



南京理工大学
NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

概率与统计

第三讲 频率、概率与条件概率

开课系：理学院 统计与金融数学系

主讲教师：赵慧秀



1.3 频率与概率

(一) 频率 (p6)

定义 事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次, 则比值 n_A/n 称为事件 A 在 n 次重复试验中出现的**频率**, 记为 **$f_n(A)$** .

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$



• 频率的性质

(1) $0 \leq f_n(A) \leq 1$;

(2) $f_n(S) = 1$; $f_n(\phi) = 0$

(3) 可加性：若 $AB = \phi$, 则

$$f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B).$$

注：（3）可推广到 n 个两两互不相容事件的情形。



历史上曾有人做过试验，试图证明抛掷匀质硬币时，出现正反面的机会均等。

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon (法)	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005

当试验次数 n 增大时， $f_n(A)$ 逐渐 趋向一个稳定值。可将此稳定值记作 $P(A)$ 作为事件 A 的概率（**概率的统计定义**）



概率的公理化定义 (p8)

若对随机试验 E 所对应的样本空间 S 中的每一事件 A , 均赋予一实数 $P(A)$, 满足:

(1) 非负性 : $P(A) \geq 0$;

(2) 归一性 : $P(S) = 1$;

(3) 可列可加性: 设 A_1, A_2, \dots , 是一列两两互不相容的事件, 即 $A_i A_j = \phi, (i \neq j), i, j = 1, 2, \dots$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

则称 $P(\cdot)$ 为定义在 S 上的一个概率。



2. 概率的性质 (p8-p9)

(1) $P(\phi) = 0$


证： $S = S \cup \phi \cup \dots \cup \phi \cup \dots$

$$P(S) = P(S) + P(\phi) + \dots + P(\phi) + \dots$$

$$\therefore P(\phi) + \dots + P(\phi) + \dots = 0$$

而 $P(\phi) \geq 0$

$$\therefore P(\phi) = 0$$



(2) **有限可加性**: 设 A_1, A_2, \dots, A_n , 是 n 个两两互不相容的事件, 即 $A_i A_j = \phi$, $(i \neq j), i, j = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

证: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \phi \cup \dots$

$$\begin{aligned} \therefore P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \phi \cup \dots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \\ &= \sum_{i=1}^n P(A_i) \end{aligned}$$

(3) **单调不减性**：若事件 $A \supset B$ ，则
 $P(A) \geq P(B)$ 且 $P(A-B) = P(A) - P(B)$ 。

证： $\because A = B \cup (A - B)$

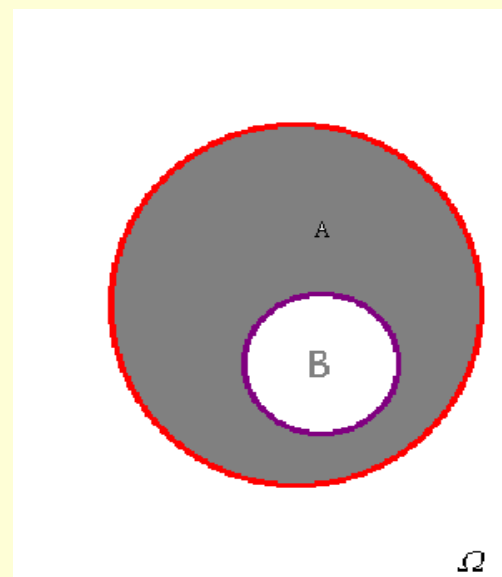
且 $B \cap (A - B) = \phi$

$$\therefore P(A) = P(B) + P(A - B)$$

$$\therefore \underline{P(A) - P(B) = P(A - B) \geq 0}$$

$$\therefore P(A) \geq P(B)$$

(4) 对于任一事件 A , $P(A) \leq 1$



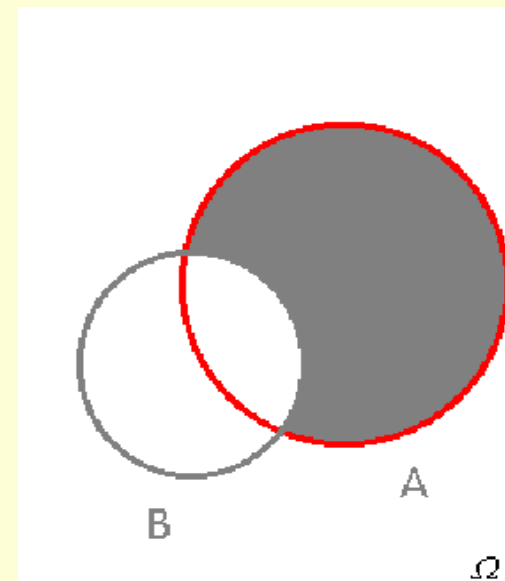
(5) **事件差** A、B 是两个事件，则
 $P(A-B)=P(A) - P(AB)$

证： $\because A = AB \cup (A-B)$

且 $AB \cap (A-B) = \phi$

$$\therefore P(A) = P(AB) + P(A-B)$$

$$\therefore P(A-B) = P(A) - P(AB)$$



(6) **加法公式：**对任意两事件 A、B，有

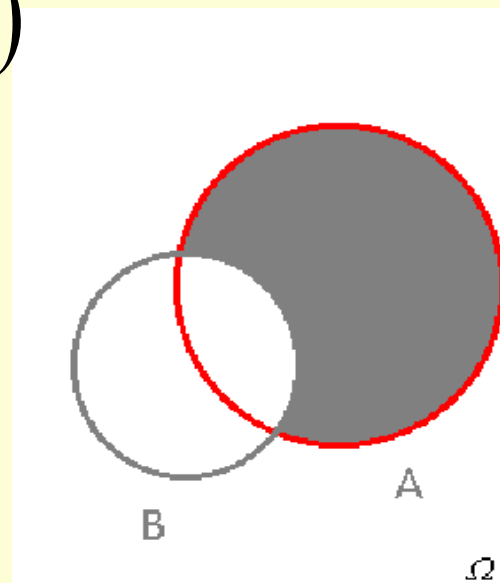
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

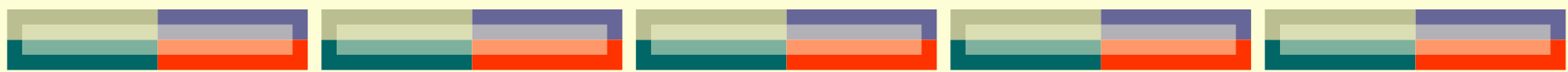
证： $\because A \cup B = B \cup (A - B)$ 且 $B \cap (A - B) = \phi$

$$\therefore P(A \cup B) = P(B) + P(A - B)$$

$$= P(B) + P(A) - P(AB)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$$





该公式可推广到任意 n 个的情形，例如

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j} P(A_i A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

注： $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ 。

(7) **互补性** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$


证：

$$\because S = A \cup \bar{A} \quad \text{且} \quad A \cap \bar{A} = \phi$$

$$\therefore 1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$






例 1. 某市有甲，乙，丙三种报纸，订每种报纸的人数分别占全体市民人数的 30%，其中有 10% 的人同时订甲，乙两种报纸．没有人同时订甲丙或乙丙报纸．求从该市任选一人，他至少订有一种报纸的概率．

解： 设 A B C 分别表示选到的人订了甲，乙，
丙报

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= 30\% \times 3 - 10\% - 0 - 0 + 0 = 80\% \end{aligned}$$

答： 他至少订有一种报纸的概率为 80%.

- 
- 例 2.(p12)** 在 1~10 这 10 个自然数中任取一数，求
- (1) 取到的数能被 2 或 3 整除的概率，
 - (2) 取到的数既不能被 2 也不能被 3 整除的概率，
 - (3) 取到的数能被 2 整除而不能被 3 整除的概率。

解：设 A— 取到的数能被 2 整除；

B - 取到的数能被 3 整除

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{3}{10}$$

$$P(AB) = \frac{1}{10}$$

故 (1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{7}{10}$

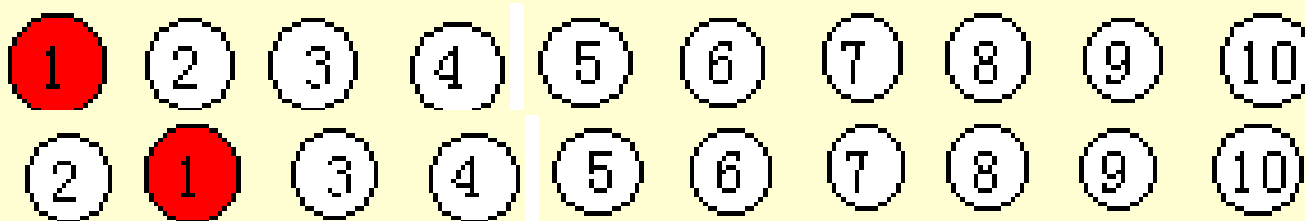
$$(2) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{3}{10}$$

$$(3) P(A - B) = P(A) - P(AB) = \frac{2}{5}$$



袋中有十只球，其中九只白球，一只红球，十人依次从袋中各取一球（不放回），问第一个人取得红球的概率是多少？

第 i 个人取得红球的概率是多少？ ($i=1, \dots, 10$)



答：设 A_i 表示第 i 人取到红球, $i=1, 2, \dots, 10$

$$P(A_i) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}, i = 1, 2, \dots, 10$$

推广： $m+n$ 个球，其中有 m 个白球， n 个黑球。则第 i 个人摸到白球的概率为 $m/(m+n)$ 。

若已知第一个人取到的是白球，则第二个人取到红球的概率是多少？

若已知第一个人取到的是红球，则第二个人取到红球的概率又是多少？



已知事件 A 发生的条件下，
事件 B 发生的概率称为
A 条件下 B 的条件概率，记作 $P(B|A)$



南京理工大学
NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

概率与统计

第四讲 条件概率和独立性

开课系：理学院 统计与金融数学系

主讲教师：赵慧秀

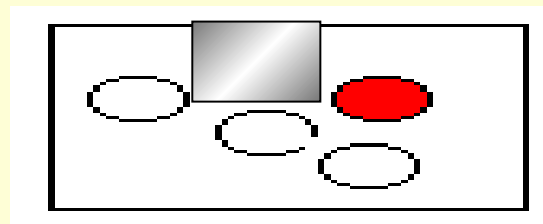
1.5 条件概率

一、定义

例 1 设袋中有 3 个白球， 2 个红球， 现从袋中任意抽取两次， 每次取一个， 取后不放回，

(1) 已知第一次取到红球， 求第二次也取到红球的概率；

(2) 求第二次取到红球的概率



解： 设 A—— 第一次取到红球， B—— 第二次取到红球。

$$(1) P(B | A) = \frac{1}{4}$$

$$(2) P(B) = \frac{2}{5}$$

注： 条件概率计算的思想， 直接在事件 A 发生的条件下重新考虑样本空间计算。



有没有其它更易操作的计算方法?

考虑：掷一颗均匀的骰子， A: 掷出 2 点， B: 掷出偶数点， 如何计算 $P(A/B)$?

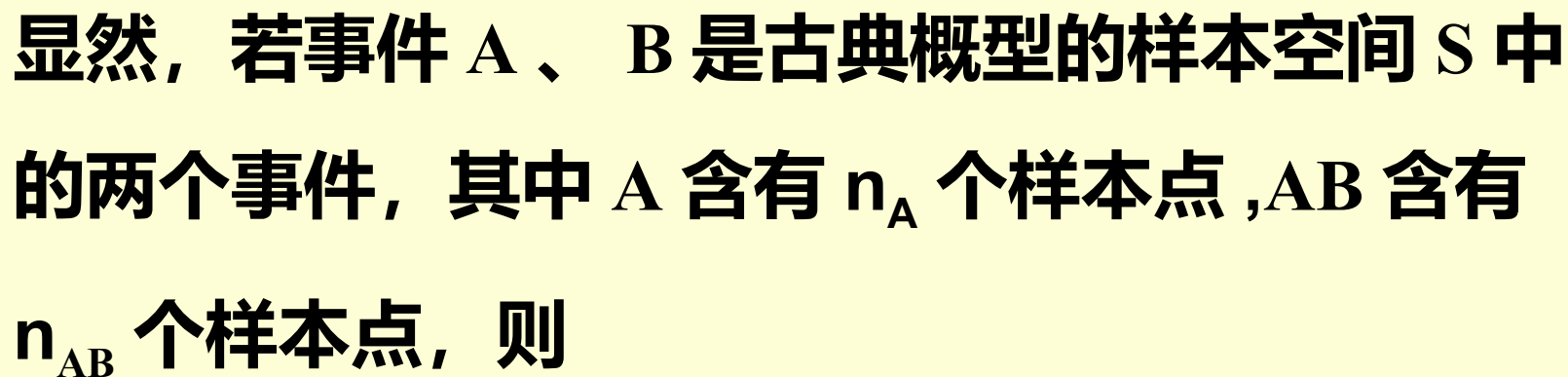
$$A=\{2\}, B=\{2,4,6\} \quad P(A / B) = \frac{1}{3} = \frac{n_{AB}}{n_B}$$

例 1 : A——第一次取到红球 ,
B——第二次取到红球



S=

① ②	① ③	① ④	① ⑤
② ①	② ③	② ④	② ⑤
③ ①	③ ②	③ ④	③ ⑤
④ ① A	④ ②	④ ③	④ ⑤ AB
⑤ ①	⑤ ②	⑤ ③	⑤ ④



$$P(B \mid A) = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{n_{AB}/n}{n_A/n} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

一般地, 设 A 、 B 是 S 中的两个事件, $P(A) > 0$, 则

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为事件 A 发生的条件下事件 B 发生的条件概率



“条件概率”是“概率”吗？

概率 $P(A)$ 满足：

(1) $P(A) \geq 0$; $\Rightarrow P(B|A) = P(AB)/P(A) \geq 0$

(2) $P(S) = 1$; $\Rightarrow P(S|A) = P(AS)/P(A) = 1$

(3) **可列可加性**

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{设 } BC = \emptyset, P(B \cup C|A) &= P\{(B \cup C) \cap A\} / P(A) \\ &= P(BA \cup CA) / P(A) = P(BA) / P(A) + P(CA) / P(A) \\ &= P(B|A) + P(C|A) \end{aligned}$$

**注：下列性质中的事件的逆
不要取错位置：**

$$P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$$

例 2 一盒中混有 100 只新，旧乒乓球，各有红、白两色，分类如下表。从盒中随机取出一球，若取得的是一只红球，试求该红球是新球的概率。

设 A - 从盒中随机取到一只红球。

	红	白
新	40	30
旧	20	10

设 B - 从盒中随机取到一只新球。

$$P(B | A) = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{2}{3}$$



EX

某牌号的电视机使用到 3 万小时的概率为 0.6，使用到 5 万小时的概率为 0.24，一台电视机已使用到 3 万小时，求这台电视机能使用到 5 万小时的概率。

解：设 $A = \{ \text{使用到 3 万小时} \}$ ， $B = \{ \text{使用到 5 万小时} \}$ ，于是

$$P(A) = 0.6, P(AB) = P(B) = 0.24$$

则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.4$$



二、乘法公式 (p15)

设 A 、 B 为两个事件， $P(A) > 0$ ，则

$$P(AB) = P(A)P(B|A). \quad (5.2)$$

式 (1.4.1) 就称为事件 A 、 B 的概率乘法公式
式 (1.4.1) 还可推广到三个事件的情形：

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

一般地，有下列公式：

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

计算的思想：复杂事件的概率按照事件发生的先后顺序分解成简单事件的概率计算。直观的理解：试验结果按照先后顺序由 n 步组成，例：10 个人摸球（9 白 1 红）

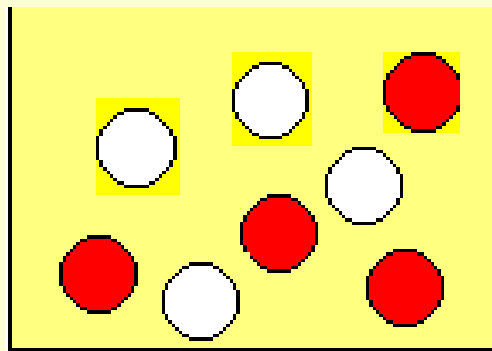
例 3 盒中有 3 个红球，2 个白球，每次从盒中任取一只，观察其颜色后放回，并再放入一只与所取之球颜色相同的球，若从盒中连续取球 4 次，试求第 1、2 次取得白球、第 3、4 次取得红球的概率。

解： 设 A_i 为第 i 次取球时取到白球，则

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(\bar{A}_3 | A_1 A_2)P(\bar{A}_4 | A_1 A_2 \bar{A}_3)$$

$$P(A_1) = \frac{2}{5}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{3}{6}$$



$$P(\bar{A}_3 | A_1 A_2) = \frac{3}{7}$$

$$P(\bar{A}_4 | A_1 A_2 \bar{A}_3) = \frac{4}{8}$$

$$P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{8} = \frac{3}{70}$$



EX

某商店搞抽奖活动．顾客需过三关，第 i 关从装有 $i + 1$ 个白球和一个黑球的袋子中抽取一只，抽到黑球即过关．连过三关者可拿到一等奖．求顾客能拿到一等奖的概率．

解：设 A_i ：“顾客在第 i 关通过”； B ：“顾客能拿到一等奖”，

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 A_2) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60} \end{aligned}$$

答：顾客能拿到一等奖的概率为 $1/60$ ．

1.6、全概率公式与贝叶斯公式

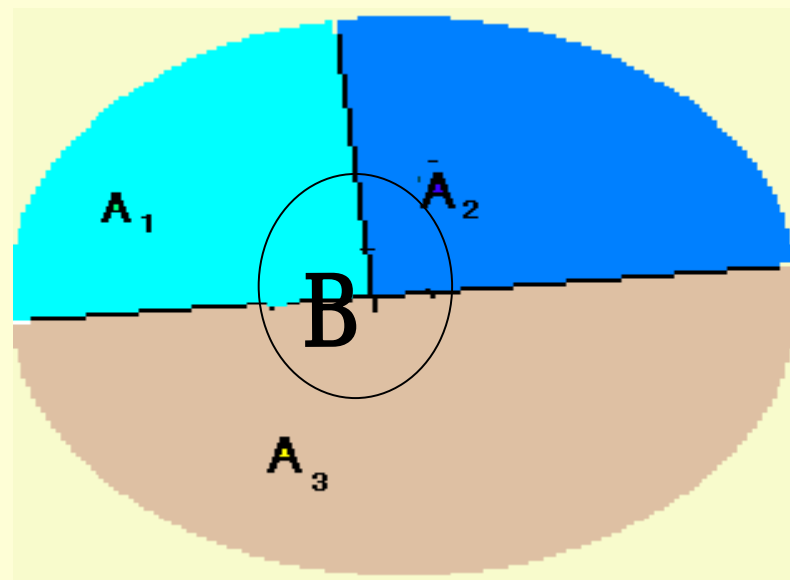
例 4. 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家工厂的市场占有率分别为 $1/4$ 、 $1/4$ 、 $1/2$ ，且三家工厂的次品率分别为 2% 、 1% 、 3% ，试求市场上该品牌产品的次品率。

设： B ：买到一件次品

A_1 ：买到一件甲厂的产品

A_2 ：买到一件乙厂的产品

A_3 ：买到一件丙厂的产品

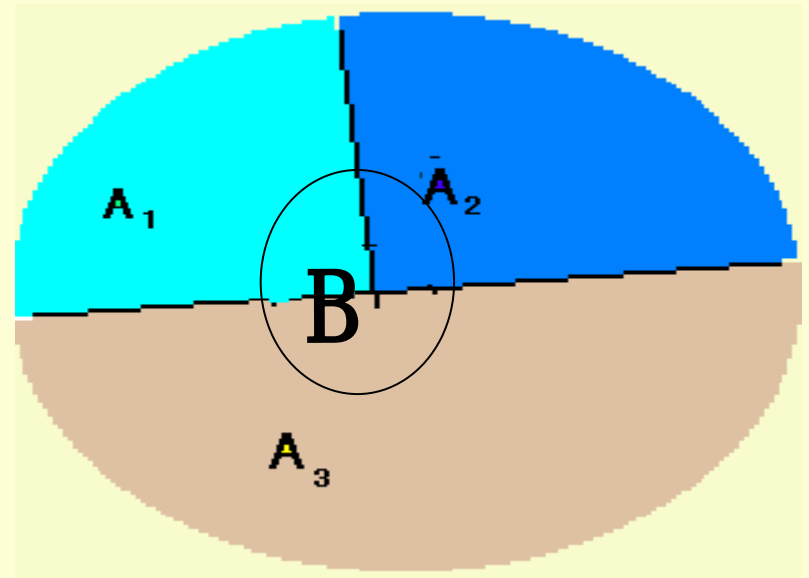


$$P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + P(BA_3)$$

$$= P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3)$$

$$= 0.02 \times \frac{1}{4} + 0.01 \times \frac{1}{4} + 0.03 \times \frac{1}{2}$$

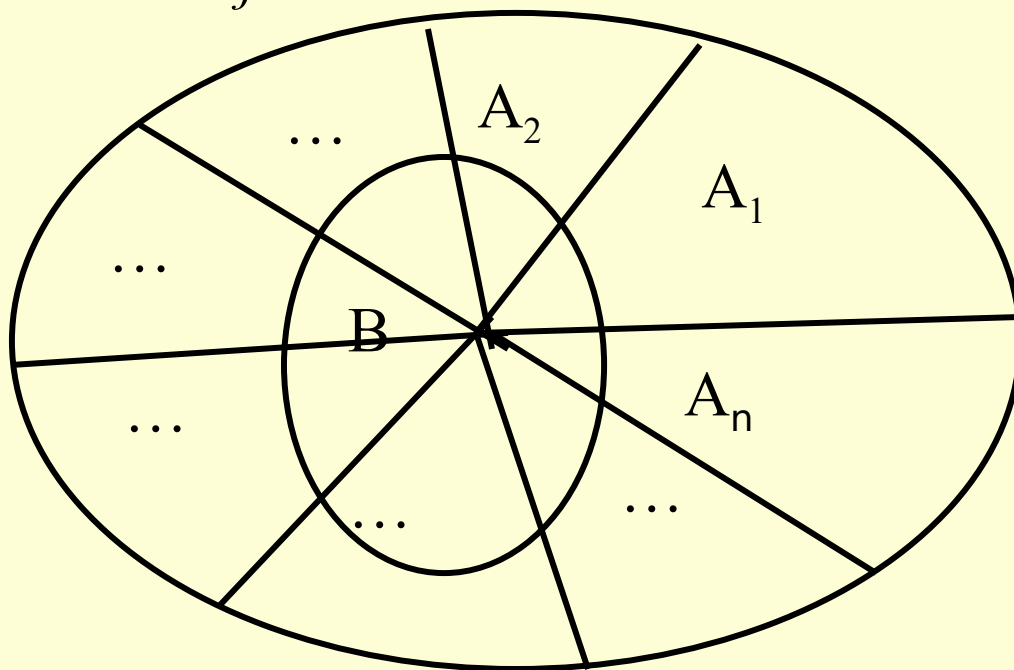
$$\approx 0.0225$$



定义 (p19) 事件组 A_1, A_2, \dots, A_n (n 可为 ∞) , 称为样本空间 S 的一个划分, 若满足:

$$(i) \bigcup_{i=1}^n A_i = S;$$

$$(ii) A_i A_j = \phi, (i \neq j), i, j = 1, 2, \dots, n.$$



定理 1 (全概率公式, p19) 设 A_1, \dots, A_n

是 S 的一个划分, 且 $P(A_i) > 0$, ($i = 1,$


$$\dots, n) \quad P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

注: 对任何事件 $B \in S$ 有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$

例如: 统计南京市人口的死亡率, 95 % 为普通人口 (死亡率 5 %), 5 % 为非普通 (死亡率 95 %), 则南京市人口的死亡率为: $95 \% * 5 \% + 5 \% * 95 \%$

(2) 为了便于计算, 引入一个适当的划分。

划分的理解: 引起事件 B 发生的两两互不相容的全部原因: A_1, \dots, A_n , 全概率公式: 由原因——结果。




例 4. (续) 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品, 已知三家工厂的市场占有率分别为 $1/4$ 、 $1/4$ 、 $1/2$, 且三家工厂的次品率分别为 2% 、 1% 、 3% , 若买到一个次品, 则它是甲厂生产的概率是多少?

解: 设 B — 买到一件次品; $A_i, i=1,2,3$ 分别表示买到甲、乙、丙厂产品。

$$P(A_1 | B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{P(B | A_1)P(A_1)}{P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3)}$$
$$\frac{0.02 \times 0.25}{0.0225} \approx 0.22$$

答: 若买到一个次品, 则它是甲厂生产的概率是 0.22 .



定理 2 (贝叶斯公式 p20) 设 A_1, \dots, A_n 是 S 的一个划分, 且 $P(A_i) > 0, (i = 1, \dots, n)$, 则

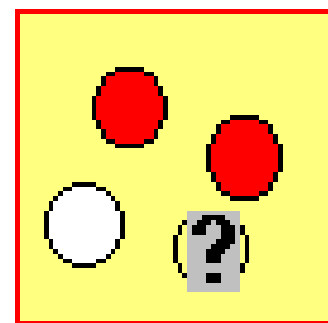
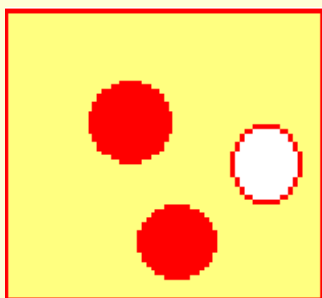
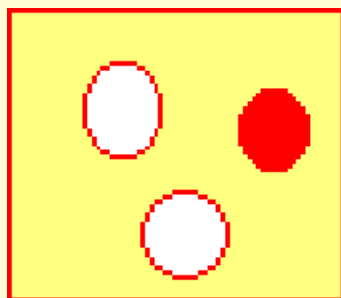
对任何事件 $B \in S$, 有

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B | A_j)}, (i = 1, \dots, n)$$

例 5

有甲乙两个袋子，甲袋中有两个白球，1个红球，乙袋中有两个红球，一个白球。这六个球手感上不可区别。今从甲袋中任取一球放入乙袋，搅匀后再从乙袋中任取一球，

- (1) 问此球是红球的概率？
- (2) 若从乙袋中取到一个红球，则从甲袋放入乙袋的是白球的概率是多少？

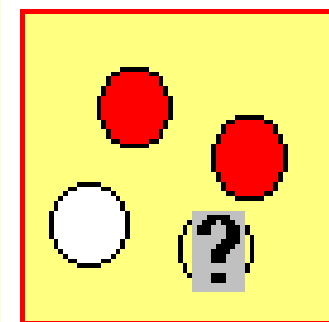
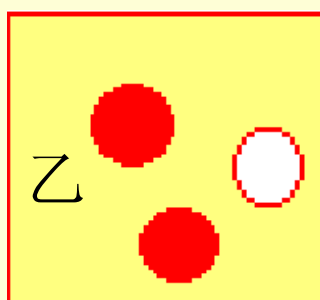
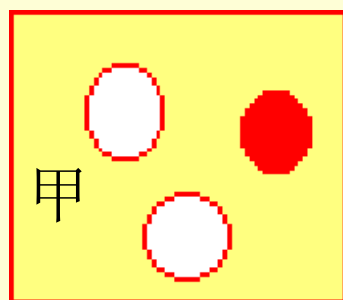


解：设 A——从甲袋放入乙袋的是白球；
B——从乙袋中任取一球是红球；

$$(1) P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A})$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$


$$(2) P(A | B) = P(AB) / P(B) = [P(B | A)P(A)] / P(B) = 4/7$$





EX

已知某种疾病的发病率为 0.1% 该种疾病患者一个月内的死亡率为 90%; 且知未患该种疾病的人一个月以内的死亡率为 0.1%; 现从人群中任意抽取一人, 问此人在一个月死亡的概率是多少? 若已知此人在一个月死亡, 则此人是因该种疾病致死的概率为多少?



解：设 A “某人在一个月內死亡”；
B “某人患有该种疾病”，则

$$P(A) = P(A | B)P(B) + P(A | \bar{B})P(\bar{B}) \approx 0.002$$

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.9 \times 0.001}{0.002} = 0.45$$

1.5 事件的独立性

一、两事件独立

定义 (p16) 设 A 、 B 是两事件，若

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad (5.5)$$

则称事件 A 与 B 相互独立。

- 注：
1. 当 $P(A) \neq 0$, 式 (5.5) 等价于: $P(B) = P(B|A)$
 2. 必然事件，不可能事件与任何事件独立
 - 3 独立性的判别条件: 5.5 式或者由独立性的直观含义: 事件 A 的发生不影响事件 B 的发生

EX

从一副 52 张的扑克牌中任意抽取一张，以 A 表示抽出一张 A，以 B 表示抽出一张黑桃，问 A 与 B 是否独立？ \bar{A} 与 B 是否独立

解： $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ； $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ ； $P(AB) = \frac{1}{52}$ ；

$$P(AB) = P(A)P(B) \therefore A \text{ 与 } B \text{ 独立。}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{12}{13}； P(\bar{A}B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}；$$

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) \therefore \bar{A} \text{ 与 } B \text{ 独立}$$

定理 以下四件事等价

(1) 事件 A、B 相互独立; (2) 事件 A、B 相互独立;

(3) 事件 A、B 相互独立; (4) 事件 A、B 相互独立;

证: (1) \Rightarrow (2) 设 A、B 相互独立, 即

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AB) = P(B) - P(A)P(B)$$

$$= P(B)[1 - P(A)] = P(B)P(\bar{A}) \quad \#$$

(4) \Rightarrow (1) 设事件 \bar{A} 、 \bar{B} 相互独立, 即

$$\begin{aligned} P(AB) &= 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B})] \\ &= 1 - [1 - P(A)] - [1 - P(B)] + [1 - P(A)][1 - P(B)] \\ &= 1 - 1 + P(A) - 1 + P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = P(A)P(B) \quad \# \end{aligned}$$

二、多个事件的独立

定义 2、若三个事件 A、B、C 满足：

$$(1) \quad P(AB)=P(A)P(B), \quad P(AC)=P(A)P(C), \\ P(BC)=P(B)P(C),$$

则称事件 A、B、C **两两相互独立**；

若在此基础上还满足：

$$(2) \quad P(ABC) = P(A)P(B)P(C),$$

则称事件 **A、B、C 相互独立**。

注：两两独立未必相互独立！

例：从分别标有 1, 2, 3, 4 四个数字的 4 张卡片中随机抽取一张，以事件 A 表示“取到 1 或 2 号卡片”；事件 B 表示“取到 1 或 3 号卡片”；事件 C 表示“取到 1 或 4 号卡片”。则事件 A, B, C 两两独立但不相互独立。

$$\text{事实上, } P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = P(BC) = P(AC) = \frac{1}{4}$$

$$P(ABC) = \frac{1}{4}$$



一般地,

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是 n 个事件, 如果对任意 k ($1 < k \leq n$), 任意的 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 具有等式

$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$ 成立。则称 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立。 (共有 $2^n - n - 1$ 个等式成立)

思考:
1. 设事件 A 、 B 、 C 、 D 相互独立, 则 $A \cup B$ 与 CD 独立吗?

2. 一颗骰子掷 4 次至少得一个六点与两颗骰子掷

24 次至少得一个双六, 这两件事, 答: 0.518,

哪一个有更多的机会遇到? (德·梅耳问题) 0.496

小结

概率定义



条件概率
乘法公式



全概率公式



Bayes 公式

独立性



两事件独立



独立事件组

EX

n架轰炸机独立地飞往目标投弹. 已知每架飞机能够飞到目标上空的概率为 p_1 , 在目标上空投弹, 命中目标的概率为 p_2 . 求目标被命中的概率.

解: 设 A_i -- 第 i 架飞机飞到目标上空, $i=1, \dots, n$;

B - 目标被命中.

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i B\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i B}\right) = 1 - \left(1 - p_1 p_2\right)^n$$



南京理工大学
NANJING UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

概率与统计

第五讲 第一章小结

开课系：理学院 统计与金融数学系

主讲教师： 赵慧秀



第一章 小结

本章包括 **六个概念**：

(随机试验、样本空间、事件、概率、条件概率、独立性)

四个公式：

**(加法公式、乘法公式、全概率公式、
贝叶斯公式)**

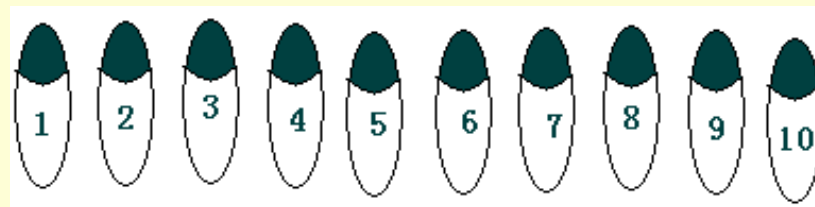
和一个概型：(古典概型)

习题课—习题选解

例 1 从 5 双不同的鞋中任取 4 只，求这 4 只鞋子中至少有两只能配成一双的概率。

解： 设 A ——至少有两只鞋子配成一双

$$~~P(A) = \frac{C_5^1 C_8^2}{C_{10}^4} = \frac{2}{3}~~$$



法 1： $p(A) = 1 - P\{\bar{A}\} = 1 - \frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{A_{10}^4} = \frac{13}{21}$

法 2： $p(A) = 1 - P\{\bar{A}\} = 1 - \frac{C_5^4 (C_2^1)^4}{C_{10}^4} = \frac{13}{21}$

例 2 将一枚骰子重复掷 n 次，试求掷出最大点数为 5 的概率

解：法 1： C：掷出最大点数为 5. 则事件 C 的所有情形有：
 n 次投掷中只出现一个 5 且其它点数都 ≤ 4 ，
 n 次投掷中只出现 2 个 5 且其它点数都 ≤ 4 ，...，
 n 次投掷中只出现 n 个 5 且其它点数都 ≤ 4 ，则 C 的样本点总数为：


$$C_n^1 4^{n-1} + C_n^2 4^{n-2} + \dots + C_n^n 4^{n-n} = 5^n - 4^n$$

所以可得 $P(C) = \frac{5^n - 4^n}{6^n}$

法 2： A：掷出最大点数不大于 5； B：掷出最大点数不大于 4
 $A \supset B$

则 A-B：掷出最大点数为 5，且

$$P(A-B) = P(A) - P(B) = \frac{5^n}{6^n} - \frac{4^n}{6^n} = \frac{5^n - 4^n}{6^n}$$



例 3：从 0,1,...,9 这 10 个数字中任取 4 个进行排列，求排成的数首位不为 0 且末位为偶数的概率。

解：设 A：排成的数首位不为 0 且末位为偶数


法一：末位数为 0 的个数 A_9^3 ，末位数不为 0 的个数 $C_4^1 C_8^1 A_8^2$

$$P(A) = \frac{A_9^3 + C_4^1 C_8^1 A_8^2}{A_{10}^4} = \frac{41}{90}$$

法二：首位为奇数： $C_5^1 C_5^1 A_8^2$ ，首位为偶数： $C_4^1 C_4^1 A_8^2$

则：

$$P(A) = \frac{C_5^1 C_5^1 A_8^2 + C_4^1 C_4^1 A_8^2}{A_{10}^4} = \frac{41}{90}$$



例 4 (p21 22) 商店论箱出售玻璃杯，每箱 20 只，其中每箱含 0, 1, 2 只次品的概率分别为 0.8, 0.1, 0.1，某顾客选中一箱，从中任选 4 只检查，结果都是好的，便买下了这一箱。问这一箱含有一个次品的概率是多少？

解：设 A 从一箱中任取 4 只检查，结果都是好的。


B_0, B_1, B_2 分别表示事件每箱含 0, 1, 2 只次

品
已知： $P(B_0) = 0.8, P(B_1) = 0.1, P(B_2) = 0.1$


$$P(A | B_0) = 1 \quad P(A | B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}, \quad P(A | B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}$$

由 Bayes 公式：

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1)P(A | B_1)}{\sum_{i=0}^2 P(B_i)P(A | B_i)} = \frac{0.1 \times \frac{4}{5}}{0.8 \times 1 + 0.1 \times \frac{4}{5} + 0.1 \times \frac{12}{19}} \approx 0.0848$$



例 5 甲、乙、丙三人同时对飞机进行射击，三人击中的概率分别为 0.5, 0.6, 0.7. 飞机被一人击中而被击落的概率为 0.3, 被两人击中而被击落的概率为 0.6, 若被三人击中，则必被击落. 求飞机被击落的概率.



解：设 $A_i, i=1,2,3$ 分别表示甲、乙、丙击中飞机；
 $B_i, i=1,2,3$ 分别表示只有 i 人击中飞机；
 B : 飞机被击落 .

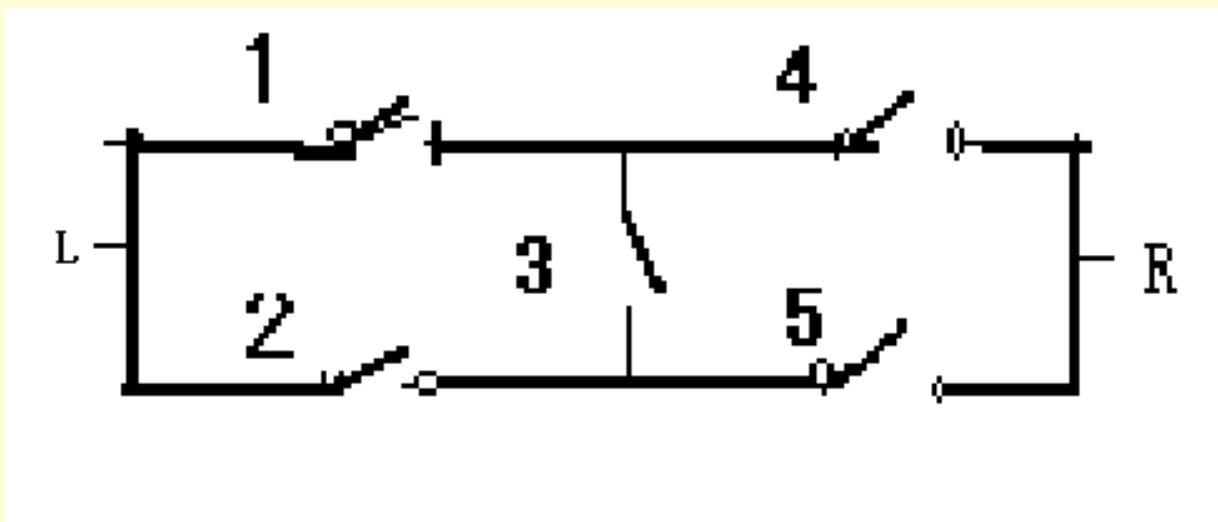
则

$$P(B_1) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = 0.29$$
$$P(B_2) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = 0.44$$
$$P(B_3) = P(A_1 A_2 A_3) = 0.21$$

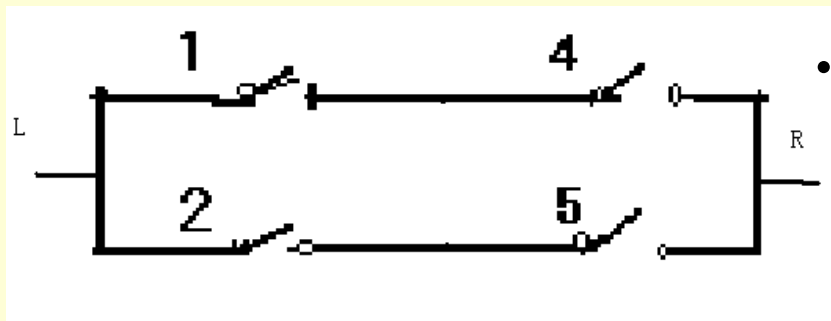
由全概率公式，

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(B | B_i) P(B_i) = 0.561$$

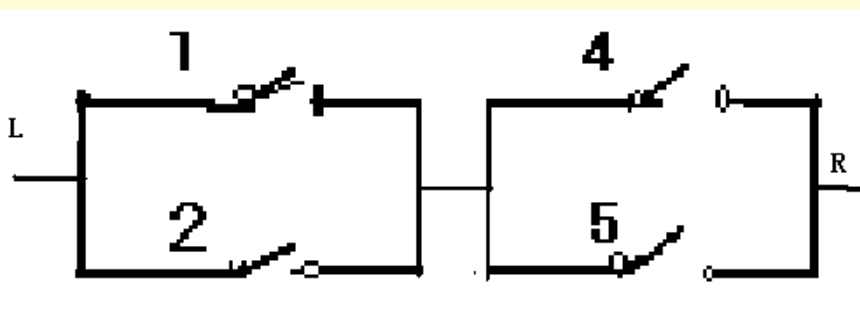
例 6 . 如图， 1、 2、 3、 4、 5 表示继电器触点， 假设每个触点闭合的概率为 p 且各继电器接点闭合与否相互独立， 求 L 至 R 是通路的概率。



设 A---L 至 R 为通路, A_i --- 第 i 个继电器通, $i=1,2,$



$$\begin{aligned} \dots P(A | \bar{A}_3) &= P(A_1 A_4 \cup A_2 A_5) \\ &= 2p^2 - p^4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} P(A | A_3) &= P\{(A_1 \cup A_2)(A_4 \cup A_5)\} \\ P(A | A_3) &= P(A_1 \cup A_2)P(A_4 \cup A_5) \\ &= (2p - p^2)^2 \end{aligned}$$

由全概率公式

$$P(A) = P(A | \bar{A}_3)P(\bar{A}_3) + P(A | A_3)P(A_3) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

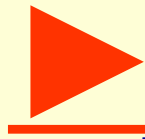
一. 判断对错

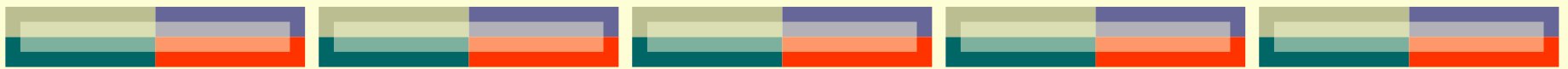
课堂练习

1. 某种疾病的发病率为 1%，则每 100 人必有一人发病
2. A, B 为两事件，则 $A \cup B - A = B$
3. “ A, B 都发生” 的对立事件是 “ A, B 都不发生”
4. $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ ，若 A, B 互斥，则 A, B 不独立。
5. 若 $A = \emptyset$ ，则 A 与任何事件即互斥又相互独立。
6. 假如每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为 p ，则由 n 个人的血清混合后的血清中含有肝炎病毒的概率为 $1 - (1-p)^n$

二. 填空

1. 已知 $P(A) = 0.7$, $P(A-B) = 0.3$, $P(\overline{A|B}) =$
2. 设两个独立事件 A 和 B 都不发生的概率为 $1/9$, A 发生而 B 不发生的概率与 B 发生而 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ 解.
3. 已知 A 与 B 相互独立, 且互不相容则 $\min(P(A), P(B)) =$ 解
4. 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, P(B) > 0$, $P(B|A) = P(B|\overline{A})$
A) $P(A|B) = P(\overline{A}|B)$, 则必有 $P(A|B) \neq P(\overline{A}|B)$
C) $P(AB) = P(A)P(B)$ D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$





作业（3）：1, 2(2), 3, 4, 6

作业（4）：2, 4, 5, 6, 7

