

## Lista de Ejercicios (Parte 2)

Prof.: Juan Carlos Martínez-Ovando

23 de febrero de 2016

1. Emplea el método de momentos para derivar la distribución de la mezcla de una distribución  $Po(N|\lambda)$  con  $\lambda$  parámetro latente con distribución  $Ga(\lambda|a, b)$ . Identifica qué resultado se obtendría de reemplazar la distribución gamma por la gaussiana inversa.
2. Demuestra que las distribuciones Poisson, binomial y binomial negativa, forman parte de la Familia Exponencial Aditiva de distribuciones.
3. Demuestra que la distribución límite del máximo  $n$  variables aleatorias i.i.d.,  $X_n^* = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , es una distribución degenerada.

4. Suponga que  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias i.i.d. con distribución Pareto, dada por

$$F_X(x) = 1 - (1 + x/\theta)^{-\alpha} \mathbb{I}_{[0, \infty)}(x),$$

con  $\alpha, \theta > 0$ . Considerando las constantes de normalización,  $b_n = \theta(n^{1/\alpha} - 1)$  y  $a_n = \frac{\theta n^{1/\alpha}}{\alpha}$ , deriva la distribución asintótica no degenerada de  $X_n^* = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

5. Deriva el análogo del Teorema de Fisher-Tippett que consiste en reemplazar el supuesto i.i.d. por el de intercambiabilidad en  $X_1, \dots, X_n$ .
6. Sean  $N_1, \dots, N_m$  variables aleatorias con distribución dada por una mezcla Poisson-P, donde  $N_i|\lambda \sim Po(N_i|\lambda)$  y  $\lambda \sim P(\lambda)$ . Muestre que  $M = N_1 + \dots + N_m$  tiene una distribución Poisson mezclada, y exhiba la función generadora de probabilidades de la distribución mezcla que le corresponde.
7. Considere  $X$ , severidad individual, que sigue una distribución lognormal con función de supervivencia dada por

$$S_X(x) \approx \left( \frac{\sigma}{\log x - \mu} \right) \exp \left\{ -1/2 \left( \frac{\log x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\},$$

cuando  $x \rightarrow \infty$ . Deriva la aproximación del  $TVaR_q(S)$  para la suma de  $N$  variables  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. lognormales.