Universidade Federal do Espírito Santo
Centro Universitário Norte do Espírito Santo
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E ELETRÔNICA
Ciência da Computação
Elyabe Alves Santos, 2014203834, elyabe@outlook.com

Lista de Exercícios III - Soluções

Questão 1. Não necessariamente. Para que $K_{m,n}$ seja hamiltoniano, é obrigatório que $m = n$, pois, qualquer ciclo em um grafo bipartido é par e alterna entre vértices de V_1 e V_2. Se assim não fosse, o ciclo hamiltoniano não se completaria, pois faltariam vértices para cobrir a restrição de um ciclo hamiltoniano.

Questão 2. Seja o grafo $K_{4,2}$ representado na Figura 1.

Note que para qualquer vértice $v \in V_1 \cup V_2$, vale $d(v)$ é par. Decorre daí, que

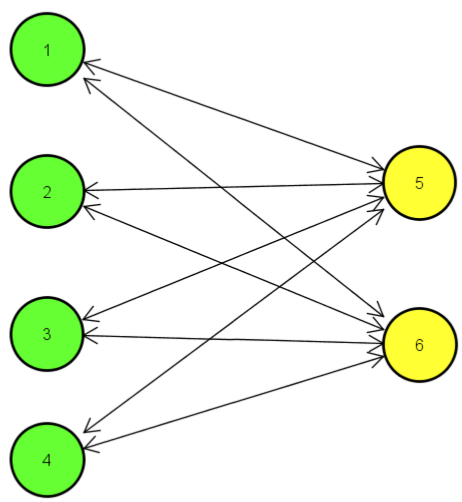

Figura 1: Representação do $K_{4,2}$

existe um circuito euleriano e portanto, o grafo é de Euler. No entanto, não possui um ciclo hamiltoniano. De fato, fixando qualquer vértice como inicio e fim do ciclo, desde que o grafo em questão é bipartido, o caminho deve ser composto por arestas cujas extremidades se alternam entre V_1 e V_2. Porém, não existem vértices suficientes para suprir a necessidade de não repetição. Segue daí, que $K_{4,2}$ não é hamiltoniano.

Questão 3. Um grafo com $n \geq 3$ vértices ter grau mínimo $\delta(G) \geq 2$ é um condição necessária, mas não suficiente. Observe o grafo da Figura 2. Note que, tomar

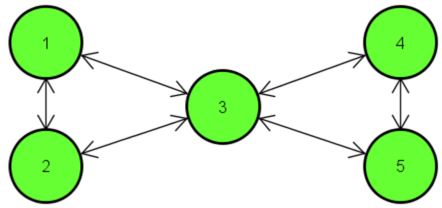

Figura 2: Contraexemplo.

qualquer um dos vértices como ponto de partida/chegada implica na repetição não desejada de pelo menos um vértice, o vértice 3. O que implica na não existência de um ciclo hamiltoniano.

Questão 4. *Um grafo conexo G é um grafo euleriano se e somente se seu conjunto de arestas puder ser decomposto em ciclos.*
Prova: ($\Longrightarrow$) Seja G um grafo de euler. Se para todo vértice de G verificar-se $d(v) \geq 2$, então G possui um ciclo C, e $G - E(C)$ é provavelmente desconectado com k componentes conexas $C_1, C_2, \ldots, C_k$ todas regulares com grau par. Segue daí, C_i é um grafo Euleriano, e podemos repetir o procedimento acima para cada uma delas, uma vez que estas são conjuntos disjuntos de ciclos,por hipótes Assim, concluímos que $E(G)$ pode ser decomposto em ciclos.

($\Longleftarrow$) Suponha agora, que G é um grafo conexo cujo conjunto de arestas pode ser decomposto em ciclos. Considere que existam z ciclos. Então, para cada $v \in V$ temos $d(v) = 2k$, pois, para cada aresta e pertencente a um ciclo deve-se ter uma entrada e uma saída, donde segue que G é euleriano.

Questão 5. O algoritmo de força bruta retorna como solução o cilo $c_1 : abedca$ cujo custo mínimo é $ct_{min} = 23$. Uma vez que o grafo é não direcionado, tanto o ponto de partida/chegada quanto o sentido, podem ser escolhidos sem alterar-se o custo. Daí, podemos derivar a solução proposta $c_2 : ebacde$ de c_1 adotando o vértice a como partida/chegada e deslocando-se no sentido direita-esquerda. De fato, o custo é o mesmo e, portanto, o ciclo c_2 é uma solução para este problema.

Questão 6. O algoritmo retorna o como solução o ciclo $c : abceda$ com custo mínimo $ct_{min} = 20$.

Questão 7. Analisando o grafo, temos que os vértices com grau ímpar são a e g. Daí, o menor caminho entre esses dois vértices é aquele cujo custo é 7, sendo $c : abdg$ um deles. Duplicando as arestas deste caminho temos que o custo total da duplicação é $c_{2e} = 7$. Agora, como G tem vértices apenas de grau par, então o ciclo de Euler é garantido e o custo total deste ciclo é dado pela soma dos pesos de todas as arestas s juntamente com a duplicação. Daí, $c_t = 37 + 7 = 44$

Questão 8. Primeiro, enunciemos um resultado bastante interessante:

[1] *Para qualquer grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$ e $|E| = m$, tem-se que em desenhado no plano cruzam-se no mínimo m - 3n + 6 arestas.*

Note que, inicialmente, para K_5, temos $n = 5$ e $m = C_2^5 = 10$. E portanto, podemos desenhar o grafo com $10-3\cdot5+6 = 1$ aresta cruzando com outra. Após a remoção de qualquer uma das arestas, pelo mesmo resultado, temos $9-3\cdot5+3 = 0$, isto é, podemos desenhar este novo grafo sem que nenhuma aresta se cruze e isto assegura a planaridade de $K*$.

Questão 9. Seja G um grafo plano 4-regular com 10 faces e n vértices e m arestas. Desde que G é um grafo simples, temos

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m$$

$$\begin{array}{ccll} \sum_{v\in V} 4 & = & 2m & \Longrightarrow \\ 4n & = & 2m & \Longleftrightarrow \\ 2n & = & m & \end{array}$$

Por outro lado, pela fórmula de Euler, temos

$$\begin{array}{ccll} n+f-m & = & 2 & \Longrightarrow \\ n+f-2n & = & 2 & \Longrightarrow \\ -n+10 & = & 2 & \Longrightarrow \\ n & = & 8 & \end{array}$$

Daí, o grafo pode ser

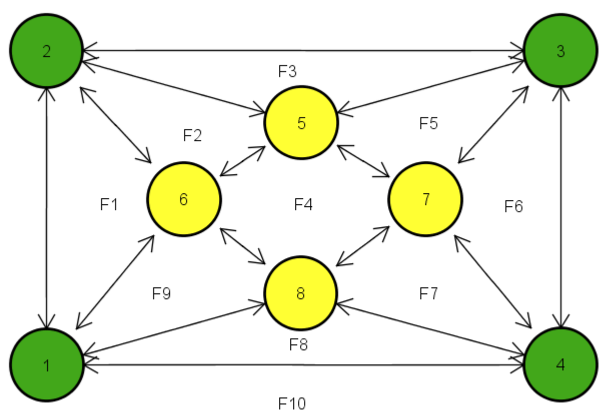

Figura 3: Representação de G.

Questão 10. Considere o grafo representado na figura 1 (a). A aplicação do algoritmo de Ford-Fullkerson é mostrado a seguir, obtendo um fluxo máximo igual a 32.

Referências

[1] F. M. Janós Pach. Graph theory. Technical report, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2013.

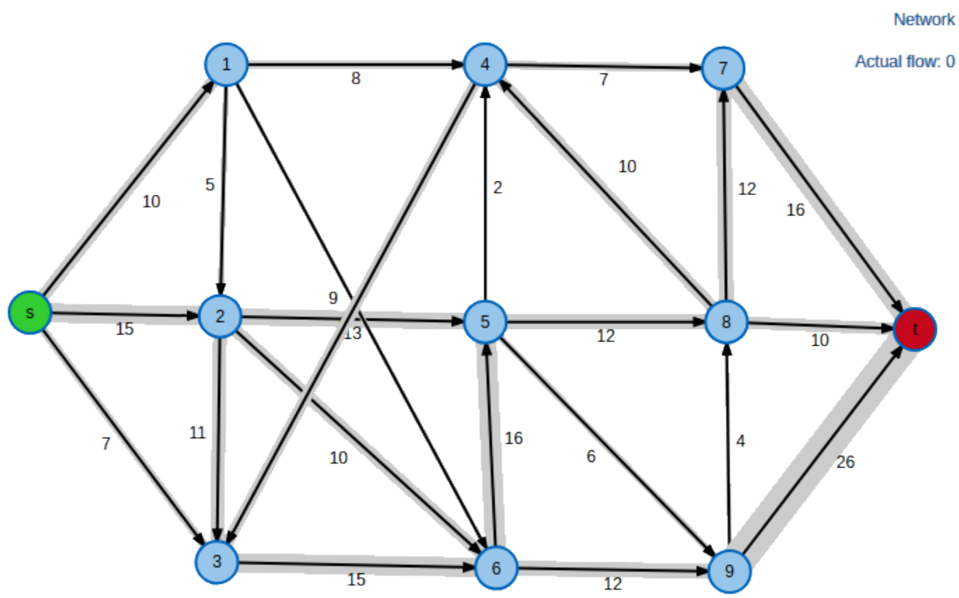

Figura 4: Grafo inicial.

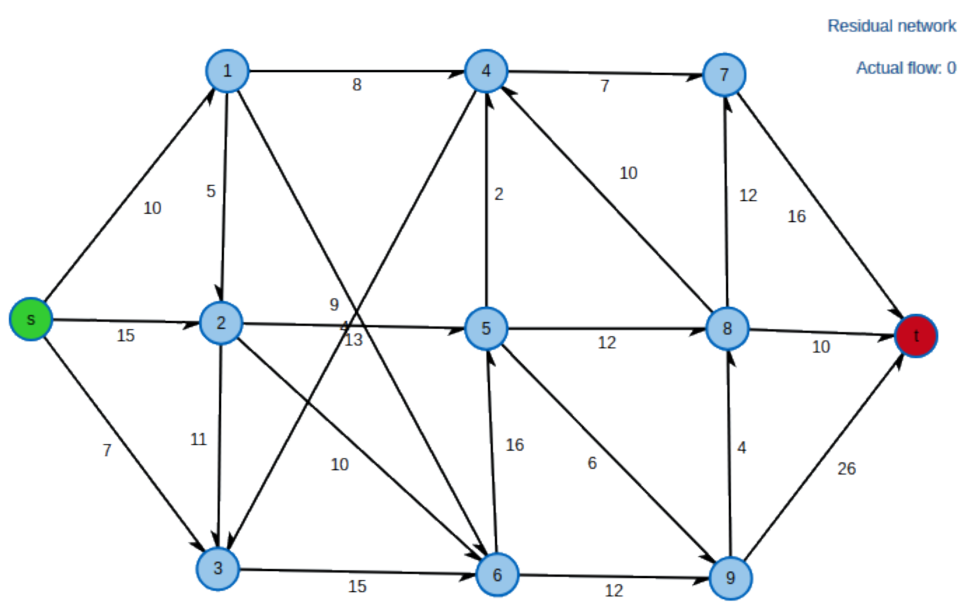

Figura 5: Grafo residual.

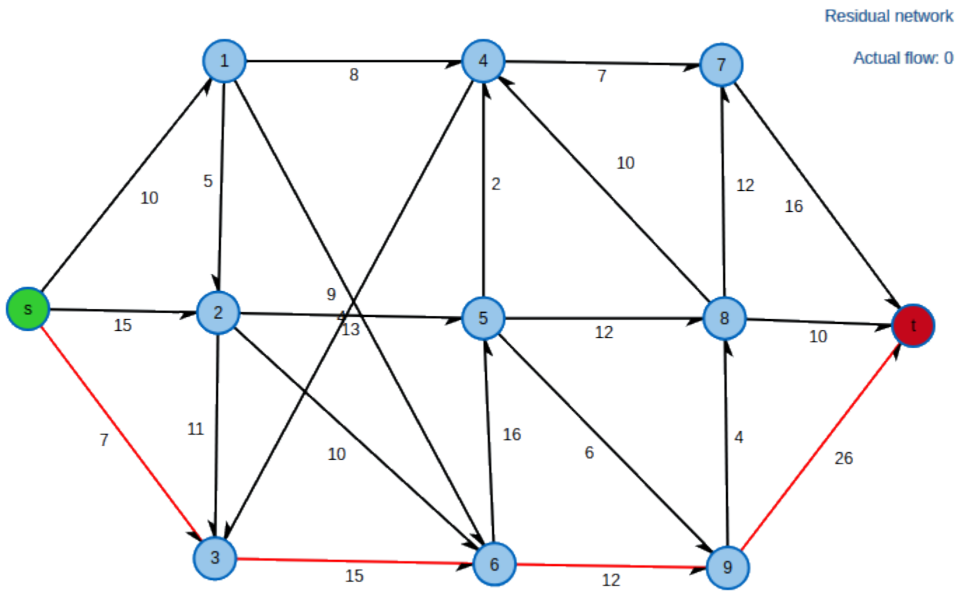

Figura 6: Caminho aumentante destacado em vermelho.

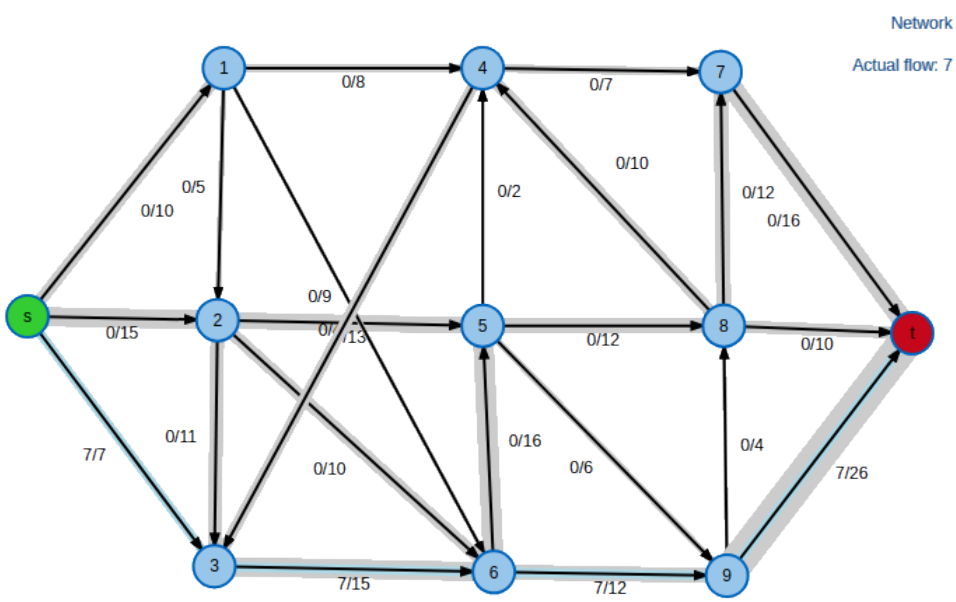

Figura 7: Envio de fluxo pela rede.

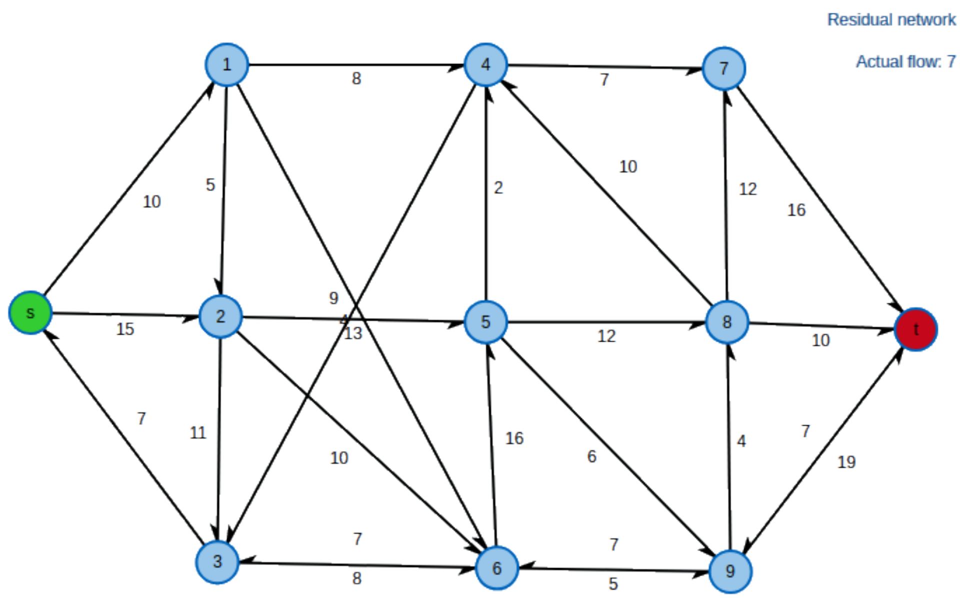

Figura 8: Grafo residual.

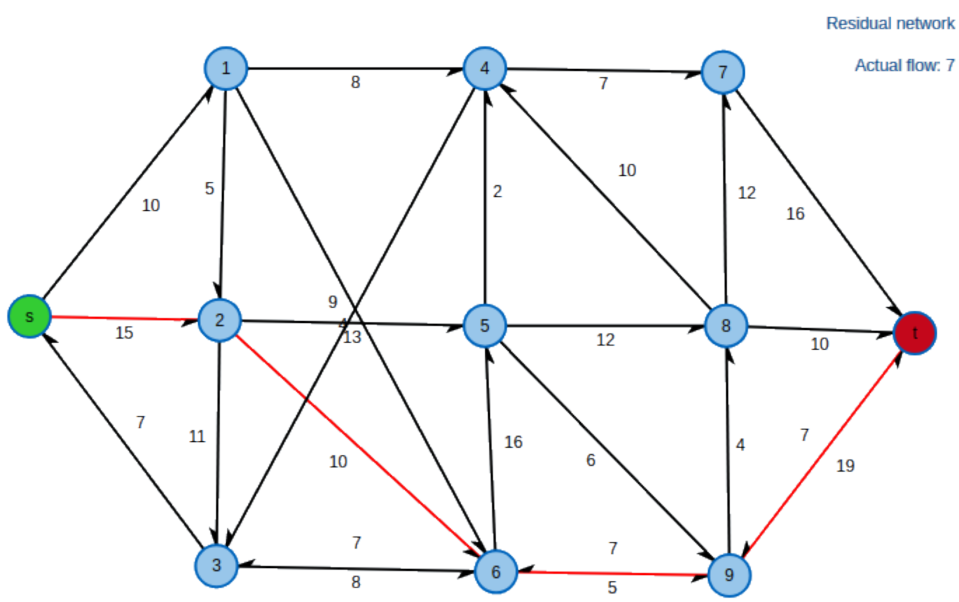

Figura 9: Caminho aumentante destacado em vermelho.

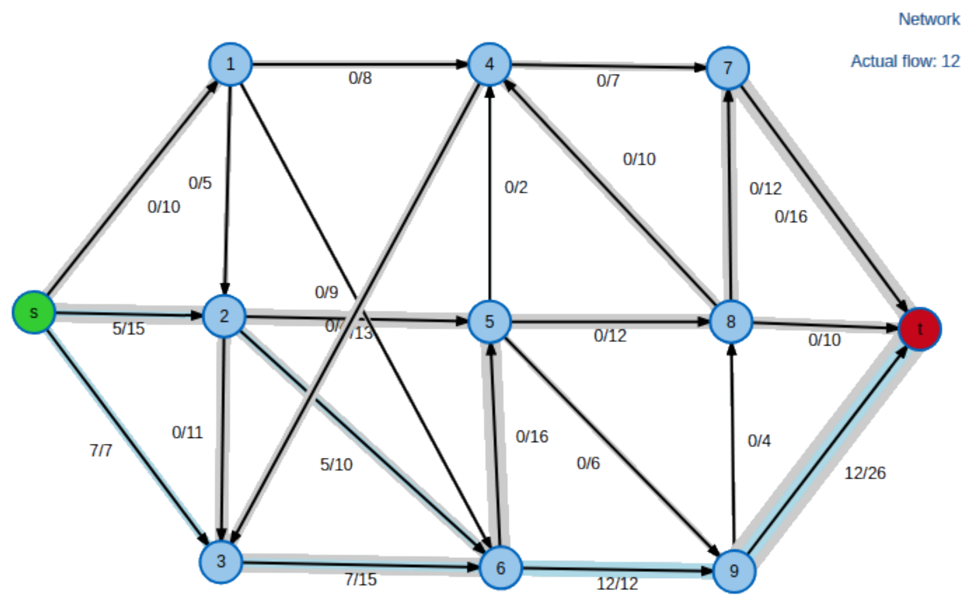

Figura 10: Envio de fluxo pela rede.

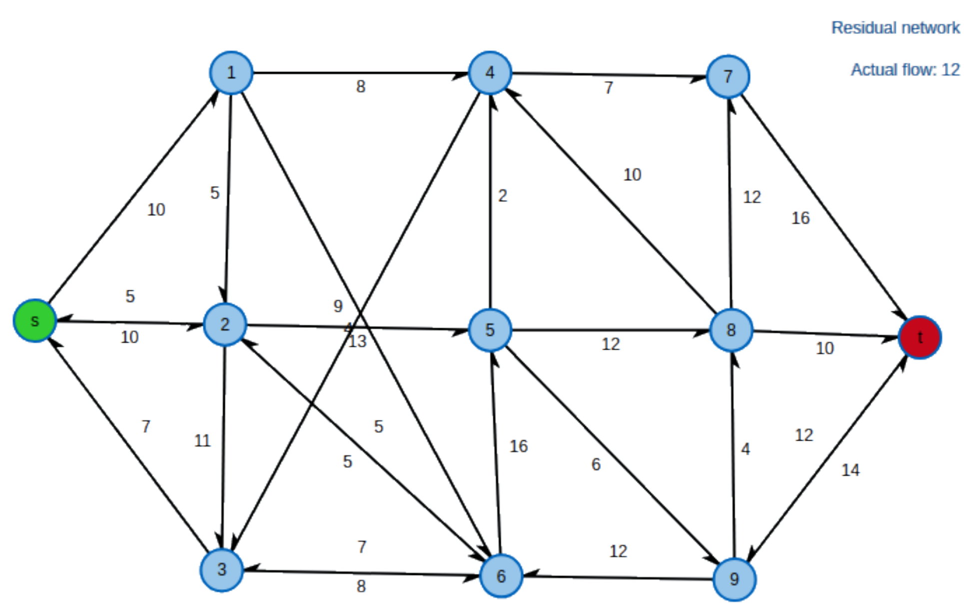

Figura 11: Grafo residual.

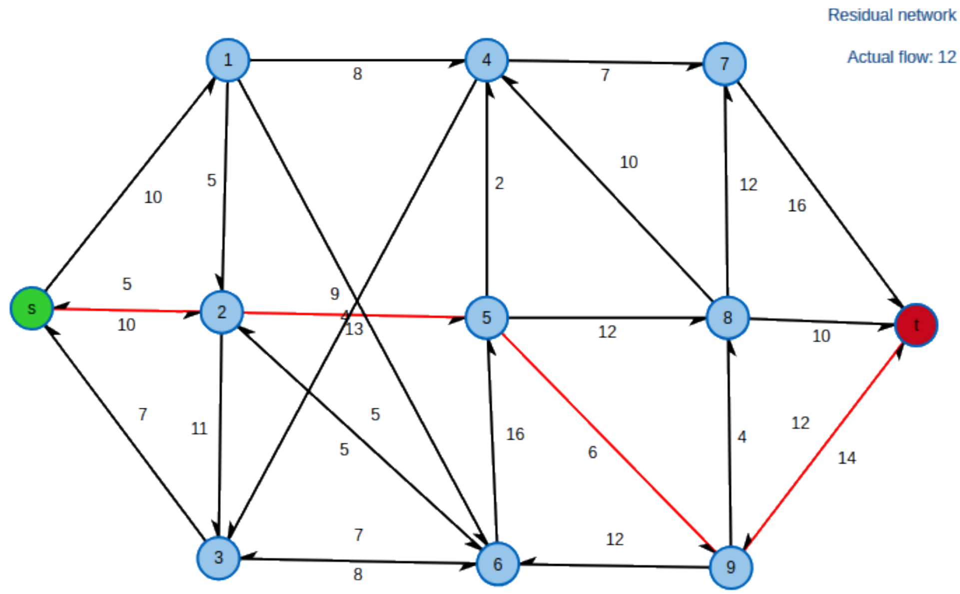

Figura 12: Caminho aumentante destacado em vermelho.

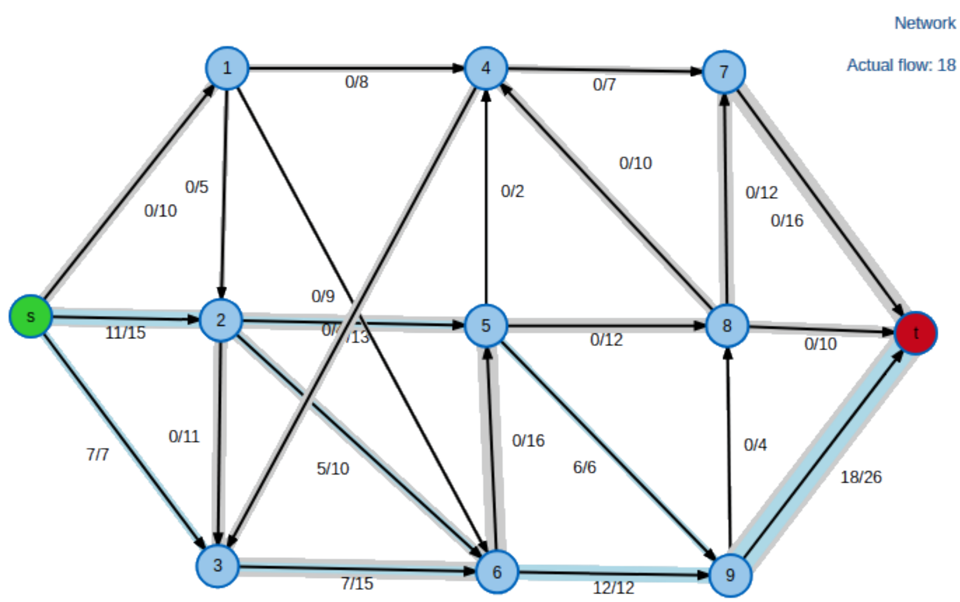

Figura 13: Envio de fluxo pela rede.

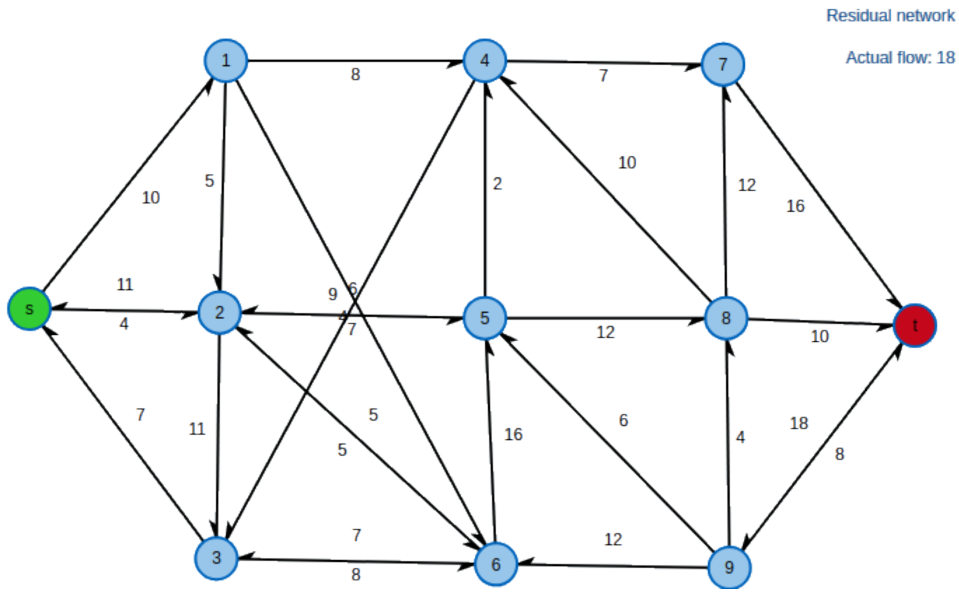

Figura 14: Grafo residual.

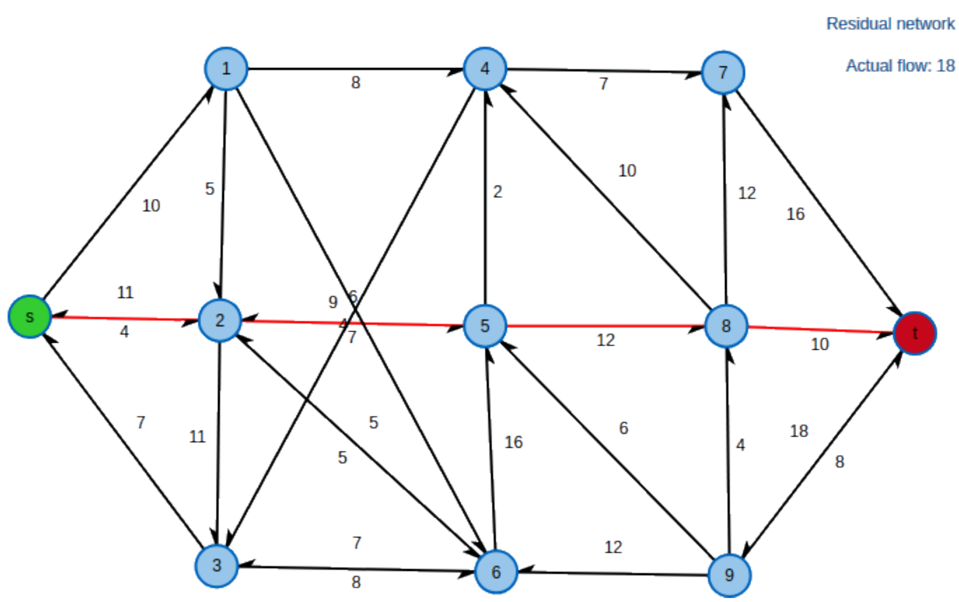

Figura 15: Caminho aumentante destacado em vermelho.

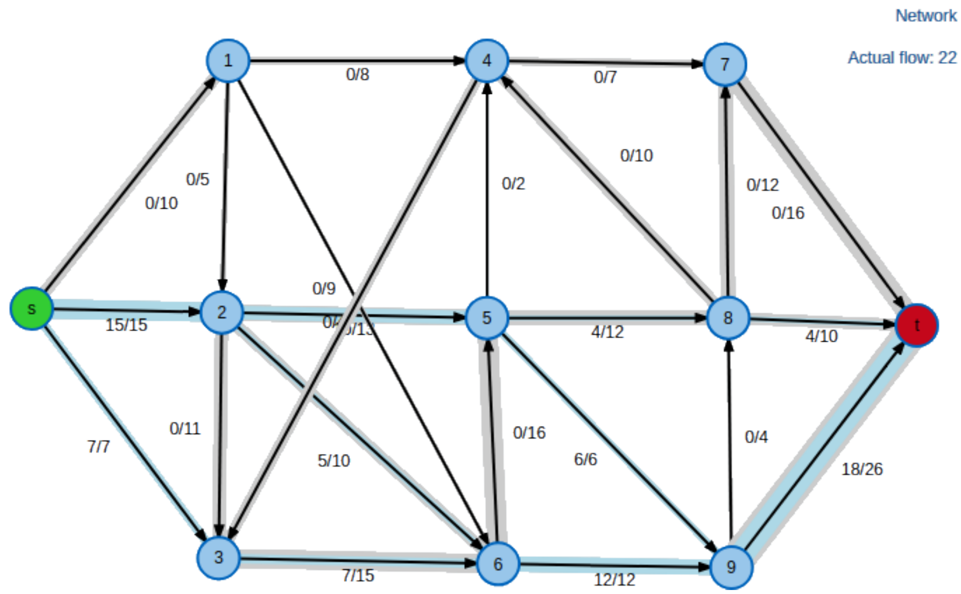

Figura 16: Envio de fluxo pela rede.

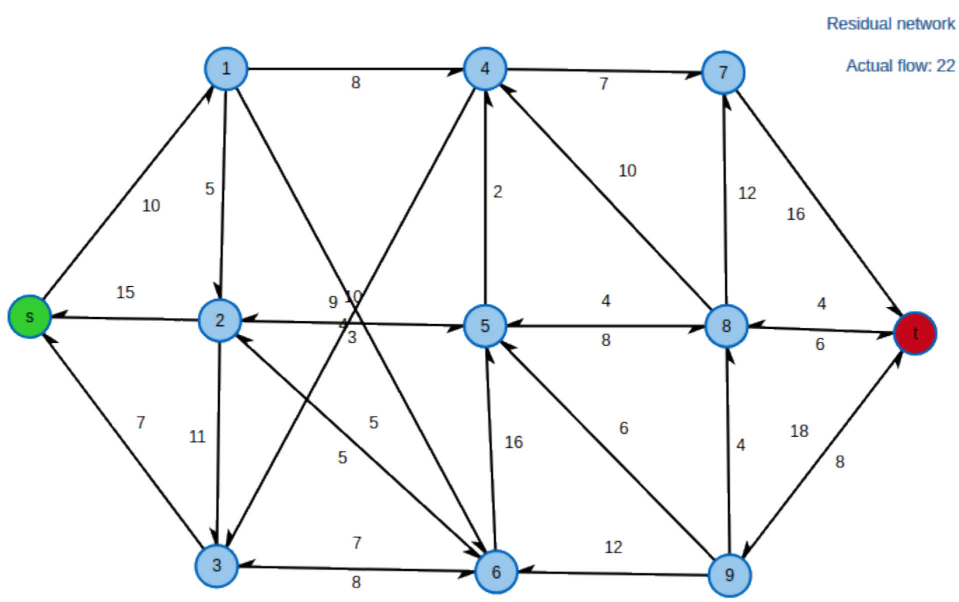

Figura 17: Grafo residual.

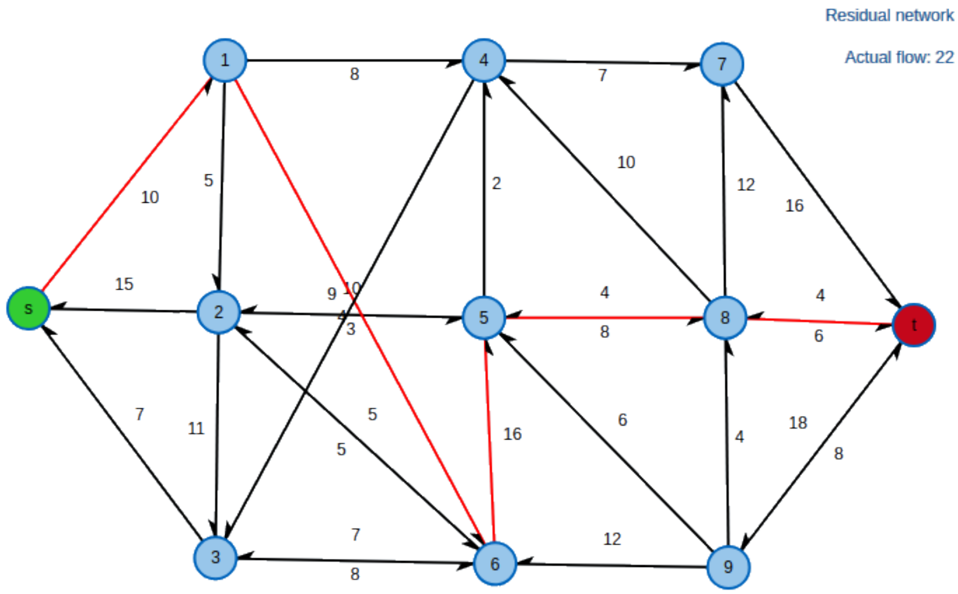

Figura 18: Caminho aumentante destacado em vermelho.

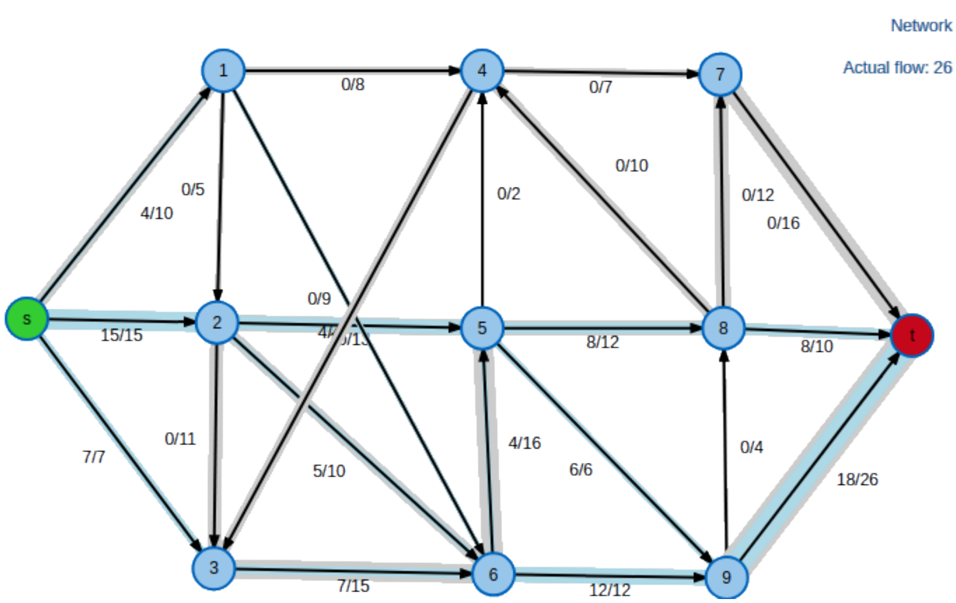

Figura 19: Envio de fluxo pela rede.

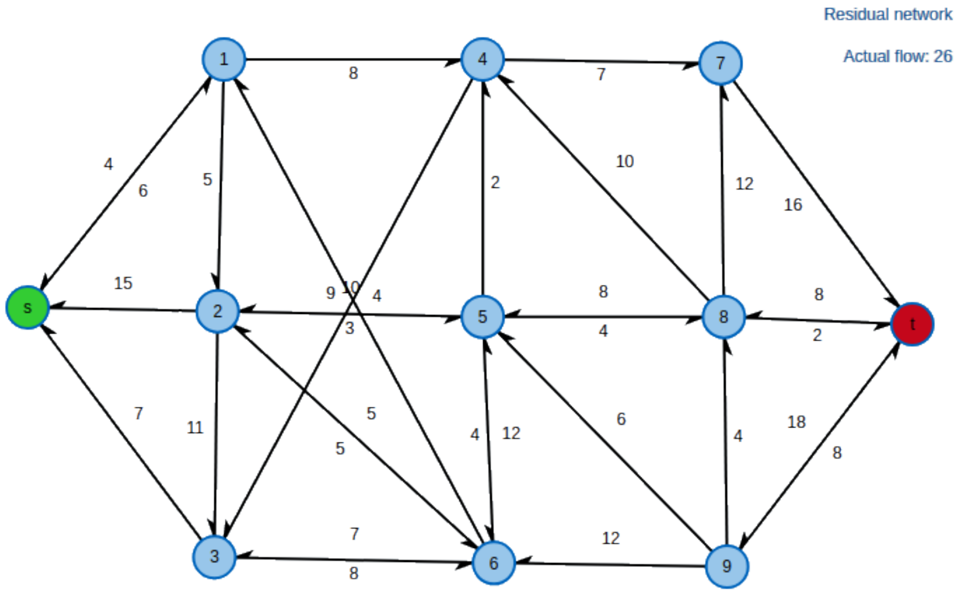

Figura 20: Grafo residual.

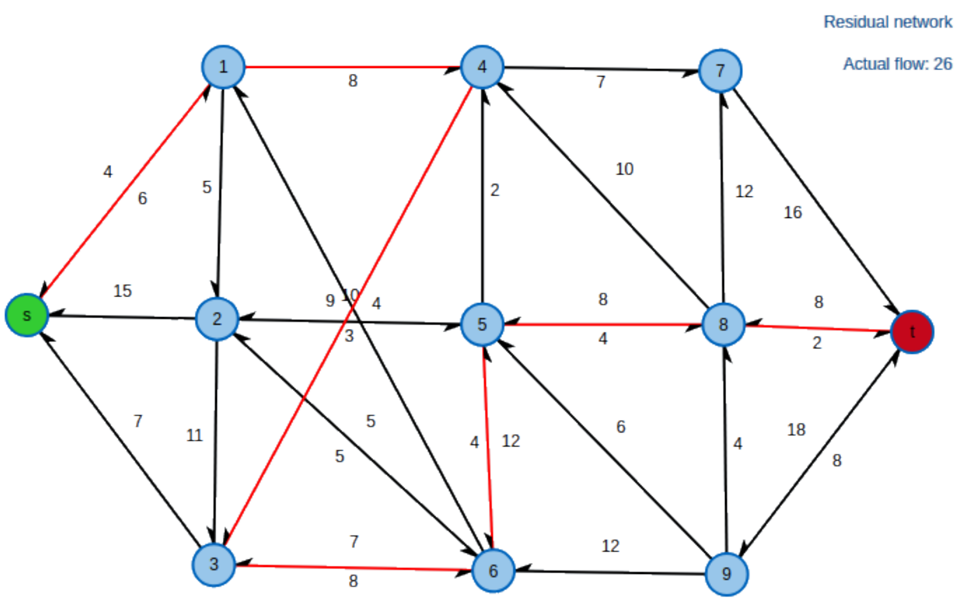

Figura 21: Caminho aumentante destacado em vermelho.

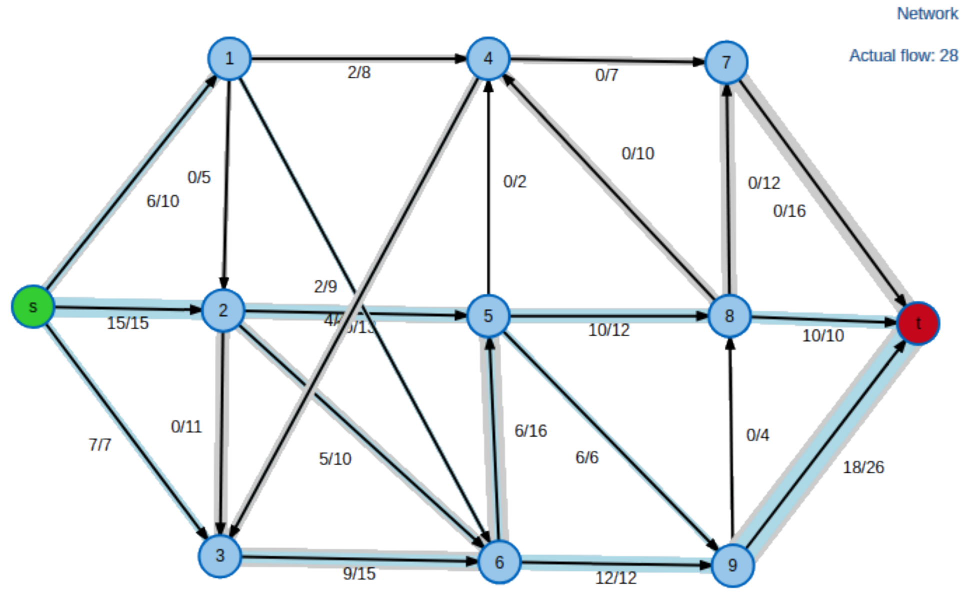

Figura 22: Envio de fluxo pela rede.

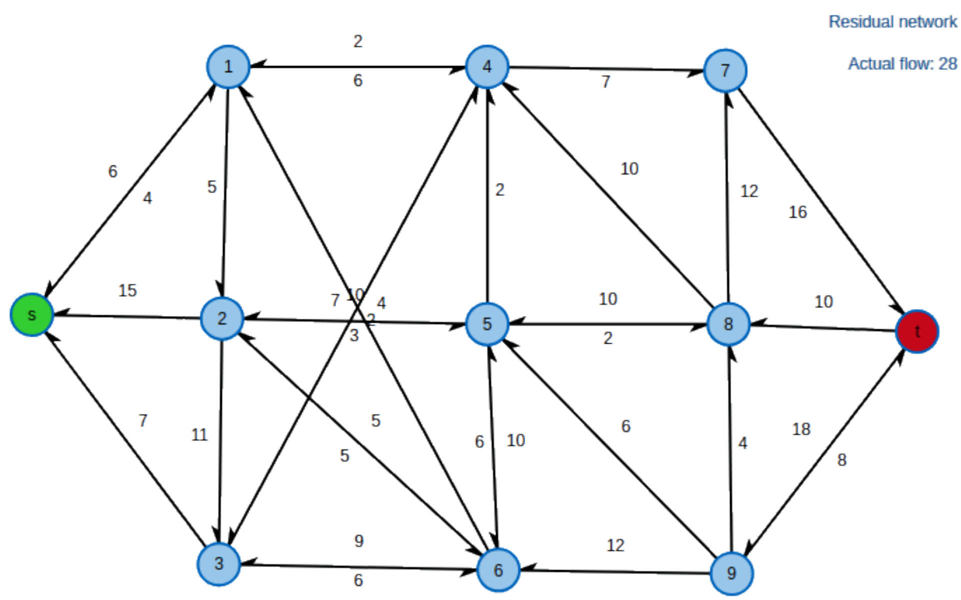

Figura 23: Grafo residual.

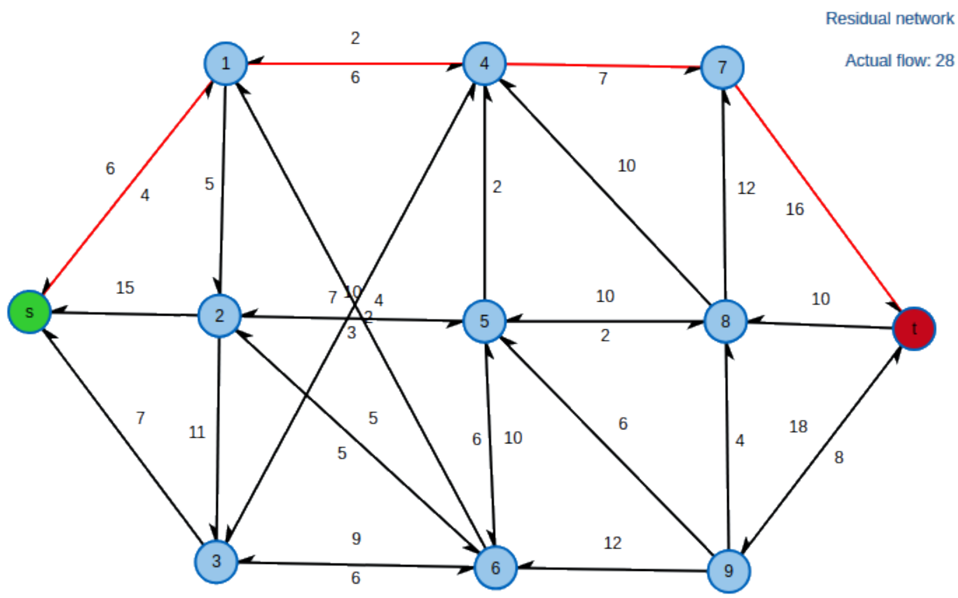

Figura 24: Caminho aumentante destacado em vermelho.

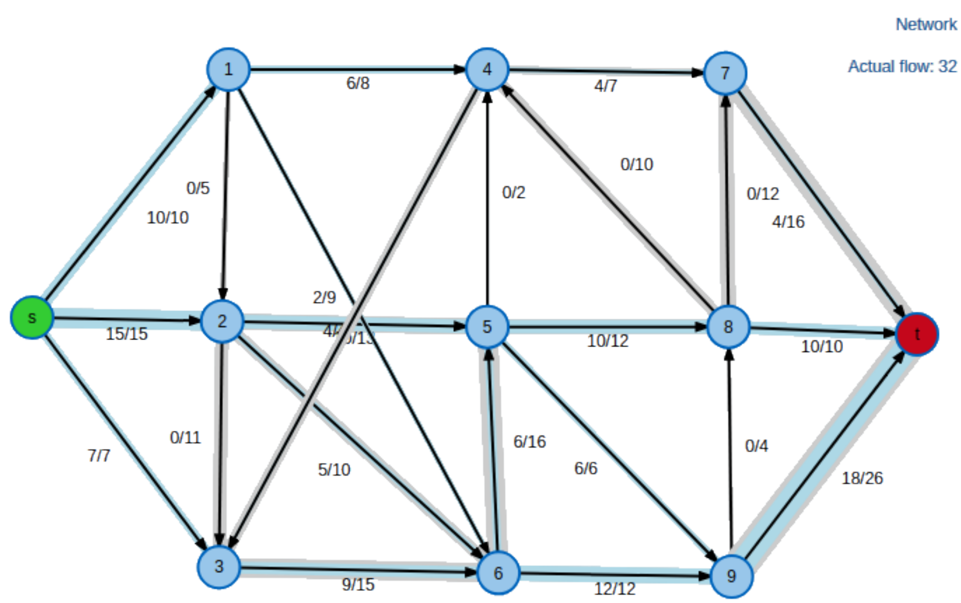

Figura 25: Envio de fluxo pela rede.

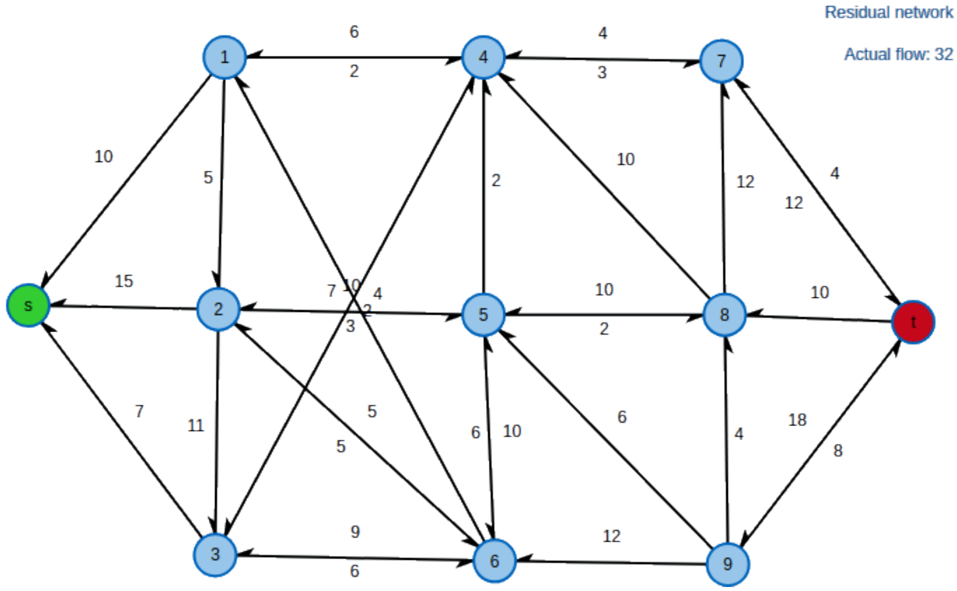

Figura 26: Grafo residual.

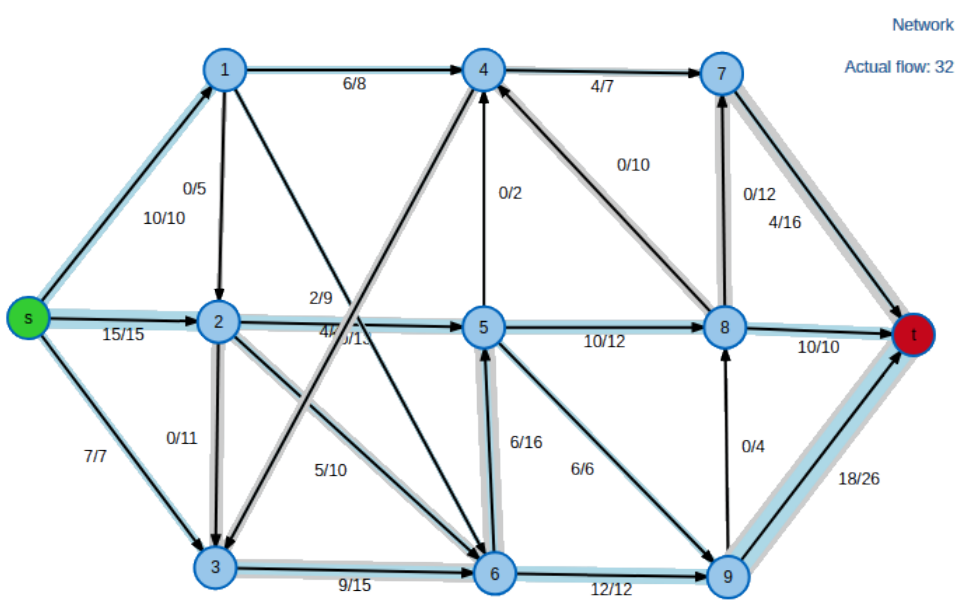

Figura 27: Caminho aumentante destacado em vermelho.

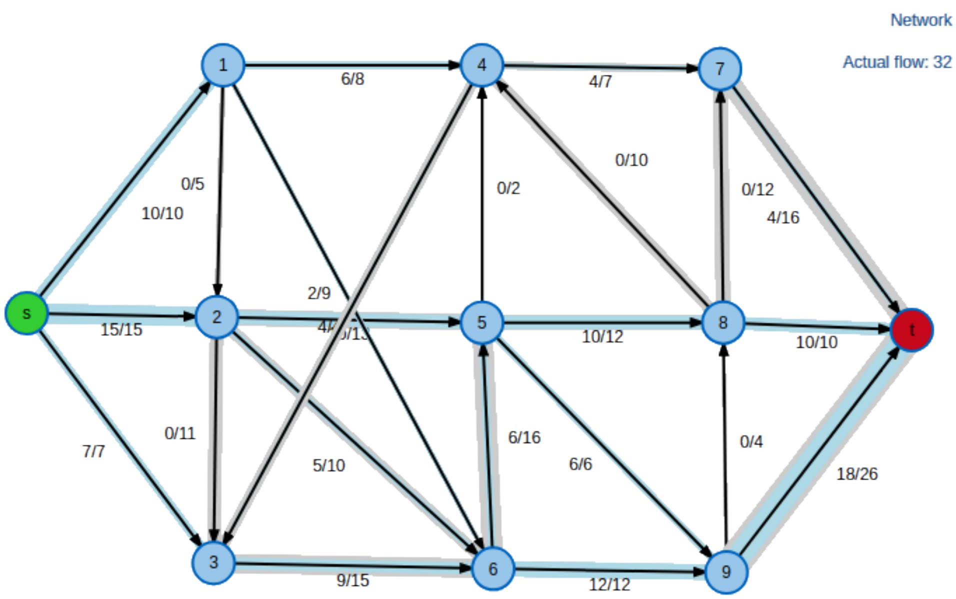

Figura 28: Envio de fluxo pela rede.