第四章 随机变量的数字特征

§1 数学期望

【1】**设随机变量 X 的分布律为**

（1）$P(X=k)=\frac{1}{2^k}$，　$k=1,2,\cdots$. **求** $E(X)$.。

（2）$P\left(X=\frac{(-2)^k}{k}\right)=\frac{1}{2^k}$，　$k=1,2,\cdots$. **求** $E(X)$.。

【2】**若随机变量 X 服从柯西分布，其密度函数为**

$f(x)=\dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},-\infty<x<+\infty$，**试说明随机变量 X 的期望不存在。**

【3】设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求：$E(X)$.，$E(X^2)$. $E(3X^2+5)$。

【4】 将 n 只球（1~n 号）随机地放进 n 只盒子（1~n 号）中去，一只盒子装一只球，若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对. 记 X 为总的配对数，求 $E(X)$.

【5】 假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作. 若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生两次故障所获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元.求一周内期望利润是多少？

【6】某商场对某种商品的销售情况作了统计，知顾客对该商品的需求量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，且日平均销售量 μ 为 40（件），销售机会在 30（件）到 50（件）之间的概率为 0.5. 若进货不足，则每件利润损失为 70（元）；若进货量过大，则因资金积压，每件损

失 100（元），求日最优进货量. $(\Phi(.672)=0.75,\Phi(0.223)=0.5882)$

【7】设由自动线加工的某种零件的内径 X （单位：mm）服从 $N(\mu,1)$，内径小于 10mm 或大于 12mm 为不合格品，其余为全格品，销售合格品获利，销售不合格品亏损，已知销售利润 T （单位：元）与销售零件的内径 X 有如下关系：

$$T=\begin{cases}-10, & X<10\\ 200, & 10\le X\le 12\\ -50, & X>12\end{cases}$$

问内径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大？

§2 方差

【1】 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

求：（1） $E(-X+1),D(-X+1)$； （2） $E(X^2),D(X^2)$

【2】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，求 EX 与 DX.

【解】 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=0$

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}\mathrm{d}x=2$$

注 直接利用期望与方差的定义计算。充分运用积分性质：奇（偶）函数在对称区间上的积分的性质。

【3】对目标进行射击，命中率为 $p(0<p<1)$，射击直到命中为止，求射击次数 X 的数学期望与方差。

【4】 设 X 服从参数 λ 为 1 的指数分布，且 $Y=X+e^{-2X}$，求 EY 与 DY.

【5】掷骰子 100 次，求点数之和的数学期望与方差。

【6】设两个随机变量 X, Y 相互独立，且都服从均值为 0，方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布，求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

【7】一台仪器有三个元件，各元件发生故障的概率分别为 0.2,0.3,0.4,且相互独立，求发生故障的元件数 X 的数学期望与方差。

【8】随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le\pi\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

对 X 独立重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.

【9】在长为 a 的线段上任取两点，求两点间距离的数学期望和方差。

§3 协方差及相关系数

【1】设 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

求 X, Y 的相关系数 ρ_{XY} 。

【2】设 X, Y 的联合分布密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y), & 0\le x\le\frac{\pi}{2}, 0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 $E(X), E(Y), D(X), D(Y), \mathrm{Cov}(X,Y)$ 和 ρ_{XY}.

【3】假设随机变量 X 和 Y 在圆 $\{x^2+y^2 \le r^2\}$ 上服从二维均匀分布.

（1）求 X 和 Y 的相关系数 ρ

（2）问 X 和 Y 是否独立？

【4】设二维随机变量 (X,Y) 有： $X \sim b(12,0.5), Y \sim N(0,1), Cov(X,Y)=-1$，记

$U=4X+3Y+1 \qquad V=-2X+4Y$

求 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} .

【5】　将一枚硬币，重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于

（A）-1；　　（B）0；　　（C）$\frac{1}{2}$；　`　（D）1.

【6】设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点（0，1），（1，0），（1，1）为顶点的三角形区域上，且服从均匀分布，试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

【7】假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\big|0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$ 上服从均匀分布. 记

$$U=\begin{cases}0, 若X \le Y \\ 1, 若X > Y\end{cases} \quad V=\begin{cases}0, 若X \le 2Y \\ 1, 若X > 2Y.\end{cases}$$

（1）求 U 和 V 的联合分布；

（2）求 U 和 V 的相关系数 ρ .

§4 矩、协方差矩阵

【1】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0.5x, & 0<x<2 \\ 0, & 其他\end{cases}$ 求随机变量 X 的 $1 \sim 4$ 阶原点矩和中心矩。

【2】设随机变量 X 与 Y 独立，且 $X \sim N(1,2), Y \sim N(0,1)$，试求 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度。

【3】设 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$,且 X 与 Y 相互独立，令 $U=3X+4Y$， $V=4X-3Y$ 求

ρ_{UV} 与 (U,V) 的联合概率密度。