פרק 2:

תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה

לאורך פרק זה.

1. $g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_{j}x^{j}$ $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$ פולינומים מעל שדה F.
2. ללא הגבלת כלליות ניתן להניח ש F הוא שדה הפיצול של $f\cdot g$, כלומר F מכיל את כל השורשים של שניהם.
3. $\xi_{0}\dots\xi_{n}$ הם השורשים של f, ו $\eta_{0}\dots\eta_{m}$ הם השורשים של g.

הרזולטנט

<u>משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)</u>

יהיו f,g פולינומים מעל שדה F.

$$R_{m.n}\left(f,g\right)=a_{n}^{m}b_{m}^{n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_{i}-\eta_{j}\right)\quad(2.1)$$

את ההוכחה נביא מיד לאחר הדוגמא.

<u>דוגמא</u>

$f\left(x\right)=x\left(x^{2}-4\right)=x\left(x+2\right)\left(x-2\right)=x^{3}-4x$

$g\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-3\right)=x^{2}-2x-3$

נבחין כי השורשים של f הם $0,2,-2$

השורשים של g הם $-1,3$

נסמן

$$\xi_{1}=0,\xi_{2}=2,\xi_{3}=-2\quad\eta_{1}=-1,\eta_{2}=3$$

נציב במשוואה (2.1)

כאשר $a_{n}^{m}=1^{2}$, $b_{m}^{n}=1^{3}$

$$\left(\left(0-\left(-1\right)\right)\left(0-3\right)\right)\left(\left(2-\left(-1\right)\right)\left(2-3\right)\right)\left(\left(-2-\left(-1\right)\right)\left(-2-3\right)\right)=45$$

קבלנו ש-

$$\boxed{R_{m.n}\left(f,g\right)=45}$$

נחשב לפי הגדרה 1.1 את הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר של f,g

$$R_{3.2}\left(f,g\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -4 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -4 & 0\\
1 & -2 & -3 & 0 & 0\\
0 & 1 & -2 & -3 & 0\\
0 & 0 & 1 & -2 & -3
\end{vmatrix}$$

נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס.

ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & 5 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & & & & 5 \end{pmatrix}$$

ולאחר שנשלים את כל התמורות נקבל את התמורות הבאות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=1}$$

את הסימן רשמנו מתחת לתמורה.

ולאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל.

$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$

כלומר במקרה זה קבלנו את השוויון במשפט 2.1

עכשיו נעבור להוכחה

הוכחת משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)

לצורך הוכחת משפט הרזולטנט נצטרך כמה טענות עזר,

נביא את הטענות ואת ההוכחות שלהם לפני המשפט

מי שיותר נח לו יוכל לדלג על ההוכחות של טענות העזר ולעבור ישר להוכחה של משפט הרזולטנט, ולאחר מיכן לחזור להוכחות של טענות העזר.

טענת עזר 2.2

יהיו f, g פולינומים מעל שדה F

I. $R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\xi_i)$.

II. $R(f,g) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\eta_j)$.

הוכחה

טענה זו נובעת כמעט ישירות ממשפט הרזולטנט ומהמשפט היסודי של האלגברה.

לפי המשפט היסודי של האלגברה מעל שדה F ניתן לרשום את f, g כמכפלה של גורמים ליניאריים

הוכחה I.

לפי המשפט היסודי של האלגברה נרשום את g כך

$$g(x) = b_m \prod_{j=1}^m (x - \eta_j)$$

נציב $\xi_m \ldots \xi_0$ ב g נקבל

$$(*) \quad g(\xi_i) = b_m \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j)$$

ומשרשור השוויונות הבא נקבל את השוויון

$$\begin{aligned}\boxed{R\left(f,g\right)} &= a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right)\\ &= a_n^m \prod_{i=1}^{n} b_m \prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right)\\ \text{hence}\left(*\right) &= \boxed{a_n^m \prod_{i=1}^{n} g\left(\xi_i\right)}\end{aligned}$$

כנדרש.

עבור f נדרש עוד תהליך ע"מ לקבל את השוויון.

תחילה נפתח דיון אינטואיטיבי

נרשום את f גם כן כמפכלה של גורמים ליניאריים

$$f\left(x\right)=a_n\prod_{i=1}^{n}\left(x-\xi_i\right)$$

דיון אינטואיטיבי :

אם נהפוך במטריצת סילבסטר בין f ל g כלומר ש g תיהיה ב n שורות הראשונות ו f ב m שורות האחרונות נקבל את שוויון I בצורה הבאה

$$R\left(g,f\right)=b_m^n\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_j\right)$$

החלפת שורות במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה פרט לסימן ולכן ע"י פעולות של החלפת השורות נקבל את השוויון הבא

$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^k R\left(g,f\right)=\left(-1\right)^k b_m^n\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_j\right)$$

נותר לברר מהו k כלומר מה הסימן.

נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות נדרש ע"מ להפוך בין f,g.

ההחלפה בין השורות נעשה באופן הבא את השורה הראשונה נעביר להיות בשורה השנייה את השנייה לשלישית וכן הלאה עד האחרונה את האחרונה נעביר להיות השורה הראשונה

בכתיב תמורות נקבל את המעגל

$$\left(r_1r_2\dots r_mr_{m+1}\dots r_{n+m}\right)$$

נבצע את המעגל הזה n פעמים נקבל שהשורה הראשונה (של המטריצה המקורית) תיהיה במקום ה $n+1$ ואז f תיהיה ב m השורות האחרונות,

והשורה ה m (של המטריצה מקורית) תיהיה בשורה הראשונה כלומר g תיהיה ב n השורות הראשונות (מספר השורות הוא $n+m$).

הסימן של מחזור באורך l הוא $l-1$ (לא נוכיח טענה זו במסגרת העבודה הזו) ולכן כל מחזור כזה הוא באורך $l=n+m-1$

נבצע n מחזורים כאלו ע"מ להחליף בין f ל g ולכן בסה"כ נקבל שהסימן הוא

$$\left(-1\right)^{\left(m+n-1\right)^n}=\left(-1\right)^{\left(nm+n^2-n\right)}=\left(-1\right)^{nm}$$

השוויון האחרות מתקיים כיון ש- $n^2-n=n\left(n-1\right)$ תמיד מספר זוגי כי n זוגי או $n-1$ זוגי, לכן הזוגיות של n^2-n+nm ו mn היא אותה זוגיות.

ולכן בסה"כ קבלנו II

הערה :

נשים לב שתוך כדי ההוכחה קבלנו ש-

$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{nm}R\left(g,f\right)\quad(2.2)$$

במשוואה נעשה שימוש בהמשך

<u>טענת עזר 2.4</u>

יהיו f,g פולינומים ממעלה n,m בהתאמה

כך שמתקיים $m\leq n$

ויהי h פולינום כך ש $\deg\left(h\right)\leq n-m$

אז מתקיים

$$R_{n,m}\left(f+hg,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$$

ובאופן סימטרי אם $n\leq m$

אז עבור h כך ש $\deg\left(h\right)\leq m-n$ מתקיים ש

$$R_{n,m}\left(f,g+hf\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$$

.

הדרישה ש $\deg\left(h\right)\leq n-m$ במקרה הראשון (ובדומה $\deg\left(h\right)\leq m-n$) הכרחית אחרת $\deg\left(hg\right)>n+m$ ולכן גם $\deg\left(f+hg\right)>n+m$ ואז השוויון לא יוכל להתקיים.

<u>הוכחה</u>

נוכיח באינדוקציה על המעלה של h

נסמן $h=\sum_{l=1}^{k}h_lx^l$ כך ש $k\leq n-m$

בסיס האינדוקציה :

נוכיח עבור מונום

נתבונן במונום $h_\rho x^\rho$ $l\leq\rho\leq k$

נראה שאפשר להגיע מ $R_{n,m}\left(f,g\right)$ ל $R_{n,m}\left(f+hg,g\right)$ ע"י פעולות על השורות של המטריצה שאינם משנות את הסימן של הדטרמיננטה.

נוסיף את השורות של הפולינום g כאשר כופלים אותם במונום $h_\rho x^\rho$, לשורות של הפולינום f.

$$\boxed{R_i\to R_i+h_\rho x^\rho R_{i+n}\quad 1\leq i\leq n}$$

מכיון ש $n<m$, לפי הגדרת מטריצת סילבסטר g ~~מופיעה ב n השורות האחרונות ו f ב m השורות הראשונות ולכן נקבל שבכל השורות~~
~~שבהם f מופיעה מתקיימת פעולה זו~~

~~ולאחר הפעולה נקבל את המטריצה~~

$$\begin{pmatrix}
a_n+h_\rho x^\rho g_n & a_{n-1}+h_\rho x^\rho g_{n-1} & a_{n-2}+h_\rho x^\rho g_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & a_n+h_\rho x^\rho g_n & a_{n-1}+h_\rho x^\rho g_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_1+h_\rho x^\rho g_1 & a_0+h_\rho x^\rho g_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_2+h_\rho x^\rho g_2 & a_1+h_\rho x^\rho g_1 & a_0+h_\rho x^\rho g_0\\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0
\end{pmatrix} = R_{n,m}\left(f+\left(h_\rho x^\rho\right) g,\right.$$

~~פעולות אלו לא משנות את הערך של הדטרמיננטה ולכן עבור מונום $h_\rho x^\rho$~~

~~נקבל ש~~

$$\boxed{R_{n,m}\left(f+\left(h_\rho x^\rho\right)g,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)}$$

הנחת האינדוקציה:

נניח שזה נכון עבור $k-1$ מונומים ונוכיח עבור k מונומים

צעד האינדוקציה:

$$\begin{aligned}
\boxed{R_{n,m}\left(f+hg,g\right)} &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k}h_l x^l\right)g,g\right)\\
&= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k-1}h_l x^l\right)g+\left(h_k x^k\right)g,g\right)\\
\text{step induction} &= R_{n,m}\left(f+\left(h_k x^k\right)g,g\right)\\
\text{case base} &= \boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)}
\end{aligned}$$

כנדרש.

עבור המקרה השני $R_{n,m}\left(f,g+hf\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$ נקבל את השוויון באותו האופן.

<u>טענת עזר 2.5</u>

i. אם $\deg\left(g\right)\le k\le m$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_n^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)$$

ii.אם $\deg\left(f\right)\le k\le n$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{(n-k)m}b_m^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)$$

<u>הוכחה</u>

הוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר,

כלומר נניח ש $g_m = 0$ אז

$$\text{Syl}\left(f,g\right)=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

נבחין שאם נמחק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\text{Syl}\left(f,\hat{g}\right)=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

כאשר $\hat{g}\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m-1}b_jx^j$ ומכיון ש $b_m=0$ אז $\hat{g}\left(x\right)=g\left(x\right)$,

ולכן אם נפתח את הדטרמיננטה $R_{n,m}\left(f,g\right)$ לפי העמודה הראשונה נקבל ש

$$\boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)}=a_nR_{n,m}\left(f,\hat{g}\right)=\boxed{a_nR_{n,m-1}\left(f,g\right)}$$

נסמן $k=m-1$ ונפתח עוד קצת את השוויון הזה ונקבל

$$\begin{aligned} a_nR_{n,m-1}\left(f,g\right) &= a_n^{m-(m-1)}R_{n,m-1}\left(f,g\right) \\ &= \boxed{a_n^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)} \end{aligned}$$

וקבלנו את הטענה עבור $k=m-1$.

~~נעבור להוכחה עצמה~~

i. הוכחה באינדוקציה לאחור על k

עבור $k=m$ מתקבל השוויון מיידי

$$\boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)}=a_n^0R_{n,k}\left(f,g\right)=\boxed{a_n^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)}$$

בסיס האינדוקציה:

עבור $k=m-1$ כלומר $g_m=0$

ראינו כי הטענה נכונה

הנחת האינדוקציה :

נניח שהטענה נכונה עבור ~~$k=m-l$ כאשר $0<l\leq m$~~

$$R_{n,m}(f,g)=a_n^{m-k}R_{n,k}(f,g)$$

נוכיח עבור $k=m-l-1$

~~נרצה להוכיח ש~~

$$\cancel{R_{n,m}(f,g)=a_n^{m-(m-l-1)}R_{n,(m-l-1)}(f,g)}$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$R_{n,m}(f,g)=a_n^{m-(m-l)}R_{n,m-l}(f,g)$$

נתבונן ב $R_{n,m-l}(f,g)$ זה למעשה הרזולטנט של f,g כך שעבור g ניקח עד החזקה $m-l$

ולפי ההנחה המקדם של החזקה $m-l-1$ הוא 0

אבל אנחנו כבר יודעים לפי בסיס האינדוקציה שעבור $R_{n,m-l}(f,g)$ מתקיים ש

$$R_{n,m-l}(f,g)=a^nR_{n,m-l-1}(f,g)$$

ולכן בסה"כ נקבל את השוויון

$$\begin{aligned}\boxed{R_{n,m}(f,g)} &= a_n^{m-(m-l)}R_{n,m-l}(f,g)\\ \text{step induction} &= a_n^{m-(m-l)}a_nR_{n,m-l-1}(f,g)\\ &= a_n^{m-(m-l-1)}R_{n,m-l-1}(f,g)\\ &\boxed{a_n^{m-k}R_{n,k}(f,g)}\end{aligned}$$

הוכחת II.

לפי משוואה (2.2)

$$R_{n,m}(f,g)=(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)$$

לפי I והתנאי ש $\deg(f)<k<n$ נקבל ש- $R_{m,n}(g,f)=b_m^n\prod_{j=1}^m f(\eta_j)$

ולכן

$$(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)=(-1)^{nm}b_m^{n-k}R_{m,k}(g,f)$$

ושוב לפי משוואה (2.2)

$$R_{m,k}(g,f)=(-1)^{km}R_{k,m}(f,g)$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}(-1)^{nm} R_{m,n}(g,f) &= (-1)^{nm} b_m^{n-k} (-1)^{km} R_{k,m}(f,g) \\ &= (-1)^{m(n+k)} b_m^{n-k} R_{k,m}(f,g)\end{aligned}$$

ומכיון של $n+m$ ו $n-m$ אותה זוגיות נקבל לאחר כל השוויונות

$$\boxed{R_{n,m}(f,g) = (-1)^{m(n-k)} b_m^{n-k} R_{k,m}(f,g)}$$

כנדרש.

<u>הוכחת משפט הרזולטנט</u>

~~נוכיח~~ באינדוקציה על הגודל של המטריצה $n+m$

לפי המוסכמות בראש הפרק

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x-\xi_i) \quad g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m} (x-\eta_j)$$

<u>בסיס האינדוקציה (חסר)</u>

הנחת האינדוקציה:

נניח שמשפט הרזולטנט מתקיים <u>לכל</u> ערך מטריצה קטנה מ $n+m$, ובהנחה זה אנחנו כוללים ~~שזה נכון~~ לכל f,g שקטנות מ n,m בהתאמה**(צריך להסביר למה)**

מקרה 1:

$$0 < n = \deg(f) \leq m = \deg(g)$$

קיימים פולינומים q,r כך ש $\deg(r) < \deg(f)$ו~~מתקיים ש~~

$$g = qf + r$$

נבחין כי

$$\deg(g-r) = \deg(qf)$$

ולכן נקבל את השוויונות הבאים

$$\deg(q) = \deg(qf) - \deg(f) = \deg(g-r) - n = m - n$$

מטענת עזר 2 נקבל

$$R_{n,m}(f,g) = R_{n,m}(f, g-qf) = R_{n,m}(f,r)$$

נחלק שוב למקרים.

מקרה 1 $r \neq 0$ נסמן $k = \deg(r) \geq 0$

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 3

$$R_{n,m}(f,r) = a_n^{m-k} R_{n,k}(f,r) = a_n^{m-k} a_n^k \prod_{i=1}^{n} r(\xi_i) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i)$$

השוויון האחרות נובע מכך ש ξ_i הם שורשים של f

ולכן הם גם שורשים של r כי

$$\boxed{g(\xi_i)} = \underbrace{q(\xi_i) f(\xi_i)}_{=0} + r(\xi_i) = \boxed{r(\xi_i)}$$

וקבלנו את הטענה עבור $0 < n = \deg(f) \leq m = \deg(g)$ ו $r \neq 0$.

עבור $r = 0$

$$g = fq$$

לפי ההנחה של מקרה זה $n > 0$ ולכן

$$Syl_{n,m}(f,r) = Syl_{n,m}(f,0)$$

ולכן

$$R_{n,,m}(f,r) = 0$$

לפי טענת עזר 2

$$R_{n,,m}(f,g) = R_{n,,m}(f, g - qf) = R_{n,,m}(f,0)$$
$$= R_{n,,m}(f,r) = 0$$

ויתר מזה

$$g(\xi_1) = f(\xi_1)\, q(\xi_1) = 0$$

כלומר ξ_1 הוא שורש של g גם ולכן ?????

מקרה 2

$n = 0$

$$R_{0.m}(f,g) = a_n^m b_m^0 \prod_{i=1}^{0} \prod_{j=1}^{m} (\xi_i - \eta_j)$$
$$= a_n^m$$

והטענה מתקיימת

מקרה 3

$m = \deg(g) < n = \deg(f)$ הוכחה זה דומה למקרה 1,

וכמו כן עבור $m = 0$ הוכחה דומה עבור מקרה 2

לא נחזור על הוכחות אלו