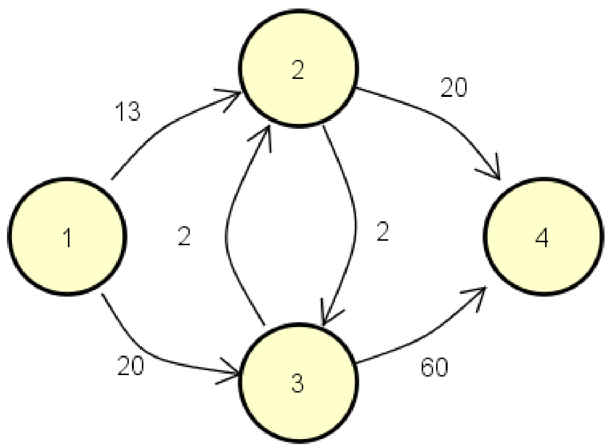
Universidade Federal do Espírito Santo
Centro Universitário Norte do Espírito Santo
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E ELETRÔNICA
Ciência da Computação
Elyabe Alves Santos, 2014203834, elyabe@outlook.com

Lista de Exercícios II - Soluções

Questão 1. Considere a representação do seguinte grafo G.



Note que, pelo algoritmo de Dijkstra, o arco $(2,4)$ será relaxado antes do arco $(3,4)$. No entanto, no caminho obtido após a finalização do algoritmo, estes aparecem em ordem inversas. Configurando-se, portanto, como um contraexemplo para a afirmação do professor Tibério.

Questão 2. *Se $G = (X;Y;E)$ é um grafo bipartido, então a cardinalidade máxima de um matching em G é igual à cardinalidade mínima de uma cobertura de vértices de G.*

Antes, porém, o seguinte resultado é importante para a demonstração:

Teorema de Hall. *Seja $G = (X;Y;E)$ um grafo bipartido. Então G tem um matching que satura S se, e somente se, $|N_H(S)| \geq |S| \;\; \forall\, S \subseteq X$.*

Prova: Seja C o conjunto com a menor quantidade possível de vértices que cobre G e M o *matching* máximo de G.

Para qualquer *matching* M, é fato que

$$\nu(G) \geq \tau(G) \iff |C| \geq |M| \,. \tag{1}$$

De fato, não é possível que um vértice cubra duas ou mais arestas não-adjacentes, de modo que cada aresta deve ser coberta por uma extremidade distinta em C.

Tome X_c e Y_c os conjuntos formados pelos vértices que pertencem à cobertura e à, respectivamente, X e Y, isto é,

$$X_c = X \cap C \ \text{ e } \ Y_c = Y \cap C\ .$$

Por outro lado, representaremos

$$X_{\overline{c}} = X - C \ \text{ e } \ Y_{\overline{c}} = Y - C\ .$$

Seja H o subgrafo induzido por $X_c \cup Y_{\overline{c}}$. É fácil ver que H é bipartido. Seja $S \subseteq X_c$ e $N_H(S)$ o conjunto de vértices adjacentes a S. Desde que toda aresta que possui uma extremidade em S também tem uma extremida em $N_H(S)$, então $(C - S) \cup N_H(S)$ é uma cobertura de G. Uma vez que C é uma cobertura de cardinalidade mínima, então vale

$$\begin{array}{rcll} |(C-S) \cup N_H(S)| & \geq & |C| & \Longleftrightarrow \\ |C| + |N_H(S)| - |S| & \geq & |C| & \Longleftrightarrow \\ |N_H(S)| & \geq & |S| & \end{array} \tag{2}$$

Segue daí, pelo *Teorema de Hall*, existe um *matching* M_1 em H que satura X_c. De maneira análoga concluímos que existe um *matching* M_2 em um subgrafo de G, H', induzido por $Y_c \cup X_{\overline{c}}$ saturando Y_c.

É claro que $M_1 \cup M_2$ é um *matching* de G. Uma vez que M é *matching* máximo de G, então obtém-se

$$\begin{array}{rcll} |M| & \geq & |M_1 \cup M_2| & \Longleftrightarrow \\ |M| & \geq & |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2| & \end{array} \tag{3}$$

Note que M_1 e M_2 saturam, respectivamente, X_c e Y_c. Por outro lado, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, donde segue da inequação **(3)**,

$$\begin{array}{rcll} |M| & \geq & |X_c| + |Y_c| & \Longleftrightarrow \\ |M| & \geq & |X_c \cup Y_c| & \Longleftrightarrow \\ |M| & \geq & |C| & \end{array} \tag{4}$$

Pelas desigualdades **(1)** e **(4)**, temos $|M| = |C|$, como queríamos demonstrar.

Questão 3. *Se $\chi(G)$ é o número cromático de um grafo $G = (V, E)$ cuja $|E| = m$, então*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}\ .$$

Prova: Seja $x = \chi(G)$. Daí, é fato que, qualquer que seja G, então

$$
\begin{array}{lcll}
m & \geq & C_2^x & \Longrightarrow \\
'' & \geq & \frac{x!}{2!\cdot(x-2)!} & \Longrightarrow \\
'' & \geq & \frac{x!}{2!\cdot(x-2)!} & \Longrightarrow \\
'' & \geq & \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)!}{2\cdot(x-2)!} & \Longrightarrow \\
m & \geq & \frac{x\cdot(x-1)}{2} &
\end{array}
$$

Segue daí, temos a inequação:

$$
\begin{array}{lcll}
2m - x\cdot(x-1) & \geq & 0 & \Longleftrightarrow \\
-x^2 + x + 2m & \geq & 0 & \Longleftrightarrow \\
x^2 - x - 2m & \leq & 0 &
\end{array}
$$

Resolvendo esta última inequação para x, obtém-se

$$
x_1 = \frac{1+\sqrt{1+8m}}{2} \ \ ou \ \ x_2 = \frac{1-\sqrt{1+8m}}{2} \ .
$$

Note que, para $m \geq 0$, então $x_2 \leq 0$, e portanto, x_2 não pertence ao espaço de soluções. Logo, $x_1 = x = \chi(G)$, e portanto, vale

$$
\begin{array}{ll}
\chi(G) \leq \frac{1+\sqrt{1+8m}}{2} & \Longleftrightarrow \\
\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+8m}}{2} & \Longleftrightarrow \\
\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1+8m}{4}} & \Longleftrightarrow \\
\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m} \ . &
\end{array}
$$

Questão 4. Falso. Considere como parte do contraexemplo os grafos $G = (V_G, E_G)$ e $H = (V_H, E_H)$ e uma função $f : V_G \to V_H$ bijetora definidos como seguem.

$$
V_G = \{a, b, c, d, e, f\} \text{ e } E_G = \{(a, b), (a, d), (b, c), (b, e), (d, a), (d, f)\}
$$

$$
V_H = \{1, 2, 3, 4, 5, f\} \text{ e } E_H = \{(1, 5), (1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 6)\}
$$

$$
f\colon \quad \begin{array}{ll}
a \mapsto 1 & d \mapsto 6 \\
b \mapsto 5 & e \mapsto 4 \\
c \mapsto 2 & f \mapsto 3
\end{array}
$$

Note que $\delta(v) = \delta(f(v))$, $\forall v \in V_G$. Porém, existe aresta em E_G tal que sua transformação pela função f não preserva a propriedade de adjacência.

Questão 5. Errado! O fato de uma bijeção não satisfazer as condições requeridas não exclui a possibilidade de existência de uma outra bijeção que garanta o isomorfismo. Diante disso, seria necessário testar todas as bijeções possíveis e mostrar que cada uma delas não garante o mapeamento.

Questão 6. São dadas máquinas $1, \ldots, n$ e intervalos de tempo $I_1; \ldots, I_n$. Para cada i, um operador deve cuidar da máquina i durante o intervalo I_i. Se $I_i \cap I_j \neq \emptyset$, um mesmo operador não pode cuidar de i e j. Qual o número mínimo de operadores suficiente para operar as máquinas? Apresente um exemplo com $n \geq 10$. Para o exemplo, mostre o grafo que modela o problema

Solução: O problema consiste em encontrar o máximo de intervalos não conflitantes entre si e atribuí-los a um operador. Reduzindo, dessa forma, o quadro de recurso humano necessário para a operação das máquinas.

Para este exemplo, considere $n = 12$, isto é, existem 12 máquinas e 12 intervalos de tempos aos quais a cada uma das máquinas deve ser atribuído um operador. Cada I_i, $1 \leq i \leq 12$ possui um rótulo alfabético $R(i)$, um tempo de início t_i e um tempo de término t_f, em certa unidade de tempo, sem perda de generalidade.

Table 1: Intervalos gerados randômicamente e seus respectivos rótulos.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
R(i)	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
t_i	1.23	2.11	2.81	3.83	5.3	5.4	5.67	7.77	7.93	9.25	9.29	9.56
t_f	1.35	3.68	3.05	8.86	8.62	7.36	7.82	9.15	9.26	9.32	9.8	9.96

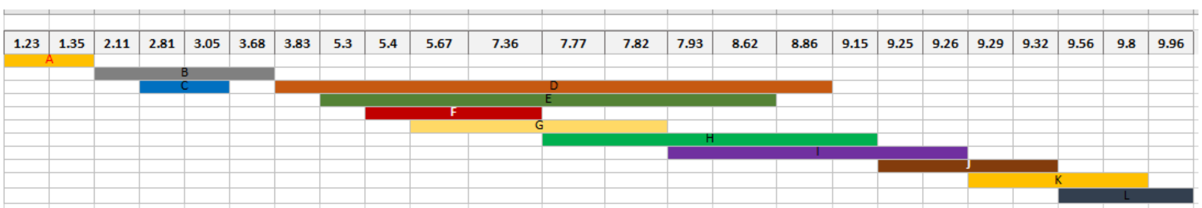


Figure 1: Diagrama de intervalos. Note que, trivialmente, a solução (claramente não a melhor) é atribuir para cada intervalo um operador distinto a uma máquina.

O grafo que modela o problema será construído da seguinte forma e é mostrado na figura 2:

- Cada intervalo será um nó distinto;
- Se I_i e I_j não se interceptam, então haverá uma aresta conectando-os, indicando a possibilidade de atribuição ao mesmo operador.

Desse modo, cada operador pode ser representado por uma cor numerada de 1 a k. Assim, nosso problema é reduzido a um problema de coloração de vértices, pois, havendo vértices adjacentes, estes não poderão receber a mesma cor.

Colorindo-se o grafo de acordo com as regras, obtemos a possível configuração.

Assim, para este exemplo, o número mínimo possível de operadores é dado pelo número de cores $k = 4$.

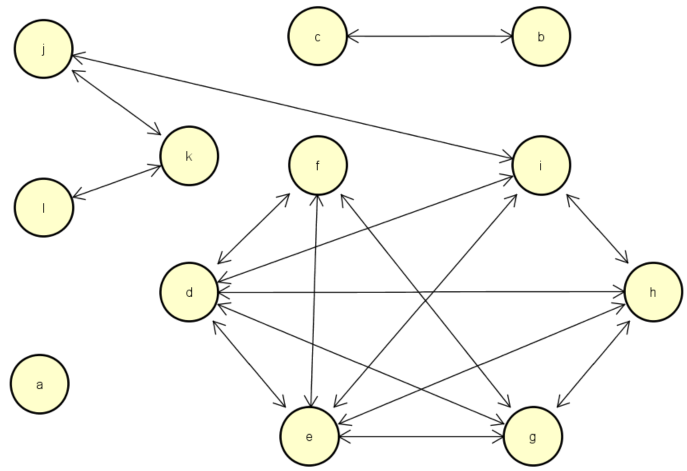


Figure 2: Grafo da modelagem do problema.

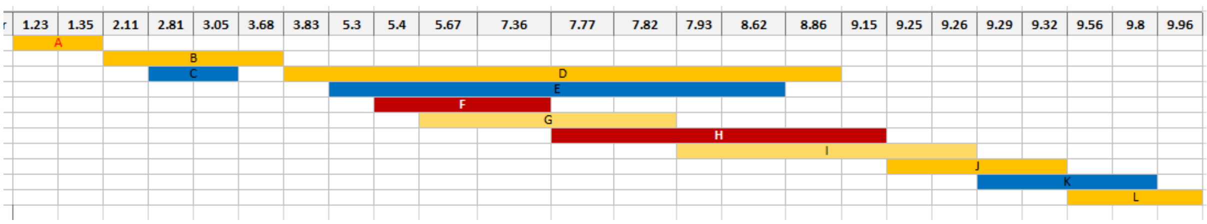


Figure 3: Alocação possível.

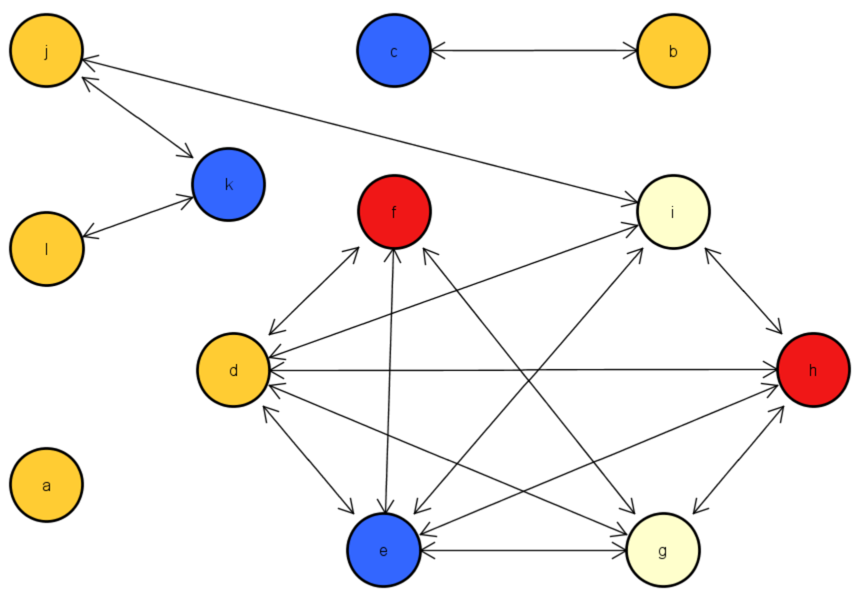


Figure 4: Resultado da coloração no grafo do modelo.

Questão 7. *Toda floresta tem no máximo um matching perfeito.*

Prova: Note que dada uma floresta F com $|C|$ componentes conexas, haverá um *matching* perfeito apenas se para cada $c_i \in C$ houver, também, um *matching* simultâneamente.

Seja c_i a i-ésima componente conexa de F. Então, é claro que c_i é uma árvore com $n = |V_i|$ vértices e $m = n - 1$ arestas. Então, apenas um dos dois casos a seguir se verifica: n é par; ou n é ímpar.

a. Se n é ímpar, então, por definição, não haverá um *matching* máximo que cubra todos os vértices, isso é, existirá pelo menos um vértice $v \in V_i$ tal que v é insaturado. Logo, não haverá *matching* perfeito.

b. Se n é par, então m é ímpar. Daí, existe a possibilidade de disposição de arestas tais que o *matching* seja perfeito.

   Suponha que existam *matchings* perfeitos M_1 e M_2 de c_i, com $M_1 \neq M_2$. Seja G um grafo com $E_G = M_1 \cup M_2$. Uma vez que M_1 e M_2 cobrem todos os vértices, então cada aresta de G é uma única aresta tal que $e \in M_1 \cap M_2$. De fato, caso contrário, haveria um ciclo em G. Absurdo! Pois $G = c_i$ é uma árvore. Portante, $M_1 = M_2$, isto é, o matching, se existir, será único.

Segue daí, que uma floresta terá no máximo 1 *matching* perfeito.