EST-46111: Fundamentos de Estadística **ITAM**

Lista de Ejercicios (Parte I)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando *29 de septiembre de 2015*

La siguiente lista de ejercicios nos ayudará a preparar el primer examen parcial del curso.

1. Supongamos que una muestra aleatoria de tamaño n es observada de una distribución exponencial, $\text{Exp}(\lambda)$, donde λ es la media de la distribución.

   a) Encuentra el estimador máximo verosimil de λ.

   b) Empleando el enfoque bayesiano de inferencia, asigna $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$ como la distribución inicial para λ (nota que la distribución inicial es impropia, i.e. no integra a 1 en $(0,\infty)$). Deriva la distribución final de λ dada la muestra aleatoria.

   c) En un ejemplo de vida de prueba, cinco bombillas se ponen a prueba con tiempos de combustión observados (en horas) de 751, 594, 1213, 1126 y 819. Deriva al menos un estimador para λ.

   d) Demuestra que si transformamos λ a $\theta = 1/\lambda$, entonces θ tiene una densidad gamma con parámetro de forma n y parámetro de scala $\sum_{i=1}^{n} x_i$.

   e) Estima la probabilidad de que λ supere las 1,000 horas de vida.

2. Consideremos la siguiente información ficticia: Médicos encuentran que las personas con una cierta enfermedad llamada Kreuzfeld-Jacob (KJ) casi invariablemente han comido hamburguesas. De esta forma los médicos estiman una alta propensiń para relacionar la ingesta de hambirguesas y la enfermedad KJ, i.e. $\Pr(\text{Ingerir hamburguesas}|\text{KJ}) = 0{,}9$. Así, la probabilidad que un individuo padezca KJ es bastante baja, aproximadamente uno de cada 100,000 individuos.

   a) Supongamos que ingerir hamburguesas es bastante común, i.e. digamos que

   $$\Pr(\text{Ingerir hamburguesas}) = 0{,}5.$$

   Calcula la probabilidad de que alguien que ingiera hamburguesas padezca de KJ.

   b) Ahora, si la fracción de gente comiendo hamburguesas fuese pequeña, digamos

   $$\Pr(\text{Ingerir hamburguesas}) = 0{,}001,$$

   calcula cuál sería la probabilidad que un individuo padezca KJ.

3. El clima en Londres se puede resumir como: Si llueve un día, existe una probabilidad 0.7 de que llueva al día siguiente; si hace un día soleado, habría una probabilidad igual a 0.4 de que el siguiente día sea soleado también.

   a) Suponiendo que la probabilidad inicial que haya llovido el día anterior es 0.5, calcula la probabilidad de que haya llovido ayer dado que hace sol hoy.

b) Si el clima del día actual sigue el mismo patrón del día anterior, calcula la probabilidad de que llueva en cualquier día (con base en un número finito de días en los que el clima fue observado).

c) Use el resultado del inciso anterior como una nueva probabilidad inicial de lluvia en el día anterior, y calcula la probabilidad de que haya llovido ayer dado que es hoy hace un día soleado.

4. En una conferencia, la siguiente frase fue pronunciada por un profesor de Psicología Experimental: "En una encuesta reciente de los datos, el 90 % de las personas dicen tener un nivel de inteligencia por encima de inteligencia promedio, lo cual es claramente absurdo" [La audiencia ríe]. Argumenta si es teóricamente posible que el 90 % de las personas tengan nivel de inteligencia por encima de la media. Si es asa un ejemplo, si no explica por qué no es posible. Extendiendo esta reflexión, explica que piensas que podría pasar respecto a la mediana del nivel de inteligencia.

5. Consideremos la distribución inicial para el modelo $\mathrm{N}(x|\mu,\lambda^{-1})$ es de la forma:

$$\Pr(\mu,\lambda) = \mathrm{N}(\mu|\mu_0,\gamma_0\lambda^{-1})\mathrm{Ga}(\lambda|\alpha_0,\beta_0),$$

con $\mu_0 \in \Re$, $\gamma_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ y $\beta_0 > 0$. Nota que λ es el inverso de la varianza de la distribución normal, i.e. λ es la precisión e la distribución.

a) Muestra que para $\mu_0 = 0$, $\gamma_0 \to \infty$, $\alpha_0 = 1/2$ y $\beta_0 \to \infty$, la distribución inicial para (μ,λ) es *plana* (i.e. independiente de μ y λ).

b) Muestra que bajo la especificación del inciso anterior, los valores de la media, μ, y la varianza, λ^{-1}, que maximizan conjuntamente la distribución final están dados por los valores que maximizan conjuntamente la verosimilitud del modelo normal, para una muestra de tamaño n dada.