布置作业

练习三

10.4 安培环路定理及其应用

应用程序

一 安培环路定理

1、B 的环流：

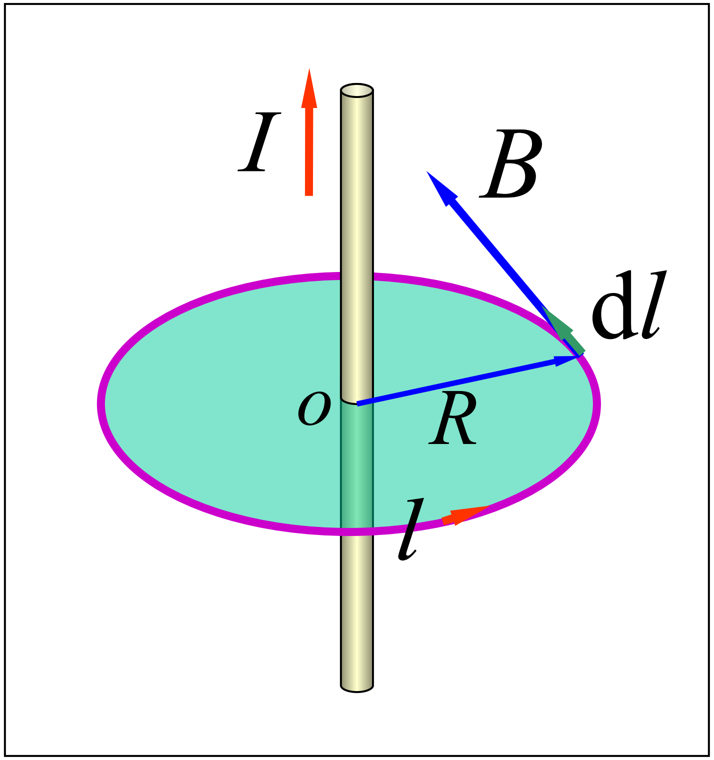
$$\oint_L \vec{B}\cdot\vec{dl}=\oint_L B\cos\theta\cdot dl$$

从一特例出发，然后推广。

2、特例：长直电流的 B 环流

载流长直导线的磁感强度为

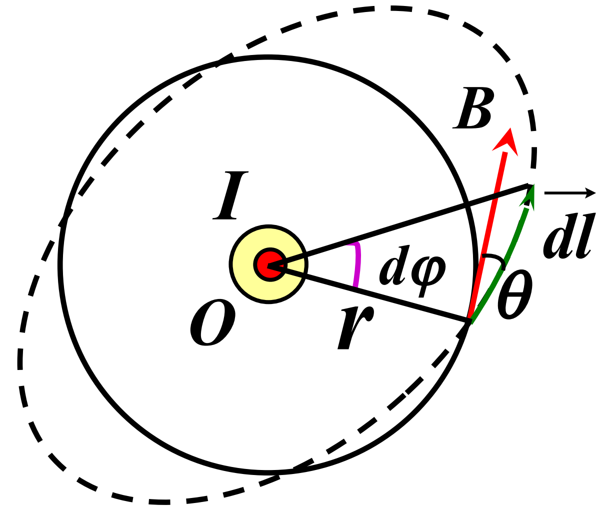
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



设闭合回路 l 为圆形回路（l 与 I 成右螺旋）

$$\oint_L \vec{B}\cdot\vec{dl} = \oint_L B\cos\theta dl = \oint_L Brd\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot rd\varphi = \mu_0 I$$



结论：$\oint_l \vec{B}\cdot\vec{dl}$ 的结果等于闭合路径 L 的包围电流 μ_0

I 的 倍。

3、推广：对任意闭合回路电流，任意闭合路径 L，

$\oint_l \vec{B}\cdot\vec{dl}$ 等于闭合路径 L 的包围电流 μ_0

I 的 倍。

4、安培环路定理：

1）文字表述：

磁感应强度沿任一闭合路径 L 的线积分（B 的环流）等于穿过这个环路所有电流强度的代数和的 μ_0 倍。

2）表达式：

$$\oint_L \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

对比：$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$ 无旋场

3）物理意义：反映稳恒电流磁场（静磁场）的另外一个重要性质，是有旋场，涡旋场，非保守力场。

4）说明：（1）空间中任意一点的 $\vec{B}$ 都是由所有电流激发的，而 $\oint_L \vec{B}\cdot dl$ 仅与穿过环路电流有关。

（2）L 闭合路径的走向可以任意假定，右手四指沿 L 走向，大拇指就是规定的正方向，即为 I 电流的正向，相同 I 为正，相反 I 为负。

（3）对于闭合回路的电流，完整的闭合路径 L，安培环路定理普遍适用，但对一段不闭合电路不适用。

（4）$\sum I_i$ 指 L 所包围面积内所有电流之和。

若回路绕向为顺时针时，则

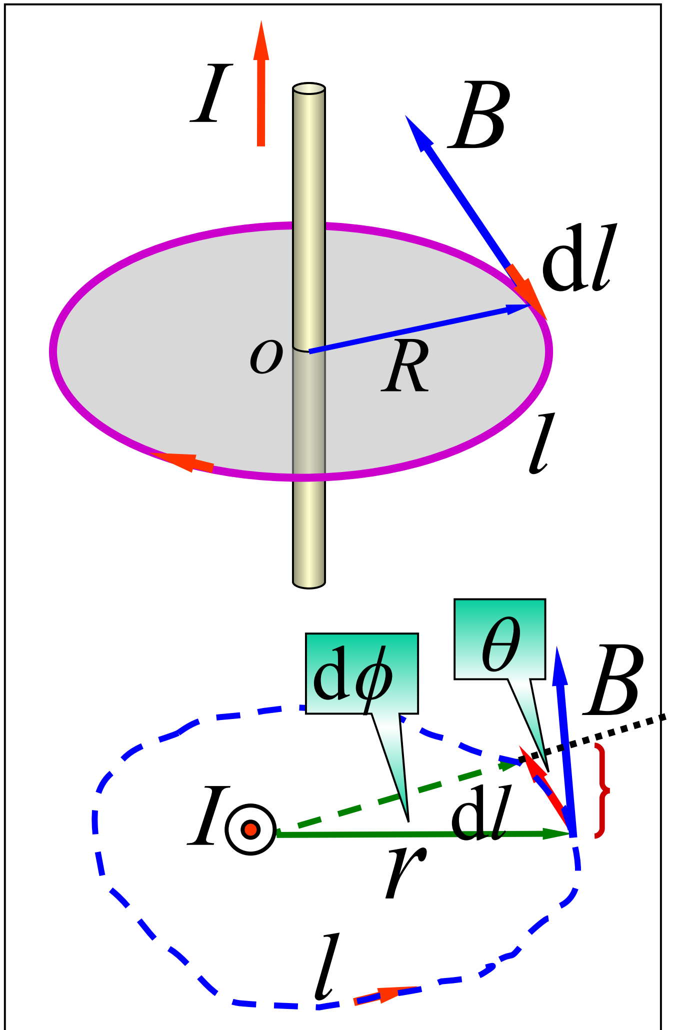
$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = -\mu_0 I$$

对任意形状的回路

$$B\cdot \mathrm{d}l = Bdl\cos\theta = Brd\phi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r\mathrm{d}\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$\oint_l B\cdot \mathrm{d}l = \mu_0 I$$



l 与 I 成右螺旋

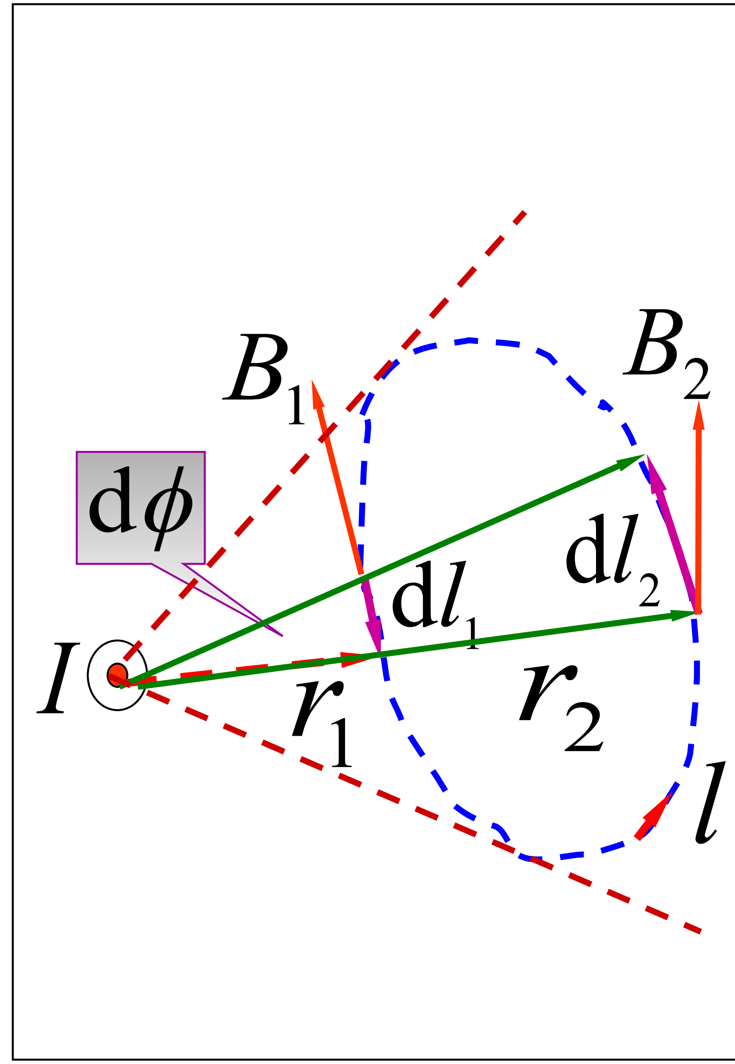
电流在回路之外

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r_2}$$

$$\vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1 = -\vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$\vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_1 + \vec{B}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2 = 0$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



$$\oint_{ACBDA} B\cdot dl = \oint_{ACBEA} B\cdot dl$$

$$\oint_{ACBDA} B\cdot dl = \int_{ACB} + \int_{BDA}$$

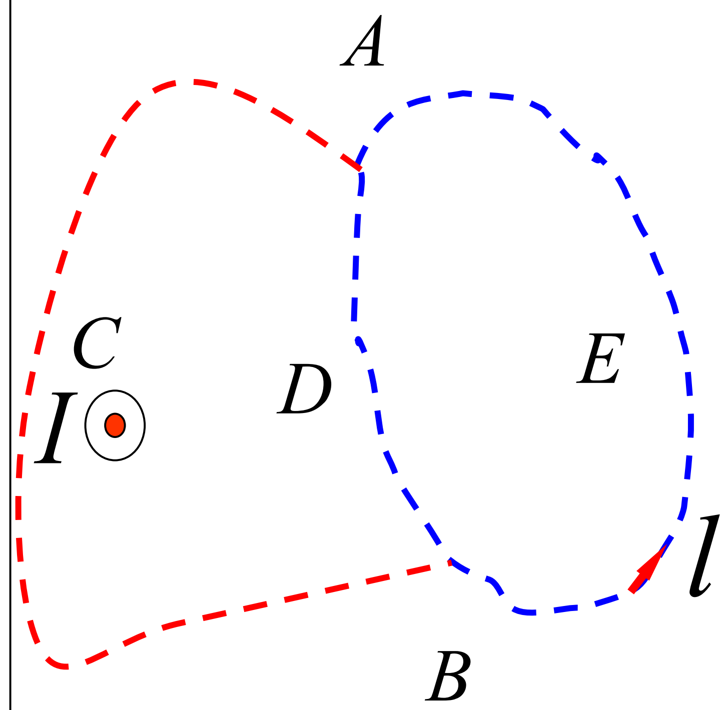
$$\oint_{ACBEA} B\cdot dl = \int_{ACB} + \int_{BEA}$$

$$\therefore \int_{BDA} = \int_{BEA}$$

$$\therefore \oint_{ADBEA} B\cdot dl = \int_{ADB} + \int_{BEA}$$

$$= -\int_{BDA} + \int_{BEA} = 0$$

电流在回路之外(2)

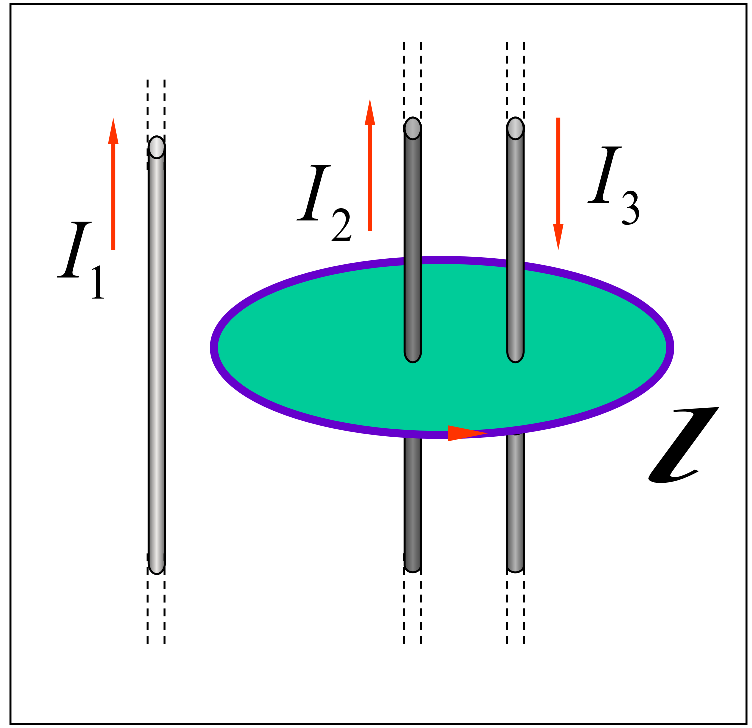


$$B = B_1 + B_2 + B_3$$

$$\oint_l B \cdot dl = \oint_l (B_1 + B_2 + B_3) \cdot dl$$

$$= 0 + \mu_0 I_2 - \mu_0 I_3 = \mu_0 (I_2 - I_3)$$

多电流情况



以上结果对任意形状闭合电流（伸向无限远的电流）均成立．

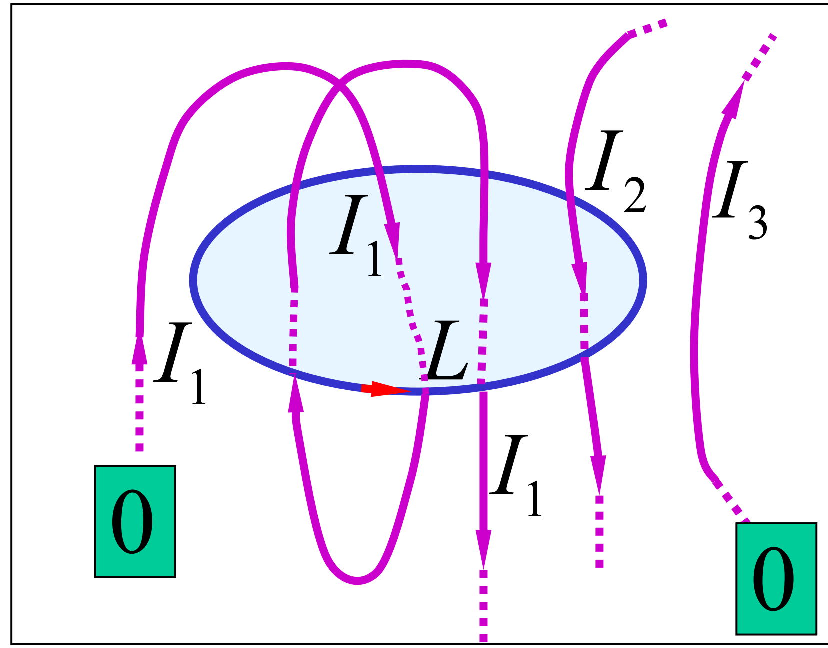
安环定理 $$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

即在真空的稳恒磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任一闭合路径的积分的值，等于 μ_0 乘以该闭合路径所包围的各电流的代数和．

电流 正负的规定 ：L 与 成
I 右螺旋时， 为正；反之为负．

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0(-I_1 + I_1 - I_1 - I_2)$$

$$= -\mu_0(I_1 + I_2)$$



问 1) $\boldsymbol{B}$ 是否与回路 L 外电流有关？

2) 若 $\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，是否回路 L 上各处 $\boldsymbol{B}=0$？是否回路 L 内无电流穿过？

$$\oint_L B \cdot \mathrm{d}l = \oint_L B \cdot \cos\theta \cdot dl = 0$$ 的情形

1、环路上 $B = 0$

2、夹角 $\cos\theta = 0$;

3、$\sum I_i = 0$

二、安培环路定理的应用 — 电流分布具有某种对称性

适用条件：闭合回路 L 上 B 均匀，大小为一常数，

才可提出积分号， $B\,||\,L$ ，B L 上 大小处处相等，B

才可求出

$$\oint_L B\cdot dl = \mu_0 \sum_{L内} I_i \qquad \oint_L B\cos\theta dl = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

若能找到某个回路 L 使之满足：

$$B\cos\theta \oint_L dl = \mu_0 \sum_{L内} I_i \qquad B = \mu_0 \sum_{L} I_i \Big/ \cos\theta L$$

环路 L 的选取通常要满足：

1）L 上的 B 大小相等，方向可不同。

（或 B 与 dl 平行或垂直。）

2）环路的长度的选取要便于计算；

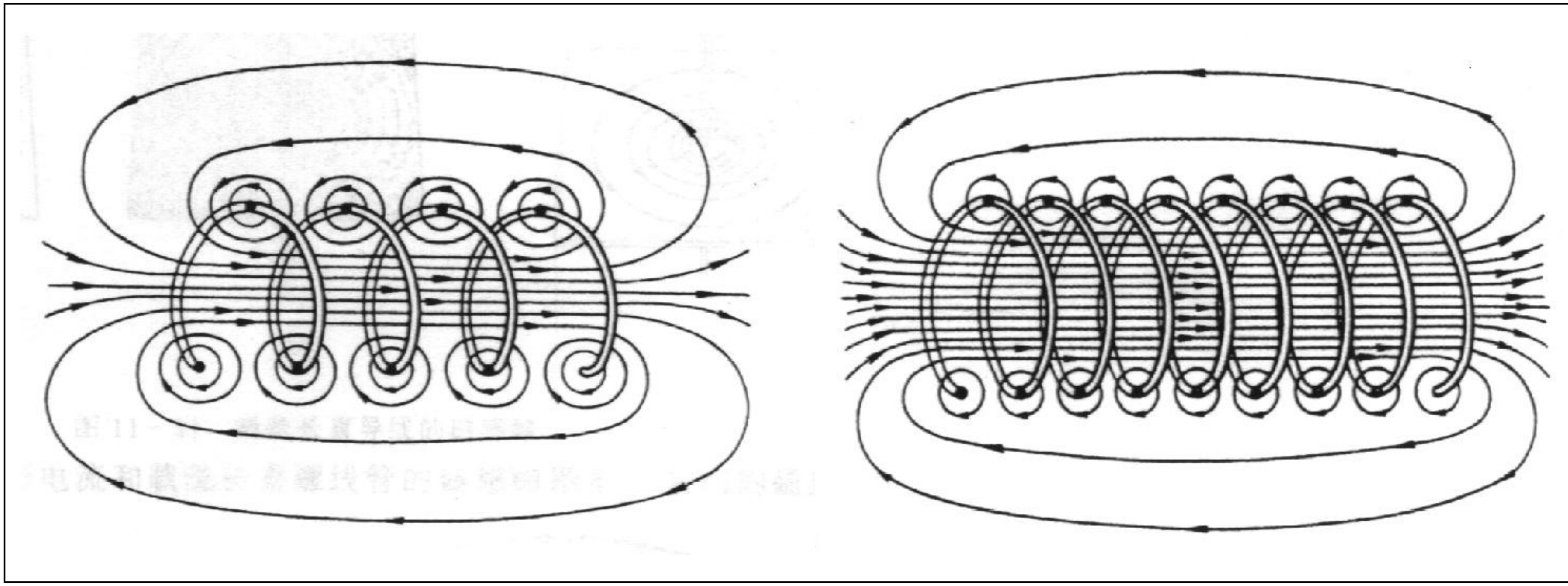
3）环路上的 B 即为所求。

应用安培环路定理解题一般步骤：

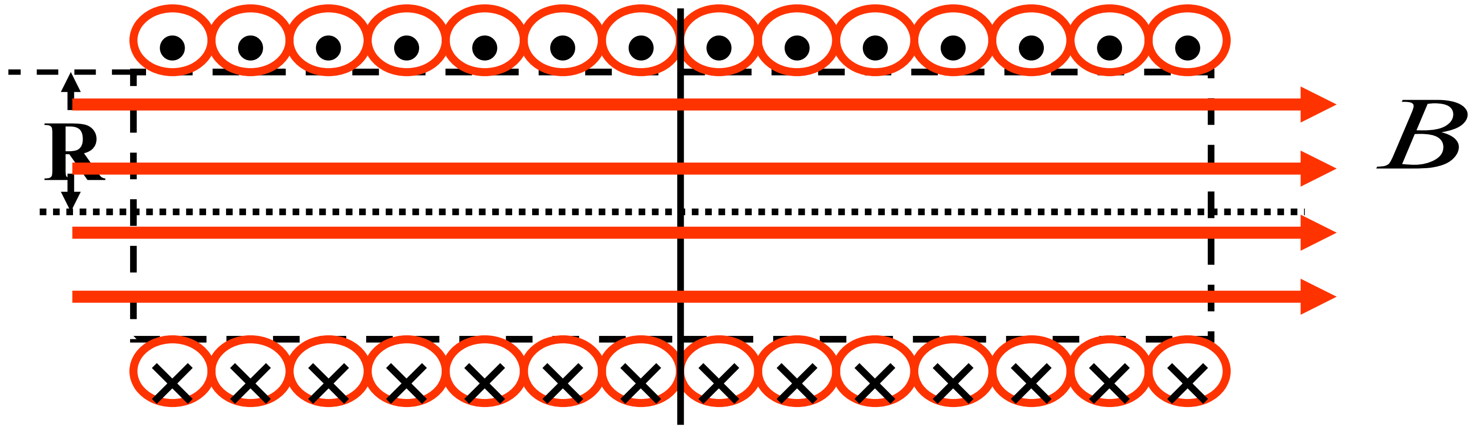
1）电流的对称性分析

2）选取易于计算的闭合回路

例 1　求载流长直密绕螺线管内磁场

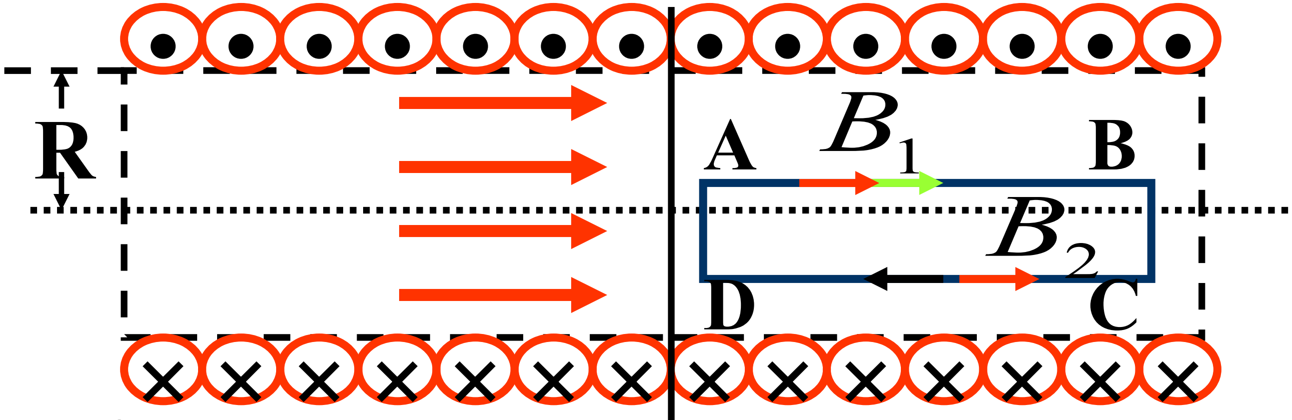


解　1）对称性分析螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，外部磁感强度趋于零，即 $B \simeq 0$.



解　　1）对称性分析螺旋管内为均匀场，方向沿

轴向，外部磁感强度趋于零，即 $B \cong 0$.



解法（一）

作安培环路 L ABCDA

$$\oint_L B \cdot dl = \mu_0 \sum_{L内} I_i = 0$$

$$\oint_L B \cdot dl = \int_{AB} B_1 \cdot dl + \int_{BC} B \cdot dl + \int_{CD} B_2 \cdot dl + \int_{DA} B \cdot dl = B_1 l_{AB} + 0 - B_2 l_{CD} + 0 = 0$$

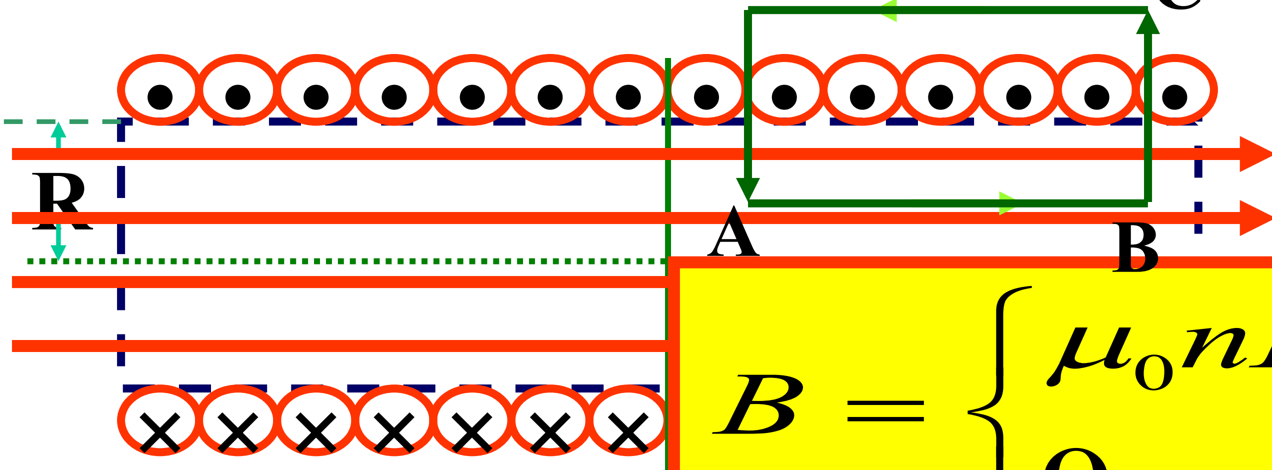
$\therefore B_1 = B_2$ **即管内是均匀场。**

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 n I}{2}\left(\cos\beta_2 - \cos\beta_1\right)}$$

（用毕 -- 沙定律计算已知：中心轴线处 $B = \mu_0 n I$，故管内各点 $B = \mu_0 n I$）

因管外磁场为零。

解法（二）



$$B=\begin{cases}\mu_0 nI\cdots(\text{管内})\\ 0\cdots\cdots(\text{管外})\end{cases}$$

作安培环路 ABC

$$\oint_L B\cdot dl=\mu_0\sum_{L内} I_i$$

$$\boxed{B_{内}=\mu_0 nI}$$

$$\oint_L B\cdot dl=\int_{AB}B_{内}\cdot dl+\int_{BC}B\cdot dl+\int_{CD}B_{外}\cdot dl$$

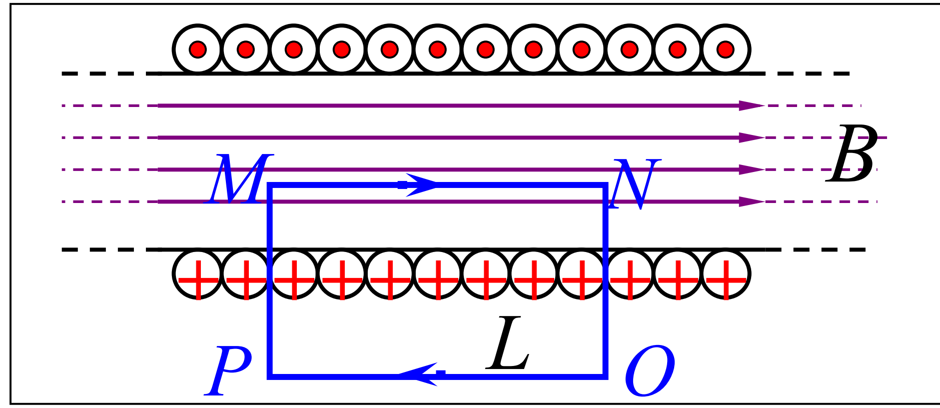
$$+\int_{DA}B\cdot dl=B_{内}l_{AB}+0+\int_{CD}B_{外}\cdot dl+0=\mu_0 nl_{AB}I$$

$B_{内}\, l_{AB}=u_0 nI\, l_{AB}$

$\Rightarrow B_{外}=0$

2）选回路 L .

磁场 的方向与电流 成右螺旋.



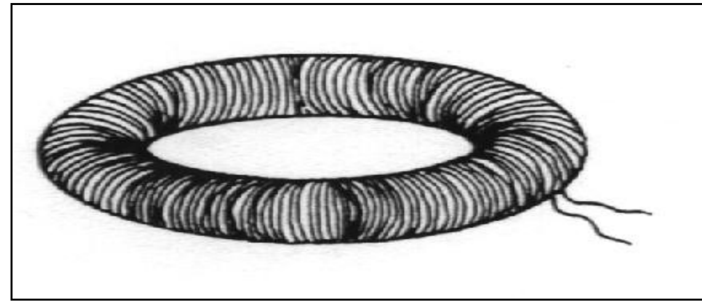
$$\oint_l \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{MN} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \cancel{\int_{NO} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_{OP} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}} + \cancel{\int_{PM} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

$$B\cdot \overline{MN} = \mu_0 n \overline{MN} I$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$

无限长载流螺线管内部磁场处处相等，外部磁场为零.

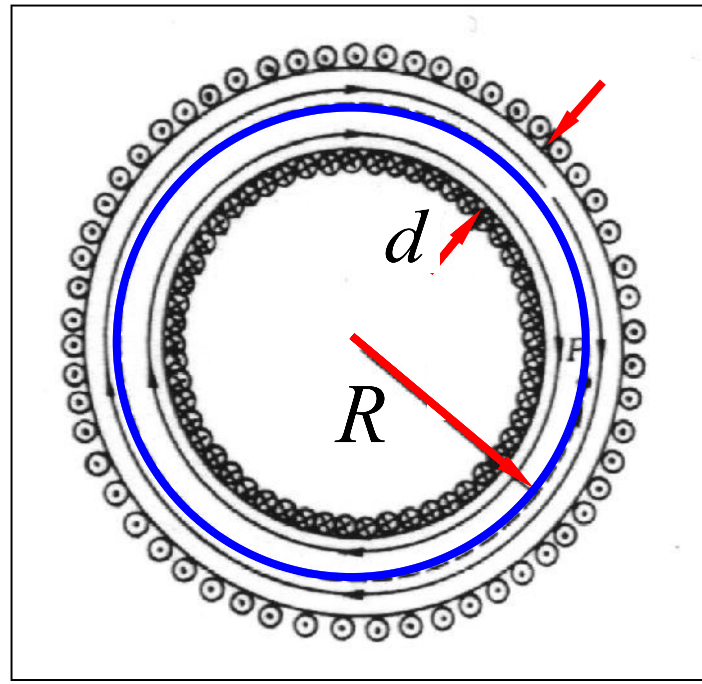
例 2　求载流螺绕环内的磁场



解　1）对称性分析；环内 B 线为同心圆，环外 B 为零．

2）选回路．

$$\oint_l B\cdot \mathrm{d}l = 2\pi RB = \mu_0 NI$$



$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R}$$

令 $L = 2\pi R$　　$\boxed{B = \mu_0 NI/L}$

当 $2R >> d$ 时，螺绕环内可视为均匀场．

例 3　无限长载流直圆柱体的磁场

解　1）对称性分析 2）选取回路

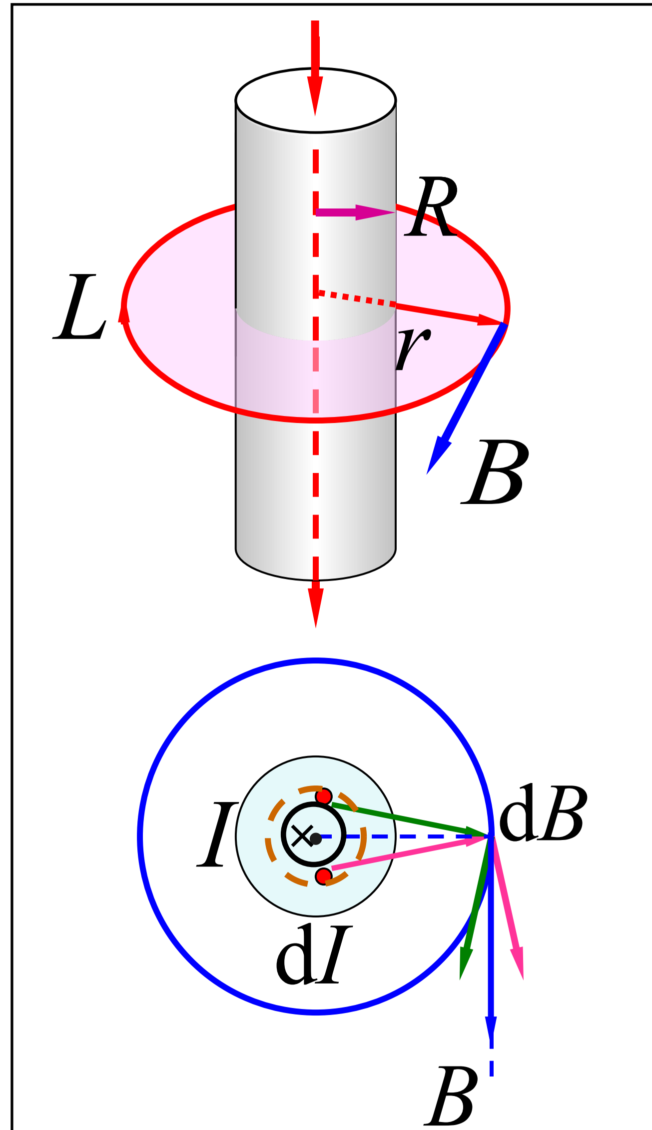
$r > R$　　$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I$

$2\pi r B = \mu_0 I$　　$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$0 < r < R$

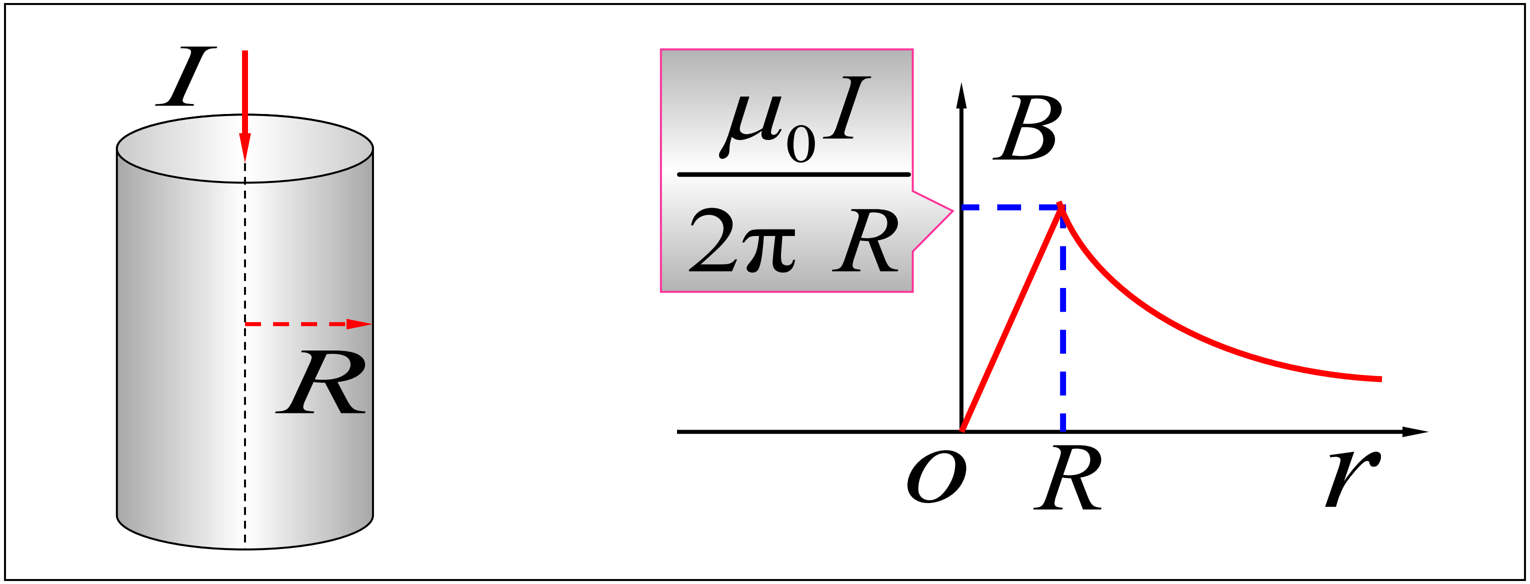
$$\oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sigma S = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

$2\pi r B = \dfrac{\mu_0 r^2}{R^2} I$　　$B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$

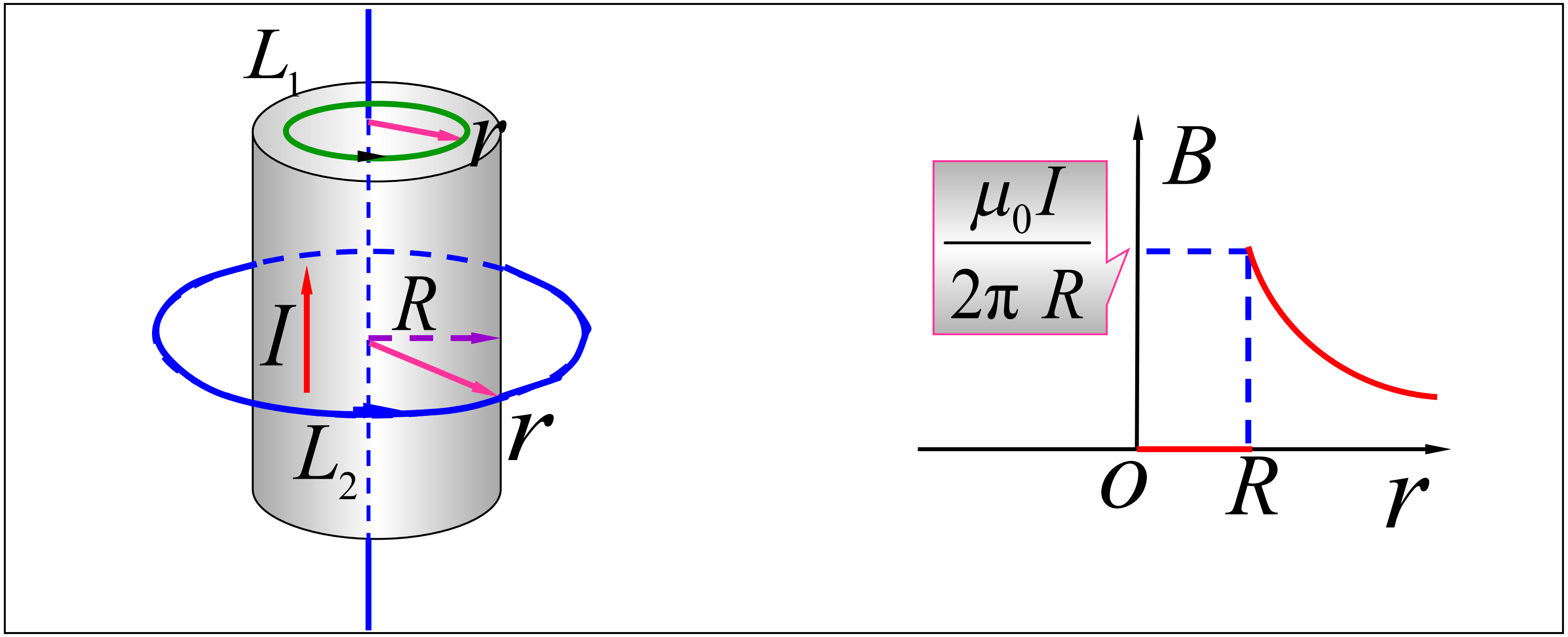


B 的方向与 成右螺旋

$$\begin{cases} 0 < r < R, & B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \\ r > R, & B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{cases}$$



例 4　无限长载流圆柱面的磁场



解

$0 < r < R,\ \oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \qquad B = 0$

$r > R,\ \oint_l \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I \qquad B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

小结：

- 应用安环定理求磁场分布的关键：选择合适闭合路径
- 要求：
- 1）闭合路径经过待求场点；
- 2) B 与 dl 的夹角 θ 最好为 0， π ，或 π/2 ；
- 3）线段上 B 的量值为恒量，积分时能提到积分号外。

解题步骤：

- 1 ）根据电流分布分析磁场分布的对称性；
- 2 ）选取合适的闭合路径；
- 3 ）选好闭合路径的绕向，确定回路内电流的正负；
- 4 ）据安环定理解出 B 的大小，确定 B 的方向。

三、有磁介质存在时的安培环路定理（教材 11.1-11.2 节）

有磁介质存在时的安培环路定理

$$\boxed{\oint_L H \bullet dl = \sum I_0}$$

无论空间有无磁介质，此式都适用，是安培环路定理的普遍形式。

$\vec{H}$ 的环流只与传导电流有关，与磁介质性质无关。

注意：H 只是辅助量，磁介质中磁场的基本量仍是 B.

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H$$

$$\boxed{B = \mu H}$$

μ_r —— 相对磁导率

$\mu = \mu_0 \mu_r$ —— 磁导率

对均匀磁介质来说，χ_m、μ_r、μ都是常数

真空中 $\therefore \mu_r = 1, \mu = \mu_0$ $B = \mu_0 H$

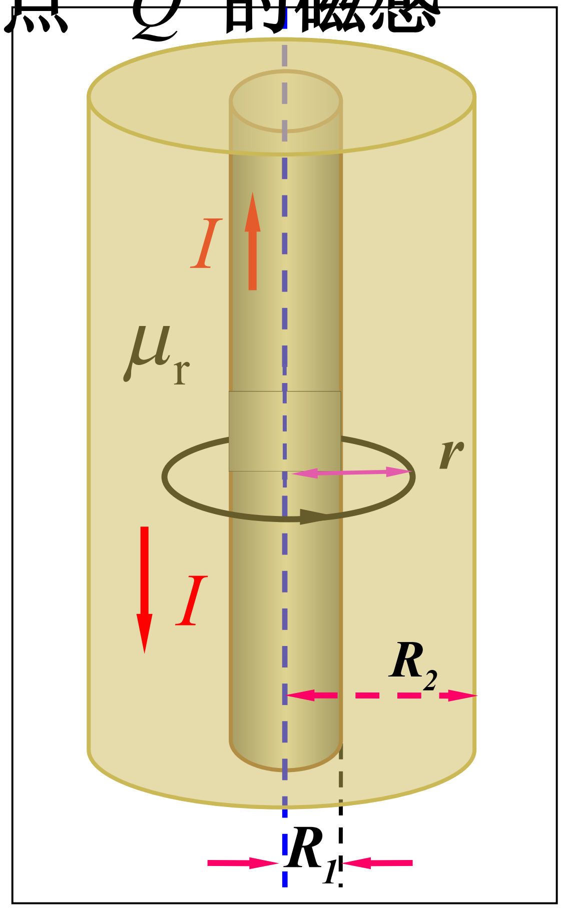
例 5. 有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的“无限长”同轴圆筒形导体，在它们之间充以相对磁导率 μ_r 为的磁介质，圆筒外为真空。当两圆筒通有相反方向的电流 时，试 **求**（**1**）磁介质中任意点 P 的磁感应强度的大小；（**2**）圆柱体外面一点 Q 的磁感应强度

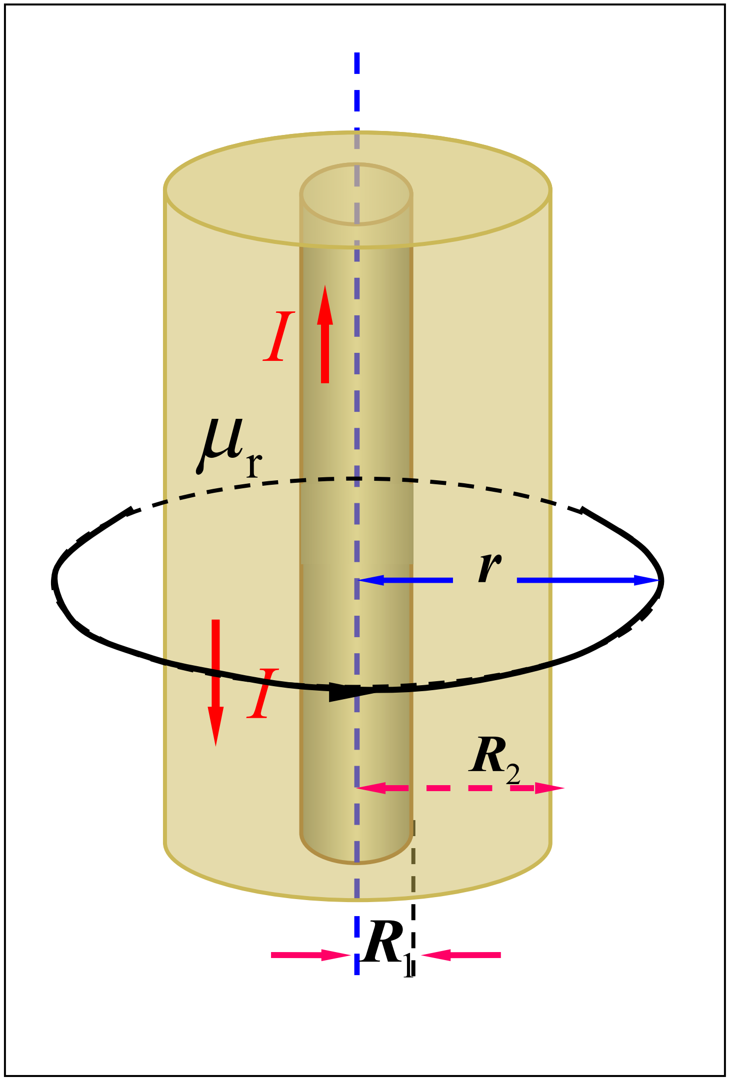
解 对称性分析

$$R_1 < r < R_2 \qquad \oint_l H \cdot \mathrm{d}l = I$$

$$2\pi r H = I \qquad H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$$





$R_1 < r < R_2 \quad B = \dfrac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r}$

$r > R_2 \quad \oint_l H \cdot \mathrm{d}l = I - I = 0$

$2\pi r H = 0, \quad H = 0$

圆筒外是真空 $\mu = \mu_0$

$B = \mu H = \mu_0 H = 0$

同理可求 $r < R_1, \quad B = 0$

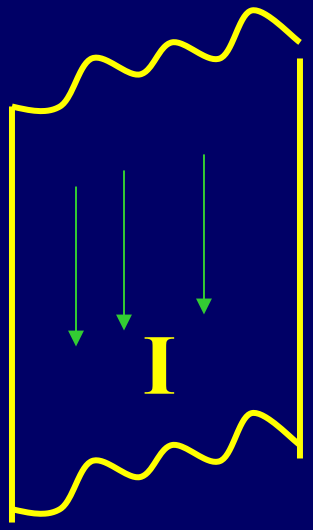
注意：边界面上，H 和 B 均　不连续。

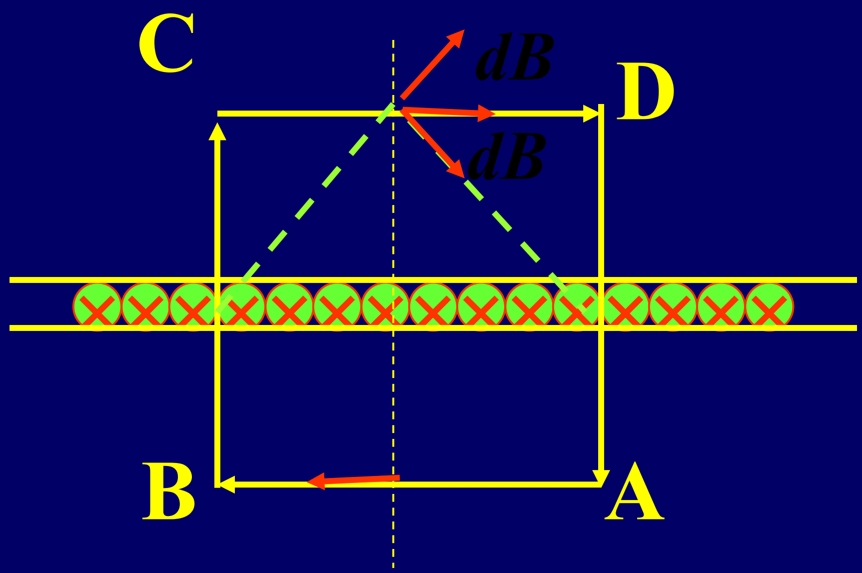
无限长载流直导线	（真空中）	$H=\dfrac{I}{2\pi a}$	$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$
	（**介质中**）	$H=\dfrac{I}{2\pi a}$	$B=\dfrac{\mu I}{2\pi a}$
圆电流中心处	（真空中）	$H=\dfrac{I}{2R}$	$B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$
	（**介质中**）	$H=\dfrac{I}{2R}$	$B=\dfrac{\mu I}{2R}$
无限长螺线管内部	（真空中）	$H=nI$	$B=n\mu_0 I$
	（**介质中**）	$H=nI$	$B=n\mu I$
细螺绕环内部	（真空中）	$H=nI$	$B=n\mu_0 I$
	（**介质中**）	$H=nI$	$B=n\mu I$

静电场与稳恒磁场的比较

	静电场	稳恒磁场
物理量	$E \quad D \quad \varepsilon$	$B \quad H \quad \mu$
高斯定理	$\oint_S D \bullet dS = \sum q_0$	$\oint_S B \bullet dS = 0$
环路定理	$\oint_L E \bullet dl = 0$	$\oint_L H \bullet dl = \sum I_0$
介质性质方程	$D = \varepsilon E$	$B = \mu H$

例 6　无限大平面电流的磁场分布（i —单位宽度上的电流）。

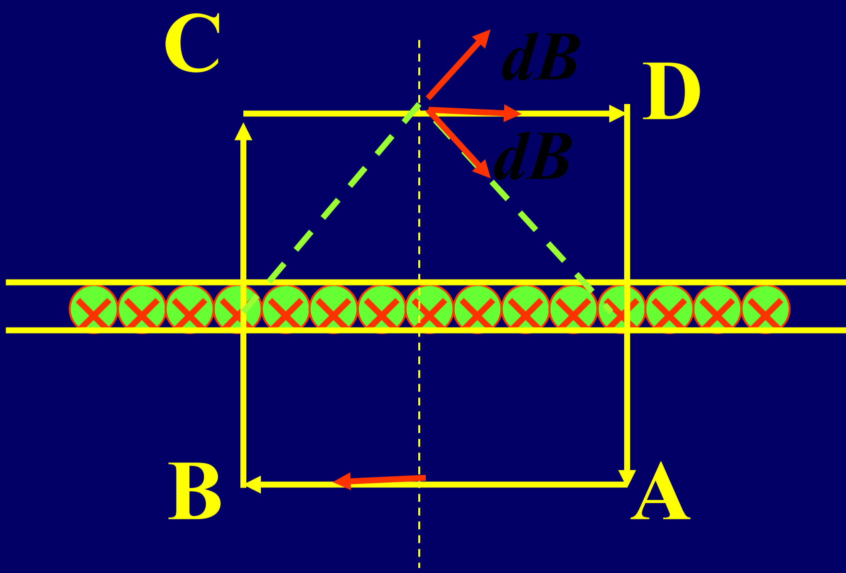




磁场：由俯视图发现电流产生的磁场方向平行于平面并且在该平面两侧的磁场方向相反。由于平面无限大，与平面距离相等的点的磁场大小相等。

根据安培环路定理 $\boxed{\oint_L B \cdot dl = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$

作安培环路 ABCDA

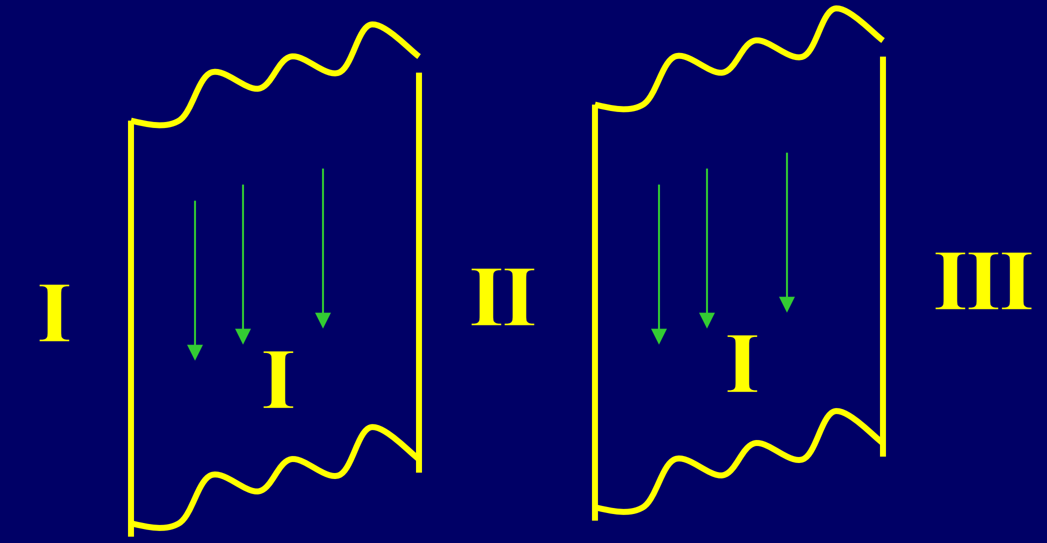


$$\oint_L B \cdot dl = \int_{AB} B \cdot dl + \int_{BC} B \cdot dl$$

$$+\int_{CD} B \cdot dl + \int_{DA} B \cdot dl = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

$$B\,\cancel{l_{AB}} + 0 + B\,\cancel{l_{CD}} + 0 = \mu_0\,\cancel{l_{AB}}\,i$$

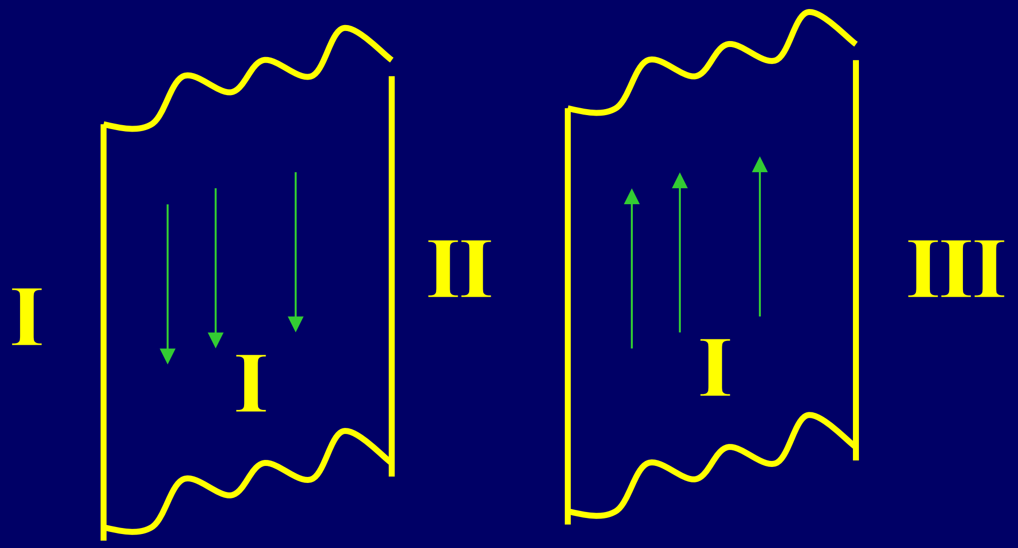
$$\boxed{\therefore B = \frac{1}{2}\mu_0 i}$$



$$B_I = 2\frac{1}{2}\mu_0 i = \mu_0 i$$

$$B_{II} = 0$$

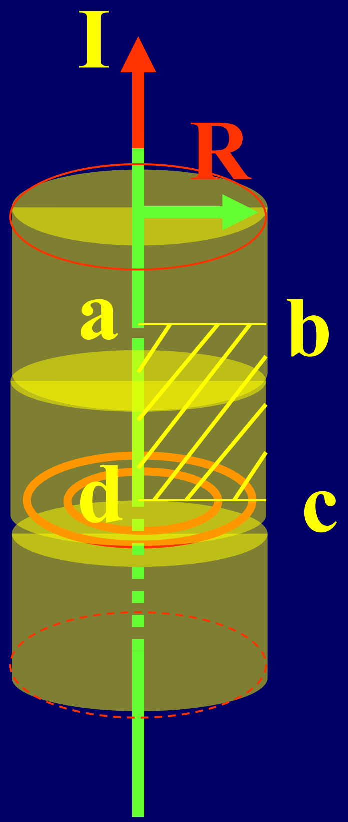
$$B_{III} = \mu_0 i$$



$$B_I = B_{III} = 0$$

$$B_{II} = \mu_0 i$$

例 7　电流 I 均匀地流过一无限长圆柱形导体（R），在导体内部作一平面 S，一边是轴线，另一边在外壁上，长为 l，求 Φ_m。



解：无限长圆柱体内部的磁场

外部：作半径为 r 的安培环路 L

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_i$$

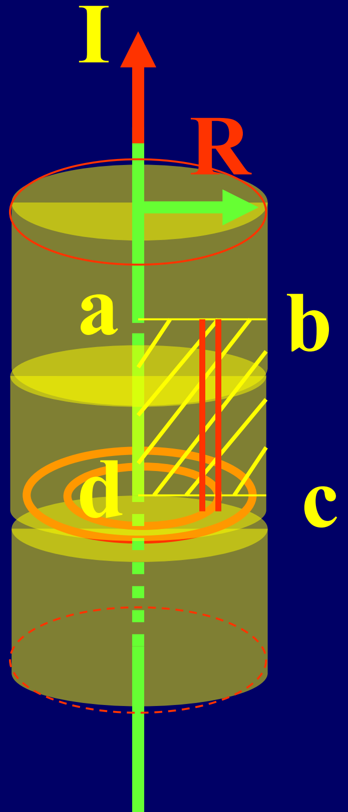
$$H\cdot 2\pi r = I \qquad H = \frac{I}{2\pi r}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

导体内：作半径为 r 的安培闭合环路

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{L内} I_i \qquad H2\pi r = \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

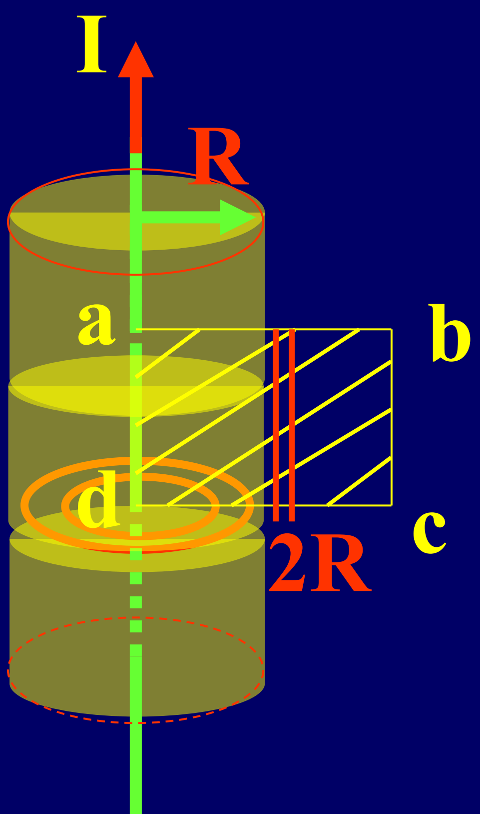


$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \cdots (0 \le r < R) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdots (R \le r < \infty) \end{cases}$$

在 r 处取一小面元， ds ＝ l dr ，

$$\Phi_m=\iint_s\vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_0^R\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}rldr=\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}\frac{1}{2}R^2=\frac{\mu_0 Il}{4\pi}$$

推广：若 ab = 2R ，则 Φ_m ＝？。



$$B_{内}=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\qquad B_{外}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi_m=\iint_s\vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_0^R\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}rldr$$

$$+\int_R^{2R}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr=\frac{\mu_0 Il}{4\pi}+\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 2$$