פרק 2:

תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה.

$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$.1 פולינומים מעל שדה F.

2. ללא הגבלת כלליות ניתן להניח ש F הוא שדה הפיצול של $f\cdot g$, כלומר F מכיל את כל השורשים של f ו- g.

3. $\xi_0 \dots \xi_n$ הם השורשים של f, ו $\eta_0 \dots \eta_m$ הם השורשים של g.

הרזולטנט

משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)

יהיו f,g פולינומים מעל שדה F.

$$R_{n,m}(f,g)=a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right) \quad .(2.1)$$

מקרה טרוויאלי, כאשר $\deg(f)<n$ ו- $\deg(g)<m$, המכפלה מתאפסת, וגם $R_{n,m}(f,g)=0$ כמו שראינו בהערה 1.4.

את ההוכחה נביא מיד לאחר הדוגמא.

דוגמא

$$f(x)=x\left(x^2-4\right)=x(x+2)(x-2)=x^3-4x$$
$$g(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$$

נבחין כי השורשים של f הם $0,2,-2$ והשורשים של g הם $-1,3$.

נסמן

$$\xi_1=0,\xi_2=2,\xi_3=-2 \quad \eta_1=-1,\eta_2=3$$

נציב במשוואה (2.1) כאשר $a_n^m=1^2$, $b_m^n=1^3$.

$$((0-(-1))(0-3))((2-(-1))(2-3))((-2-(-1))(-2-3))=45$$

קבלנו ש-

$$\boxed{R_{m.n}(f,g)=45}$$

נחשב לפי הגדרה 1.1 את $\text{Syl}(f,g)$:

$$R_{3.2}(f,g)=\begin{vmatrix}1&0&-4&0&0\\0&1&0&-4&0\\1&-2&-3&0&0\\0&1&-2&-3&0\\0&0&1&-2&-3\end{vmatrix}$$

נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס.

ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & 5 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & & & & 5 \end{pmatrix}$$

לאחר שנשלים את כל התמורות נקבל את התמורות הבאות:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\mathrm{sgn}(\sigma)=1} .$$

"את הסימן רשמנו מתחת לתמורה".

לאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל

$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$

כלומר במקרה זה קבלנו את השוויון במשפט 2.1, עכשיו נעבור להוכחה.

הוכחת משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)

לצורך הוכחת משפט הרזולטנט נצטרך כמה טענות עזר, נביא את הטענות ואת ההוכחות שלהם לפני המשפט.

ניתן לדלג על הוכחות של טענות העזר בקריאה ראשונה.

טענת עזר 2.2

יהיו f, g פולינומים מעל שדה F.

$$R(f,g) = (-1)^{nm} R(g,f) \quad (2.2) \ .$$

הוכחה

נפתח בדיון אינטואיטיבי:

נתבונן ב- $\mathrm{Syl}(f,g)$ וננסה לבדוק מה יהיה המחיר לעבור ל $\mathrm{Syl}(g,f)$.

נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות בין השורות נדרש ע"מ להפוך בין f, g וזה יהיה הסימן המבוקש.

נעבור להוכחה.

ההחלפה בין השורות תיעשה באופן הבא:

את השורה הראשונה נעביר להיות בשורה השניה את השניה לשלישית וכן הלאה עד האחרונה. את האחרונה נעביר להיות השורה הראשונה.

בכתיב תמורות נקבל את המעגל

$$(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} \dots r_{n+m}) \ .$$

נבצע את המעגל הזה n פעמים. כך נקבל שהשורה הראשונה (של המטריצה המקורית) תיהיה במקום ה $n+1$ "ואז f תיהיה ב m השורות האחרונות", והשורה ה m (של המטריצה מקורית) תיהיה בשורה הראשונה כלומר "g תיהיה ב n השורות הראשונות" (מספר השורות הוא $n+m$).

החתימה של מחזור באורך l הוא $l-1$ (הוכחת טענה זו חורגת ממסגרת המאמר הזה) ולכן כל מחזור כזה הוא באורך $l = n+m-1$.

נבצע n מחזורים כאלו ע"מ להחליף בין f ל g ולכן בסה"כ נקבל שהסימן הוא

$$\left[(-1)^{(m+n-1)}\right]^n = (-1)^{(nm+n^2-n)} = (-1)^{nm} \ .$$

השוויון האחרות מתקיים כיון ש- $n^2-n=n\left(n-1\right)$ תמיד מספר זוגי כי n זוגי או $n-1$ זוגי, ולכן $nm+n^2-n$ ו mn חולקים את אותה זוגיות.

ולכן בסה"כ הוכחנו טענה עזר 2.2.

במשוואה (2.2) נעשה שימוש בהמשך.

<u>טענה עזר 2.3</u>

יהיו f,g פולינומים ממעלה m,n בהתאמה כך שמתקיים $m\leq n$, ויהי h פולינום כך ש $\deg\left(h\right)\leq n-m$.

אז מתקיים

$$R_{n,m}\left(f+hg,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)\ .$$

באופן סימטרי אם $n\leq m$ אז עבור h כך ש $\deg\left(h\right)\leq m-n$ מתקיים

$$R_{n,m}\left(f,g+hf\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)\ .$$

.

הדרישה ש $\deg\left(h\right)\ \leq\ n-m$ במקרה הראשון (ובדומה $\deg\left(h\right)\ \leq\ m-n$) הכרחית אחרת $\deg\left(hg\right)\ >\ n+m$ ולכן גם $\deg\left(f+hg\right)>n+m$ ואז השוויון לא יוכל להתקיים.

<u>הוכחה</u>

נוכיח באינדוקציה על המעלה של h. נניח ש $k\leq n-m$ ונסמן $h=\sum_{l=\rho}^{k}h_{\rho}x^{\rho}$.

תחילה נוכיח שהמשפט מתקיים עבור מונום יחיד cx^{ρ} עם $\rho\in\mathbb{Z}$, ובפרט הוא מתקיים עבור $h_{\rho}x^{\rho}$.

נוכל להניח ללא הגבלת כלליות ש $k=n-m$ ע"י הגדרת $h_{\rho}=0$ לכל שאר החזקות.

מכיון ש $n<m$, לפי הגדרת מטריצת סילבסטר נקבל

$$\begin{pmatrix}a_{n}+cb_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-\rho-1} & a_{n-2}+cb_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{n}+h_{\rho}b_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{1}+cb_{1} & a_{0}+cb_{0} & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{2}+cb_{2} & a_{1}+cb_{1} & a_{0}+cb_{0}\\
b_{m} & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & b_{m} & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_{1} & b_{0} & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_{2} & b_{1} & b_{0}
\end{pmatrix}=R_{n,m}\left(f+\left(cx^{\rho}\right)g,g\right)$$

הביטוי $n-\rho$ נובע מכך שהכפל cx^{ρ} מזיז את איברי g ρ מקומות כי $cx^{\rho}b_{j}x^{j}=cb_{j}x^{j+\rho}$, ולאחר הצבה $i=j+\rho$ נקבל $j=i-\rho$ כלומר המקדם של החזקה ה i הוא $b_{i-\rho}$.

מכך ש $\rho\ <\ n-m$, כל אחד מ m השורות הראשונות ב $\mathrm{Syl}_{n,m}\left(f+cx^{\rho}g,g\right)$ הוא סכום של השורה המתאימה במטריצה $\mathrm{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)$ עם אחד השורות מ n השורות האחרונות וקומבינציה לינארית של שורות אחרות.

במילים אחרות ניתן לעבור מ $\mathrm{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)$ ל $\mathrm{Syl}_{n,m}\left(f+cx^{\rho}g,g\right)$ ע"י פעולות על השורות של המטריצה וקומבינציה לינארית של שורות אחרות. אבל הוספת קומבינציה לינארית של שורות לשורה אחרת במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה ולכן:

$$\boxed{R_{n,m}\left(f+\left(h_{\rho}x^{\rho}\right)g,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)}$$

הנחת האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור פולינום ממעלה $k-1$ ונוכיח עבור פולינום ממעלה k.

צעד האינדוקציה:

$$\begin{aligned}\boxed{R_{n,m}\left(f+hg,g\right)} &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k}h_{l}x^{l}\right)g,g\right)\\ &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k-1}h_{l}x^{l}\right)g+\left(h_{k}x^{k}\right)g,g\right)\\ \text{step induction} &= R_{n,m}\left(f+\left(h_{k}x^{k}\right)g,g\right)\\ \text{case base} &= \boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)}\end{aligned}$$

כנדרש.

עבור המקרה השני $R_{n,m}\left(f,g+hf\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$ נקבל את השוויון באותו האופן.

<u>טענת עזר 2.4</u>

i. אם $\deg\left(g\right)\leq k\leq m$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)\ .$$

ii.אם $\deg\left(f\right)\leq k\leq n$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{(n-k)m}b_{m}^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)\ .$$

<u>הוכחה</u>

הוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר,

כלומר נניח ש $g_{m}=0$. אז

$$\text{Syl}\left(f,g\right)=\begin{pmatrix}a_{n} & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{n} & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1} & a_{0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{2} & a_{1} & a_{0}\\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{1} & b_{0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2} & b_{1} & b_{0}\end{pmatrix}\ .$$

נבחין שאם נמחק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\text{Syl}\left(f,\hat{g}\right)=\begin{pmatrix}a_{n} & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{n} & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{1} & a_{0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{2} & a_{1} & a_{0}\\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{1} & b_{0} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2} & b_{1} & b_{0}\end{pmatrix}\ .$$

כאשר $\hat{g}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j$ ומכיון ש $b_m = 0$ אז $\hat{g}(x) = g(x)$, ולכן אם נפתח את הדטרמיננטה $R_{n,m}(f,g)$ לפי העמודה הראשונה נקבל:

$$\boxed{R_{n,m}(f,g)} = a_n R_{n,m}(f,\hat{g}) = \boxed{a_n R_{n,m-1}(f,g)}.$$

בשביל לסיים את ההוכחה נגדיר את g לכל $\deg(g) \le j \le m$ להיום עם מקדם 0, ונקבל

$$\begin{aligned} R_{n,m}(f,g) &= a_n R_{n,m-1}(f,g) \\ &= a_n a_n R_{n,m-2}(f,g) \\ &= \left(\underbrace{a_n a_n \ldots a_n}_{r\,\text{times}}\right) R_{n,m-r}(f,g) \\ &= a_n^r R_{n,m-r}(f,g) \end{aligned}$$

כאשר $m-r-1$ הוא המקדם הראשון שאינו 0 .

נסמן $m-r=k$ ונקבל $R_{n,m}(f,g) = a_n^{m-k} R_{n,k}(f,g)$ כנדרש.

הוכחת II.

לפי משוואה (2.2)

$$R_{n,m}(f,g) = (-1)^{nm} R_{m,n}(g,f)$$

לפי I והתנאי ש $\deg(f) < k < n$ נקבל

ולכן

$$(-1)^{nm} R_{m,n}(g,f) = (-1)^{nm} b_m^{n-k} R_{m,k}(g,f) \ .$$

שוב לפי משוואה (2.2)

$$R_{m,k}(g,f) = (-1)^{km} R_{k,m}(f,g)$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned} (-1)^{nm} R_{m,n}(g,f) &= (-1)^{nm} b_m^{n-k} (-1)^{km} R_{k,m}(f,g) \\ &= (-1)^{m(n+k)} b_m^{n-k} R_{k,m}(f,g) \ . \end{aligned}$$

ומכיון של $m+n+k$ ו $n-k$ אותה זוגיות נקבל לאחר כל השוויונות

$$\boxed{R_{n,m}(f,g) = (-1)^{m(n-k)} b_m^{n-k} R_{k,m}(f,g)}$$

כנדרש.

הוכחת משפט הרזולטנט

נוכיח באינדוקציה על הגודל של המטריצה $n+m$

לפי המוסכמות בראש הפרק

$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\xi_i)\quad g(x)=b_m\prod_{j=1}^{m}(x-\eta_j)$$

<u>בסיס האינדוקציה (חסר)</u>

הנחת האינדוקציה:

נניח שמשפט הרזולטנט מתקיים לכל ערך מטריצה קטנה מ $n+m$, ובהנחה זה אנחנו כוללים שזה נכון לכל f,g שקטנות מ n,m בהתאמה(**צריך להסביר למה**)

מקרה 1:

$0<n=\deg(f)\le m=\deg(g)$

קיימים פולינומים q,r כך ש $\deg(r)<\deg(f)$ ומתקיים

$$g=qf+r$$

נבחין כי

$$\deg(g-r)=\deg(qf)$$

ולכן נקבל את השוויונות הבאים

$$\deg(q)=\deg(qf)-\deg(f)=\deg(g-r)-n=m-n$$

מטענת עזר 2.4 נקבל

$$R_{n,m}(f,g)=R_{n,m}(f,g-qf)=R_{n,m}(f,r)$$

נחלק שוב למקרים.

מקרה 1. $r\neq 0$ נסמן $k=\deg(r)\geq 0$

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.5

$$R_{n,m}(f,r)=a_n^{m-k}R_{n,k}(f,r)=a_n^{m-k}a_n^k\prod_{i=1}^{n}r(\xi_i)=a_n^m\prod_{i=1}^{n}g(\xi_i)$$

השוויון האחרות נובע מכך ש ξ_i הם שורשים של f ולכן

$$\boxed{g(\xi_i)}=\underbrace{q(\xi_i)\,f(\xi_i)}_{=0}+r(\xi_i)=\boxed{r(\xi_i)}.$$

קבלנו את הטענה עבור $0<n=\deg(f)\le m=\deg(g)$ ו $r\neq 0$.

עבור $r=0$

$$g=fq$$

לפי ההנחה של מקרה זה $n>0$ ולכן

$$\mathrm{Syl}\left(f,r\right)=\mathrm{Syl}\left(f,0\right)$$

ולכן

$$R_{n,,m}\left(f,r\right)=0$$

מצד שני כיון ש f מחלק את g אז השורשים של f הם שורשים של g גם כן,

ולכן בנוסחה 2.1 קיימים ξ_i ו η_j כך ש $\xi_i=\eta_j$ ולכן המכפלה מתאפסת.

לפי טענת עזר 2

$$\begin{aligned}R_{n,,m}\left(f,g\right)&=R_{n,,m}\left(f,g-qf\right)=R_{n,,m}\left(f,0\right)\\&=R_{n,,m}\left(f,r\right)=0\end{aligned}$$

ויתר מזה

$$g\left(\xi_1\right)=f\left(\xi_1\right)q\left(\xi_1\right)=0$$

כלומר ξ_1 הוא שורש של g גם ולכן ?????

מקרה 2

$n=0$

$$\begin{aligned}R_{0.m}\left(f,g\right)&=a_n^m b_m^0\prod_{i=1}^{0}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right)\\&=a_n^m\end{aligned}$$

והטענה מתקיימת

מקרה 3

$m=\deg\left(g\right)<n=\deg\left(f\right)$ הוכחה זה דומה למקרה 1,

וכמו כן עבור $m=0$ הוכחה דומה עבור מקרה 2

לא נחזור על הוכחות אלו