פרק זה הוא פרק קצר שבו נזכיר בקצרה את הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות ומטריצת סילבסטר של שני פולינומים, ובסוף הפרק נגדיר את הרזולטנט.

הגדרות אלו ילוו אותנו לאורך כל העבודה פעמים במשפטים עצמם ופעמים בהוכחות של המשפטים.

הגדרה 1.1 הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות

תהי $A=\left(\alpha_{i,j}\right)$ מטריצה מגודל $n\times n$

$$\det\left(A\right)=\sum_{\sigma\in S_n}\text{sgn}\left(\sigma\right)\sigma_{1,\sigma(1)}\sigma_{2,\sigma(2)}\cdots\sigma_{n,\sigma(n)}\,.$$

הסכום הוא על $n!$ התמורות σ של המספרים $\{1,2,\ldots,n\}$, כאשר אם עבור השורה ה i ניקח את האיבר בעמודה ה j נקבל את "ההזזה" $i\to j$, ו- $\text{sgn}\left(\sigma\right)=1$ אם התמורה זוגית, ו $\text{sgn}\left(\sigma\right)=-1$ אם התמורה אי-זוגית.

נעבור לדוגמא:

תהי מטריצה

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&2&3\\1&5&3\end{pmatrix}$$

נחשב את $\det\left(A\right)$לפי הגדרה 1.1.

נבחר לדוגמא את תמורת הזהות $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\in S_3$

השורה הראשונה מייצגת את השורה במטריצה והשורה השניה בתמורה מייצגת את העמודה במטריצה, ולכן במקרה זה נבחר מהשורה הראשונה את האיבר מהעמודה הראשונה, מהשורה השניה את האיבר בעמודה השניה, וכן הלאה.

תמורת הזהות היא זוגית ולכן $\text{sgn}\left(\sigma\right)=1$, ובסה"כ מתמורת הזהות נקבל את המכפלה $2\cdot2\cdot3$.

נבחר תמורה נוספת $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\in S_3$, במקרה זה מהשורה הראשונה נבחר את האיבר מהעמודה השלישית, מהשורה השניה את האיבר מהעמודה הראשונה, ומהשורה השלישית את האיבר בעמודה השניה.

ע"י פירוק לחילופים נקבל את $\text{sgn}\left(\sigma\right)$,

$$(132)=(13)\,(21)\ .$$

קבלנו $\text{sgn}\left(\sigma\right)=1$ ולכן בסה"כ מתמורה זו נקבל את המכפלה $1\cdot4\cdot5$.

תמורה נוספת לדוגמא $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\in S_3$, זהו חילוף ולכן $\text{sgn}\left(\sigma\right)=-1$ ובסה"כ מתמורה זו נקבל את המכפלה $-3\cdot4\cdot3$.

ולאחר חישוב כל התמורות נקבל

$$\begin{aligned}\det\left(A\right)&=\sum_{\sigma\in S_3}\text{sgn}\left(\sigma\right)\sigma_{1,\sigma(1)}\sigma_{2,\sigma(2)}\cdots\sigma_{n,\sigma(n)}\\&=2\cdot2\cdot3-2\cdot3\cdot5-3\cdot4\cdot3+3\cdot3\cdot1-1\cdot2\cdot1+1\cdot4\cdot5\\&=12-30-36+9-2+20=25\,.\end{aligned}$$

הגדרה 1.2 מטריצת סילבסטר

יהיו שני פולינומים $g\left(x\right),f\left(x\right)$, מעל שדה F.

נסמן $g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\,,f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

$\mathrm{Syl}\left(f,g\right)=\mathrm{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)$ של שני הפולינומים היא מטריצה מגודל $(n+m)\times(n+m)$ המוגדרת ע"י

$$\mathrm{Syl}\left(f,g\right)=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0\\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

ב- m השורות הראשונות יש את המקדמים של f באופן הבא:

בשורה הראשונה מתחילים מהמקום הראשון עם a_n בעמודה שלאחריה a_{n-1} וכן הלאה עד a_0, בפולינום f יש n איברים ולכן בסה"כ יתמלאו n העמודות הראשונות נשארו m עמודות אותן נאכלס עם אפסים,

בשורה השניה נבצע את אותו הדבר עם שינוי קטן a_n יזוז אחד ימינה כלומר נתחיל את האיכלוס של התאים מהעמודה השניה, ואת העמודה הראשונה נאכלס באפס, ובאופן הזה עד השורה ה m שבה יהיו בהתחלה m אפסים ובסוף n איברי f.

באותו האופן נאכלס את n השורות האחרונות עם איברי הפולינום g, בשורה ה $m+1$ את העמודה הראשונה נאכלס עם g_m, את העמודה השניה עם g_{m-1} וכך נמשיך עד העמודה ה m, ואת שאר העמודות נאכלס באפסים, בשורה ה $m+2$ נתחיל בעמודה השניה עם g_m ואת העמודה הראשונה נאכלס באפס, ונמשיך באופן הזה כמו עם f.

נביא הגדרה נוספת כללית יותר.

יהיו f,g פולינומים ממעלה n,m בהתאמה $\mathrm{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)$ מוגדרת ע"י האיבר במיקום (i,j) שווה ל a_{n+i-j} כאשר $1\le i\le m$ ו- b_{i-j} אם $m+1\le i\le m+n$, $a_i=0$ אם $i>n$ או $i<0$, $b_i=0$ אם $i>m$ או $i<0$.

<u>דוגמא</u>:

נגדיר $f\left(x\right)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $g\left(x\right)=b_2x^2+b_1x+b_0$.

במקרה זה $n=3$ $m=2$, ולכן

$$\mathrm{Syl}_{2,3}\left(f,g\right)=\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0\\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

<u>הבחנה 1.3</u>

אם אחד הפולינומים f או g, ממעלה 0 אז $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$ היא מטריצה משולשת.

בפרק זה נגדיר את הרזולטנט לפי $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$ הגדרה זו תשמש אותנו להוכחת כמה משפטים, בפרק הבא נגדיר את הרזולטנט לפי מכפלה של השורשים של f,g, ולאחר מיכן בפרק 2 נוכיח את השקילות שלהם,

ע"מ להקל על הקורא להבחין מתי משתמשים בהגדרת הרזולטנט לפי $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$ ומתי לי מכפלה של השורשים, נאמץ את הסימנים הבאים: $R\left(f,g\right)$ יסמן את הרזולטנט לפי $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$ ו- $\overline{R\left(f,g\right)}$ יסמן את הרזולטנט לפי מכפלה של השורשים.

<u>הגדרה 1.4 הרזולטנט לפי $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$</u>

יהיו שני פולינומים $g\left(x\right), f\left(x\right)$, מעל שדה F.

נגדיר את הרזולטנט שלהם להיות

עבור $n,m\in\mathrm{N}$, $R\left(f,g\right)=a_0b_0$ אם $n=m=0$,

בכל מקרה אחר

$$R\left(f,g\right)=\det\left(\mathrm{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)\right).$$

הערה 1.5

לפי הגדרה 1.4 $R\left(f,g\right)$ נקבע באופן חח"ע לפי f,g.

נרחיב את ההגדרה 1.4 לכל שני פולינומים ממעלה קטנה מ- n,m, עבור f נשלים עד למעלה n עם מקדמים 0 , ובאותו אופן עבור g נשלים עד למעלה m נשלים עם מקדמים 0.

ובאופן הזה הגדרה 1.4 נכונה לכל שני פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n,m.

כלומר :

אם $\deg\left(\left(f\right)\right)\leq k<m$ נגדיר $\hat{f}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}a_{i}\cdot x^{i}+\sum_{i=k+1}^{n}0\cdot x^{i}$ כאשר a_i הם המקדמים של הפולינום f, ולכן $f=\hat{f}$.
ובאותו אופן נעשה עם הפולינום g אם $\deg\left(g\right)<m$.

באופן כללי נמשיך להשתמש בסימון $R\left(f,g\right)$ ובמקרים שנרצה לציין במפורש שהכוונה לכל שני פולינומים ממעלה קטנה n,m נציין זאת ע"י $R_{n,m}\left(f,g\right)$.

הבחנה 1.6

נבחין שבמקרה שגם $\deg\left(f\right)<n$ וגם $\deg\left(g\right)<m$, ב$\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$ נקבל עמודת אפסים ולכן $R_{n,m}\left(f,g\right)=0$.

הערה 1.7

עבור שני פולינומים f,g מעל שדה F.

נוסיף לשדה F את הסימנים $a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_n$ לשדה F, נסמן $F\left(a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_n\right)$

המקדמים של הפולינומים f,g יכולים לקבל כל ערך בשדה F, ולכן נוכל להתייחס אליהם כאל משתנים בלתי תלויים. ואז הדטרמיננטה היא בעצמה פולינום מעל שדה $F\left(a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_n\right)$ עם $m+n$ משתנים בלתי תלויים.

דוגמא:

עבור $f\left(x\right)=a_2x^2+a_1x+a_0$ $g\left(x\right)=b_1x+b_0$,

נחשב את הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר

$$\begin{aligned}R\left(f,g\right)&=\det\left(\mathrm{Syl}_{2,1}\left(f,g\right)\right)\\&=\det\begin{pmatrix}a_2&a_1&a_0\\b_1&b_0&0\\0&b_1&b_0\end{pmatrix}=a_0b_1^2+a_2b_0^2-b_0a_1b_1\,.\end{aligned}$$

קיבלנו פולינום ב 5 משתנים בלתי תלויים מעל שדה F, כאשר המשתנים הבלתי תלויים הם a_2,a_1,a_0,b_1b_0.

משפט 1.8

יהיו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\,,g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ פולינומים מעל שדה F.

$R\left(f,g\right)$ הוא פולינום הומוגני עם מקדמים שלמים במקדמים a_i,b_i, כאשר עבור $a_0\ldots a_n$ המעלה היא m, ועבור $b_0\ldots b_m$ המעלה היא n.

הוכחה

הוכחה זו מתבססת על הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות.

נחזור למטריצת סילבסטר, זוהי מטריצה מסדר $n+m\times n+m$, נתבונן באיבר כלשהוא בסכום הנתון בהגדרה 1.1 נבחר $\sigma\in S_{n+m}$, המחובר בסכום מתקבל ע"י כפל בין איברי המטריצה כך שכל שורה וכל עמודה מופיעה בדיוק פעם אחת.

כלומר עבור $\sigma_{i_1,j_1},\sigma_{i_2,j_2}$ אם $i_1\neq i_2$ אז $j_1\neq j_2$ לכל i_k,j_l, $1\leq k,l\leq n+m$, ולכן בסה"כ מספר האיברים במכפלה הינו כמספר השורות (או העמודות) וזה בדיוק $n+m$.

לפי הגדרה 1.2 מ- m השורות הראשונות מקבלים מקדמים של הפולינום $f\left(x\right)$, ומ- n השורות האחרונות מקבלים מקדמים מהפולינום $g\left(x\right)$, ובסה"כ סכום החזקות של האיבר σ הוא m מאיברי $f\left(x\right)$ ו n מאיברי $g\left(x\right)$.

כנדרש.

טענה 1.9

יהיו f, g פולינומים מעל שדה F.

$$R_{n,m}(f,g) = (-1)^{nm} R_{m,n}(g,f) \quad (1.1) \ .$$

<u>הוכחה</u>

נפתח בדיון אינטואיטיבי:

ניתן לעבור מ $\text{Syl}(f,g)$ ל $\text{Syl}(g,f)$, ע"י פעולות על שורות המטריצה,ולכן נבדוק מה יהיה המחיר לעבור מ $\text{Syl}(f,g)$ ל $\text{Syl}(g,f)$.

נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות בין השורות נדרש ע"מ להפוך בין f, g וזה יהיה הסימן המבוקש.

נעבור להוכחה.

ההחלפה בין השורות תיעשה באופן הבא:

את השורה הראשונה נעביר להיות בשורה השניה את השניה לשלישית וכן הלאה עד האחרונה. את האחרונה נעביר להיות השורה הראשונה.

בכתיב תמורות נקבל את המעגל

$$(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} \dots r_{n+m}) \ .$$

נבצע את המעגל הזה n פעמים. כך נקבל שהשורה הראשונה (של המטריצה המקורית) תיהיה במקום ה $n+1$ "ואז f תיהיה ב m השורות האחרונות", והשורה ה m (של המטריצה מקורית) תיהיה בשורה הראשונה כלומר "g תיהיה ב n השורות הראשונות" (מספר השורות הוא $n+m$).

החתימה של מחזור באורך l הוא $l-1$ (הוכחת טענה זו חורגת ממסגרת המאמר הזה) ולכן כל מחזור כזה הוא באורך $l = n+m-1$.

נבצע n מחזורים כאלו ע"מ להחליף בין f ל g ולכן בסה"כ נקבל שהסימן הוא

$$\left[(-1)^{(m+n-1)}\right]^n = (-1)^{(nm+n^2-n)} = (-1)^{nm} \ .$$

השוויון האחרות מתקיים כיון ש- $n^2-n = n(n-1)$ תמיד מספר זוגי כי n זוגי או $n-1$ זוגי, ולכן $nm+n^2-n$ ו mn חולקים את אותה זוגיות.

במשוואה (1.1) נעשה שימוש בהמשך.