:2 פרק



תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה

$$.F$$
 שדה מעל פולינומים $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}\;g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_{j}x^{j}.1$

. שניהם של העורשים את מכיל מכיל מכיל של הגבלת של של של הוא שדה הפיצול של הניח להניח להניח להניח של שניהם. $f\cdot g$

g הם השורשים של $\eta_0 \dots \eta_m$ ו הם השורשים של $\xi_0 \dots \xi_n \dots \xi_n$

הרזולטנט

משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)



 $\,\,\,.F$ יהיו f,g פולינומים מעל שדה

$$R_{m.n}\left(f,g\right)=a_{n}^{m}b_{m}^{n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_{i}-\eta_{j}\right)\ \left(2.1\right)$$

את ההוכחה נביא מיד לאחר הדוגמא.

$$f(x) = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2) = x^3 - 4x$$
$$g(x) = (x + 1)(x - 3) = x^2 - 2x - 3$$



0,2,-2 נבחין כי השורשים של f

-1,3 השורשים של g

נסמן

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 2, \xi_3 = -2$$
 $\eta_1 = -1, \eta_2 = 3$



(2.1) נציב במשוואה

$$a_n^m = 1^2 \,, b_m^n = 1^3$$
 כאשר

$$\left(\left(0 - (-1) \right) \left(0 - 3 \right) \right) \left(\left(2 - (-1) \right) \left(2 - 3 \right) \right) \left(\left(-2 - (-1) \right) \left(-2 - 3 \right) \right) = 45$$

-קבלנו ש

$$\boxed{R_{m.n}\left(f,g\right)=45}$$



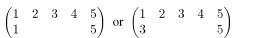
f,gאם סילבסטר של מטריצת אל מטריננטה את 1.1 את לפי הגדרה נחשב לפי

$$R_{3.2}(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס.

ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה







ולאחר שנשלים את כל התמורות נקבל את התמורות הבאות

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}$$



את הסימן רשמנו מתחת לתמורה.

ולאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל.

$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$



2.1 כלומר במקרה זה קבלנו את השוויון במשפט

עכשיו נעבור להוכחה

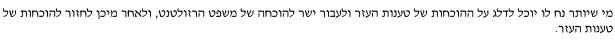
הוכחת משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)



לצורך הוכחת משפט הרזולטנט נצטרך כמה טענות עזר,



נביא את הטענות ואת ההוכחות שלהם לפני המשפט



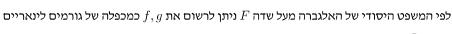
טענה עזר 2.2

F יהיו מעל שדה f,g יהיו

$$.R\left(f,g\right) =a_{n}^{m}\prod_{i=1}^{n}g\left(\xi_{i}\right)$$
.
I

$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{nm}b_{m}^{n}\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_{j}\right)$$
.
II

טענה זו נובעת כמעט ישירות ממשפט הרזולטנט ומהמשפט היסודי של האלגברה.





כך gאת נרשום האלגברה של היסודי את לפי

$$g\left(x\right) = b_{m} \prod_{j=1}^{m} \left(x - \eta_{j}\right)$$

נציב g ב $\xi_0 \dots \xi_m$ נציב

$$(*) \ g\left(\xi_{i}\right) = b_{m} \prod_{i=1}^{m} \left(\xi_{i} - \eta_{j}\right)$$



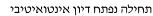
ומשרשור השווינות הבא נקבל את השוויון

$$\begin{split} \boxed{R\left(f,g\right)} &= a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left(\xi_i - \eta_j\right) \\ &= a_n^m \prod_{i=1}^n b_m \prod_{j=1}^m \left(\xi_i - \eta_j\right) \\ &\text{hence}\left(*\right) = \boxed{a_n^m \prod_{i=1}^n g\left(\xi_i\right)} \end{split}$$

כנדרש.



עבור f נדרש עוד תהליך ע"מ לקבל את השוויון.





 $rac{1}{2}$ נרשום את f גם כן כמפכלה של גורמים לינאריים

$$f\left(x\right)=a_{n}\prod_{i=1}^{n}\left(x-\xi_{i}\right)$$

: דיון אינטואיטיבי

בצורה I בצורה אחרונות g בילסבסטר בין f לg כלומר שg תיהיה בg שורות הראשונות וg ב שורות האחרונות בילסבסטר בין ביל כלומר ש

$$R\left(g,f\right)=b_{m}^{n}\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_{j}\right)$$

החלפת שורות במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה פרט לסימן ולכן ע"י פעולות של החלפת השורות נקבל את השוויון הבא



$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{k}R\left(g,f\right)=\left(-1\right)^{k}b_{m}^{n}\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_{j}\right)$$

.נותר לברר מהו $\,k$ כלומר מה הסימן

נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות נדרש ע"מ להפוך בין

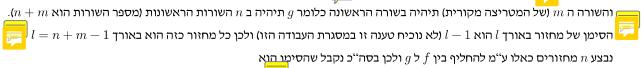


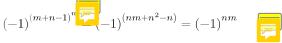
בכתיב תמורות נקבל את המעגל



$$\left(r_1r_2\dots r_mr_{m+1}\dots r_{n+m}\right)$$

נבצע את המעגל הזה n פעל n + 1 נקבל שהשורה הראשונה (של המטריצה המקורית) תיהיה במקום הn + 1 ואז n + 1 תיהיה בn השורות האחרונות,







השוויון האחרות מתקיים כיון ש- $n = n \, (n-1) + n^2$ תמיד מספר זוגי כיn זוגי אוn-1 זוגי,



ולכן בסה"כ קבלנו II



נשים לב שתוך כדי ההוכחה קבלנו ש-

 $R(f,g) = (-1)^{nm} R(g,f)$ (2.2)



ז נעשה שימוש בהמשך





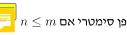
התאמה בהתאמה פולינומים בהתאמה f,gיהיו

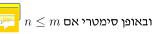


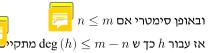
 $m \leq n$ כך שמתקיים $\deg\left(h\right)\leq n-m$ ויהי hפולינום כך ש

אז מתקיים

 $R_{n,m}\left(f+hg,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$











 $R_{n,m}\left(f,g+hf\right) =R_{n,m}\left(f,g\right)$

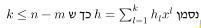


ולכן גם $\deg\left(hg\right) \,>\, n+m$ אחרת אחרת ($\deg\left(h
ight) \,\leq\, m-n$ ולכן ובדומה במקרה הראשון במקרה הראשון ובדומה . ואז השוויון לא יוכל להתקיים $\deg\left(f+hg\right)>n+m$





 $h\,$ נוכיח באינדוקציה על המעלה של













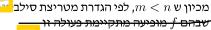
. נראה שאפשר להגיע מ $R_{n,m}\left(f+hg,g
ight)$ ל $R_{n,m}\left(f+hg,g
ight)$ ע"י פעולות על השורות שאפשר להגיע מ

fנוסיף את השורות של הפולינום gכאשר כופלים אותם במונום השורות של הפולינום לינום פולינום לינום ווסיף את נוסיף את השורות של הפולינום אותם במונום אותם במונום אותם במונום אותם במונום במונום אותם במונום אותם במונום במונום במונום במונום אותם במונום אותם במונום אותם במונום אותם במונום במונום אותם במונום אותם במונום אותם במונום אותם במונום במונום במונום במונום במונום אותם במונום במונ



 $R_i \to R_i + h_\rho x^\rho R_{i+n} \ 1 \le i \le n$

מופיעה בnהשורות האחרונות וfבmהשורות הראשונות ולכן נקבל שבכל.







ולאחר הפעולה נקבל את המטריצה

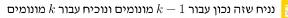
$$\begin{pmatrix} a_n + h_\rho x^\rho g_n & a_{n-1} + h_\rho x^\rho g_{n-1} & a_{n-2} + h_\rho x^\rho g_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n + h_\rho x^\rho g_n & a_{n-1} + h_\rho x^\rho g_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 + h_\rho x^\rho g_1 & a_0 + h_\rho x^\rho g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 + h_\rho x^\rho g_2 & a_1 + h_\rho x^\rho g_1 & a_0 + h_\rho x^\rho g_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = R_{n,m} \left(f + \left(h_\rho x^\rho \right) g_n \right)$$

 $h_
ho x^
ho$ פעולות אלו לא משנות את הערך של הדטרמיננטה ולכן עבור מונום $h_
ho x^
ho$

נקבלש

$$R_{n,m}\left(f+\left(h_{\rho}x^{\rho}\right)g,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$$

: הנחת האינדוקציה



: צעד האינדוקציה

$$\begin{split} \boxed{R_{n,m}\left(f+hg,g\right)} &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k}h_{l}x^{l}\right)g,g\right) \\ &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k-1}h_{l}x^{l}\right)g+\left(h_{k}x^{k}\right)g,g\right) \\ &\text{step induction} &= R_{n,m}\left(f+\left(h_{k}x^{k}\right)g,g\right) \\ &\text{case base} &= \boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)} \end{split}$$

כנדרש.

. עבור המקרה השני $R_{n,m}\left(f,g+hf
ight)=R_{n,m}\left(f,g
ight)$ נקבל את השוויון באותו עבור

טענת עזר 2.5

אז $\deg\left(g\right)\leq k\leq m$ אם. i

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)$$

אז $\deg\left(f
ight)\leq k\leq n$ אז.ii



$$R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{(n-k)m}b_{m}^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)$$

<u>הוכחה</u>

הוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר,

כלומר נניח ש
$$g_m=0$$
 אז

$$\operatorname{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$



ק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\operatorname{Syl}(f,\hat{g}) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$



ק,
$$\hat{g}\left(x
ight)=g\left(x
ight)$$
 אז ל $b_{m}=0$ מאשר $\hat{g}\left(x
ight)=\sum_{j=0}^{m-1}b_{j}x^{j}$ ומכיון ש

עם נפתח את הדטרמיננטה לפי לפי אפי העמודה הדטרמיננטה ולכן הדטרמיננטה ולכן אם את ולכן ולכן אח



$$\boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)} = a_{n}R_{n,m}\left(f,\hat{g}\right) = \boxed{a_{n}R_{n,m-1}\left(f,g\right)}$$



נסמן הזה השוויון את עוד קצת ונפתח ונקבל k=m-1

$$\begin{split} a_{n}R_{n,m-1}\left(f,g\right) &= a_{n}^{m-(m-1)}R_{n,m-1}\left(f,g\right) \\ &= \boxed{a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)} \end{split}$$



k=m-1 וקבלנו את הטענה עבור



i. הוכחה באינדוקציה לאחור על

עבור m מתקבל השוויון מיידי

$$\boxed{R_{n,m}\left(f,g\right) = a_{n}^{0}R_{n,k}\left(f,g\right) = \boxed{a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)}}$$

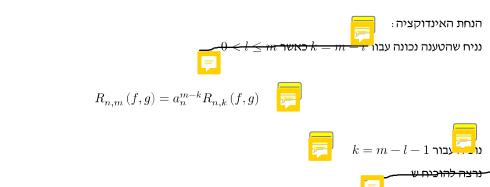


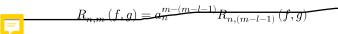
בסיס האינדוקציה:



$$g_m=0$$
 עבור $k=m-1$ כלומר

ראינו כי הטענה נכונה







$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_{n}^{m-\left(m-l\right)}R_{n,m-l}\left(f,g\right)$$

m-l ניקח עד החזקה g כך שעבור וויקס למעשה הרזולטנט של הת $n_{n,m-l}\left(f,g
ight)$ ניקח עד החזקה 0 הוא m-l-1 הוא של החזקה המקדם הוא ולפי ש מתקיים א $R_{n,m-l}\left(f,g\right)$ שעבור שעבור בסיס לפי לפי לפי יודעים אבל אנחנו

$$R_{n,m-l}\left(f,g\right) = a^{n}R_{n,m-l-1}\left(f,g\right)$$

ולכן בסה"כ נקבל את השוויון

$$\begin{split} \boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)} &= a_n^{m-(m-l)} R_{n,m-l}\left(f,g\right) \\ \text{step induction} &= a_n^{m-(m-l)} a_n R_{n,m-l-1}\left(f,g\right) \\ &= a_n^{m-(m-l-1)} R_{n,m-l-1}\left(f,g\right) \\ \boxed{a_n^{m-k} R_{n,k}\left(f,g\right)} \end{split}$$



$$R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{nm}R_{m,n}\left(g,f\right)$$

 $R_{m,n}\left(g,f
ight) = b_m^n \prod_{j=1}^m f\left(\eta_j
ight)$ לפי לפי והתנאי ש לפי לפי לפי לפי לפי לפי לפי ולכן

$$\left(-1\right)^{nm}R_{m,n}\left(g,f\right)=\left(-1\right)^{nm}b_{m}^{n-k}R_{m,k}\left(g,f\right)$$



(2.2) ושוב לפי משוואה



$$R_{m,k}\left(g,f\right)=\left(-1\right)^{km}R_{k,m}\left(f,g\right)$$

נציב ונקבל

$$\begin{split} \left(-1\right)^{nm}R_{m,n}\left(g,f\right) &= \left(-1\right)^{nm}b_{m}^{n-k}\left(-1\right)^{km}R_{k,m}\left(f,g\right) \\ &= \left(-1\right)^{m(n+k)}b_{m}^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right) \end{split}$$





ומכיון של m-n ו m-n אותה זוגיות נקבל לאחר כל השוויונות

$$\left|R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{m(n-k)}b_{m}^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)\right|$$

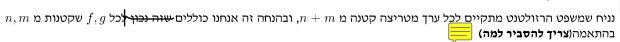
כנדרש.

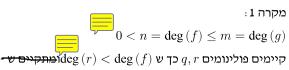


לפי המוסכמות בראש הפרק

$$f\left(x\right)=a_{n}\prod_{i=1}^{n}\left(x-\xi_{i}\right)^{\frac{1}{\nu}}g\left(x\right)=b_{m}\prod_{j=1}^{m}\left(x-\eta_{j}\right)$$

בסיס האינדוקציה (חסר)





$$g = qf + r$$

נבחין כי

$$\deg\left(g-r\right) = \deg\left(qf\right)$$



ולכן נקבל את השוויונות הבאים

$$\deg\left(q\right)=\deg\left(qf\right)-\deg\left(f\right)=\deg\left(g-r\right)-n=m-n$$

מטענת עזר 2 נקבל



$$R_{n,m}\left(f,g\right)=R_{n,m}\left(f,g-qf\right)=R_{n,m}\left(f,r\right)$$



. נחלק שוב למקרים.



 $k=\deg{(r)}\geq 0$ מקרה r
eq 0 נסמן r

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 3



$$R_{n,m}\left(f,r\right)=a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,r\right)=a_{n}^{m-k}a_{n}^{k}\prod_{i=1}^{n}r\left(\xi_{i}\right)=a_{n}^{m}\prod_{i=1}^{n}g\left(\xi_{i}\right)$$



fשלם שורשים הם ξ_i ש מכך נובע נובע האחרות השוויון האחרות נובע



יכי r כי שורשים של r כי

$$\boxed{g\left(\xi_{i}\right)} = \underbrace{q\left(\xi_{i}\right)f\left(\xi_{i}\right)}_{=0} + r\left(\xi_{i}\right) = \boxed{r\left(\xi_{i}\right)}$$

 $.r \neq 0$ ו ס
 $0 < n = \deg\left(f\right) \leq m = \deg\left(g\right)$ ו סבור וקבלנו את הטענה וקבלנו

r=0 עבור

$$g = fq$$

לפי ההנחה של מקרה זה n>0 ולכן

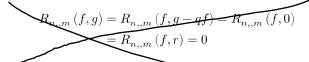
$$Syl_{n,m}\left(f,r\right) =Syl_{n,m}\left(f,0\right)$$

ולכן



$$R_{n,,m}\left(f,r\right) =0$$

לפי טענת עזר 2



ויתר מזה

 $g(\xi_1) = f(\xi_1) q(\xi_1) = 0$

gגם ולכן אורש של בלומר ξ_1 גם ולכן אוריי

מקרה 2



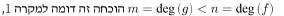


$$\begin{split} R_{0.m}\left(f,g\right) &= a_{n}^{m}b_{m}^{0}\prod_{i=1}^{0}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_{i}-\eta_{j}\right) \\ &= a_{n}^{m} \end{split}$$



והטענה מתקיימת





2 מקרה עבור הוכחה הוכחה m=0 וכמו כן עבור m=0

לא נחזור על הוכחות אלו