{B = \mu_0 nI}$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = 0$$

或由 $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$ 代入

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1)$$

$$\boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0 nI}$$