משפט 3.3

יהיו f, g פולינומים בשדה F.

נסמן ב- (f,g) $h = \mathrm{GCD}(f,g)$ את המחלק המשותף המירבי של f, g .

המעלה של המימד של $\mathrm{Syl}(f,g)$ הוא $n+m-\deg(h)$, ובאופן שקול המעלה של המימד של המשלים של $\mathrm{Syl}(f,g)$ הוא $\deg(h)$.

הערה: מכיון שהמימד של מטריצה והמימד של המשלים תלויים אחד בשני, לפעמים נתייחס רק לאחד מהם כשהכוונה לשניהם.

הוכחה

לפני שנכנסים לגוף ההוכחה נציין :

(1) החלפה בין שורות המטריצה לא משנה את המימד שנפרש ע"י וקטורי השורות (או העמודות) של המטריצה.

(2)$\mathrm{Syl}(f,g)$ ל $\mathrm{Syl}(g,f)$ שוות פרט לסדר של השורות, ולכן המימד שנפרש על ידם שווה, ולכן ללא הגבלת כלליות נוכל להניח ש $m \leq n$.

(3) קיימים r, q כך ש $\deg(r) < m$ המקיימים $f = qg + r$, ובהוכחת טענת עזר 2.4 ראינו שאפשר לעבור מ $\mathrm{Syl}(f,g)$ ל $\mathrm{Syl}(f+(-q_0 g), g) = \mathrm{Syl}(r,g)$ ע"י פועלות על שורות המטריצה ולכן המימד שלהם שווה.

רעיון ההוכחה :

נמצא את h לפי האלגוריתים של אוקלידס, ותוך כדי התהליך נוכיח שהמימד של המשלים של המטריצות המתקבלות לא משתנה, וכך (כפי שנראה בהוכחה עצמה) נמצא את המימד של המשלים של $\mathrm{Syl}(f,g)$.

נתחיל...

נחלק את ההוכחה לשלבים כדי להקל על הקורא להבין את ההוכחה.

שלב 1.

קיים q וקיים r כך ש $k = \deg(r) < m$ ומתקיים

$$f = qg + r\,.$$

$$\deg(q) = \deg(qg) - \deg(g) = n - m$$

מתקיים תנאי משפט 2.4 ולכן לפי (2) המימד של $\mathrm{Syl}_{n,m}(f,g)$ ו $\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)$ שווה.

שלב 2

נסמן $r = \sum_{l=0}^{n} \upsilon_l x^l$, ונתבונן ב $\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)$, נבחין של- r יש $n-k$ מקדמים שהם אפסים ולכן $\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)$ תיהיה מהצורה :

$$\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \upsilon_{n-k-1} & \upsilon_{n-k-2} & \upsilon_{n-k-3} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \upsilon_{n-k-1} & \upsilon_{n-k-2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \upsilon_1 & \upsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \upsilon_2 & \upsilon_1 & \upsilon_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & 0 & b_m & b_{m-1} & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

בעמודה הראשונה יש רק איבר יחיד b_m ולכן וקטור זה שייך למימד שנפרש ע"י וקטורי העמודות (או השורות), ולכן מחיקת העמודה הראשונה והשורה ה $m+1$ (השורה שבה יש את האיבר שאינו אפס בעמודה הראשונה) לא תשפיע על המימד של המשלים.

נובע מכך שהמימד של המשלים של $\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)$ ו $\mathrm{Syl}_{n-1,m}(r,g)$ שווים, כאשר $\mathrm{Syl}_{n-1,m}(r,g)$ היא המטריצה שהתקבלה אחרי המחיקה של השורה והעמודה.

שלב 3

נחזור שוב על שלב 2 (במקרה ש $n-k>1$), על המטריצה $\mathrm{Syl}_{n-1,m}(r,g)$, וכך נמשיך עד שנקבל את המטריצה $\mathrm{Syl}_{k,m}(r,g)$, ולפי ההסבר בשלב 2 המימד של המשלים של המטריצות המתקבלות ע"י מחיקה העמודה והשורה המתאימה לה לא משתנה.

סיכום ביניים:

1. המימד של המשלים של $\mathrm{Syl}_{n,m}(f,g)$ ו $\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)$ ו $\mathrm{Syl}_{k,m}(r,g)$ שווים, כאשר r הוא השארית של החלוקה של f ב g.

שלב 4

לפי (2) המימד של $\mathrm{Syl}_{k,m}(r,g)$ ו $\mathrm{Syl}_{m,k}(g,r)$ שווה ולכן נוכל להתבונן ב $\mathrm{Syl}_{m,k}(g,r)$.

נעשה את שלבים $3-1$ על $\mathrm{Syl}_{m,k}(g,r)$ עם r_0 $k_0=\deg(r_0)<k$ ו- q_0 המקיימים $g=rq_0+r_0$.

נמשיך שוב ושוב את שלבים $3-1$ עד שנקבל r_d כך ש- $r_{d-2}=q_dr_{d-1}+r_d$ כאשר $r_d=0$, ומהאלגוריתים של אוקלידס $r_{d-1}=h$.

שלב 5

משלב 3 המימדים של המשלימים של $\mathrm{Syl}_{k_{d-1},l}(0,h)\ \ldots,\mathrm{Syl}_{k_1,k_0}(r_1,r_0),\mathrm{Syl}_{k_0,k}(r_0,r),\mathrm{Syl}_{k,m}(r,g)$ שווים.

ולכן נשאר לבדוק מהו המימד של המשלים של $\mathrm{Syl}_{k_{d-1},l}(0,h)$ לפי הגדרת מטריצת סילבסטר למטריצה $\mathrm{Syl}_{k_{d-1},l}(0,h)$ יש l שורות אפסים ו $d-1$ שורות בת"ל ולכן המימד של המשלים של $\mathrm{Syl}_{k_{d-1},l}(0,h)$ הוא l,

וזה בדיוק $\deg(h)$,ולכן המימד של $\mathrm{Syl}_{n,m}(f,g)$ הוא $n+m-\deg(h)$.