האוניברסיטה הפתוחה

עבודה סמינריונית בנושא הרזולטנטה

אליסף לרר

ת.ז. 308376458

מנחה: פרופ' אלעד פארן

תוכן העניינים :

הקדמה

הרזולטנטה של שני פולינומים מעל שדה K הוא ביטוי פולינומיאלי מעל שדה של המקדמים שלהם השווה לאפס אם ורק אם לפולינומים יש שורש משותף בשדה K. באופן שקול הרזולטנטה מתאפס אם רק אם יש להם גורם משותף בחוג הפולינומים $K\left[x\right]$.

לרזולטנטה שימושים נרחבים בתורת המספרים, באופן ישיר או דרך הדסקרמיננטה, שהרזולטנטה של פולינום והנגזרת שלו הוא אחד הדרכים להגדיר את הדסקרמיננטה.

ניתן לחשב את הרזולטנטה של שני פולינומים עם מקדמים רציונליים או פולינומיים באופן יעיל אלגורימית. זהו כלי בסיסי במדעי המחשב (algebra computational), וזה כלי מובנה ברוב המערכות האלגברה הממוחשבת. הרזולטנטה גם משמש לפירוק אלגברי גלילי (cylindrical algebraic decomposition), לאינטגרציה של מערכות פונקציות רציונליות, וגם לשרטוט עקומות המוגדרות על ידי משוואה פולינומית בשני משתנים.

הרזולטנטה של n פולינומים הומוגניים ב- n משתנים היא הכללה, שהוצגה על ידי מקאוליי[1], של הרזולטנטה במשתנה בודד. עם בסיסי גרבנר, הוא אחד הכלים העיקריים של תורת החילוץ (theory elimination) .

בעבודה זו נפרש את ההגדרה של הרזולטנטה ותכונותיו, ונוכיח את המשפטים העיקריים של תורת הרזולטנטה.

בתחילה העבודה, נזכיר בקצרה את הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות, ונגדיר את מטריצת סילבסטר. בהמשך נגדיר את הרזולטנטה ונוכיח את המשפט היסודי (פרק 2) שהוא החלק העיקרי של העבודה.

בשאלה של השורשים המשותפים של שני פולינומים נדון בפרק 3, וכן נוכיח עוד כמה תוצאות מעניינות שנובעות ממשפט הרזולטנטה.

פרק 1.

מטריצת סילבסטר

פרק זה הוא פרק קצר שבו נזכיר בקצרה את הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות ומטריצת סילבסטר של שני פולינומים, ובסוף הפרק נגדיר את הרזולטנטה.

הגדרות אלו ילוו אותנו לאורך כל העבודה פעמים במשפטים עצמם ופעמים בהוכחות של המשפטים.

הגדרה 1.1 הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות

תהי $A = \left(\alpha_{i,j}\right)$ מטריצה מגודל $n \times n$

$$\det\left(A\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\left(\sigma\right) \alpha_{1,\sigma(1)} \alpha_{2,\sigma(2)} \cdots \alpha_{n,\sigma(n)} \,.$$

הסכום הוא על $n!$ התמורות σ של המספרים $\{1, 2, \ldots, n\}$, ו- $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right) = 1$ אם התמורה זוגית, ו $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right) = -1$ אם התמורה אי-זוגית.

נעבור לדוגמא :

תהי מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \,.$$

נחשב את $\det\left(A\right)$ לפי הגדרה 1.1.

נבחר לדוגמא את תמורת הזהות $S_3 \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

תמורת הזהות היא זוגית ולכן $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right) = 1$, ובסה"כ מתמורת הזהות נקבל את המכפלה $2 \cdot 2 \cdot 3$.

נבחר תמורה נוספת $S_3 \ni (132) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, ע"י פירוק לחילופים נקבל את $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)$,

$$(132) = (13)\,(21) \,.$$

קבלנו $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right) = 1$ ולכן בסה"כ מתמורה זו נקבל את המכפלה $1 \cdot 4 \cdot 5$.

תמורה נוספת לדוגמא $S_3 \ni (12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, זהו חילוף ולכן $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right) = -1$ ובסה"כ מתמורה זו נקבל את המכפלה $-3 \cdot 4 \cdot 3$.

ולאחר חישוב כל התמורות האחרות נקבל

$$\begin{aligned} \det\left(A\right) &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}\left(\sigma\right) \alpha_{1,\sigma(1)} \alpha_{2,\sigma(2)} \cdots \alpha_{n,\sigma(n)} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 12 - 30 - 36 + 9 - 2 + 20 = 25 \,. \end{aligned}$$

הגדרה 1.2 מטריצת סילבסטר

יהיו שני פולינומים $g\left(x\right), f\left(x\right)$, מעל שדה K.

נסמן $g\left(x\right) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, $f\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ כאשר $a_n \neq 0$ ו $b_m \neq 0$.

מטריצת סילבסטר של f,g מסומנת ע"י $\text{Syl}(f,g)=\text{Syl}_{n,m}(f,g)$, היא מטריצה מגודל $(n+m)\times(n+m)$ המוגדרת ע"י

$$\text{Syl}(f,g)=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0\\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

נביא הגדרה נוספת כללית יותר.

יהיו f,g פולינומים ממעלה n,m בהתאמה. $\text{Syl}_{n,m}(f,g)$ מוגדרת באופן הבא:

האיבר במיקום (i,j) שווה ל a_{n+i-j} כאשר $1\leq i\leq m$ ו- b_{i-j} אם $m+1\leq i\leq m+n$. $a_i=0$ אם $\deg(f)>n$ או $\deg(f)<0$, ו $b_i=0$ אם $\deg(g)>m$ או $\deg(g)<0$.

<u>**דוגמא**</u>:

נגדיר $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $g(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$.

במקרה זה $n=3$ ו- $m=2$, ולכן

$$\text{Syl}_{2,3}(f,g)=\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0\\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

הבחנה 1.3

אם אחד הפולינומים f או g, ממעלה 0 אז $\text{Syl}(f,g)$ היא מטריצה משולשת.

הגדרה 1.4 הגדרת הרזולטנטה

יהיו שני פולינומים $f(x),g(x)$ ממעלה n,m בהתאמה, מעל שדה F יהיו $n,m\in\mathbb{N}$.

נגדיר את הרזולטנטה שלהם

$R(f,g)=a_0b_0$ אם $n=m=0$.

בכל מקרה אחר

$$R(f,g)=\det\left(\text{Syl}_{n,m}(f,g)\right).$$

הערה 1.5

לפי ההגדרה הכללית בסוף 1.2, הגדרה 1.4 עדין תקפה לכל שני פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n,m.

באופן כללי נמשיך להשתמש בסימון $R(f,g)$, במקרים שנרצה להתייחס למימד בצורה מפורשת נציין זאת ע"י $R_{n,m}(f,g)$.

הבחנה 1.6

נבחין שבמקרה שגם $\deg(f)<n$ וגם $\deg(g)<m$, ב- $\text{Syl}(f,g)$ נקבל עמודת אפסים ולכן $R_{n,m}(f,g)=0$.

הערה 1.7

עבור שני פולינומים f, g מעל שדה K. נוסיף לשדה F את המשתנים $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$, ונסמן $F = K(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n)$.

אם נסמן $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ ו- $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, אז f ו g הם פולינומים מעל F.

$\det(\mathrm{Syl}(f, g))$ היא בעצמה איבר של F כלומר פולינום מעל השדה K במשתנים $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$.

ולכן נוכל להתייחס ל- $\det(\mathrm{Syl}(f, g))$ כפולינום במשתנים אלו.

מכאן ולהבא, כשנזכיר את השדה F, כוונתנו ל- F כפי שהוא מוגדר בהערה 1.7.

דוגמא:

עבור $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ו- $g(x) = b_1x + b_0$, נחשב את הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר

$$\begin{aligned} R(f, g) &= \det\left(\mathrm{Syl}_{2,1}(f, g)\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = a_0b_1^2 + a_2b_0^2 - b_0a_1b_1 \, . \end{aligned}$$

קיבלנו איבר בשדה F, שהוא פולינום ב 5 משתנים בלתי תלויים a_2, a_1, a_0, b_1, b_0 מעל השדה K.

משפט 1.8

יהיו $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ ו- $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ פולינומים מעל שדה F.

$R(f, g)$ הוא פולינום הומוגני עם מקדמים שלמים במקדמים a_i, b_i, כאשר עבור כל מחובר בסכום, מעלת המכפלות בין האיברים $a_0 \dots a_n$ היא m, ומעלת המכפלות בין האיברים $b_0 \dots b_m$ היא n.

דוגמא

נתבונן בדוגמא שלפני משפט 1.8, קבלנו את האיבר בשדה F $a_0b_1^2 + a_2b_0^2 - b_0a_1b_1$ שהוא פולינום הומוגני ממעלה 3 מעל השדה K, כאשר בכל מחובר בסכום עבור a_i המעלה היא $m = 1$ ועבור b_j המעלה $n = 2$.

הוכחה

הוכחה זו מתבססת על הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות.

נחזור ל $\mathrm{Syl}(f, g)$, זוהי מטריצה מסדר $n + m \times n + m$, נתבונן באיבר כלשהוא בסכום הנתון בהגדרה 1.1 ונבחר $\sigma \in S_{n+m}$, המחובר בסכום המתאים ל- σ מתקבל ע"י כפל בין איברי המטריצה כך שכל שורה וכל עמודה מופיעה בדיוק פעם אחת.

כלומר עבור σ_{i_1,j_1} ו- σ_{i_2,j_2} אם $i_1 \neq i_2$ אז $j_1 \neq j_2$ לכל j_l ו i_k עם $1 \leq k$ ו $l \leq n + m$, ולכן בסה"כ מספר האיברים במכפלה הינו כמספר השורות (או העמודות), וזה בדיוק $n + m$.

לפי הגדרה 1.2, מ- m השורות הראשונות מקבלים מקדמים של הפולינום $f(x)$, ומ- n השורות האחרונות מקבלים מקדמים מהפולינום $g(x)$, ובסה"כ סכום החזקות של σ הוא m מאיברי $f(x)$ ו n מאיברי $g(x)$ כנדרש.

טענה 1.9

יהיו f, g פולינומים מעל שדה F.

$$R_{n,m}(f, g) = (-1)^{nm} R_{m,n}(g, f) \quad (1.1) \, .$$

הוכחה

נפתח בדיון אינטואיטיבי:

ניתן לעבור מ $\mathrm{Syl}(f, g)$ ל $\mathrm{Syl}(g, f)$, ע"י פעולות על שורות המטריצה, ולכן נבדוק מה יהיה המחיר לעבור מ $\mathrm{Syl}(f, g)$ ל- $\mathrm{Syl}(g, f)$.

נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות בין השורות נדרש ע"מ להפוך בין f, g וזה יהיה הסימן המבוקש.

נעבור להוכחה.

ההחלפה בין השורות תיעשה באופן הבא :

את השורה הראשונה נעביר להיות בשורה השניה, את השניה לשלישית, וכן הלאה עד האחרונה. את האחרונה נעביר להיות השורה הראשונה.

בכתיב תמורות נקבל את המחזור

$$(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} \dots r_{n+m})\ .$$

נבצע את המחזור הזה n פעמים. כך נקבל שהשורה הראשונה (של המטריצה המקורית) תהיה במקום ה $n+1$ "ואז f תהיה ב m השורות האחרונות", והשורה ה m (של המטריצה מקורית) תהיה בשורה הראשונה כלומר "g תיהיה ב n השורות הראשונות" (מספר השורות הוא $n+m$).

החתימה של מחזור באורך l הוא $l-1$ (הוכחת טענה זו חורגת ממסגרת המאמר הזה[2]) וכל מחזור כזה הוא באורך $l=n+m-1$.

נבצע n מחזורים כאלו ע"מ להחליף בין f ל g ולכן בסה"כ נקבל שהסימן הוא

$$\left[(-1)^{(m+n-1)}\right]^n = (-1)^{(nm+n^2-n)} = (-1)^{nm}\ .$$

השוויון האחרות מתקיים כיון ש- $n^2-n=n(n-1)$ תמיד מספר זוגי כי n זוגי או $n-1$ זוגי, ולכן $nm+n^2-n$ ו- mn חולקים את אותה זוגיות.

פרק 2.

הרזולטנטה

תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה.

1. $g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_{j}x^{j}$ ו- $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}$ פולינומים מעל שדה F (F השדה שהוגדר בהערה 1.7).

2. ללא הגבלת הכלליות, ניתן להניח ש F הוא שדה הפיצול של $f\cdot g$, כלומר ל f,g יש פירוק לינארי מעל F, ולכן F מכיל את כל השורשים של f ו- g.

3. לפי 2 נוכל להניח ש $\xi_{n}\ldots\xi_{0}$ הם השורשים של f, ו $\eta_{m}\ldots\eta_{0}$ הם השורשים של g, לאו בהכרח שונים זה מזה.

<u>משפט 2.1 משפט הרזולטנטה</u>

יהיו f,g פולינומים מעל שדה F.

אם $m=0$ ו $n>0$, $R\left(f,g\right)=a_{0}^{m}$.

אם $n=0$ ו $m>0$, $R\left(f,g\right)=b_{0}^{n}$.

אם $m=n=0$, $R\left(f,g\right)=a_{0}b_{0}$.

אם $n,m>0$,

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_{n}^{m}b_{m}^{n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_{i}-\eta_{j}\right)\quad(2.1)$$

<u>דוגמא</u>

$$f\left(x\right)=x\left(x^{2}-4\right)=x\left(x+2\right)\left(x-2\right)=x^{3}-4x$$

$$g\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-3\right)=x^{2}-2x-3$$

נבחין כי השורשים של f הם $0,2,-2$ והשורשים של g הם $-1,3$.

נסמן

$$\xi_{1}=0,\ \xi_{2}=2,\ \xi_{3}=-2,\ \eta_{1}=-1,\ \eta_{2}=3$$

נציב במשוואה (2.1) כאשר $b_{m}^{n}=1^{3}$, $a_{n}^{m}=1^{2}$.

$$\left(\left(0-\left(-1\right)\right)\left(0-3\right)\right)\left(\left(2-\left(-1\right)\right)\left(2-3\right)\right)\left(\left(-2-\left(-1\right)\right)\left(-2-3\right)\right)=45$$

קבלנו ש-

$$R\left(f,g\right)=45$$

נחשב לפי הגדרה 1.1 את $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$:

$$R\left(f,g\right)=\begin{vmatrix}1&0&-4&0&0\\0&1&0&-4&0\\1&-2&-3&0&0\\0&1&-2&-3&0\\0&0&1&-2&-3\end{vmatrix}$$

נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס. ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & 5 \end{pmatrix} \text{ או } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & & & & 5 \end{pmatrix}$$

ביתר דיוק נקבל את התמורות הבאות:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}.$$

את הסימן רשמנו מתחת לתמורה.

לאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל

$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$

כלומר במקרה זה מתקיים משפט 2.1.

כדי להוכיח את משפט 2.1, נוכיח תחילה שהוא שקול למשפט הבא.

משפט 2.2

יהיו f, g פולינומים מעל שדה F.

I. $R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\xi_i)$.

II. $R(f,g) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\eta_j)$.

הוכחת משפט 2.2

טענה זו נובעת כמעט ישירות מהמשפט היסודי של האלגברה כי לפי זה ניתן לרשום את f, g כמכפלה של גורמים לינאריים מעל שדה F.

הוכחת I.

נרשום את g כמכפלה של גורמים לינארים:

$$g(x) = b_m \prod_{j=1}^m (x - \eta_j) .$$

נציב $\xi_0 \dots \xi_n$ ב g ונקבל

$$g(\xi_i) = b_m \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) . \quad (*)$$

משרשור השווינות הבא נקבל את השוויון

$$a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^n b_m \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j)$$
$$\overset{(*)\text{ לפי}}{=} \boxed{a_n^m \prod_{i=1}^n g(\xi_i)}.$$

הוכחת II

תחילה נבחין שע"י הוצאת -1 מהביטוי $\left(\eta_j-\xi_i\right)$ נקבל את השוויון

$$a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right)=\left(-1\right)^{nm} b_m^n a_n^m \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}\left(\eta_j-\xi_i\right) \ .$$

מכאן נוכל להמשיך כמו בהוכחה של I. נרשום את f כמכפלה של גורמים לינאריים

$$f\left(x\right)=a_n\prod_{i=1}^{n}\left(x-\xi_i\right) \ .$$

נציב $\eta_0 \dots \eta_m$

$$f\left(\eta_j\right)=a_n\prod_{i=1}^{n}\left(\eta_j-\xi_i\right) \ . \ (**)$$

ולכן שוב משרשור השוויונות הבא נקבל

$$\begin{aligned} a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right) &= \left(-1\right)^{nm} b_m^n a_n^m \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}\left(\eta_j-\xi_i\right) \\ &= \left(-1\right)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^{m} a_n \prod_{i=1}^{n}\left(\eta_j-\xi_i\right) \\ \text{(**) לפי} &= \boxed{\left(-1\right)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f\left(\eta_j\right)} . \end{aligned}$$

כנדרש.

נעבור עכשיו להוכחת משפטים 2.1 ו 2.2, תחילה נוכיח שתי טענות עזר שנצטרך להם בהוכחה.

טענה עזר 2.3

יהיו f,g פולינומים ממעלה m,n בהתאמה כך שמתקיים $m\le n$, ויהי h פולינום כך ש $\deg\left(h\right)\le n-m$.

מתקיים

$$R\left(f+hg,g\right)=R\left(f,g\right) \ .$$

באופן סימטרי אם $n\le m$ אז עבור h כך ש $\deg\left(h\right)\le m-n$ מתקיים

$$R\left(f,g+hf\right)=R\left(f,g\right) \ .$$

.

הוכחה

ההוכחה באינדוקציה על המעלה של h, נניח ש $k\le n-m$ ונסמן $h=\sum_{\rho=0}^{k} h_\rho x^\rho$, נוכל להניח ללא הגבלת כלליות ש $k=n-m$ ע"י הגדרת $h_\rho=0$ לכל שאר החזקות.

תחילה נוכיח שהמשפט מתקיים עבור מונום יחיד cx^ρ עם $\rho\in\mathbb{N}$, ובפרט הוא מתקיים עבור $h_\rho x^\rho$.

מכיון ש $m<n$, לפי הגדרת מטריצת סילבסטר נקבל

$$\begin{pmatrix} a_n+cb_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-\rho-1} & a_{n-2}+cb_{n-\rho-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n+cb_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2+cb_2 & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = R\left(f+\left(cx^\rho\right)g,g\right)$$

הביטוי $n-\rho$ נובע מכך שהכפל cx^ρ מזיז ב g מקומות את המונומים של g ρ מקומות כי $cx^\rho b_j x^j = cb_j x^{j+\rho}$. לאחר הצבה $i=j+\rho$ נקבל $j=i-\rho$ כלומר המקדם של החזקה ה i הוא $b_{i-\rho}$.

כיון ש $\rho < n-m$, כל אחד מ m השורות הראשונות ב $\mathrm{Syl}\left(f+cx^\rho g,g\right)$ הוא סכום של אותה שורה מוכפלת ב c עם אחת השורות מ- n השורות האחרונות.

במילים אחרות ניתן לעבור מ $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$ ל $\mathrm{Syl}\left(f+cx^\rho g,g\right)$ ע"י פעולות של הוספת קומבינציה לינארית של שורות אחרות על שורה במטריצה (שימו לב ש- $b_{n-\rho-i}=0$ לכל $n-\rho-i>m$). אבל הוספת קומבינציה לינארית של שורות לשורה אחרת במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה לכן

$$\boxed{R\left(f+\left(cx^\rho\right)g,g\right)=R\left(f,g\right)}$$

עתה נשלים את ההוכחה למקרה הכללי.

נניח שהטענה נכונה עבור פולינום ממעלה $k-1$ ונוכיח אותה עבור פולינום ממעלה k.

צעד האינדוקציה:

$$\begin{aligned} \boxed{R\left(f+hg,g\right)} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k}h_l x^l\right)g,g\right)\right) \\ &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k-1}h_l x^l\right)g+\left(h_k x^k\right)g,g\right)\right) \\ \text{צעד האינדוקציה} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(h_k x^k\right)g,g\right)\right) \\ \text{בסיס האינדוקציה} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f,g\right)\right) \\ &= \boxed{R\left(f,g\right)} \end{aligned}$$

כנדרש.

המקרה השני $R\left(f,g+hf\right)=R\left(f,g\right)$ מתקבל באותו האופן.

<u>טענת עזר 2.4</u>

I. אם $\deg\left(g\right)\le k\le m$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_n^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)\ .$$

II. אם $\deg\left(f\right)\le k\le n$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{(n-k)m}b_m^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)\ .$$

הוכחה

ההוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר.

הוכחת I.

נניח ש $b_m = 0$. אז

$$\operatorname{Syl}(f,g)=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

ניתסן להבחין שאם נמחק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\operatorname{Syl}(f,\hat{g})=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

כאשר $\hat{g}(x)=\sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j$, מכיון ש $b_m=0$, $\hat{g}(x)=g(x)$, לכן אם נפתח את הדטרמיננטה $R(f,g)$ לפי העמודה הראשונה נקבל:

$$\boxed{R(f,g)}=a_n R_{n,m}(f,\hat{g})=\boxed{a_n R_{n,m-1}(f,g)}.$$

באופן כללי אם $b_i=0$ עבור כל i כך ש- $r\le i<m$ אז

$$\begin{aligned} R(f,g) &= a_n R_{n,m-1}(f,g) \\ &= a_n a_n R_{n,m-2}(f,g) \\ &= \Big(\underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{r \text{ פעמים}}\Big) R_{n,m-r}(f,g) \\ &= a_n^r R_{n,m-r}(f,g) \end{aligned}$$

.

נסמן $m-r=k$ ונקבל $R(f,g)=a_n^{m-k}R_{n,k}(f,g)$ כנדרש.

הוכחת II.

לפי 1.9

$$R(f,g) = (-1)^{nm} R_{m,n}(g,f)$$

לפי I והתנאי ש $\deg(f) < k < n$ נקבל

$$(-1)^{nm} R_{m,n}(g,f) = (-1)^{nm} b_m^{n-k} R_{m,k}(g,f) \ .$$

שוב לפי משוואה 1.9

$$R_{m,k}(g,f) = (-1)^{km} R_{k,m}(f,g)$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}(-1)^{nm} R_{m,n}(g,f) &= (-1)^{nm} b_m^{n-k} (-1)^{km} R_{k,m}(f,g) \\ &= (-1)^{m(n+k)} b_m^{n-k} R_{k,m}(f,g) \ .\end{aligned}$$

ומכיון של $n+k$ ו $n-k$ חולקים אותה זוגיות, נקבל לאחר כל השוויונות

$$\boxed{R(f,g) = (-1)^{m(n-k)} b_m^{n-k} R_{k,m}(f,g)}$$

כנדרש.

<u>הוכחת משפט 2.1</u>

ההוכחה באינדוקציה על הגודל של המטריצה $n+m$.

בסיס האינדוקציה:

עבור $m=n=0$ הטענה מתקיימת לפי ההגדרה של $\mathrm{Syl}(f,g)$.

עבור המקרה $n=0$ ו $m>0$, לפי הבחנה 1.3,

$$R(f,g) = b_0^n \ .$$

בדומה עבור $m=0$ ו $n>0$

$$R(f,g) = a_0^m \ .$$

עתה נניח ש- $0 < m-n$

לפי המוסכמות בראש הפרק והמשפט היסודי של האלגברה, נוכל לרשום את f ו- g כמכפלה של גורמים לינאריים

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x-\xi_i) \quad g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m} (x-\eta_j) \ .$$

הנחת האינדוקציה:

נניח שמשפט 2.1 נכון לכל מטריצה ממעלה קטנה מ $n+m$.

מקרה 1:

$0<n=\deg(f)\leq m=\deg(g)$.

קיימים פולינומים r ו- q עם $\deg(r)<\deg(f)$ כך ש-

$$g=qf+r\,.$$

נבחין כי

$$\deg(g-r)=\deg(qf)$$

ולכן נקבל את השוויונות הבאים:

$$\deg(q)=\deg(qf)-\deg(f)=\deg(g-r)-n=m-n\,.$$

קבלנו $\deg(q)=m-n$, לכן נוכל להשתמש בטענת עזר 2.3 נקבל

$$R(f,g)=R(f,g-qf)=R(f,r)\ .\quad(*)$$

נחלק שוב את המקרים.

מקרה א. $r\neq 0$

נסמן $k=\deg(r)\geq 0$.

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.4,

$$R_{n,m}(f,r)\overset{2.5}{\widehat{=}}a_n^{m-k}R_{n,k}(f,r)\overset{\text{בסיס האינדוקציה}}{\widehat{=}}a_n^{m-k}a_n^k\prod_{i=1}^{n}r(\xi_i)=a_n^m\prod_{i=1}^{n}g(\xi_i)\quad(**)$$

כאשר השוויון האחרות נובע מכך ש ξ_i הם שורשים של f, ולכן

$$\boxed{g(\xi_i)}=\underbrace{q(\xi_i)f(\xi_i)}_{=0}+r(\xi_i)=\boxed{r(\xi_i)}\,.$$

מ $(*)$ ו- $(**)$ נקבל את הנדרש.

מקרה ב. $r=0$.

אז

$$g=fq\,.$$

מכיון שהנחנו ש- $n > 0$ מתקיים

$$R(f, r) = R(f, 0) = 0$$

על פי מה שהוכחנו לעיל.

ולכן

$$R(f, g) = 0\,.$$

מצד שני כיון ש f מחלק את g השורשים של f הם גם שורשים של g, ולכן בנוסחה 2.1, קיימים ξ_i ו η_j כך ש $\xi_i = \eta_j$, מכאן שמכפלת הגורמים (2.1) מתאפסת, ומתקיים השוויון הנדרש.

מקרה 2.

$m = \deg(g) < n = \deg(f)$.

כמו במקרה הקודם קיימים q ו r עם $\deg(r) < m$ כך ש-

$$f = gq + r$$

ומאותם נימוקים כמו במקרה הקודם

$$R(f, g) = R(f - gq, g) = R(r, g)\ . \quad (***)$$

ופה נחלק שוב את המקרים

מקרה א. $r \neq 0$

נסמן $k = \deg(r) \geq 0$, ומהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.4 נקבל

$$\boxed{R_{n,m}(r, g)} = (-1)^{(n-k)m} b_m^{n-k} R_{k,m}(r, g) \quad (****)$$

$$\text{בסיס האינדוקציה} = \left((-1)^{(n-k)m} b_m^{n-k}\right)\left((-1)^{km} b_m^k \prod_{j=1}^m r(\eta_j)\right)$$

$$= (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m r(\eta_j)$$

$$= \boxed{(-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\eta_j)\,,}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך ש η_j הם שורשים של g, מה שגורר

$$f(\eta_j) = \underbrace{g(\eta_j)\, q(\eta_j)}_{=0} + r(\eta_j)$$

מ $(***)$ ו $(****)$ נקבל את הנדרש.

מקרה ב.

$r = 0$,

דומה מאוד לאותו מקרה בהוכחה הקודמת

$$R(r, g) = R(0, g) = 0\,.$$

לכן

$$R_{n,m}(0, g) = 0$$

כיון ש- השורשים של g הם שורשים של f, נסיק כמקודם שמכפלה הגורמים (2.1) מתאפסת ונקבל את השוויון.

תוצאות ממשפט הרזולטנטה

בפרק זה נמשיך עם המוסכמות שבתחילת פרק 2.

טענה 3.1

יהיו f,g פולינומים מעל שדה F אזי ל- f,g יש שורש משותף אם ורק אם $R(f,g)=0$.

הוכחה

לפי משפט 2.1

$$R(f,g)=0 \Longleftrightarrow a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right)=0\,.$$

וזה מתקיים אם ורק אם קיימים ξ_i ו- η_j כך ש $\xi_i=\eta_j$, כלומר אם ורק אם ל f ו- g יש שורש משותף.

טענה 3.2

יהיו f,g פולינומים מעל שדה F, אזי ל- f,g יש גורם משותף אם ורק אם $R(f,g)=0$.

הוכחה

צד אחד

$\Longleftarrow$ אם ל f,g יש גורם משותף אז $R(f,g)=0$.

אם ל- f,g יש גורם משותף ,אז יש להם שורש משותף בשדה הפיצול של fg, וממשפט 2.1 נקבל את הטענה.

$\Longrightarrow$ $R(f,g)=0$ אז ל f ו g יש גורם משותף.

אם $R(f,g)=0$, מטענה 3.1, ל- f,g יש שורש משותף בשדה הפיצול fg שנסמן α, אז $x-\alpha$ הוא גורם משותף של f ו- g ומכאן הטענה.

לצורך המשפט הבא נזכיר מהי הדרגה של מטריצה.

תהי A מטריצה מסדר $n\times m$

הדרגה של A היא המימד של העתקה הלינארית שנקבעת ע"י וקטורי השורות או העמודות של המטריצה. ונציין שבמקרה והשורות תלויות לינארית, הדרגה של A קטנה מ n ו m, את הדרגה של המטריצה נסמן $\text{rank}\,(A)$.

את המימד של הגרעין של ההעתקה הלינארית שקובעת המטריצה. באופן שקול, את מימד מרחב הפתרונות המטריצה ההומוגנית המתאימה, נסמן ב $\text{corank}\,(A)$.

משפט 3.3

יהיו f,g פולינומים בשדה F.

נסמן ב- $h=\text{GCD}\,(f,g)$ את המחלק המשותף המירבי של f,g. אזי

$$\text{rank}\,(\text{Syl}\,(f,g))=n+m-\deg\,(h)\ .$$

ובאופן שקול $\text{corank}\,(\text{Syl}\,(f,g))=\deg\,(h)$.

<u>הערה:</u> מכיון ש $\text{rank}\,(A)$ ו $\text{corank}\,(A)$ תלויים אחד בשני, לפעמיים נתייחס רק לגודל של אחד מהם כשהכוונה לשניהם.

הוכחה

לפני שנכנס לגוף ההוכחה נציין:

(1) . החלפה בין שורות המטריצה לא משנה את המימד שנפרש ע"י וקטורי השורות (או העמודות) של המטריצה.

(2) . $\mathrm{Syl}(f,g)$ ו- $\mathrm{Syl}(g,f)$ שוות פרט לסדר של השורות, ולכן המימד שלהן שווה, מכאן, נוכל להניח ללא הגבלת הכלליות ש- $m \leq n$.

(3) . קיימים q ו- r עם $\deg(r) < m$ כך ש- $f = qg + r$. בהוכחת טענת עזר 2.3, ראינו שאפשר לעבור מ- $\mathrm{Syl}(f,g)$ ל $\mathrm{Syl}(r,g) = \mathrm{Syl}(f+(-qg),g)$ ע"י פעולות של הוספת קומבינציה לינארית של שורות לשורה אחרת במטריצה. ולכן המימד שלהם שווה.

רעיון ההוכחה:

נמצא את h לפי האלגוריתים של אוקלידס, ותוך כדי התהליך נקטין את גודל המטריצות ונוכיח שה corank של המטריצות המתקבלות לא משתנה, וכך (כפי שנראה בהוכחה עצמה) נמצא את $\mathrm{rank}(\mathrm{Syl}(f,g))$.

נחלק את האלגוריתם לשלבים כדי להקל על הקורא להבין את ההוכחה.

שלב 1.

קיים q ו- r עם $k = \deg(r) < m$, כך ש-

$$f = qg + r\,.$$

מאידך,

$$\deg(q) = \deg(qg) - \deg(g) = n - m$$

מתקיים תנאי משפט 2.3, לכן לפי (2)

$$\mathrm{rank}\left(\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)\right) = \mathrm{rank}\left(\mathrm{Syl}_{n,m}(f,g)\right)\,.$$

שלב 2

נסמן $r = \sum_{l=0}^{n} v_l x^l$, ונתבונן ב $\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)$, נבחין של- r יש $n-k$ מקדמים שהם אפסים ולכן $\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)$ מהצורה:

$$\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & v_{n-k-1} & v_{n-k-2} & v_{n-k-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_{n-k-1} & v_{n-k-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_1 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_2 & v_1 & v_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

בעמודה הראשונה יש רק איבר יחיד b_m, לכן וקטור זה שייך ל$\mathrm{rank}\left(\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)\right)$, ולכן מחיקת העמודה הראשונה והשורה ה $m+1$ (השורה שבה יש את האיבר שאינו אפס בעמודה הראשונה) לא תשפיע על $\mathrm{corank}\left(\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)\right)$.

נובע מכך ש $\mathrm{corank}\left(\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)\right)$ ו $\mathrm{corank}\left(\mathrm{Syl}_{n-1,m}(r,g)\right)$ שווים, כאשר $\mathrm{Syl}_{n-1,m}(r,g)$ היא המטריצה שהתקבלה אחרי המחיקה של השורה והעמודה המתאימה.

שלב 3

נחזור שוב על שלב 2 (במקרה ש $n-k>1$), על המטריצה $\mathrm{Syl}_{n-1,m}(r,g)$, וכך נמשיך עד שנקבל את המטריצה $\mathrm{Syl}_{k,m}(r,g)$, ולפי ההסבר בשלב 2 ה corank של המטריצות המתקבלות ע"י מחיקה העמודה והשורה המתאימות לא משתנה.

סיכום ביניים:

$\mathrm{corank}\left(\mathrm{Syl}_{k,m}(r,g)\right) = \mathrm{corank}\left(\mathrm{Syl}_{n,m}(r,g)\right) = \mathrm{corank}\left(\mathrm{Syl}_{n,m}(f,g)\right)$, כאשר r הוא השארית של החלוקה של f ב g.

<u>שלב 4</u>

לפי (2) $\text{rank}\left(\text{Syl}_{k,m}\left(r,g\right)\right)$ ו $\text{rank}\left(\text{Syl}_{m,k}\left(g,r\right)\right)$ שווים.

נבצע את שלבים $3-1$ על $\text{Syl}_{m,k}\left(g,r\right)$, עם r_0 $k_0=\deg\left(r_0\right)<k$ ו- q_0 המקיימים $g=rq_0+r_0$.

נמשיך שוב ושוב את השלבים $3-1$ (כלומר נבצע את האלגוריתים של אוקלידס) עד שנקבל r_d כך ש- $r_{d-2}=q_dr_{d-1}+r_d$ עם $r_d=0$, מהאלגוריתים של אוקלידס, נובע ש- $h=r_{d-1}$.

<u>שלב 5</u>

ים 3 ו 2 $\text{corank}\left(\text{Syl}_{k_{d-1},l}\left(0,h\right)\right)\dots,\text{corank}\left(\text{Syl}_{k_1,k_0}\left(r_1,r_0\right)\right),\text{corank}\left(\text{Syl}_{k_0,k}\left(r_0,r\right)\right),\text{corank}\left(\text{Syl}_{k,m}\left(r,g\right)\right),\text{corank}\left(\text{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)\right)$ שווים.

ולכן נשאר לבדוק מהו $\text{corank}\left(\text{Syl}_{k_{d-1},l}\left(0,h\right)\right)$, לפי הגדרת מטריצת סילבסטר למטריצה $\text{Syl}_{k_{d-1},l}\left(0,h\right)$ יש l שורות אפסים ו $d-1$ שורות בת"ל,

ולכן

$$\text{corank}\left(\text{Syl}_{k_{d-1},l}\left(0,h\right)\right)=l=\deg\left(h\right)$$

זה מוכיח ש- $\text{rank}\left(\text{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)\right)$ הוא $n+m-\deg\left(h\right)$.

<u>**משפט 3.4**</u>

יהיו f,g פולינומים מעל שדה F.

יהי $v=\left(\alpha_{m-1},\dots,\alpha_0,\beta_{n-1},\dots,\beta_0\right)$ וקטור שורה מדרגה $m+n$.

מתקיים

$$v\text{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)=0$$

אם ורק אם $pf+qg=0$ כאשר $q=\beta_{n-1}x^{n-1}+\dots+\beta_0x^0$ ו- $p=\alpha_{m-1}x^{m-1}+\dots+\alpha_0x^0$.

<u>**הוכחה**</u>

נתבונן במכפלה $\gamma=v\text{Syl}_{n,m}\left(f,g\right)$

$$\gamma=\left(\alpha_{m-1},\dots,\alpha_0,\beta_{n-1},\dots,\beta_0\right)\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0\\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

$$=\left(\underbrace{\alpha_{m-1}a_n+\beta_{n-1}b_m}_{\gamma_1},\underbrace{\alpha_{m-1}a_{n-1}+\alpha_{m-2}a_n+\beta_{n-1}b_{m-1}+\beta_{n-2}b_m}_{\gamma_2},\dots,\underbrace{\alpha_0a_0+\beta_0b_0}_{\gamma_{n+m}}\right)$$

הרכיב ה j של γ מתקבל ע"י המכפלה

$$\gamma_j=\left(\alpha_{m-1},\dots,\alpha_0,\beta_{n-1},\dots,\beta_0\right)\begin{pmatrix} a_{n+1-j}\\ \vdots\\ a_{n+m-j}\\ b_{m+1-j}\\ \vdots\\ b_{n+m-j} \end{pmatrix}.$$

כאשר $1 \leq j \leq n+m$, נרשום γ_j כסכום של טורים, הטור הראשון הוא $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-i} a_{n+i-j}$, ובטור השני האינדקס מתחיל $m+1$ ולכן נסמן $i = i - m$, ונקבל $\sum_{m+1}^{n+m} \beta_{n+m-i} b_{i-j}$

ולכן בסה"כ

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-i} a_{n+i-j} + \sum_{m+1}^{n+m} \beta_{n+m-i} b_{i-j} .$$

נוכיח ש-

$$pf + qg = \sum_j \gamma_j x^j$$

ובזה נסיים את ההוכחה.

נחקור את הביטוי

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-i} a_{n+i-j} + \sum_{i=m+1}^{n+m} \beta_{n+m-i} b_{i-j}$$

לשם כך נחשב כל אחד מהמחוברים בנפרד. נבצע החלפת אינדקסים $i = m - k$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{m-i} a_{n+i-j} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k a_{n+m-k-j} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{n+m-k-j}$$

(השוויון האחרון נובע מכך ש $\alpha_m = 0$).

בדומה עבור הביטוי השני נבצע את ההחלפת האינדקסים $i = m + n - k$

$$\sum_{i=m+1}^{n+m} \beta_{n+m-i} b_{i-j} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k b_{m+n-k-j} = \sum_{k=0}^{n} \beta_k b_{m+n-k-j}$$

(השוויון האחרון נובע מכך ש $\beta_n = 0$).

בסה"כ קבלנו

$$\gamma_j = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{n+m-k-j} + \sum_{k=0}^{n} \beta_k b_{m+n-k-j}$$

נבצע החלפת אינדקסים $j = m + n - l$, לכל $0 \leq j \leq n+m$ בפרט $0 \leq l \leq n+m$

מתקיים

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{n+m-k-j} + \sum_{k=0}^{n} \beta_k b_{m+n-k-j} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{l-k} + \sum_{k=0}^{n} \beta_k b_{l-k} .$$

אם $m > l$, מכיון שלכל $k > l$, $\alpha_k = 0$, מתקיים

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{l-k} = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k a_{l-k} .$$

אם $m < l$, מכיון שלכל $k \geq m$, $\alpha_k = 0$ (כי $\deg(p) = m - 1$). לכן

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k a_{l-k} = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k a_{l-k}\,.$$

ובאותו אופן מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_k b_{l-k} = \sum_{k=0}^{l} \beta_k b_{l-k}$$

קבלנו ש

$$\gamma_j = \sum_{k=0}^{l} \alpha_k a_{l-k} + \sum_{k=0}^{l} \beta_k b_{l-k} \quad (*)$$

עתה נחשב את המכפלה

$$\begin{aligned}
\boxed{pf + qg} &= \sum_{\tau} \alpha_\tau x^\tau \sum_k a_k x^k + \sum_\tau \beta_\tau x^\tau \sum_k b_k x^k \\
&= \sum_l \sum_{k+\tau=l} \alpha_\tau a_k x^l + \sum_l \sum_{k+\tau=l} \beta_\tau b_k x^l \\
&= \sum_l \sum_{k=0}^{l} \alpha_k a_{l-k} x^l + \sum_l \sum_{k=0}^{l} \beta_k b_{l-k} x^l \\
&= \sum_l \left(\sum_{k=0}^{l} \alpha_k a_{l-k} + \sum_{k=0}^{l} \beta_k b_{l-k} \right) x^l \\
&= \boxed{\sum_k \gamma_j x^k}
\end{aligned}$$

ואכן קבלנו את השוויון הנדרש.

ביבליוגרפיה

[1]. Macaulay, F. S. (1902), "Some Formulæ in Elimination", Proc. London Math. Soc., 35: 3–27, doi: 10.1112/plms/s1-35.1.3.

[2]. Bourbaki, N. (1998). "Algebra I: Chapters 1-3", 6.1 p. 65 (example), Hermann, Publishers in Arts and Sciences, Addison-Wesley..