

Lista de Ejercicios (Parte 1)

*Prof.: Juan Carlos Martínez-Ovando**15 de agosto de 2016***P0 - Preliminar**

1. Deriva las expresiones de las funciones de densidad (o masa de probabilidad) de las distribuciones Bernoulli, binomial, Poisson, normal, exponencial y gamma como miembros de la Familia Exponencial de Distribuciones (FED).

P1 - Frecuencia de Siniestros

2. Desarrolla los valores de α y β que corresponden a las distribuciones Poisson, binomial negativa, binomial y geométrica vistas como caso particular de la clase $(\alpha, \beta, 0)$ de distribuciones.
3. Demuestra que la distribución modificada en 0 de una variable aleatoria para el número de reclamos puede ser derivada usando una distribución tipo mezcla con dos componentes.
4. Emplea el método de momentos para derivar la distribución de la mezcla de una distribución $Po(N|\lambda)$ con λ parámetro latente que sigue una distribución $Ga(\lambda|a, b)$. Identifica qué resultado se obtendría de reemplazar la distribución gamma por la gaussiana inversa.
5. Demuestra que las distribuciones Poisson, binomial y binomial negativa, forman parte de la Familia Exponencial Aditiva de distribuciones.
6. Demuestra que el valor esperado de la frecuencia de siniestros, N , es igual a $\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha}$, si N se distribuye $(\alpha, \beta, 1)$.
7. Demuestra que cualquier distribución modificada en cero para la frecuencia de siniestros es una distribución compuesta.

P2 - Monto Individual de Siniestros

8. Considera $X|\lambda$ que siga una distribución Weibull con función de supervivencia $S_{X|\lambda}(x) = \exp\{-\lambda x^\gamma\}$ y, a su vez, que λ siga una distribución exponencial. Deriva la distribución marginal (tipo mezcla) de X .
9. Cuál es la intuición acerca de los posibles valores de α y β asociados con la clase de distribuciones $(\alpha, \beta, 0)$ de manera que las districiones resultantes sean propias (i.e. que sean medidas de probabilidad)?
10. Sea X una variable aleatoria para el monto individual de siniestros, tal que sigue una distribución F_X con función de densidad

$$f_X(x) = (1 + 2x^2) \exp\{-2x\}.$$

- Determina el soporte de la distribución.
 - Encuentra la función de supervivencia y la función hazard asociada.
 - Encuentra la función de exceso de pérdida media.
 - Demuestra que la función hazard no es estrictamente creciente, pero la función de exceso de pérdida media si es estrictamente decreciente.
11. Demuestra que la distribución límite del máximo de n variables aleatorias i.i.d., $X_n^* = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, cuando $n \rightarrow \infty$, es una distribución degenerada.
 12. Suponga que X_1, \dots, X_n son variables aleatorias i.i.d. con distribución Pareto, dada por

$$F_X(x) = 1 - (1 + x/\theta)^{-\alpha} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x),$$

con $\alpha, \theta > 0$. Considerando las constantes de normalización, $b_n = \theta(n^{1/\alpha} - 1)$ y $a_n = \frac{\theta n^{1/\alpha}}{\alpha}$, deriva la distribución asintótica no degenerada de $X_n^* = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, cuando $n \rightarrow \infty$.

13. Deriva el análogo del Teorema de Fisher-Tippett que consiste en reemplazar el supuesto i.i.d. por el de intercambiabilidad en X_1, \dots, X_n .

14. Considera X , la severidad individual, que sigue una distribución lognormal con función de supervivencia dada por

$$S_X(x) \approx \left(\frac{\sigma}{\log x - \mu} \right) \exp \left\{ -1/2 \left(\frac{\log x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\},$$

cuando $x \rightarrow \infty$. Deriva la aproximación del $\text{TVaR}_q(S)$ para la suma de N variables X_1, \dots, X_n i.i.d. lognormales.

15. Sea X una variable aleatoria para la severidad individual de un seguro, con distribución $F_X(x) = \text{Exp}(x|\theta)$, tal que $\mathbb{E}_{F_X}(X) = 100$. Define Y una modificación de X como,

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 20 \\ X - 20 & \text{si } 20 \leq X < 300 \\ 280 & \text{si } X \geq 300. \end{cases}$$

- Demuestra que la distribución de Y , $F_Y(y)$, es del tipo mixta.
 - Calcula $\Pr(Y = 0)$, $\Pr(Y = 280)$ y $\Pr(Y \in (140, 160))$.
 - Deriva la expresión para $\mathbb{E}[g(Y)]$, con $g(\cdot)$ una función integrable. (Piensa en g como la función asociada con la función generadora de momentos de Y , por ejemplo).
16. Sea X el monto individual de un siniestro. Define $Y = \min(X, M)$, donde M es el límite de retención de la compañía de seguros.
- Si $F_X(x)$ denota la distribución de X , deriva la distribución de Y , $F_Y(y)$.
 - Si $F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$, con $\lambda > 0$, calcula $\mathbb{E}(Y)$.
17. Sea X una variable aleatoria para la severidad individual de un seguro, con distribución $F_X(x) = \text{Exp}(x|\theta)$, tal que $\mathbb{E}_{F_X}(X) = 100$. Define Y , una modificación de X , como,

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 20 \\ 0,9(X - 20) & \text{si } 20 \leq X < 300 \\ 0,9(280) & \text{si } X \geq 300. \end{cases}$$

- a) Demuestra que la distribución de Y , $F_Y(y)$, es del tipo mixta.
 - b) Calcula $\Pr(Y = 0)$, $\Pr(Y = 252)$ y $\Pr(Y \in (126, 144))$.
 - c) Deriva la expresión para $\mathbb{E}[g(Y)]$, con $g(\cdot)$ una función integrable. (Piensa en g como la función asociada con la función generadora de momentos de Y , por ejemplo).
18. Considera X como el monto individual de un siniestro, así como el monto de cobertura correspondiente a un deducible $d > 0$, denotado por Y .
- a) Si $F_X(x)$ denota la distribución de X , deriva la distribución de Y , $F_Y(y)$.
 - b) Si $F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$, con $\lambda > 0$, calcula $\mathbb{E}(Y)$.

P3 - Modelos de Pérdida Agregada

19. Sean N_1, \dots, N_m variables aleatorias con distribución dada por una mezcla Poisson-P, donde $N_i | \lambda \sim \text{Po}(N_i | \lambda)$ y $\lambda \sim P(\lambda)$. Muestra que $M = N_1 + \dots + N_m$ tiene una distribución Poisson mezclada. Exhibe la función generadora de probabilidades de la distribución mezcla que le corresponde.
20. Determina la distribución, densidad y función de riesgo (función *hazard*) de la mezcla de dos distribuciones exponenciales, con parámetros θ_1 y θ_2 , y pesos de mezcla α_1 y α_2 (con α_1 y α_2 positivos y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$).
21. (Definición: Una familia de distribuciones es cerrada bajo convolución cuando la suma de variables i.i.d. de esta familia produce otra distribución perteneciente a la misma familia.) Considera que la suma de n variables aleatorias de una familia de distribuciones produce otra distribución de la misma familia con todos los parámetros iguales entre si, salvo uno de ellos, siendo este parámetro distinto un múltiplo de n . Determina la distribución de S_n , la severidad agregada, cuando cumple con esta propiedad.
22. Sea N la frecuencia de siniestro, que sigue una distribución geométrica con parámetro $\beta = 2$, y sea X el monto individual de siniestro, el cual sigue una distribución exponencial con parámetro $\theta = 100$. Usa el método de recursión para encontrar una aproximación de la distribución de las pérdidas agregadas.

23. Muestra que la distribución gamma y la distribución Gaussiana inversa son cerradas ante convoluciones.
24. (En ocasiones, distribuciones discretas pueden emplearse para modelar la distribución del monto individual de siniestros.) Enlista distribuciones discretas que sean cerradas ante convoluciones. Describe cómo esta propiedad puede emplearse para simplificar cálculos en la práctica.
25. Demuestra que discretizando una distribución exponencial por el método de momentos, la distribución resultante es miembro de la familia de distribuciones ZM geométrica. Desarrolla el código en R para comparar los resultados de la discretización con los derivados de la discretización en el modelo de pérdida agregada.

P4 - Teoría de Ruina

26. Demuestra que el valor-en-riesgo (VaR) del número de siniestros no es único. Re-definide el VaR para esta variable de manera que sea operacionalmente manejable (i.e. que sea único).
27. Calcula el VaR y TVaR de la distribución Poisson con parámetro $\lambda > 0$.
28. Deriva las expresiones analíticas de la probabilidad de ruina y ruina eventual en el modelo en tiempo continuo Poisson homogéneo. Considera que la severidad individual sigue una distribución exponencial con parámetro $\theta > 0$.
29. Considera que el monto de severidad individual sigue una distribución exponencial con parámetro $\theta = 1$. Determina las primas de riesgo: i) Pura, ii) Basada en el principio de media, iii) Basada en el principio de varianza, iv) Basada en el principio del cuantil, v) Basada en el principio de Esscher, y vi) Basada en el principio de pérdida maximal.
30. Desarrolla el código en R para calcular el TVaR para las distribuciones gamma y lognormal trasladadas. Genera gráficas para los TVaRs asociados a los niveles 1, 3, 9, 39, 69 y 99 por ciento.
31. Sea X la variable para la severidad individual de un seguro, con función de distribución $F_X(x) = \text{Exp}(x|\lambda)$, $\lambda > 0$.

- a) Calcula la prima de riesgo pura.
- b) Calcula la prima de riesgo de Esscher, para un nivel h . Determina para qué valores de h esta prima de riesgo está bien definida.
32. Considera X una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $\theta > 0$, tal que $\mathbb{E}(X) = \theta$. Calcula el VaR y CVaR para el nivel α en $(0,1)$.
33. Sea X la variable para la severidad individual de un seguro, con función de distribución $F_X(x) = \text{Exp}(x|\lambda)$, $\lambda > 0$.

- a) Calcula la prima de riesgo pura.
- b) Define la prima de riesgo ajustada,

$$\Pi_X = \int_{\mathfrak{R}_+} \mathbb{P}(X > x)^{1/\rho} dx.$$

¿Para qué valores de ρ está Π_X bien definida?

- c) Calcula Π_X y compara con la prima de riesgo pura.
34. Considere n asegurados, para los cuales la prima de riesgo es calculada de acuerdo al principio exponencial, con un coeficiente α_i distinto para cada uno de ellos, para $i = 1, \dots, n$. Suponga que el riesgo S es coasegurado. ¿Qué parte de S_i debe ser adquirida por cada asegurado, de manera que la prima de riesgo total sea mínima? (Esto se refiere al cálculo del coaseguro óptimo.)
35. El modelo de Cramer-Lundberg requiere que la solución del coeficiente de Lundberg tenga solución no negativa. Esta condición hace referencia a una cota sobre la cola de la distribución de siniestros individuales. Elabora la condición para esa cota, e identifica para qué valores de los parámetros de la distribución Pareto el modelo de Cramer-Lundberg está bien definido.