

## Lista de Ejercicios (Parte I)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando

28 de septiembre de 2015

La siguiente lista de ejercicios nos ayudará a preparar el primer examen parcial del curso.

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución gamma,  $\text{Ga}(x; \alpha, \beta)$ . Sea  $\pi$  un escalar fijo. Derive la distribución de  $Y = \pi X$ .
2. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución log-normal,  $\text{LN}(x; \mu, \sigma)$ . Sea  $\pi$  un escalar fijo. Derive la distribución de  $Y = \pi X$ .
3. Sea  $X$  la variable aleatoria del monto de un reclamo de seguros. Considere el problema de riesgo compartido entre aseguradora y reaseguradora, donde la aseguradora cubre el monto total del reclamo hasta el monto de retención  $M$  y la reaseguradora participa del riesgo en exceso del monto de retención. Así, las variables aleatorias que denotan el monto del pago de aseguradora y reaseguradora se definen como:

$$\begin{aligned} Y &= \min(X, M), \\ Z &= \max(0, X - M), \end{aligned}$$

respectivamente. (Note que  $X = Y + Z$ ).

- a) Calcula  $\mathbb{E}(Y)$  en función de la distribución  $F_X(x)$  para  $X$  (puedes suponer que  $F_X$  es absolutamente continua).
  - b) Suponga que  $F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$ , con  $\lambda > 0$ . Deriva la función generadora de momentos para  $Z$ ,  $M_Z(t)$ .
4. Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes tales que  $X_j \sim \text{Po}(x_j; \lambda_j)$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Deriva la distribución de  $S = \sum_{j=1}^n X_j$ .
  5. Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias i.i.d. con distribución  $\text{Ga}(x; 1, \beta)$ . Siguiendo la fórmula de convolución, deriva analíticamente la distribución de  $S = \sum_{j=1}^n X_j$ . (Sugerencia: Emplea un argumento de inducción matemática).
  6. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 20 \\ (x + 20)/80 & \text{si } 20 \leq x < 40 \\ 1 & \text{si } x \geq 40. \end{cases}$$

Calcula:

- a)  $\Pr(X \leq 30)$ .
- b)  $\Pr(X = 40)$ .
- c)  $\mathbb{E}(X)$ .
- d)  $\mathbb{V}(X)$ .

7. **Definición.** Una distribución empalmada (*splicing distribution*) de  $k$  componentes se define como:

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha_1 f_1(x) & c_0 < x < c_1 \\ \alpha_2 f_2(x) & c_1 < x < c_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_k f_k(x) & c_{k-1} < x < c_k, \end{cases}$$

donde  $\alpha_j > 0$  para  $j = 1, \dots, k$ , tal que  $\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$ , y  $f_j(x)$  es una función de densidad en el intervalo  $(c_{j-1}, c_j)$ , para  $j = 1, \dots, k$ .

- a) Crea una función empalmada de dos componentes para los intervalos  $(0, \gamma)$  y  $(\gamma, \infty)$ , donde el primer componente esté inducido por una distribución exponencial,  $\text{Exp}(x; \lambda)$ , con  $\lambda > 0$  y el segundo componente esté inducido por una distribución Pareto,  $\text{Pa}(x; \beta, \theta)$ , con  $\beta, \theta > 0$  (considera  $\gamma > 0$  como un número fijo).