ACT-11302: Cálculo Actuarial III **ITAM**

Tareas (con soluciones)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando *5 de octubre de 2015*

1. Sea X una variable aleatoria tal que condicional en $\lambda > 0$ sigue distribución $\mathrm{N}(x|\mu, \lambda^{-1})$, y sea λ una variable aleatoria con distribución $\mathrm{Ga}(\lambda|\alpha/2, \alpha/2)$, con μ, α y β fijas. Calcula la distribución tipo mezcla para X,

$$\begin{aligned} f_X(x|\mu,\alpha) &= \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int \mathrm{N}(x|\mu,\lambda^{-1}) \mathrm{Ga}(\lambda|\alpha/2,\alpha/2) d\lambda. \end{aligned}$$

2. Sea X una variable aleatoria discreta positiva, con distribución $\mathrm{Po}(x|\lambda)$. Encuentre el valor de los parámetros α y β que corresponden a la parametrización de la distribución Poisson como caso particular de la distribución $(\alpha, \beta, 0)$.

3. Considerando una sucesión de variables aleatorias, $X_1, \ldots, X_n$ de una distribución $f_X(x|\theta)$, describe como se relacionan los estimadores máximo verosimil de θ, bajo el supuesto i.i.d., con el estimador bayesiano de θ considerando una distribución inicial $\pi(\theta)$ y el supuesto de intercambiabilidad en las X_is.

4. Suponga que $X|\theta$ sigue una distribución $\mathrm{Exp}(x|\theta)$ y que a su vez θ sigue una distribución $\mathrm{Exp}(\theta|\theta_0)$, para un θ_0 dado. Calcula la distribución de la mezcla,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{X|\Theta}(x|\theta) f_\Theta(\theta) d\theta \\ &= \int \mathrm{Exp}(x|\theta) \mathrm{Exp}(\theta|\theta_0) d\theta_0. \end{aligned}$$

5. Suponga que $X|\Lambda$ sigue una distribución $\mathrm{Po}(x|\lambda)$ y que Λ sigue una distribución $\mathrm{Ga}(\lambda|\alpha_0, \eta_0)$. Considera una muestra $x_1, , x_n$ de X. Trata de exhibir los estimadores de máxima verosimilitud de α_0 y β_0.

6. Una distribución mixta es aquella que contiene una parte discreta y una parte continua. Supongamos que para una variable aleatoria X positiva, la parte discreta está caracterizada por una disribución $\mathrm{Po}(x|\lambda)$, para algún $\lambda > 0$, y que la parte continua está caracterizada por una distribución $\mathrm{Ga}(x|\alpha, \beta)$, para ciertos α y β escalares positivos. Si definimos la distribución de X como

$$F_X(x) = q\mathrm{Po}(x|\lambda) + (1-q)\mathrm{Ga}(x|\alpha,\beta), \tag{1}$$

con $0 < q < 1$ un parámetro fijo. Demuestra que $F_X(x)$ es continua por la derecha.

7. Respecto al inciso anterior, grafica la distribución $F_X(x)$ para diferente valores de q, λ, α y β.

8. Sean $X_1, , X_n$ variables aleatorias i.i.d. con función de distriución $F_X(x)$, y define $Z = X_1 + \cdots + X_n$. Deriva la distribución de $F_Z(z)$ para las siguientes especificaciones de F_X:

   - $F_X(x) = \text{Bernoulli}(x|\theta)$.
   - $F_X(x) = \text{Exp}(x|\theta)$.
   - $F_X(x) = \text{Pa}(x|\alpha, \beta)$.