

## Examen Parcial (Parte I)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando

13 de octubre de 2015

## Entrega

Por favor, envía las soluciones a [juan.martinez.ovando@itam.mx](mailto:juan.martinez.ovando@itam.mx) dentro de los siguientes *7 días a partir de la fecha de entrega de esta lista de problemas* (UTC-06:00 – Cd. México). Gracias!

## Preguntas

(Total: 70 puntos)

1. PKU es un trastorno genético que afecta a los infantes y que puede conducir a padecer retardo mental cuando no es tratado a tiempo. Este padecimiento afecta a cerca de 1 en cada 10 mil infantes nacidos. Suponga que existe una prueba médica para detectar PKU en un recién nacido, la cual tiene una sensibilidad<sup>1</sup> igual a 99.99 % y una especificidad<sup>2</sup> de 99 %.

Calcula la probabilidad de que un recién nacido con una prueba positiva tenga PKU.

(20 puntos)

2. Considere dos variables aleatorias,  $X$  y  $Y$  tales que siguen una distribución conjunta dada por

$$\Pr(X = 1, Y = 1) = 1/8$$

$$\Pr(X = 1, Y = 2) = 1/4$$

$$\Pr(X = 2, Y = 1) = 3/8$$

$$\Pr(X = 2, Y = 2) = 1/4.$$

- a) Argumente si  $X$  y  $Y$  son estocásticamente independientes o no.  
b) Calcule  $\mathbb{E}(X|Y = 1)$  y  $\mathbb{E}(X|Y = 2)$ .

(10 puntos)

<sup>1</sup>Sensibilidad es la probabilidad de tener una prueba positiva entre los pacientes con enfermedad.

<sup>2</sup>La especificidad es la probabilidad de tener una prueba negativa entre los pacientes sin enfermedad.

3. Describe en tus propias palabras las diferencias y similitudes de asumir los enfoques frecuentista y bayesiano de inferencia para un modelo estocástico, a la luz de un conjunto de datos observados  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

(10 puntos)

4. Suponga que un jugador tiene una fortuna  $F = 1,000$  y usa una función de utilidad logarítmica,  $\log(F)$ , para medir su nivel de satisfacción por su nivel de riqueza. Suponga que existe una partición  $A_1, A_2, A_3$  de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos (i.e. la unión de todos ellos coincide con el espacio de todos los posibles eventos). Estos eventos tienen asociadas las siguientes probabilidades de ocurrencia:  $q_1 = 1/2$ ,  $q_2 = 1/3$  y  $q_3 = 1/6$ . También suponga que el jugador puede comprar boletos para la ocurrencia de estos eventos a un precio de  $x_1 = 1/6$ ,  $x_2 = 1/3$  y  $x_3 = 1/2$ . En caso de que el evento  $A_i$  ocurra y que el jugador haya comprado un boleto para ese evento, el jugador recibirá de vuelta  $4x_i$  (cuatro veces lo que pagó por el boleto del evento). Lo anterior para  $i = 1, \dots, n$ .

- a) Calcula cuánto debe invertir este jugador en boletos para cada evento de manera que maximice su utilidad esperada.
- b) Calcula cuántos boletos de cada tipo debe comprar.
- c) Supongamos ahora que el jugador recibe información adicional, de manera que adapta su percepción sobre las probabilidades de ocurrencia de los eventos  $A_i$ 's de cantidades  $q_i$  a  $q'_i$ , para todos los eventos  $i$  (nota que  $\sum_{i=1}^n q'_i = 1$ ). Describe cuál sería la estrategia óptima del jugador y cuál sería su utilidad esperada resultante.

(30 puntos)

### Caso de Estudio

(Total: 30 puntos)

Estudiando recientemente las estadísticas de los resultados que un grupo de estudiantes de un MBA tuvo en un examen,<sup>3</sup> los resultados estaban muy bien, con una media de 89.98 sobre 100. Revisando los resultados, podría decir que el grupo se ha desempeñado muy bien y que han logrado comprender los conceptos fundamentales del curso. Esta situación podría hacerme sentir bien sobre el rendimiento de los estudiantes, en general.

Sin embargo, esta forma de analizar la situación es incompleta, principalmente porque a pesar de que la mayoría de los estudiantes están teniendo un buen desempeño, todavía hay un grupo de estudiantes que necesitan un poco de ayuda. Una media aritmética simple me da una visión limitada de lo que está pasando en el grupo.

Cuadro 1: Estadísticas descriptivas.

Medida	Valor
Media	89.98
Error Estándar	0.77
Mediana	91.41
Moda	95.45
Desviación Estándar	7.16
Varianza	51.21
Kurtosis	0.85
Sesgo	-1.07
Rango	34.34
Mínimo	65.66
Máximo	100.00
Suma	7,738.38
Conteo	86.00

A continuación presento un resumen de las estadísticas descriptivas del grupo (incluidas las medidas de tendencia central y variabilidad) a partir del resultado del examen:

Ahora bien, esto proporciona más información, con esta mesa que puedo observar que aunque el promedio es alta todavía hay un estudiante que tiene un 65.66, que es simplemente terrible. Pero, cuál es la distribución de todos los grados? Bueno esta tabla le puede dar una gran idea en la que (sobre todo la asimetría), pero en este momento todavía no son expertos en ella (vamos a ser, simplemente pasar sucesivamente).

Déjame mostrarte las frecuencias de los datos, que también puede ayudarnos en este tema:

Con estas frecuencias, podemos representar el histograma de los datos y así, podemos entender un poco más la dispersión de los datos. Entendiendo mejor tal dispersión, podemos tener una mejor perspectiva del rendimiento de los estudiantes en la clase.

Con base en la información anterior, describa con sus propias palabras su lectura particular del desempeño de los estudiantes de este curso. Puede auxiliarse en gráficas, si es necesario.

---

<sup>3</sup>No se preocupen, no tienen ni idea a qué programa de MBA me refiero –sus amigos están a salvo–.

Cuadro 2: Frecuencias de las evaluaciones.

Calificación	Frecuencia
65.5	1
72.5	3
77.5	6
82.5	9
87.5	17
92.5	23
97.5	26
100.0	1