ACT-11302: Cálculo Actuarial III

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Notas de Clase

Juan Carlos Martínez-Ovando

juan.martinez.ovando@itam.mx

Agosto-Diciembre 2015

Versión: 9 de noviembre de 2015

Índice general

Prefacio

Estas notas se basan en las siguientes referencias: Deelstra and Plantin (2014), Kaas et al. (2001), Klugman et al. (2012), Shevchenko (2011), Society of Actuaries (1965), Society of Actuaries (1982), y Society of Actuaries (2010). Su contenido está en etapa inicial de desarrollo.

Parte I

Fundamentos de Estadística

Capítulo 1

Probabilidad e Inferencia Estadística

1.1. Variables aleatorias y funciones de distribución

Muchos eventos en nuestra vida cotidiana nos resultan inciertos en función de un desconocimiento o falta de control sobre su realización. Nuestra apreciación de la incertidumbre asociada con esos modelos está en función de la cantidad de información que tengamos acerca de la posible realización. De hecho, muchos eventos son igualmente inciertos o ciertos para diferentes personas. ?́A qué nos referimos con esto?

La cuantificación de los posibles resultados de un evento se conoce intuitivamente como una variable aleatoria.

Sea X una variable aleatoria, con soporte en $\mathcal{X}$ y función de distribución de probabilidades, $F(x)$ para $x \in \mathcal{X}$.[1] Asociado con F se define la función de densidad de probabilidad, f, si X es absolutamente continua, o la función de masa de probabilidad,

[1]Recuerde que la función de distribución es creciente y continua por la derecha y está acotada en el intervalo $[0, 1]$.

f, si X es discreta, i.e.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \\ &\text{ó} \\ F(x) &= \sum_{y \leq x} f(y), \end{aligned}$$

con y en $\mathcal{X}$.

Complementariamente, definimos la función de supervivencia, $S(x)$, como la probabilidad de que X sea mayor que un cierto valor x, i.e.

$$S(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x),$$

para x en $\mathcal{X}$. La función de supervivencia se utiliza ampliamente para el análisis de datos de duración (tiempo para que suceda un evento), o para estudiar eventos extremos. El área de la estadística encargada del estudio de datos de duración se conoce como *Análisis de Supervivencia.*

En el análisis de supervivencia, resulta necesario trabajar con la función que mide el cambio instantáneo en la duración, condicional en que la variable aleatoria X haya superado un cierto umbral de tiempo, digamos x. La función que mide tal cambio instantáneo se conoce como función *hazard* (o función de riesgo), y se define como el siguiente cociente,

$$h(x) = \frac{\text{lím}_{\varepsilon \to 0} Pr(x - \varepsilon \leq X < x + \varepsilon, X > x)}{Pr(X > x)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial x} S(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)}.$$

La función de riesgo, descrita arriba, se define de manera análoga para variables aleatorias discretas.

1.2. Momentos, cuantiles, función característica, función generadora de momentos

El k-ésimo momento de una variable aleatoria, X, con función de distribución de probabilidades se define como

$$\mathbb{E}(X^k) = \int x^k F(dx), \tag{1.1}$$

para todo k entero positivo. Cuando X es absolutamente continua, $F(dx) = f(x)dx$, y cuando X es una variable aleatoria discreta, $\mathbb{E}(X^k) = \sum_{x \in \S x^k p(x)}$.

Los momentos centrales de una variable aleatoria, se definen análogamente para la variable aleatoria X centrada en su media (primer momento), i.e. $\mathbb{E}((X-\mu)^k)$, donde $\mu = \mathbb{E}(X)$.

Se da el caso también que algunas variables aleatorias sean definidas por arriba (o debajo) de un cierto umbral. Estas variables aleatorias se conocen como variables aleatorias censuradas. Por ejemplo, una variable aleatoria X que tiene soporte en la recta real, puede estar censurada por encima del umbral a, i.e. su soporte sería el subconjunto de $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{X}_+ = \{x \in \mathcal{X} : x \geq a\},$$

para a en $\mathcal{X}$.

Variables censuradas de esta forma se emplean para análizar variables de pérdida en exceso de un valor, i.e. variables aleatorias de la forma

$$Y = \text{mín}\{X, a\},$$

donde X es una variable aleatoria con soporte en la recta real y a es un valor fijo predeterminado.

1.3. Datos e incertidumbre

1.4. Paradigmas bayesiano y frecuentista de inferencia

Parte II

Modelos de Pérdida

Capítulo 2

Introducción a los Modelos Actuariales de Pérdida

2.1. Frecuencia de siniestros

2.2. Severidad individual

2.3. Agregación de reclamos

Capítulo 3

Distribución de la Frecuencia de Siniestros

En estadística actuarial se modela la pérdida inducida por reclamaciones de pólizas de seguros. Para este fecto, tanto el número de siniestros como la severidad (monto) de los mismos son relevantes. El número de siniestros (frecuencia) mide el número de reclamaciones para un bloque de pólizas de seguros en un periodo de tiempo finito (mensual o anual).

Se supone que la frecuencia de siniestros, N, es una variable aleatoria discreta con soporte en los enteros positivos, $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. En esta sesión revisaremos algunas distriuciones paramétricas que son comúnmente empleadas para modelar la frecuencia de siniestros.

Nota 1. *Note que aunque el bloque de pólizas de seguros está formado por un número finito, la modelación de frecuencias supone, en ocasiones, un soporte numerable. Esto no es un problema en la práctica, pues muchas de estas distribuciones en verdad son una aproximación razonable para una distribución de frecuencia de siniestros con un número finito de pólizas.*

Ls distribuciones que revisamos en esta sesión son:i) Binomial (Bin), ii) Binomial negativa (BinN), iii) Poisson (Po) y iv) Geométrica (Geo).

3.1. Distribuciones discretas

3.1.1. Distribución binomial

La variable aleatoria N es modelada con la distribución binomial, $\text{Bin}(n; \eta, \theta)$, donde η el número de pólizas en el bloque de seguros, y $0 < \theta < 1$ es la probabilidad de ocurrencia de siniestro de cada póliza individual, si

$$p_N(n) = \mathbb{P}(N = n) \propto \theta^{\eta}(1-\theta)^{\eta-n}, \tag{3.1}$$

para $n \in \mathcal{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \eta\}$. Aquí se supone que η es finito y conocido.

Note que los supuestos fundamentales para el uso de la distribución binomial para la modelación de frecuencias de siniestros son: i) la ocurrencia de siniestros entre pólizas es la misma (i.e. los siniestros comparten condiciones homogéneas de exposición al riesgo de siniestro), y ii) la ocurrencia de siniestros es independiente entre pólizas.

Esta distribución tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \eta\theta. \\
\text{var}(N) &= \eta\theta(1-\theta). \\
M_N(t) &= \left(\theta e^t + (1-\theta)\right)^{\eta}.
\end{aligned}$$

La distribución binomial es simétrica si $\theta = 1/2$. En el caso $\theta < 1/2$, la distribución es sesgada a la derecha (positivamente sesgada); mientras que en el caso $\theta > 1/2$, la distribución es sesgada a la izquierda (negativamente sesgada).

El estimador máximo verosimil para θ, bajo el supuesto de independencia estocástica entre los siniestros de las pólizas, es $\hat{\theta} = 1/n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(\text{siniestro}_i)$. La distribución inicial conjugada para θ, bajo el enfoque bayesiano de inferencia, es una distribución beta, $\mathrm{Be}(\theta|\alpha_0, \beta_0)$, con $\alpha_0, \beta_0 > 0$. Los valores de los hiperparámetros α_0 y β_0 son previamente especificados por el modelador, empleando información adicional relevante (e.g. datos de frecuencia de siniestros de un bloque de pólizas para un periodo de tiempo distinto y coberturas semejantes). La distribución final para θ será así beta, pero con parámetros $\alpha_1 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(\text{siniestro}_i)$ y $\beta_1 = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(\text{no siniestro}_i)$.

3.1.2. Distribución binomial negativa

La distribución binomial negativa, $\mathrm{BinN}(n; r, \theta)$ modela el número de pólizas siniestradas, n, antes de observar r pólizas no siniestradas, donde la probabilidad de siniestro es $0 < \theta < 1$. La distribución está dada por:

$$p_N(n) = \mathbb{P}(N = n) \propto \theta^n (1 - \theta)^r, \tag{3.2}$$

para $n \in \mathcal{N}$.

Nota 2. *Al igual que en el modelo binomial, se supone que las pólizas comparten condiciones homogéneas de exposición al riesgo de ser siniestradas.*

Esta distribución tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= r\frac{(1-\theta)}{\theta}. \\
\mathrm{var}(N) &= r\frac{(1-\theta)}{\theta^2}. \\
M_N(t) &= \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t}\right)^r.
\end{aligned}$$

Usualmente, el parámetro r se supone fijo y conocido. En la práctica, r es desconocido, por tanto es estimable. Así, el estimador máximo verosímil para θ sería, $\hat{\theta} = \frac{\sum_i \mathbb{I}(\text{siniestro}_i)}{N_r + \sum_i \mathbb{I}(\text{siniestro}_i)}$, donde N_r es el estimador de r el cuál se obtiene empleando métodos numéricos usando el algoritmo de Brent[1] Bajo el enfoque bayesiano de inferencia, la

[1]Brent, R.P. (2002) *Algorithms for minimization without derivatives.* Dover Publications.

distribución inicial conjugada para θ es $\text{Be}(\theta|\alpha_0, \beta_0)$. Condicional en r, la distribución final para θ es $\text{Be}(x|\alpha_1, \beta_1)$, con $\alpha_1 = \alpha_0 + \sum_i \mathbb{I}(\text{siniestro}_i)$ y $\beta_1 = \beta_0 + r$. Cuando se extiende la incertidumbre a r también, se requiere definir una prior para r, la cual puede ser $\text{Po}(r|\lambda_0)$. La distribución final conjunta para (r, θ), en este caso, se calcula empleando métodos numéricos también (e.g. el muestreador de Gibbs[2]).

3.1.3. Distribución geométrica

La distribución geométrica, $\text{Geo}(n; \theta)$ modela el número de pólizas siniestradas, n, antes de observar 1 póliza no siniestrada, donde la probabilidad de siniestro es $0 < \theta < 1$. La distribución está dada por:

$$p_N(n) = \mathbb{P}(N = n) \propto \theta^n (1 - \theta), \tag{3.3}$$

para $n \in \mathcal{N}$. Esta distribución es un caso particular de la distribución binomial negativa, con $r = 1$. El análisis y estimación frecuentista y bayesiano de esta distribución es notoriamente más simple que en el caso de la distribución binomial negativa. Sin embargo, su implementación y uso en la práctica es menos robusto que el de la distribución binominal negativa.

Nota 3. *Los supuestos que operan en este caso son similares a los de la distribución binomial negativa.*

3.1.4. Distribución Poisson

La distribución Poisson para la frecuencia de siniestros, $\text{Po}(n; \lambda)$, siendo $\lambda > 0$ la tasa de siniestros, es quizás la distribución más empleada en la práctica. La distribución de probabilidad está dada por:

$$p_N(n) = \mathbb{P}(N = n) \propto \frac{\lambda^n}{n!}, \tag{3.4}$$

[2] Robert, C. y Casella, G. (1997) *Introduction to MCMC Methods*. Springer.

para $n \in \mathcal{N}$.

Esta distribución tiene las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \lambda. \\
\mathrm{var}(N) &= \lambda. \\
M_N(t) &= \exp\left\{\lambda(e^t - 1)\right\}.
\end{aligned}
$$

El estimador de máxima verosimilitud de λ es $\hat{\lambda} = 1/n \sum_i \mathbb{I}(\text{siniestro}_i)$. Bajo el enfoque bayesiano de inferencia, la distribución inicial conjugada para λ es $\mathrm{Ga}(\lambda|\alpha_0, \beta_0)$. Así, la distrbución final para λ es $\mathrm{Ga}(\lambda|\alpha_1, \beta_1)$, donde $\alpha_1 = \alpha_0 + \sum_i \mathbb{I}(\text{siniestro}_i)$ y $\beta_1 = \beta_0 + n$.

3.2. Distribuciones $(\alpha, \beta, 0)$

En esta sesión, revisaremos la definición y propiedades de una familia de distribuciones discretas que engloba las duatro distribuciones paramétricas que revisamos la sesión anterior. Esta familia de distribuciones se denota como $(\alpha, \beta, 0)$

Definición 4. *Una variable aleatoria discreta no negativa, N, sigue una distribución $(\alpha, \beta, 0)$ si la función de masa de probabilidades puede escribirse como:*

$$
p_N(n) = \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right) p_N(n-1), \tag{3.5}
$$

para n en $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Los parámetros, α y β son constantes y $p_N(0)$ es fijo y dado.

El uso de las distribuciones $(\alpha, \beta, 0)$ en estadística actuarial proviene de la naturaleza recursiva de a distribución de masa de probabilidades. Esta propiedad recursiva es útil cuando se emplean ciertas fórmulas de recursión para calcular la distribución del monto agregado de siniestros, como veremos más adelante.

Ejemplo 5. *La distribución binomial, $Bin(n,\theta)$, es un caso particular de la distribución $(\alpha,\beta,0)$, y su función de distribución está caracterizada en la forma $(\alpha,\beta,0)$ por los siguientes parámetros,*

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\theta}{1-\theta}.\\ \beta &= -\frac{\theta(\eta+1)}{(1-\theta)}.\end{aligned}$$

Definición 6. *Una variable aleatoria discreta no negativa, N, sigue una distribución $(\alpha,\beta,1)$ si la función de masa de probabilidades puede escribirse como:*

$$p_N(n) = \left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right) p_N(n-1), \tag{3.6}$$

para n en $\mathcal{N} = \{2, 3, \ldots\}$. Aquí, $p_N(0)$ debe estar dado.

A partir de una distribución $(\alpha,\beta,0)$, es posible definir una distribución con soporte en $\mathcal{N} = \{1, 2, \}$ mediante un ejercicio de truncamiento. La distribución resultante se conoce como una distribución modificada en 0.

Definición 7. *Una variable aleatoria discreta discreta no negativa, N, con soporte en $\mathcal{N} = \{0, 1, \ldots\}$ y distribución $(\alpha,\beta,0)$ tiene sigue una modificación en 0 si,*

$$p_N^M(n) = \gamma p_N(n), \tag{3.7}$$

para n en $\mathcal{N}^M = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Aquí, el parámetro γ es la constante de modificación. Este parámetro se define de tal forma que se garantice que p_N^M sea una medida de probabilidad propia en el soporte modificado $\mathcal{N}^M$.[3]

Así, la constante de modificación está dada por

$$\gamma = \frac{1 - p_N^M(0)}{1 - p_N(0)}. \tag{3.8}$$

[3]El subíndice M denota la modificación de la variable aleatoria, función de distribución o el soporte.

3.3. Transformaciones y creación de nuevas distribuciones

3.4. Sobredispersión

3.5. Inferencia y predicción de la frecuencia de siniestros

Capítulo 4

Distribución de la Severidad Individual

En estadística actuarial, las variables aleatorias que se modelan en la práctica incluyen simultáneamente una parte continua y otra discreta.

A continuación, revisaremos los fundamentos para este tipo de variables y las funciones de probabilidad asociadas.

Sea Z la variable aleatoria que representa el monto reclamado de un contrato de seguro (en general). Los casos contemplados para Z son:

1. Que el contrato sea abierto.

2. El reclamo se define en exceso de un monto máximo asegurado, M.

3. El reclamo se define abiertamente hasta un monto máximo asegurado, M.

Cómo construir la variable aleatoria que definiría estos contratos?

Empecemos con la defínción de la función indicadora, $\mathbb{I}(\cdot)$, que se define como

$$\mathbb{I}(\text{evento}) = \begin{cases} 1 & \text{si el evento 'ocurre'} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Así, se puede definir una variable aleatoria del monto individual de reclamo en función de $\mathbb{I}$, como

$$Z = \mathbb{I}(\text{evento})X + (1 - \mathbb{I}(\text{evento}))Y, \tag{4.1}$$

donde X y Y son dos variables aleatorias estocásticamente independientes.

Así, Z se define en función de la triada ($\mathbb{I}$,X,Y). De esta forma, la función de distribución de probabilidades para Z se define como

$$F_Z(z) = qF_X(z) + (1 - q)F_Y(z), \tag{4.2}$$

donde $q = \mathbb{P}(\mathbb{I}(\text{evento}))$, y

$$\begin{aligned} F_X(z) &= \mathbb{P}(X \leq z|\text{evento}) \\ F_Y(z) &= \mathbb{P}(Y \leq z|\text{evento}). \end{aligned}$$

Ejemplo 8. *Supongamos que X es una variable aleatoria discreta, con soporte en $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, y Y es una variable aleatoria absolutamente continua con soporte en $\mathcal{Y} = \Re_+$. $\mathbb{I}$ se define como una variable aleatoria Bernoulli con parámetro q.*

Definimos así a Z como:

$$Z = \mathbb{I}X + (1 - \mathbb{I})Y, \tag{4.3}$$

siguiendo que la función de distribución de probabilidades para Z se calcula como:

$$F_Z(z) = qF_X(z) + (1 - q)F_Y(z), \tag{4.4}$$

con F_X y F_Y definidas como antes.

Siendo Z y F_Z definidas como una combinación linear convexa, es realmente simple calcular valores esperados de Z, como

$$\mathbb{E}(Z) = q\mathbb{E}(X) + (1 - q)\mathbb{E}(Y). \tag{4.5}$$

En general, si ϕ es una función de interés integrable,

$$\mathbb{E}(\phi(Z)) = q\mathbb{E}(\phi(X)) + (1 - q)\mathbb{E}(\phi(Y)). \tag{4.6}$$

4.1. Funciones de supervivencia y de riesgo

4.2. Distribuciones mixtas y mezcla de distribuciones

4.3. Distribuciones continuas sobre la recta real positiva

Las distribuciones paramétricas que usualmente se emplean para modelar la distribución individual de las reclamaciones de siniestros son: i) Exponencial, ii) Gamma, iii) Weibull y iv) Pareto. De estas cuatro distribuciones, la exponencial es la más sencilla de trabajar desde el punto de vista inferencial. La razón para estudiar las otras alternativas es la de proveer herramientas de modelación que permitan capturar distintas características de los reclamos de siniestros simultáneamente, como: a) Tendencia central, b) Dispersión, y c) Valores extremos.

4.3.1. Distribución Exponencial

La función de densidad de esta distribución está dada por

$$f_X(x|\theta) = \theta \exp\{-\theta x\}. \tag{4.7}$$

Su función de distirbución está dada por

$$F_X(x|\theta) = 1 - \exp\{-\theta x\}. \tag{4.8}$$

La distribución exponencial tiene la característica de tener tazas de riesgo constantes, i.e.

$$h_X(x|\theta) = \theta. \tag{4.9}$$

4.3.2. Distribución Gamma

La función de densidad de esta distribución está dada por

$$f_X(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\beta x\}. \tag{4.10}$$

A diferencia de la distribución exponencial, la distribución gamma no tiene una expresión analítica cerrada para su función de distribucón.

4.3.3. Distribución Weibull

La función de densidad de esta distribución está dada por

$$f_X(x|\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta} \right) |^{\alpha-1} \exp\{-(x/\theta)^\alpha\}. \tag{4.11}$$

Su función de distirbución está dada por

$$F_X(x|\alpha,\beta) = 1 - \exp\{-(x/\beta)^\alpha\}. \tag{4.12}$$

4.3.4. Distribución Pareto

La función de densidad de esta distribución está dada por

$$f_X(x|\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(x+\beta)^{\alpha+1}}. \tag{4.13}$$

Su función de distirbución está dada por

$$F_X(x|\alpha,\beta) = 1 - \left(\frac{\beta}{x+\beta} \right)^\alpha. \tag{4.14}$$

Su función de riesgo está dada por

$$h_X(x|\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{x+\beta}. \tag{4.15}$$

4.4. Valores extremos y colas de la distribución

4.5. Tipos de coberturas y distribuciones inducidas

4.6. Inferencia y predicción de la severidad

Capítulo 5

Modelos de Pérdida Agregada

5.1. Nociones generales

Las distribuciones compuestas se emplean para modelar el monto agregado de reclamos de un portafolio de seguros. Sea N el número de pólizas (o reclamaciones) que integran el portafolio, y X_i el monto del siniestro.

Recuerde que cuando trabajamos con portafolios de seguros, éstos se segmentan en grupos, de manera que al interior de cada grupo la exposición al riesgo de ocurrir un siniestro es homogéneo. De igual forma, las condiciones de cobertura de las pólizas en cada grupo son homogéneas. Así, podemos referirnos al monto del siniestro, X_i, o al monto del reclamo a la aseguradora, Y_i casi indistintamente.

Así, la variable de interés se describe como:

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i. \tag{5.1}$$

La distribución que nos interesa describir es la de S. Ahora bien, tal distrbución estará en función de la forma de modelación de N, distinguiendo entre dos tipos de modelos agregados de siniestros: i) modelos de riesgo individuales, y ii) modelos de riesgo colectivo.

5.2. Modelos de riesgo individual

5.2.1. Convoluciones

En el modelo de riesgo individual, se supone que N corresponde al número de pólizas en el portafolio de seguros. Así, la distribución de S estará definida solamente por la distribución conjunta de los siniestros individuales,

$$\mathbb{P}(X_1, ..., X_N). \tag{5.2}$$

El supuesto común respecto a los siniestros individuales los considera estocásticamente independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.),

$$\mathbb{P}(X_1, ..., X_N) = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i). \tag{5.3}$$

Así, la distribución de S quesdaría expresada como la convolución de N variables aleatorias. Tal distribución puede calcularse empleando directamente la fórmula de convolución o simplificando su cálculo empleando la función generadora de momentos o función característica de X.

Respecto a $\mathbb{P}(X)$, debe notarse que tal distribución estar'a en función del concepto de N:

- Si N representa el **número de pólizas**, entonces X_i debe considerar la posibilidad de no siniestro , i.e. $X_i = 0$ (debido a la ausencia de siniestro). De esta forma,

  $$\mathbb{P}(X_i \leq x) = q\mathbb{I}(X_i = 0) + (1 - q)F_{X_i}(x), \tag{5.4}$$

  para $x \in \mathcal{X} = \Re_+$. En esta expresión, q representa la probabilidad de que NO haya siniestro, y $(1 - q)$ su complemento. También, $F_{X_i}(x)$ representa la distribución de una variable aleatoria positiva, la cual representa el monto del siniestro.

Siendo esta distribución mezclada, el cálculo de S mediante la fórmula de convolución o método de momentos es complicado. El empleo de simulación estocástica puede ser la mejor opción en la práctica.

- Si N representa la **frecuencia de siniestros**, entonces X_i representaría el monto del siniestro, con

$$\mathbb{P}(X_i \leq x) = F_{X_i}(x), \tag{5.5}$$

la distribución para el monto del siniestro. En este caso, la fórmula de convolución o el método de momentos puede ser la mejor alternativa de uso en la práctica, si F_{X_i} pertenece a una clase conocida de distribuciones.

5.2.2. Fórmulas de recursión

5.2.3. Aproximaciones analíticas

Si $X_1, \ldots, X_n$ son v.a.'s i.i.d. tales que $\mathbb{E}(X) = \mu$ y $\mathrm{var}(X) = \sigma^2 (< \infty)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq n\mu + x\sigma\sqrt{n}\right) = \Phi(x), \tag{5.6}$$

donde x es cualquier valor en X$y\Phi$ es la función de distribución normal estándar.

La anterior expresión corresponde al Teorema de Límite Central. De este resultado, para efecto de nuestro inter'es, podemos aproximar el agregado de siniestros de un portafolio de seguros, $S = \sum_{i=1}^{n}$, como

$$\mathbb{P}(S \leq s) \approx \mathrm{N}(s|n\mu, n\sigma^2). \tag{5.7}$$

Nota 9. *Note que la aproximación anterior hace uso solo del primero y segundo momento de la distribución del monto individual de reclamo.*

Con el propósito de robustecer esta aproximación, podemos emplear una generalización dle Teorema de Límite Central que considera los primeros tres momentos de la distribución de las X_i's. Supongamos que γ corresponde al tercer momento estandarizado de X_i, i.e. $= \mathbb{E}\left[((X-\mu)/\sigma)^3\right]$. La aproximación para $\mathbb{P}(S)$ estaría dada entonces por

$$\mathbb{P}((S-\mu)/\sigma \leq s) \approx \Phi\left(\sqrt{9/\gamma^2 + 6s/\gamma + 1} - 3/\gamma\right), \tag{5.8}$$

donde Φ es la función de distribución Normal estándar.

5.2.4. Aproximaciones vía simulación

5.3. Modelos de riesgo colectivo

5.3.1. Distribuciones compuestas

En el modelo de riesgo colectivo, se supone que N corresponde al número (frecuencia) de siniestros en el portafolio de seguros, suponiendo que tal frecuencia *desconocida* y *aleatoria*. En este caso, la distribución de S estará definida por la distribución conjunta de la frecuencia de los siniestros y del monto (o severidad) los mismos a nivel individual,

$$\mathbb{P}(N, X_1, ..., X_N). \tag{5.9}$$

En este caso, las variables X_i representan el monto del siniestro, condicional en que el siniestro individual haya ocurrido.

Usualmente, se supone que la frecuencia de los siniestros es estocásticamente independiente de los montos de los siniestros individuales, i.e.

$$\mathbb{P}(N, X_1, ..., X_N) = \mathbb{P}(N)\mathbb{P}(X_1, ..., X_N|N). \tag{5.10}$$

Adicionalmente, se supone que los montos de los siniestros individuales son condicionalmente independientes, dado N, i.e.

$$\mathbb{P}(X_1, ..., X_N|N) = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i). \tag{5.11}$$

Suponiendo que N es una variable aleatoria, la distribución agregada de los siniestros en el portafolio, S, se conoce como una distribución compuesta. En el argot de estadística actuarial, la distribución de N, $\mathbb{P}(N)$, se conoce como **distriución primaria**, mientras que la distribución del monto individual del siniestro, $\mathbb{P}(X_i)$, se conoce como **distribución secundaria** de la distribución de S.

El cálculo de la distribución de S en este caso puede realizarse empleando la función generadora de momentos. Supongamos:

- $\mathbb{P}(N)$ es una distribución con soporte en $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (enteros positivos), con función generadora de momentos $M_N(t)$, y
- $\mathbb{P}(X_i \leq x) = F_{X_i}(x)$ es una función de distribución (continua o absolutamente continua), con soporte en $\mathcal{X} = (0, \infty)$, y función generadora de momentos $M_X(t)$,

entonces, la función generadora de momentos del monto agregado de siniestros sería,

$$M_S(t) = M_N\left(\log M_X(t)\right). \tag{5.12}$$

De esta expresión se toma el término de que $\mathbb{P}(S \leq x)$ sea una distribución compuesta. Este cálculo descansa en el supuesto de que los montos individuales de siniestros, X_i's, sean condicionalmente i.i.d. dado N. Note también que el supuesto de que las X_i's sean intermabiables dado N también aplica, para poder hacer uso del enfoque bayesiano de inferencia.

Ejemplo 10. Distribución compuesta Poisson-gamma. *Suponga que N es una variable aleatoria con distribución $Po(N|\lambda)$ y que las X_i's son variables aleatorias con distribución $Ga(x|\alpha, \beta)$. Entonces, la distribución de S se define como la distribución Poisson compuesta con respecto a la distribución gamma. La función generadora de probabilidades de S estaría expresada como*

$$P_S(t) = P_N\left(P_X(t)\right) = \exp\left\{\lambda(P_X(t) - 1)\right\}, \tag{5.13}$$

con $P_X(t)$ la distribución generadora de probabilidades del monto individual de siniestros.

Note que el cálculo de la expresión anał'itica para F_S es complicado. Su cálculo en la práctica descansa en métodos recursivos de cálculo, como el método de Pánjer (1981). Trabajando con recursiones, será más conveniente definir una expresión general en términos de la distribución $(\alpha, \beta, 0)$.

Ejemplo 11. Modelo Exponencial-Geométrico *Supongamos que $N \sim Geo(n|\theta)$ y $X \sim Exp(x|\lambda)$. La distribución de probabilidad para S es del tipo mixto, con*

$$F_S(s) = \begin{cases} \theta & \text{para } S\text{=0} \\ (1-\theta)\exp\{\lambda\theta\} & \text{para } S > 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

La función generadora de momentos de X es

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \tag{5.15}$$

mientras que la función generadora de momentos de N es,

$$M_N(t) = \frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t}. \tag{5.16}$$

Así, aplicando la fórmula compuesta para la función generadora de momentos para S tenemos,

$$\begin{aligned} M_S(t) &= \frac{\theta}{(1-(1-\theta)\lambda\lambda - t)} \\ &= \theta + (1-\theta)\frac{\lambda\theta}{\lambda\theta - t}. \end{aligned}$$

El primer componente de $M_S(t)$ anterior hace referencia al punto de masa de S en 0, con probabilidad θ, mientras que el segundo componente, con probabilidad $(1-\theta)$, hace referencia a la distribución del agregado de siniestros (cuando estos pasan), con distribución $Exp(\lambda\theta)$.

Ejemplo 12. Distribución compuesta $(\alpha, \beta, 0) - F_X$. *Supongamos que N sigue una distribución $(\alpha, \beta, 0)$, siendo las X_i's variables aleatorias con ditribución F_X soportadas en los enteros no negativos, $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (este supuesto es fundamental). Entonces la distribucuón de S puede expresarse como*

$$f_S(s) = \frac{1}{1 - \alpha f_S(0)} \sum_{x=1}^{s} \left(\alpha + \frac{\beta x}{s} \right) f_X(x) f_S(s-x), \tag{5.17}$$

para $s \in \mathcal{S} = \{1, 2, \ldots\}$, con valor inicial de la recursión dado por

$$f_S(0) = P_S(0) = P_N\left(P_X(0)\right), \tag{5.18}$$

donde P_N y P_X son las funciones generadoras de probabilidad de N y X respectivamente.

Note que la fórmula de recursión anterior requiere suponer que el monto individual de siniestros tiene soporte discreto no negativo. Cuando el monto de los siniestros individuales se supone continuo, tal recursión no es válida, pero puede realizarse una sustitución ad-hoc de la suma en X como una integral para definir la convolución de X parcial con S parcial.

5.3.2. Fórmulas de recursión

5.3.3. Aproximaciones analíticas

5.3.4. Aproximaciones vía simulación

5.4. Efectos de la modificación de coberturas

5.5. Nociones de reaseguro *stop-loss*

Parte III

Teoría de Ruina

Capítulo 6

Medidas de Riesgo

6.1. Medidas de riesgo

El riesgo para las compañías de seguros, como en otros ramos, puede clasificarse en tres categorías: i) *riesgo de mercado*, que es la exposición al riesgo por el cambio de los precios del mercado y condiciones de negociación en el mercado, ii) *riesgo de crédito*, derivado de la posibilidad de que los clientes entren en quebranto, y iii) *riesgo de operaciones*, derivado de cualquier riesgo que no es de mercado ni de crédito.

En estas notas nos concentraremos en el riesgo operacional que enfentan las compañías de seguros. El riesgo más importante al que se enfrenta una aseguradora, es el derivado de las pérdidas que se generan de los reclamos del portafolio de pólizas aseguradas. Las compañías de seguros emplean las medidas de riesgo que revisaremos para:

- Determinación del capital.
- Detrminación de la prima de seguro (prima de riesgo o tarificación).
- Administración interna del riesgo.

- Reporte a instituciones regulatorias.

Definamos Y una variable de pérdida para una compañia de seguros. Esta se define como una variable aleatoria, pues no ha sido observada aun. Puede coincidir con la variable de severidad agregada de un portafolio de seguros (colectivo o individual), S, para un periodo dado.

Definición 13. *Una medida de riesgo para la variable aleatoria Y, denotada por $\rho(Y)$, s una función que mapea el soporte de Y, $\mathcal{Y}$ a la recta real, i.e. $\rho : Y \to \Re$.*

Recuerda que Y es una variable aleatoria positiva, cuando ésta mide el monto del portafolio de reclamos, por ejemplo. Sin embargo, en ciertas aplicaciones, se desea estudiar la variación del valor del portafolio entre los periodos $(t-1)$ y t. En este caso, la variable $Y = S_t - S_{t-1}$ puede tomar valores negativos.

Denotemos por μ_Y y σ_Y a la media y a la varianza de la variable aleatoria X.

Definición 14. *La* **medida de riesgo basada en la esperanza** *se define como*

$$\rho(Y) = (1+\theta)\mu_Y, \tag{6.1}$$

donde $\theta \geq 0$ es el factor de la prima de riesgo. Cuando $\theta = 0$, la medida de riesgo se reduce a μ_Y, la cual se conoce como **prima de riesgo pura**.

Para diferenciar entre dos riesgos en términos del segundo momento, se introduce una medida de riesgo en función de μ_Y y σ_Y.

Definición 15. *La* **medida de riesgo basada en varianza** *se define como*

$$\rho(Y) = \mu_Y + \alpha\sigma_Y, \tag{6.2}$$

donde $\alpha \geq 0$ es el factor de riesgo. La medida de riesgo anterior puede definirse alternativmente en términos de la desviación estándar de Y, como

$$\rho(Y) = \mu_Y + \alpha\sigma_Y^{1/2}. \tag{6.3}$$

Cuando $\alpha = 0$ la medida de riesgo se reduce a la **prima de riesgo pura***.*

Es deseable que las medidas de riesgo satisfagan ciertas condiciones de admisibilidad y coherencia. A continuación revisaremos algunas de esas propiedades.

6.2. Coherencia

Reviaremos ahora cuatro axiomas de coherencia que garantizarán que las medidas de riesgo sean consistentes (no subjetivas).

Axioma 16. Invarianza ante traslaciones. *Para cualquier variable de pérdida Y y cualquier constante a,*

$$\rho(Y + a) = \rho(Y) + a.$$

Este axioma indica que el riesgo se incrementa proporcionalmente al aumento en la pérdida, dado por a.

Axioma 17. Subaditividad. *Para cualquier par de variables de pérdida Y_1 y Y_2, se tiene que*

$$\rho(Y_1 + Y_2) \leq \rho(Y_1) + \rho(Y_2).$$

Es decir, el riesgo no se reduce al fragmentarse en partes. De igual forma, consolidar riesgos no reduce su exposición.

Axioma 18. Homogeneidad positiva. *Para cualquier variable de pérdida Y y cualquier escalar positivo a, se tiene que*

$$\rho(aY) = a\rho(Y).$$

Es decir, el riesgo es invariante ante cambios de escala o unidades monetarias.

Axioma 19. Monotonicidad. *Para cualquier par de variables de pérdida Y_1 y Y_2 tales que $Y_1 \leq Y_2$ casi seguramente (i.e. con probabilidad uno), se tiene que*

$$\rho(Y_1) \leq \rho(Y_2)$$

Los axiomas anteriores definen un marco normativo para definir medidas de riesgo consistentes a la teoría de decisión. Se dice que una medida de riesgo que satisfaga los cuatro axiomas enunciados es coherente. Es fácil mostrar que las tres medidas de riesgo que revisamos al principio del capítulo satisfacen ser coehentes. Sin embargo, alguns de ellas resultan ser operativamente imprácticas. A continuación, revisaremos otras medidas de riesgo basadas en capital, las cuales son operativamente más convenientes.

6.3. Medidas de riesgo de capital

La medida de riesgo que más se emplea en la práctica, no solo en las compañías de seguros sino en otras instituciones bancarias y financieras, es el VaR (*Value-at-Risk*). Para esto, supongamos que $Y \sim F_Y$, la cual puede ser discreta, continua o mixta.

Definición 20. *Sea $\delta \in (0,1)$ un nivel de probabilidad dado. El valor en riesgo, VaR (por sus siglas en inglés), de Y al nivel δ, denotado por $VaR_\delta(Y)$ se define como el cuantil δ de F_Y, i.e.*

$$VaR_\delta(Y) = \inf\{y \in \mathcal{Y} : F_Y(y) \geq \delta\} \tag{6.4}$$

$$= F_Y^{-1}(\delta) = y_\delta. \tag{6.5}$$

Usualmente, δ se elige dentro del intervalo $(0{,}95, 0{,}99)$.

Para algunas distribuciones de probabilidad, el VaR se puede obtener analíticamente. Por ejemplo, si Y se distribuye $\mathrm{Exp}(\theta)$,

$$\mathrm{VaR}_\delta(Y) = -\frac{\log(1-\delta)}{\theta}. \tag{6.6}$$

Si Y se distribuye log-normal, con parámetros μ_Y y σ_Y, entonces

$$\text{VaR}_\delta(Y) = -\exp\left\{\mu_Y + \sigma_Y^{1/2}\Phi^{-1}(\delta)\right\}. \tag{6.7}$$

Si Y se distribuye Pareto, con parámetros α y γ, entonces

$$\text{VaR}_\delta(Y) = -\gamma\left((1-\delta)^{-1/\alpha} - 1\right). \tag{6.8}$$

Otra medida de riesgo de interés, más académico, es el VaR condicional (CVaR, por sus sigla en inglés), que mide el riesgo esperado en exceso del VaR.

Definición 21. *El VaR condicional (CVaR) para un nivel δ se define como,*

$$CVaR_\delta(Y) \;=\; \mathbb{E}\left(Y - VaR_\delta(Y) | Y > VaR_\delta(Y)\right). \tag{6.9}$$

El CVaR puede expresarse en términos de la cola esperada de la distribución, CTE (por sus siglas en inglés), que es el valor esperado de Y en exceso de $CVaR_\delta(Y)$. Éste se define como,

$$\begin{aligned} CTE_\delta(Y) &= \mathbb{E}\left(Y | Y > VaR_\delta(Y)\right). \\ &= \frac{1}{1-\delta}\int_{y_\delta}^{\infty} y f_Y(y)\, dy, \end{aligned} \tag{6.10}$$

donde y_δ es $VaR_\delta(Y)$.

A partir de estas relaciones, se sigue la siguiente identidad

$$\text{CVaR}_\delta(Y) = \text{CTE}_\delta(Y) - \text{VaR}_\delta(Y). \tag{6.11}$$

Puede mostrarse que tanto el VaR como el son medidas de riesgo coherentes. Generalizadon la noción del CVaR, podemos también pensar en la medida de dispersión asociada a la cola de la distribución en exceso de $\text{VaR}_\delta(Y)$, en términos de la varianza, como:

$$\begin{aligned} \text{varCVaR}_\delta(Y) &= \text{var}\left(Y | Y > \text{VaR}_\delta(Y)\right) \\ &= \frac{1}{1-\delta}\int_{y_\delta}^{\infty} (y - \text{CVaR}_\delta(Y))^2 f_Y(y) \text{d}y. \end{aligned} \tag{6.12}$$

6.4. Medidas de riesgo basadas en primas

La medida de riesgo basada en primas, que discutimos en la primera sección de estas notas, toma en considerción la pérdida esperada de siniestro aumentada por un factor de la prima de riesgo. El factor de la prima de riesgo, θ, desplaza uniformemente la distribución de Y. Tal modificación puede no ser conveniente, en caso de querer modular de manera distinta a diferentes partes de la distribución de Y (como la cola derecha). A conmtinuación presentaremos una modificación basada en un índice de aversión al riesgo.[1]

Sea Y la variable aleatoria de pérdida. Supongamos que Y es estrictamente positiva. Así, su esperanza puede calcularse como

$$\begin{aligned} \mu_Y &= \int_0^\infty y F_Y(\mathrm{d}y) \\ &= \int_0^\infty S_Y(y)\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{6.13}$$

donde $S_Y(y)$ es la función de supervivencia asociada con $F_Y(y)$.

La modulación para la prima de riesgo se definirá en función de $S_Y(y)$ a través de una transformación potencia. Así, en lugar de desplazar la distribución completa de Y, se modulará tal distribución en términos de la siguiente transformación,

$$\tilde{S}_Y(y) = S_Y(y)^{1/\theta}, \tag{6.14}$$

donde $\theta \geq 1$ es el **factor de aversión al riesgo**.

Así, la prima de riesgo modulada se calculará con base en la función de supervivencia modificada, como

$$\begin{aligned} \rho(Y) &= \int_0^\infty \tilde{S}_Y(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty (S_Y(y))^{1/\theta}\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.15}$$

[1]Este enfoque es aplicado solamente al caso donde Y es una variable aleatoria positiva.

La característica importante de esta modulación es que ponderá con mayor probabilidad que el desplazamiento a los riesgos de pérdida más altos. La prima de riesgo $\rho(Y)$ se incrementará cuando el factor de aversión al riesgo, θ, sea más grande.

Definición 22. *Se dice que la distribución $\tilde{F}_Y$ asociada con $\tilde{S}_Y$ es la* **tranformación de riesgo proporcional** *de F_Y, con parámetro $\theta \geq 1$.*

Ejemplo 23. *Supongamos que $X \sim Exp(x|\lambda)$. Así, su función de supervivencia estaría dada por $S_X(x) = e^{-\lambda x}$. Siguiendo el razonamiento anterior, la función de supervivencia de la distribución modificada por el parámetro θ, sería $\tilde{S}_X(x) = e^{-\frac{\lambda x}{\theta}}$. De esta forma, la prima de riesgo ajustada sería $\mathbb{E}_{\tilde{F}}(X) = \frac{\theta}{\lambda}$, la cual es mayor que la prima de riesgo original (no modificada), dada por $\mathbb{E}_F(X) = \frac{1}{\lambda}$.*

La definición anterior de la distribución modificada viene de la mano con la distribución de riesgos de Y, ya que

$$\begin{aligned} \tilde{h}_Y(y) &= -\frac{1}{\theta}\left(\frac{S_Y(y)^{1/\theta-1}S_Y'(y)}{S_Y(y)^{1/\theta}}\right), \\ &= \frac{1}{\theta}h_Y(y), \end{aligned} \tag{6.16}$$

donde $S_Y'(y) = \frac{\partial}{\partial y}S_Y(y)$, y $h_Y(y)$ es la función de riesgo asociada con F_Y.

Otra forma de modular la distribución a emplear para la prima de riesgo, similar al método anterior, consiste en deliveradamente modificar el peso de diferentes regiones de F_Y empleando transformaciones del siguiente tipo,

$$\tilde{f}_Y(y) = w(y)f_Y(y), \tag{6.17}$$

donde $\tilde{f}_Y$ es la función de densidad asociada con $\tilde{F}_Y$, f_Y es lo mismo para F_Y, y $w(y)$ es una función que re-asigna pesos a diferentes valores de y. El propósito de este método es el de asignar más masa de probabilidad a la región de la cola derecha de la distriución de Y. La transformación que revisaremos en particular, se conoce como la transformación de Esscher.

Definición 24. *La* **función de ponderación** *asociada con la transformación de Esscher se define como,*

$$w(y) = \frac{e^{\theta y}}{M_Y(\theta)}, \tag{6.18}$$

donde $M_Y(\theta)$ es la función generadora de momentos de Y inducida por F_Y, i.e. $M_Y(\theta) = \int e^{\theta y} f_Y(y)dy$.

La distribución de X modificada en θ se conoce como la Transformación de Esscher de F, (recuerda, $X \sim F$). De esta forma, la prima de riesgo moderada puede definirse como la prima de riesgo calculada con $\tilde{F}$, y estaría dada por

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{F}}(X) &= \int x\tilde{F}_X(\mathrm{d}x) \\ &= \frac{\int xe^{\theta x} f_X(x)\mathrm{d}x}{M_X(\theta)} \\ &= \frac{\mathbb{E}_F(Xe^{\theta X})}{\mathbb{E}_F(e^{\theta X})}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Adicionalmente, la forma funcional de la modificación de F puede obtenerse a través de la distribución generadora de momentos. Se puede mostrar que la función generadora de momentos de $\tilde{F}$ es,

$$\tilde{M}_X(t) = \frac{M_X(\theta + t)}{M_X(\theta)}. \tag{6.20}$$

Ejemplo 25. *Calculemos la transformación de Esscher para la distribución Exponencial, con parámetro λ. El factor de riesgo sería dado por $0 < \theta < \lambda$.*

Recordemos que la función generadora de momentos de la distribución Exponencial está dada por $M_X(\theta) = \frac{\lambda}{-\theta}$. De esta forma, la función generadora de momentos de la transformación de Esscher para X sería,

$$\begin{aligned} \tilde{M}_X(t) &= \frac{M_X(\theta + t)}{M_X(\theta)} \\ &= \frac{\lambda - \theta}{\lambda - \theta - t}. \end{aligned}$$

De lo anterior deducimos que la transformción de Esscher de X en θ define a la distribución Exponencial con parámetro $(\lambda - \theta)$. La implicación de este cálculo es que la prima de riesgo de la distribución transformada es mayor que la de la distribución original, i.e.

$$\rho_{\tilde{F}}(X) = \frac{1}{\lambda - \theta} > \frac{1}{\lambda} = \rho_F(X). \tag{6.21}$$

6.5. Medidas de riesgo basadas en distorsiones

Definición 26. *Una función $g(\cdot)$ es de* **distorsión** *si es no decreciente, cóncava, diferenciable, y satisface que $g(1) = 1$ y $g(0) = 0$.*

La función de distorsión es un procedimiento que permite modificar la distribución de X original, F_X, mediante un procedimiento de composición de la función de supervivencia asociada, S_X, y g, siendo ambas no decrecientes. *La distorción se define así como la derivada de la composición $g(S_X(x))$.*

Bajo los supuestos de la definición anterior, la función de densidad asociada con la distorsión de F está dada por,

$$\tilde{f}_X(x) = g'\left(S_X(x)\right) \cdot f_X(x). \tag{6.22}$$

Nota 27. *Note que $g'\left(S_X(x)\right)$ es una función decreciente en x. Se puede además interpretar a este factor como un reponderador que eleva la función de densidad original de X en el segmento de la cola derecha de la distribución.*

Definición 28. *Considere la variable de pérdida $X \sim F_X$, y una función de distorsión, g. La medida de riesgo distorsionada sería dada por*

$$\rho_{\tilde{F}}(X) = \int g\left(S_X(x)\right) dx. \tag{6.23}$$

Se puede interpretar que la prima de riesgo distorsionada es el valor esperado de X calculado con respecto a la distribución distorsionada de F.

Nota 29. *Cabe notar que la prima de riesgo distorsionada incluye como casos particulares a las primas de riesgo que hemos discutido anteriormente.*

- **Prima de riesgo pura.** *La función de distorsión sería la función identidad,* $g(y) = y$.

- **Prima de riesgo ajustada en función de riesgo.** *La función de distorsión sería la función potencia,* $g(y) = y^{1/\theta}$, *con* $\theta > 0$.

- **Medida de riesgo VaR.** *La función de distorsión sería dada por,*

$$g(y) = \begin{cases} 0 & , \textit{para } 0 \leq y < 1 - \delta \\ 1 & , \textit{para } 1 - \delta \leq y < 1. \end{cases} \tag{6.24}$$

- **Medida de riesgo CTE.** *La función de distorsión sería dada por,*

$$g(y) = \begin{cases} \frac{y}{1-\delta} & , \textit{para } 0 \leq y < 1 - \delta \\ 1 & , \textit{para } 1 - \delta \leq y < 1. \end{cases} \tag{6.25}$$

Nota 30. *Se puede mostrar que la medida de riesgo distrosionada, bajo los supuestos mencionados para* g, *es una medida de riesgo coherente.*

Capítulo 7

Teoría de Ruina

7.1. Teoría de ruina en tiempo discreto

7.2. Teoría de ruina en tiempo continuo

Bibliografía

Deelstra, G. and Plantin, G. (2014). *Risk Theory and Reinsurance*. Springer, New York.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., and Denuit, M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers, Berlin.

Klugman, S., Panjer, H., and Willmot, G. (2012). *Loss Models From Data to Decisions*. John Wiley & Sons, London.

Shevchenko, P. V. (2011). *Modelling Operational Risk Using Bayesian Inference*. New York.

Society of Actuaries (1965). An introduction to collective risk modelling and its application to stop-loss reinsurance.

Society of Actuaries (1982). The practical uses of risk theory.

Society of Actuaries (2010). A new approach for managing operational risk.