ACT-11302: Cálculo Actuarial III **ITAM**

Lista de Ejercicios (Parte I)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando *24 de septiembre de 2015*

La siguiente lista de ejercicios nos ayudará a preparar el primer examen parcial del curso.

1. Sea X una variable aleatoria con distribución gamma, $\text{Ga}(x;\alpha,\beta)$. Sea π un escalar fijo. Derive la distribución de $Y=\pi X$.

2. Sea X una variable aleatorioa con distribución log-normal, $\text{LN}(x;\mu,\sigma)$. Sea π un escalar fijo. Derive la distribución de $Y=\pi X$.

3. Sea X la variable aleatoria del monto de un reclamo de seguros. Considere el problema de riesgo compartido entre aseguradora y reaseguradora, donde la aseguradora cubre el monto total del reclamo hasta el monto de retención M y la reaseguradora participa del riesgo en exceso del monto de retención. Así, las variables aleatorias que denotan el monto del pago de aseguradora y reaseguradora se definen como:

$$\begin{aligned} Y &= \text{mín}(X,M), \\ Z &= \text{máx}(0,X-M), \end{aligned}$$

   respectivamente. (Note que $X=Y+Z$).

   a) Calcula $\mathbb{E}(Y)$ en función de la distribución $F_X(x)$ para X (puedes suponer que F_X es absolutamente continua).

   b) Suponga que $F_X(x)=1-\exp\{-\lambda x\}$, con $\lambda>0$. Deriva la función generadora de momentos para Z, $M_Z(t)$.

4. Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_j\sim\text{Po}(x_j;\lambda_j)$, para $j=1,2,\ldots,n$. Deriva la distribución de $S=\sum_{j=1}^n X_j$.

5. Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución $\text{Ga}(x;1,\beta)$. Siguiendo la fórmula de convolución, deriva analíticamente la distribución de $S=\sum_{j=1}^n X_j$. (Sugerencia: Emplea un argumento de inducción matemática).

6. Sea X una variable aleatoria con distribución dada por:

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<20 \\ (x+20)/80 & \text{si } 20\leq x<40 \\ 1 & \text{si } x\geq 40. \end{cases}$$

   Calcula:

a) $\Pr(X \leq 30)$.
b) $\Pr(X = 40)$.
c) $\mathbb{E}(X)$.
d) $\mathbb{V}(X)$.

7. **Definición.** Una distribución empalmada (*splicing distribution*) de k componentes se define como:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha_1 f_1(x) & c_0 < x < c_1 \\ \alpha_2 f_2(x) & c_1 < x < c_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_k f_k(x) & c_{k-1} < x < c_k, \end{cases}$$

donde $\alpha_j > 0$ para $j = 1, \ldots, k$, tal que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$, y $f_j(x)$ es una función de densidad en el intervalo (c_{j-1}, c_j), para $j = 1, \ldots, k$.

a) Crea una función empalmada de dos componentes para los intervalos $(0, \gamma)$ y (γ, ∞), donde el primer componente esté inducido por una distribución exponencial, $\mathrm{Exp}(x; \lambda)$, con $\lambda > 0$ y el segundo componente esté inducido por una distribución Pareto, $\mathrm{Pa}(x; \beta, \theta)$, con $\beta, \theta > 0$ (considera $\gamma > 0$ como un número fijo).