Universidade Federal do Espírito Santo
Centro Universitário Norte do Espírito Santo
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E ELETRÔNICA
Ciência da Computação
Elyabe Alves Santos, 2014203834

Lista de Exercícios I - Soluções

Questão 1. a. Não. Considere como contraexemplo, os grafos T e G apresentados a seguir. Sendo T uma árvore geradora de G.

$$G = (V, E);\ V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$$
$$T = (V, E');\ V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$E' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

Note que, mesmo que $\delta_T(v = 2) > 1$, não implica v ser vértice de corte em G, já que podem existir arestas não pontes no grafo G, mas que – obviamente – não aparece em T. O que significa que, em caso de remoção, $T - v$ continuará tendo o mesmo número de componentes conexas de T.

b. Sim. Se v é vértice de corte em G, então existem – no mínimo – duas componentes conexas C_1 e C_2, tais que a remoção de v as separa. Removendo-se todas as arestas não pontes de G, inicialmente, dando preferência àquelas que incidem em v. Desse modo, sobrará, pelo menos, duas arestas pontes e_1 e e_2 que conectam, respectivamente, C_1 e C_2 à v. Como não há mais arestas pontes em G, então não há ciclos. Segue daí, que o grafo resultante T é um subgrafo gerador de G que é uma árvore. Portanto, $\delta_T(v) \geq 2$.

c. Considerando a contraposição da afirmação do item imediatamente anterior, temos que, se $\delta_T(v) < 2$, então v não é vértice de corte em G.

Questão 2. *Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo simples com $|E(G)| = n - 1$, então G é uma árvore.*

Prova: Seja G um grafo de ordem n, conexo, simples e com $|E(G)| = n - 1$.

Tome $e_i \in E$, uma aresta não ponte e remova-a. Desse modo, $G - e_i$ é conexo. Repetindo-se este procedimento enquanto for possível, sucessivamente. Daí, o grafo $G' = (V', E')$ resultante é ainda conexo. Por outro lado, G é acíclico, pois existem em G' apenas arestas pontes. Segue daí, G' é uma árvore que abrange o subgrafo de G e $|E'| = |E|$, o que implica $G = G'$, e portante, G é uma árvore.

Questão 3. *Um grafo T é árvore geradora de G se, e somente se, T é um subgrafo conexo minimal induzido de G.*

Prova: ($\Longrightarrow$) Seja T uma árvore geradora de um grafo conexo G. Por definição, T é um subgrafo gerador de G que é uma árvore, e tão logo, é conexo.

Suponhamos, por absurdo, que T não seja um subgrafo conexo minimal. Então, existe $e \in E$ tal que $T - e$ continua conexo. Absurdo! T é uma árvore, e portanto $|E|$ é mínimo. Logo, T é um subgrafo conexo minimal.

($\Longleftarrow$) Se T é um subgrafo conexo minimal induzido de G, então, $|E(G)| = n - 1$. Pelo exercício anterior, T só pode ser uma árvore, e tendo os vértices de G é árvore geradora de T.

Questão 4. *Toda árvore T tem, pelo menos, $\Delta(T)$ folhas.*

Prova: Seja v um nó da árvore cujo $\delta(v) = \Delta(T) = k > 0$. Se $k = 1$, então v é por si só um nó folha. E portanto, a propriedade é satisfeita.

Se $k > 1$, então, para cada um dos k filhos de v, $\delta(u_i) \leq k$, caso não fosse, v não seria o nó de maior grau.
Consideremos o caso mais trivial: quando todos os filhos de v são folhas. Dessa maneira, a propriedade seria garantida. Caso contrário, para algum dos filhos, seu grau é maior do que 1, e tem no mínimo um filho que é nó folha. Assegurando, dessa forma, a validade da afirmação.

Questão 5. *Se $G = (V, A)$ é um grafo direcionado, então*

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V} \delta^-(v) \ .$$

Prova: Se $|V(G)| = 1$ e não há arestas, então

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |A(G)| = 0 \ .$$

e a propriedade será garantida.
Considere $G' = (V', A')$ um grafo obtido a partir de aplicações sucessivas de uma das operações a seguir sobre um grafo inicialmente vazio.

1 **Inserir um novo vértice w em V':** Como nenhuma nova aresta foi criada, o grau de cada vértice, bem como a quantidade de arestas permanecem inalterados.

2 **Inserir uma nova aresta (u, v) em A':** É claro que $|A'|$ será incrementado em uma unidade, ao passo que se a aresta não for um loop, então, o grau de emissão de u e o grau de recepção de v serão incrementados em uma unidade cada um. De modo que a propriedade continua válida. Por outro lado, se a nova aresta for um loop, então, o grau de emissão e recepção do nó sobre o qual a aresta incide, aumentará em duas unidades, um para cada categoria

de grau. Repita tal procedimento sucessivamente até que $G' = G$ é fácil verificar que a propriedade se verifica.

Portanto,

$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V} \delta^-(v) \ .$$

Questão 6. a. Inicialmente, imaginemos uma matriz de adjacências para um grafo G com n vértices. Então, a matriz será uma matriz quadrada de ordem n, e portanto, com n^2 elementos numerados de 0 a $n-1$. Uma vez que não há laços, podemos eliminar a diagonal principal n. Dada a simetria da relação, temos o dobro da área de memória que precisamos para armazenar G nesta estrutura. Daí, a fórmula para o tamanho desse vetor é:

$$N(n) = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

b. A função $f(u, v)$ será uma função que mapeia elementos de um subconjunto do 2-dimensional a elementos do 1-dimensional. Para compreender melhor, ilustraremos a construção da fórmula final nos passos que se seguem.

(a) Um percurso num vetor bidimensional, utilizando ponteiros é dado por $M[u][v] = M[u * n + v]$, onde n é a dimensão da matriz, u e v são os índices correspondentes à linha e coluna, nesta ordem.

(b) No entanto, note que, o fato de representarmos a matriz de uma forma otimizada, nos obriga a "descontar" desse percurso todas as áreas de memórias não mapeadas e que foram eliminadas na implementação. O valor desse desconto é dado por uma progressão aritmética (PA), cuja fórmula fechada pode ser encontrada aplicando a técnica criada por Gauss.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + (u+1) &= \sum_{k=1}^{u+1} k \quad \Longleftrightarrow && (1) \\ &= \frac{(u+1)(u+2)}{2} && (2) \\ & && (3) \end{aligned}$$

Daí, a fórmula do mapeamento com descolocamento final é

$$f(u, v) \;=\; u * n + v - \frac{(u+1)(u+2)}{2} \ , \ \forall (u, v) \in V(G), u < v \quad (4)$$

c. Código-fonte na pasta *'Exercício_6'*.

d. Idem item b).

Questão 7. Seja $G = (V, E)$ um grafo com n vértices e m arestas.

a. Como existem m arestas, podemos formar 2^m subconjuntos de arestas possíveis, incluíndo o $\emptyset$, já que equivaleria ao conjunto das partes de E; Para cada um desses subconjuntos, teríamos. **Não finalizada**

b. Um subgrafo de $G' = (V', E')$ é aquele em que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Mais especificamente, quando $V' = V$, G' é chamado subgrafo gerador. Logo, todos os vértices de G estão em G'. Cada aresta é composta por um par de vértices. Logo, a quantidade de arestas que podem ser formadas por um conjunto de n vértices, é dada por C_2^n. Dentre essas, o número de conjuntos com q arestas que podem ser obtidos é igual à $C_q^{C_2^n}$

Agora, cada subgrafo gerador terá uma configuração com 0 a m arestas, donde vem que o número total de subgrafos geradores é

$$\sum_{q=0}^{m} C_q^{C_2^n}$$

c. Para chegar a este número, podemos adotar o seguinte procedimento:

Passo 1: Considere que um grafo $H = (V, E)$, inicialmente vazio.

Passo 2: Insira um vértice de $V(G)$ em $V(H)$.

Passo 3: Para esta configuração, analise todas as possibilidades de disposição de arestas.

Passo 4: Retorne ao passo 2, e continue contabilizando os cenários enquanto houver vértices em $V(G)$ que não estejam – também – em $V(H)$.

Passo 5: O número de subgrafos será a soma da quantidade desses cenários.

Questão 8. Código na pasta *'Exercicio_08'*.

Questão 9. *Se T é uma árvore, então $|C(T-v)| = \delta_T(v)$, em que $C(G)$ é o conjunto de componentes conexas de G.*

Prova: 1. *De fato, seja T uma árvore e v um nó de T.*
Considere os seguintes casos:

Caso 1: *Se $\delta_T(v) = 1$, então v é um nó folha, e tão logo, pelo exercício 1, item c), v não é vértice de corte de T. Donde $T - v$ continua conexa.*
Portanto, $|C(T-v)| = \delta_T(v) = 1$.

Caso 2: *Por outro lado, se $\delta_T(v) = k > 1$, a remoção de v de T, levará, consequentemente, à remoção das arestas incidentes a ele. Desde que existe um único caminho entre quaisquer dois vértices passando por v, sua remoção levará ao surgimento de k componentes conexas conectados a v por uma ponte. Sendo assim, $|C(T-v)| = \delta_T(v) = k$.*

Questão 10. Não finalizada - Redação *Se T é uma arborescência resultante de uma busca em largura a partir do vértice r em um grafo conexo G, então rTv é um caminho mínimo em G $\forall v \in V(G)$.*

Prova: Se v e r são vértices de T conforme descrito acima, então, pelo Teorema 3.1, pra toda aresta (r, v) em $E(G)$, tem-se que o valor absoluto da diferença entre os níveis dos respectivos nós é – no máximo – igual a 1. Daí, que se houve caminho mais curto do que rTv, então, existiria pelo menos uma aresta

Questão 11. Caracterizações:

a. Em um grafo completo, o percurso em largura resultará numa árvore que formada por exatamente dois níveis: O da raíz, e de seus $n-1$ nós folhas, já que poderemos alcançá-los a partir do nó escolhido para percurso, e existem arestas de retorno no último nível dós nós alcançados primeiro para os alcançados por último.

b. Neste caso, por ser completo, a altura da árvore gerada pelo percurso em profundidade será, no máximo, a quantidade de vértices do grafo, e existirão as arestas de retorno para qualquer vertice que não seja um filho da raiz.

Questão 12. a. Como vimos, na busca em profundidade, os rótulos Alc (Alcançados) e Exp (Explorados), são, nesta ordem, os valores dos índices pré-ordem e pós-ordem.

vértice	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
pré-ordem	1	2	3	4	6	5	7	10	9	8
pós-ordem	10	9	8	7	5	6	4	1	2	3

b. No grafo apresentado, não existe vértice de corte.

Questão 13. *Seja T uma arborescência geradora de G produzida por uma busca em profundidade.*

a. *A raíz r de T é vértice de corte se, e somente se, tem mais de um filho.*
Prova: ($\Longrightarrow$) Se a raíz de T é vértice de corte, então, de acordo com a questão 1, $\delta(r) > 1$, já que T é árvore geradora de si mesmo.

($\Longleftarrow$) Considere que r tem mais de um filho em T, w e p. Suponhamos que r não seja vértice de corte em G. Não existe caminho que conecta os descendentes de w aos descendentes de p em $G - r$. Caso contrário, seria admitido existir nó com mais de um pai. E isso implicaria em uma aresta cruzada entre as componentes de descendentes de w e p. O que não acontece numa árvore resultante da busca em profundidade.

Logo, r é vértice de corte em G.

b. *Um vértice v que não é raíz de T é vértice de corte de G se, e somente se, tem um filho w tal que nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v.*

Prova: ($\Longrightarrow$) Seja v um vértice não raís de T que é vertice de corte em G. Então, existe nós p e w, pai e filho de v, respectivamente tais que, após a remoção de v estarão separados e em componentes conexas distintas. Suponha, por absurdo, que exista um descendente t de w que é um um vizinho e ancestral próprio a de v . Desse modo, $wTt(t,a)aTp$ seria um caminho que leva de w a p caso v fosse removido. Isso implicaria que v não é vértice de corte.

($\Longleftarrow$) Seja v um vértice de T que possui um filho w tal que não exista descendente de w que é vizinho de um ancestral próprio de v. Suponha que exista caminho que leva de w ao pai de v em $G - v$. Então, tal caminho deve ter, no mínimo, uma aresta fora da árvore. Mas, como T é gerada por um percurso em profundidade, tal caminho deveria ligar w a um ancestral próprio de v. Absurdo!

c. *Uma aresta (u, v) é aresta de corte em G se, e somente se, $(u, v) \in A(T)$ e nenhuma aresta em G liga um descendente de v a um ancestral de u.*

Prova: ($\Longrightarrow$) Considere (u, v) uma aresta uma aresta de corte de G. Suponha, sem perda de generalidade, que u é pai de v. Dessa forma, u é vértice de corte em G e, o sendo, pelo item b), não há aresta em G que ligue um descendente de v a um ancestral de u e a propriedade é válida.

($\Longleftarrow$) De forma similar à segunda parte da prova do item anterior, considere (u, v) em T tal que nenhuma aresta em G conecta um descendente de v a um ancestral de u. Remova (u, v) de G. Se houvesse algum caminho que conectasse u a v, este caminho teria uma aresta fora da árvore. No entanto, como T é uma árvore em obtida a partir de uma busca em profundidade, tal aresta deveria ligar exatamente um descendente de v a um ancestral de w. O que contradiz a hipótese. O que finaliza a prova.