ACT-11302: Cálculo Actuarial III **ITAM**

Soluciones de Ejercicios (Parte I)

Prof: Juan Carlos Martínez Ovando *4 de octubre de 2015*

La siguiente lista de ejercicios nos ayudará a preparar el primer examen parcial del curso.

1. Sea X una variable aleatoria con distribución gamma, $\mathrm{Ga}(x;\alpha,\beta)$. Sea π un escalar fijo. Derive la distribución de $Y=\pi X$.
Solución. Consideremos la parametrización de X tal que $\mathbb{E}(X)=\alpha/\beta$. Así,
$$f_X(x) \propto x^{\alpha-1}\exp\{-\beta x\}.$$
De esta forma, si π es una constante y $Y=\pi X$, se sigue que
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_X(y/\pi)\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\pi}\right| \\ &\propto y^{\alpha-1}\exp\{-\beta y/\pi\}. \end{aligned}$$
Por lo que $Y \sim \mathrm{Ga}(y|\alpha,\beta/\pi)$.

2. Sea X una variable aleatorioa con distribución log-normal, $\mathrm{LN}(x;\mu,\sigma)$. Sea π un escalar fijo. Derive la distribución de $Y=\pi X$.
Solución. Siguiendo un procedimiento semejante al de la pregunta anterior,
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_X(y/\pi)\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\pi}\right| \\ &\propto y^{-1}\exp\left\{-1/2\left(\frac{\log y-\log\pi-\mu}{\sigma^{1/2}}\right)^2\right\}. \end{aligned}$$
Por lo que $Y \sim \mathrm{LN}(x;\mu+\log\pi,\sigma)$.

3. Sea X la variable aleatoria del monto de un reclamo de seguros. Considere el problema de riesgo compartido entre aseguradora y reaseguradora, donde la aseguradora cubre el monto total del reclamo hasta el monto de retención M y la reaseguradora participa del riesgo en exceso del monto de retención. Así, las variables aleatorias que denotan el monto del pago de aseguradora y reaseguradora se definen como:
$$\begin{aligned} Y &= \mathrm{mín}(X,M), \\ Z &= \mathrm{máx}(0,X-M), \end{aligned}$$
respectivamente. (Note que $X=Y+Z$).

a) Calcula $\mathbb{E}(Y)$ en función de la distribución $F_X(x)$ para X (puedes suponer que F_X es absolutamente continua).
Solución. Supongamos que X es absolutamente continua, con función de distribución, $F_X(x)$, y función de densidad, $f_X(x)$.
Por otro lado, el soporte de Y está dado por $\mathscr{Y} = (0, M) \sup\{M\}$, con probabilidades,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= F_X(y), \\ \Pr(\{M\}) &= S_X(M). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{F_Y}(Y) &= \int_0^M F_X(dy) + MS_X(M) \\ &= \int_0^M x f_X(y)dy + MS_X(M). \end{aligned}$$

b) Suponga que $F_X(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$, con $\lambda > 0$. Deriva la función generadora de momentos para Z, $M_Z(t)$.
Solución. La variabe aleatoria Z tiene soporte en $\mathscr{Z} = \{0\} \cup (0, \infty)$, con probabilidades

$$\begin{aligned} \Pr(\{0\}) &= F_X(M), \\ F_Z(z) &= F_X(y+M). \end{aligned}$$

De esta forma, la función generadora de momentos de Z se calcularía como

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= e^{t(0)} F_X(M) + \int_0^\infty e^{tz} f_X(z+M)dz \\ &= (1 - e^{-\lambda M}) + \lambda e^{-\lambda M} \int_0^\infty e^{tz} e^{-\lambda z} dz \\ &= (1 - e^{-\lambda M}) + \lambda e^{-\lambda M} \frac{\lambda}{\lambda + t}. \end{aligned}$$

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_j \sim \text{Po}(x_j; \lambda_j)$, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Deriva la distribución de $S = \sum_{j=1}^n X_j$.
Solución. La función generadora de momentos de X_j está dada por

$$M_{X_j}(t) = e^{\lambda_j (e^t - 1)}.$$

Así, la función generadora de momentos de S se calcula como

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \mathbb{E}_S(e^{ts}) \\ &= \mathbb{E}_{X_1, \ldots, X_n}(e^{t(x_1 + \cdots + x_n)}) \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}_{X_j}(e^{t(x_j)}) \\ &= \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j (e^t - 1)} \\ &= e^{\sum_{j=1}^n \lambda_j (e^t - 1)} \\ &= e^{\lambda_S (e^t - 1)}, \end{aligned}$$

donde $\lambda_S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$. Por lo que se sigue que $S \sim \text{Po}(s|\lambda_S)$.

5. Sean $X_1,\dots,X_n$ variables aleatorias i.i.d. con distribución $\text{Ga}(x;1,\beta)$. Siguiendo la fórmula de convolución, deriva analíticamente la distribución de $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$. (Sugerencia: Emplea un argumento de inducción matemática).
   Solución. Iniciemos considerando X_1 y X_2 v.a.'s i.i.d. con función de densidad marginal,
   $$f_X(x) = \beta \exp\{-\beta x\}.$$
   La distribución de $S_1 = X_1 + X_2$, está dada por
   $$\begin{aligned} f_{S_1}(s_1) &= \int_0^{s_1} f_{X_2}(x) f_{X_1}(s_1 - x) dx \\ &= \int_0^{s_1} \beta^2 \exp\{-\beta x - \beta(s_1 - x)\} dx \\ &= \beta^2 \exp\{-\beta s_1\} \int_0^{s_1} dx \\ &\propto s_1 \exp\{-\beta s_1\}. \end{aligned}$$
   Por lo que $S_1 \sim \text{Ga}(s_1|2,\beta)$. Ahora, por inducción, suponemos que $S_k = X_1 + \cdots + X_{k+1}$ sigue una distribución $\text{Ga}(s_k|(k+1),\beta)$. Definamos ahora $S_{k+1} = S_k + X_{k+2}$. La distribución de S_{k+1} estaría dada por
   $$\begin{aligned} f_{S_{k+1}}(s_{k+1}) &= \int_0^{s_{k+1}} f_{S_k}(x) f_{X_{k+2}}(s_{k+1} - x) dx \\ &= \int_0^{s_{k+1}} \frac{\beta^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \beta x^k \exp\{-\beta x - \beta(s_{k+1} - x)\} dx \\ &= \beta^{k+2} \exp\{-\beta s_{k+1}\} \int_0^{s_{k+1}} x^k dx \\ &\propto s_{k+1}^{k+1} \exp\{-\beta s_{k+1}\}. \end{aligned}$$
   Por lo que $S_{k+1} \sim \text{Ga}(s_{k+1}|(k+2),\beta)$.

6. Sea X una variable aleatoria con distribución dada por:
   $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 20 \\ (x+20)/60 & \text{si } 20 \leq x < 40 \\ 1 & \text{si } x \geq 40. \end{cases}$$
   Calcula:

   a) $\Pr(X \leq 30)$.
   Solución. El soporte de X es $\mathscr{X} = \Re$, la recta real. Así,
   $$\begin{aligned} \Pr(X \leq 30) &= \int_{-\infty}^{30} f_X(x) dx \\ &= 0 + \int_{20}^{30} f_X(x) dx \\ &= F_X(30). \end{aligned}$$

b) $\Pr(X=40)$.
Solución. Al ser X una variable aleatoria continua, $\Pr(X=40)=0$. Aunque, la función de densidad asociada con $F_X(x)$ esté definida.

c) $\mathbb{E}(X)$.
Solución. La esperanza de una variable aleatoria absolutamente continua se define como,

$$\mathbb{E}_X(x)=\int_{\mathscr{X}} x f_X(x)dx.$$

Sin embargo, también puede definirse en términos de su función de distribución, como

$$\mathbb{E}_X(x)=\int_{\mathscr{X}} F_X(dx).$$

Así,

$$\mathbb{E}_X(x)=\int_{20}^{40}\frac{x+20}{60}dx.$$

d) $\mathbb{V}(X)$.

7. **Definición.** Una distribución empalmada (*splicing distribution*) de k componentes se define como:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha_1 f_1(x) & , c_0<x<c_1\\ \alpha_2 f_2(x) & , c_1<x<c_2\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_k f_k(x) & , c_{k-1}<x<c_k,\end{cases}$$

donde $\alpha_j>0$ para $j=1,\ldots,k$, tal que $\sum_{j=1}^k \alpha_j=1$, y $f_j(x)$ es una función de densidad en el intervalo (c_{j-1},c_j), para $j=1,\ldots,k$.

a) Crea una función empalmada de dos componentes para los intervalos $(0,\gamma)$ y (γ,∞), donde el primer componente esté inducido por una distribución exponencial, $\mathrm{Exp}(x;\lambda)$, con $\lambda>0$ y el segundo componente esté inducido por una distribución Pareto, $\mathrm{Pa}(x;\beta,\theta)$, con $\beta,\theta>0$ (considera $\gamma>0$ como un número fijo).
Solución. La variable aleatoria $X_1\sim\mathrm{Exp}(x_1|\lambda)$ con densidad,

$$f_{X_1}(x_1)=\beta\exp\{-\beta x_1\},$$

y la variable $X_2\sim\mathrm{Pa}(x_2|\beta,\theta)$, con función de densidad

$$f_{X_2}(x_2)=\theta\frac{\beta^\theta}{x^{\theta+1}}.$$

As´, la distribución empalmada truncada en γ estaría dada por,

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha_1 f_1(x) & , 0<x<\gamma\\ \alpha_2 f_2(x) & , \gamma<x<\infty,\end{cases}$$

con

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f_{X_1}(x)}{F_{X_1}(\gamma)} = \frac{\beta \exp\{-\beta x_1\}}{1-\exp\{-\beta\gamma\}}, \\ f_2(x) &= \frac{f_{X_2}(x)}{S_{X_2}(\gamma)} = \frac{\theta(\beta^{\theta})/(x^{\theta+1})}{(\beta/\gamma)^{\theta}}. \end{aligned}$$

Los parámetros α_1 y α_2 son positivos tales que $\alpha_1+\alpha_2=1$. Si se consideran como parámetros desconocidos, deben de estimarse bajo la restricción anterior. Si se prefiere que sean parámetros conocidos, una manera razonable de definirlos sería

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{F_{X_1}(\gamma)}{F_{X_1}(\gamma)+S_{X_2}(\gamma)}, \\ \alpha_2 &= \frac{S_{X_2}(\gamma)}{F_{X_1}(\gamma)+S_{X_2}(\gamma)}, \end{aligned}$$

por ejemplo.