ACT-11302: Cálculo Actuarial III **ITAM**

Modelos de riesgo (Individual)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando *20 de septiembre de 2015*

1. Antecedentes

En estadística actuarial, las variables aleatorias que se modelan en la práctica incluyen simultáneamente una parte continua y otra discreta.

A continuación, revisaremos los fundamentos para este tipo de variables y las funciones de probabilidad asociadas.

Sea Z la variable aleatoria que representa el monto reclamado de un contrato de seguro (en general). Los casos contemplados para Z son:

1. Que el contrato sea abierto.
2. El reclamo se define en exceso de un monto máximo asegurado, M.
3. El reclamo se define abiertamente hasta un monto máximo asegurado, M.

Cómo construir la variable aleatoria que definiría estos contratos?

Empecemos con la defininción de la función indicadora, $\mathbb{I}(\cdot)$, que se define como

$$\mathbb{I}(\text{ evento }) = \begin{cases} 1 & \text{si el evento 'ocurre'} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Así, se puede definir una variable aleatoria en función de $\mathbb{I}$, como

$$Z = \mathbb{I}(\text{ evento })X + (1 - \mathbb{I}(\text{ evento }))Y, \tag{1}$$

donde X y Y son dos variables aleatorias estocásticamente independientes.

Así, Z se define en función de la triada $(\mathbb{I}, X, Y)$. De esta forma, la función de distribución de probabilidades para Z se define como

$$F_Z(z) = qF_X(z) + (1-q)F_Y(z), \tag{2}$$

donde $q = Pr(\mathbb{I}(\text{ evento }))$, y

$$\begin{aligned} F_X(z) &= Pr(X \leq z|\text{ evento }) \\ F_Y(z) &= Pr(Y \leq z|\text{ evento }). \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Supongamos que X es una variable aleatoria discreta, con soporte en $\mathscr{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, y Y es una variable aleatoria absolutamente continua con soporte en $\mathscr{Y} = \Re_+$. $\mathbb{I}$ se define como una variable aleatoria Bernoulli con parámetro q.

Definimos así a Z como:

$$Z = \mathbb{I}X + (1 - \mathbb{I})Y, \tag{3}$$

siguiendo que la función de distribución de probabilidades para Z se calcula como:

$$F_Z(z) = qF_X(z) + (1 - q)F_Y(z), \tag{4}$$

con F_X y F_Y definidas como antes.

Siendo Z y F_Z definidas como una combinación linear convexa, es realmente simple calcular valores esperados de Z, como

$$\mathbb{E}(Z) = q\mathbb{E}(\mathbb{X}) + (1 - q)\mathbb{E}(\mathbb{Y}). \tag{5}$$

En general, si ϕ es una función de interés integrable,

$$\mathbb{E}(\phi(Z)) = q\mathbb{E}(\phi(\mathbb{X})) + (1 - q)\mathbb{E}(\phi(\mathbb{Y})). \tag{6}$$