ACT-11302: Cálculo Actuarial III **ITAM**

Examen Parcial (Parte I)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando *8 de octubre de 2015*

Preguntas

(Total: 100 puntos)

1. Considere dos bancos comerciales, Banco A y Banco B. El Banco A tiene en su portafolio de préstamos dos tipos de productos: i) vivienda, y ii) remodelación de vivienda. El número promedio de quebrantos de los productos del Banco A en un periodo dado es 23, siendo la proporción de quebrantos en préstamos de remodelación de vivienda igual a 28 %. Por otro lado, el Banco B opera con tres tipos de productos: i) vivienda, ii) remodelación de vivienda, y iii) autos. Para el Banco B, el número promedio de quebrantos en el mismo periodo es 45, siendo las proporciones de quebrantos en préstamos de remodelación de vivienda y préstamos de autos iguales a 21 % y 53 %, respectivamente. Suponiendo que se fusionan los préstamos de ambos bancos, deriva la distribución de los quebrantos en préstamos para la remodelación de vivienda y para la adquisición de autos, por separado.

   SUGERENCIA: Puedes suponer que los quebrantos entre bancos son mutuamente independites, y que el número de quebrantos se puede modelar con la distribución Poisson.

   (30 puntos)

2. Sea $P_X(x)$ una distribución de probabilidad con soporte en $\mathscr{X} = \{0,1,2,3\}$ y función de masa de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}1 & , x = 0, \\ 0 & , x = 1, \\ 0{,}4 & , x = 2, \\ 0{,}5 & , x = 3. \end{cases}$$

   Suponga que X_1, X_2 y X_3 son tres variables aleatorias mutuamente independientes con función de distribución común, $P_X(x)$. Calcula la distribución de $X_1 + X_2$ y de $X_1 + X_2 + X_3$, respectivamente.

   (30 puntos)

3. Sean $(N_i)_{i=1}^n$ variables aleatorias mutuamente independientes tales que $N_i \sim \text{Po}(x|\lambda_i)$. Sean $(x_i)_{i=1}^n$ números enteros positivos y conocidos. Define

$$S = x_1 N_1 + \cdots + x_n N_n.$$

Deriva la distribución de S.

SUGERENCIA: Puedes considerar el caso general donde las x_i's son distintas entre sí.

(20 puntos)

4. Dos formas de modificar la dispersión de una variable aleatoria X son:

   I) Distribución tipo mezcla, donde

   $$f_X(x) = \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x),$$

   donde $(f_i)_{i=1}^n$ son funciones de densidad con soporte común en $\mathscr{X}$, y $(\alpha_i)_{i=1}^n$ son escalares positivos tales que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

   II) Distribuciones tipo *splicing*, donde

   $$f_X(x) = \begin{cases} \alpha_1 f_1(x) & , x \in \mathscr{X}_1 \\ \alpha_2 f_2(x) & , x \in \mathscr{X}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n f_n(x) & , x \in \mathscr{X}_n, \end{cases}$$

   donde $(f_i)_{i=1}^n$ son funciones de densidad con soporte en $(\mathscr{X}_i)_{i=1}^n$, respectivamente, siendo $(\mathscr{X}_i)_{i=1}^n$ una partición de tamaño n de $\mathscr{X}$, el soporte de X.

   a) Calcula $\mathbb{E}(X)$ para ambos tipos de distribuciones.

   b) Discute, en tu entender, las ventajas y desventajas de emplear (I) ó (II) para modelar un conjunto de datos, $\{x_1, \ldots, x_m\}$.

(20 puntos)