

Lista de Ejercicios (Parte I)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando

29 de septiembre de 2015

La siguiente lista de ejercicios nos ayudará a preparar el primer examen parcial del curso.

1. Supongamos que una muestra aleatoria de tamaño n es observada de una distribución exponencial, $\text{Exp}(\lambda)$, donde λ es la media de la distribución.
 - a) Encuentra el estimador máximo verosímil de λ .
 - b) Empleando el enfoque bayesiano de inferencia, asigna $\pi(\lambda) \propto 1/\lambda$ como la distribución inicial para λ (nota que la distribución inicial es impropia, i.e. no integra a 1 en $(0, \infty)$). Deriva la distribución final de λ dada la muestra aleatoria.
 - c) En un ejemplo de vida de prueba, cinco bombillas se ponen a prueba con tiempos de combustión observados (en horas) de 751, 594, 1213, 1126 y 819. Deriva al menos un estimador para λ .
 - d) Demuestra que si transformamos λ a $\theta = 1/\lambda$, entonces θ tiene una densidad gamma con parámetro de forma n y parámetro de escala $\sum_{i=1}^n x_i$.
 - e) Estima la probabilidad de que λ supere las 1,000 horas de vida.
2. Consideremos la siguiente información ficticia: Médicos encuentran que las personas con una cierta enfermedad llamada Kreuzfeld-Jacob (KJ) casi invariablemente han comido hamburguesas. De esta forma los médicos estiman una alta propensión para relacionar la ingesta de hamburguesas y la enfermedad KJ, i.e. $\Pr(\text{Ingerir hamburguesas}|\text{KJ}) = 0,9$. Así, la probabilidad que un individuo padezca KJ es bastante baja, aproximadamente uno de cada 100,000 individuos.
 - a) Supongamos que ingerir hamburguesas es bastante común, i.e. digamos que
$$\Pr(\text{Ingerir hamburguesas}) = 0,5.$$
Calcula la probabilidad de que alguien que ingiera hamburguesas padezca de KJ.
 - b) Ahora, si la fracción de gente comiendo hamburguesas fuese pequeña, digamos
$$\Pr(\text{Ingerir hamburguesas}) = 0,001,$$
calcula cuál sería la probabilidad que un individuo padezca KJ.
3. El clima en Londres se puede resumir como: Si llueve un día, existe una probabilidad 0.7 de que llueva al día siguiente; si hace un día soleado, habría una probabilidad igual a 0.4 de que el siguiente día sea soleado también.
 - a) Suponiendo que la probabilidad inicial que haya llovido el día anterior es 0.5, calcula la probabilidad de que haya llovido ayer dado que hace sol hoy.

- b)* Si el clima del día actual sigue el mismo patrón del día anterior, calcula la probabilidad de que llueva en cualquier día (con base en un número finito de días en los que el clima fue observado).
- c)* Use el resultado del inciso anterior como una nueva probabilidad inicial de lluvia en el día anterior, y calcula la probabilidad de que haya llovido ayer dado que es hoy hace un día soleado.