פרק זה הוא פרק קצר שבו נזכיר בקצרה את הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות ומטריצת סילבסטר של שני פולינומים, ובסוף הפרק נגדיר את הרזולטנט.

הגדרות אלו ילוו אותנו לאורך כל העבודה פעמים במשפטים עצמם ופעמים בהוכחות של המשפטים.

<u>הגדרה 1.1 הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות</u>

תהי $A=\left(\alpha_{i,j}\right)$ מטריצה מגודל $n\times n$

$$\det\left(A\right)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)\sigma_{1,\sigma(1)}\sigma_{2,\sigma(2)}\cdots\sigma_{n,\sigma(n)}\,.$$

הסכום הוא על $n!$ התמורות σ של המספרים $\{1,2,\dots,n\}$, כאשר אם עבור השורה ה i ניקח את האיבר בעמודה ה j נקבל את "ההזזה" $i\to j$, ו- $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)=1$ אם התמורה זוגית, ו $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)=-1$ אם התמורה אי-זוגית.

נעבור לדוגמא:

תהי מטריצה

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&2&3\\1&5&3\end{pmatrix}$$

נחשב את $\det\left(A\right)$לפי הגדרה 1.1.

נבחר לדוגמא את תמורת הזהות $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\in S_3$

השורה הראשונה מייצגת את השורה במטריצה והשורה השניה בתמורה מייצגת את העמודה במטריצה, ולכן במקרה זה נבחר מהשורה הראשונה את האיבר מהעמודה הראשונה, מהשורה השניה את האיבר בעמודה השניה, וכן הלאה.

תמורת הזהות היא זוגית ולכן $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)=1$, ובסה"כ מתמורת הזהות נקבל את המכפלה $2\cdot2\cdot3$.

נבחר תמורה נוספת $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\in S_3$, במקרה זה מהשורה הראשונה נבחר את האיבר מהעמודה השלישית, מהשורה השניה את האיבר מהעמודה הראשונה, ומהשורה השלישית את האיבר בעמודה השניה.

ע"י פירוק לחילופים נקבל את $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)$,

$$(132)=(13)\,(21)\;.$$

קבלנו $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)=1$ ולכן בסה"כ מתמורה זו נקבל את המכפלה $1\cdot4\cdot5$.

תמורה נוספת לדוגמא $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\in S_3$, זהו חילוף ולכן $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)=-1$ ובסה"כ מתמורה זו נקבל את המכפלה $-3\cdot4\cdot3$.

ולאחר חישוב כל התמורות נקבל

$$\begin{aligned}\det\left(A\right)&=\sum_{\sigma\in S_3}\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)\sigma_{1,\sigma(1)}\sigma_{2,\sigma(2)}\cdots\sigma_{n,\sigma(n)}\\&=2\cdot2\cdot3-2\cdot3\cdot5-3\cdot4\cdot3+3\cdot3\cdot1-1\cdot2\cdot1+1\cdot4\cdot5\\&=12-30-36+9-2+20=25\,.\end{aligned}$$

<u>הגדרה 1.2 מטריצת סילבסטר</u>

יהיו שני פולינומים $g\left(x\right),f\left(x\right)$, מעל שדה F.

נסמן $g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\,,f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$

$\text{Syl}(f,g)=\text{Syl}_{n,m}(f,g)$ של שני הפולינומים היא מטריצה מגודל $(n+m)\times(n+m)$ המוגדרת ע"י

$$\text{Syl}(f,g)=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0\\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

ב- m השורות הראשונות יש את המקדמים של f באופן הבא:

בשורה הראשונה מתחילים מהמקום הראשון עם a_n בעמודה שלאחריה a_{n-1} וכן הלאה עד a_0, בפולינום f יש n איברים ולכן בסה"כ יתמלאו n העמודות הראשונות נשארו m עמודות אותן נאכלס עם אפסים,

בשורה השניה נבצע את אותו הדבר עם שינוי קטן a_n יזוז אחד ימינה כלומר נתחיל את האיכלוס של התאים מהעמודה השניה, ואת העמודה הראשונה נאכלס באפס, ובאופן הזה עד השורה ה m שבה יהיו בהתחלה m אפסים ובסוף n איברי f.

באותו האופן נאכלס את n השורות האחרונות עם איברי הפולינום g, בשורה ה $m+1$ את העמודה הראשונה נאכלס עם g_m, את העמודה השניה עם g_{m-1} וכך נמשיך עד העמודה ה m, ואת שאר העמודות נאכלס באפסים, בשורה ה $m+2$ נתחיל בעמודה השניה עם g_m ואת העמודה הראשונה נאכלס באפס, ונמשיך באופן הזה כמו עם f.

נביא הגדרה נוספת שכוללת את המקרה ש- $\deg(g)=0,\deg(f)=0$.

תחילה נרחיב את f,g לפולינומים בגודל $n+m$ באופן הבא , ולכל $m+n>i>n$ $a_i=0$, ולכל $m+n>j>m$ $b_j=0$, נקבל ש- $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n+m}a_ix^i$ ו- $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j=\sum_{j=0}^{m+n}b_jx^j$.

באופן הזה נקבל את ההגדרה הבאה ל- $\text{Syl}(f,g)$.

האיבר במיקום (i,j) שווה ל a_{n+i-j} כאשר $1\le i\le m$ ו- b_{i-j} אם $m+1\le i\le m+n$, $a_i=0$ אם $i>n$, $b_i=0$ אם $n+m>i>m$.

<u>דוגמא</u>:

נגדיר $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $g(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$.

במקרה זה $n=3$ $m=2$, ולכן

$$\text{Syl}_{2,3}(f,g)=\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0\\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0\\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

בהבחנה הבאה נעשה שימוש בהמשך

<u>הבחנה 1.3</u>

אם אחד הפולינומים f או g, ממעלה 0 אז $\text{Syl}(f,g)$ היא מטריצה משולשת.

<u>הגדרה 1.4 הרזולטנט</u>

יהיו שני פולינומים $g(x)$, $f(x)$, מעל שדה F.

נגדיר את הרזולטנט שלהם להיות

$$R(f,g)=\det\left(\text{Syl}_{n,m}(f,g)\right).$$

אם $m=n=0$ אז $R\left(f,g\right)=a_0b_0$.

הערה 1.5

לפי הגדרה 1.4 $R\left(f,g\right)$ נקבע באופן חח"ע לפי f,g.

נרחיב את ההגדרה 1.4 לכל שני פולינומים ממעלה קטנה מ- n,m, עבור f נשלים עד למעלה n עם מקדמים 0 , ובאותו אופן עבור g נשלים עד למעלה m נשלים עם מקדמים 0.

ובאופן הזה הגדרה 1.4 נכונה לכל שני פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n,m.

כלומר:

אם $\deg\left(\left(f\right)\right)\le k<m$ נגדיר $\hat{f}\left(x\right)=\sum_{i=0}^{k}a_i\cdot x^i+\sum_{i=k+1}^{n}0\cdot x^i$ כאשר a_i הם המקדמים של הפולינום f, ולכן $f=\hat{f}$.
ובאותו אופן נעשה עם הפולינום g אם $\deg\left(g\right)<m$.

באופן כללי נמשיך להשתמש בסימון $R\left(f,g\right)$ ובמקרים שנרצה לציין במפורש שהכוונה לכל שני פולינומים ממעלה קטנה n,m נציין זאת ע"י $R_{n,m}\left(f,g\right)$.

הבחנה 1.6

נבחין שבמקרה שגם $\deg\left(f\right)<n$ וגם $\deg\left(g\right)<m$, ב$\operatorname{Syl}\left(f,g\right)$ נקבל עמודת אפסים ולכן $R_{n,m}\left(f,g\right)=0$.

הערה 1.7

עבור שני פולינומים f,g מעל שדה F.

המקדמים של הפולינומים f,g יכולים לקבל כל ערך בשדה F, ולכן נוכל להתייחס אליהם כאל משתנים בלתי תלויים. ואז הדטרמיננטה היא בעצמה פולינום מעל שדה F עם $m+n$ משתנים בלתי תלויים.

דוגמא:

עבור $f\left(x\right)=a_2x^2+a_1x+a_0$ $g\left(x\right)=b_1x+b_0$,

נחשב את הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר

$$\begin{aligned}R\left(f,g\right)&=\det\left(\operatorname{Syl}_{2,1}\left(f,g\right)\right)\\&=\det\begin{pmatrix}a_2&a_1&a_0\\b_1&b_0&0\\0&b_1&b_0\end{pmatrix}=a_0b_1^2+a_2b_0^2-b_0a_1b_1\,.\end{aligned}$$

קיבלנו פולינום ב 5 משתנים בלתי תלויים מעל שדה F, כאשר המשתנים הבלתי תלויים הם a_2,a_1,a_0,b_1b_0.

בהערה 1.7 נעשה שימוש במהלך העבודה, הראשון יהיה המשפט הבא.

משפט 1.8

יהיו $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\,,g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ פולינומים מעל שדה F.

$R\left(f,g\right)$ הוא פולינום הומוגני עם מקדמים שלמים במקדמים a_i,b_i, כאשר עבור $a_0\ldots a_n$ המעלה היא m, ועבור $b_0\ldots b_m$ המעלה היא n.

הוכחה

הוכחה זו מתבססת על הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות.

נחזור למטריצת סילבסטר, זוהי מטריצה מסדר $n+m\times n+m$, נתבונן באיבר כלשהוא בסכום הנתון בהגדרה 1.1 נבחר $\sigma\in S_{n+m}$, המחובר בסכום מתקבל ע"י כפל בין איברי המטריצה כך שכל שורה וכל עמודה מופיעה בדיוק פעם אחת.

כלומר עבור $\sigma_{i_1,j_1},\sigma_{i_2,j_2}$ אם $i_1\neq i_2$ אז $j_1\neq j_2$ לכל i_k,j_l, $1\le k,l\le n+m$, ולכן בסה"כ מספר האיברים במכפלה הינו כמספר השורות (או העמודות) וזה בדיוק $n+m$.

לפי הגדרה 1.2 מ- m השורות הראשונות מקבלים מקדמים של הפולינום $f\left(x\right)$, ומ- n השורות האחרונות מקבלים מקדמים מהפולינום $g\left(x\right)$, ובסה"כ סכום החזקות של האיבר σ הוא m מאיברי $f\left(x\right)$ ו n מאיברי $g\left(x\right)$.

כנדרש.