# :2 פרק



תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה

. לאורך פרק זה

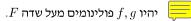
$$.F$$
 שדה מעל פולינומים  $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_{i}x^{i}\;g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_{j}x^{j}.1$ 

. שניהם של מכיל את כל מכיל מכיל של הניח של שדה הפיצול של הוא שדה הפיצול של הניח להניח להניח של הניח ללא הגבלת ללאות החוא של של החוא של שניהם. 2

.gשל של השורשים הח $\eta_0 \dots \eta_m$ ו ,<br/> fשל של השורשים  $\xi_0 \dots \xi_n$ .3

# הרזולטנט

### משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)





$$R_{m.n}\left(f,g\right)=a_{n}^{m}b_{m}^{n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_{i}-\eta_{j}\right)\ \left(2.1\right)$$

את ההוכחה נביא מיד לאחר הדוגמא.

$$f(x) = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2) = x^3 - 4x$$

$$g\left( x\right) =\left( x+1\right) \left( x-3\right) =x^{2}-2x-3$$



0,2,-2 נבחין כי השורשים של f הם f

-1,3 השורשים של gנסמן

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 2, \xi_3 = -2$$
  $\eta_1 = -1, \eta_2 = 3$ 



(2.1) נציב במשוואה

$$a_n^m = 1^2 \,, b_m^n = 1^3$$
 כאשר

$$\left( \left( 0 - (-1) \right) \left( 0 - 3 \right) \right) \left( \left( 2 - (-1) \right) \left( 2 - 3 \right) \right) \left( \left( -2 - (-1) \right) \left( -2 - 3 \right) \right) = 45$$

-קבלנו ש

$$\boxed{R_{m.n}\left(f,g\right)=45}$$



f,g את סילבסטר של מטריצת אל הדטרמיננטה את 1.1 את לפי הגדרה לפי

$$R_{3.2}(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

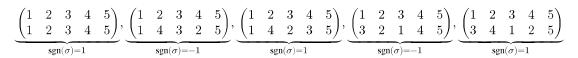
נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס.

ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה





ולאחר שנשלים את כל התמורות נקבל את התמורות הבאות



 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & 5 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & & & & 5 \end{pmatrix}$ 



את הסימן רשמנו מתחת לתמורה.



ולאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל.

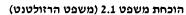
$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$

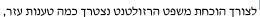


2.1כלומר במקרה זה קבלנו את השוויון במשפט



עכשיו נעבור להוכחה 🥊







נביא את הטענות ואת ההוכחות שלהם לפני המשפט



מי שיותר נח לו יוכל לדלג על ההוכחות של טענות העזר ולעבור ישר להוכחה של משפט הרזולטנט, ולאחר מיכן לחזור להוכחות של טענות העזר.

### טענה עזר 2.2

F פולינומים מעל שדה f,gיהיו

$$.R\left( f,g\right) =a_{n}^{m}\prod_{i=1}^{n}g\left( \xi_{i}\right) .\mathbf{I}$$

$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{nm}b_{m}^{n}\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_{j}\right)$$
.  
II

טענה זו נובעת כמעט ישירות ממשפט הרזולטנט ומהמשפט היסודי של האלגברה.



לנאריים לינאריים של האלגברה של ניתן לרשום את f, g ניתן לרשום של האלגברה של האלגברה של האלגברה לפי



לפי המשפט היסודי של האלגברה נרשום את לפי לפי



$$g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m} (x - \eta_j)$$

נציב g ב  $\xi_0 \dots \xi_m$  נציב

$$(*) \ g\left(\xi_{i}\right)=b_{m}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_{i}-\eta_{j}\right)$$



ומשרשור השווינות הבא נקבל את השוויון

$$\begin{split} \boxed{R\left(f,g\right)} &= a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left(\xi_i - \eta_j\right) \\ &= a_n^m \prod_{i=1}^n b_m \prod_{j=1}^m \left(\xi_i - \eta_j\right) \\ &\text{hence}\left(*\right) = \boxed{a_n^m \prod_{i=1}^n g\left(\xi_i\right)} \end{split}$$

כנדרש.

עבור f נדרש עוד תהליך ע"מ לקבל את השוויון.

תחילה נפתח דיון אינטואיטיבי

 $\overline{\phantom{a}}$ נרשום את f גם כן כמפכלה של גורמים לינאריים

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - \xi_i)$$

: דיון אינטואיטיבי

בצורה I בצורה שלסבסטר בין fל לg כלומר שg תיהיה בg שורות הראשונות וg ב שורות האחרונות בקבל את שוויון בצורה והפוך במטריצת סילסבסטר בין

$$(\eta_j)$$

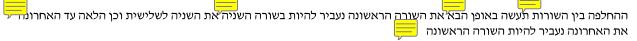
 $R\left(g,f
ight)=b_{m}^{n}\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_{j}
ight)$ 

החלפת שורות במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה פרט לסימן ולכן ע"י פעולות של החלפת השורות נקבל את השוויון הבא

$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{k}R\left(g,f\right)=\left(-1\right)^{k}b_{m}^{n}\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_{j}\right) \qquad \boxed{}$$

.נותר לברר מהו $\,k$  כלומר מה הסימן

נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות נדרש ע"מ להפוך בין



בכתיב תמורות נקבל את המעגל

$$(r_1r_2\dots r_mr_{m+1}\dots r_{n+m})$$

נבצע את המעגל הזה n+1 ואז f תיהיה באשונה (של המטריצה המקורית) תיהיה במקום הn+1 ואז f תיהיה בm השורות

.(n+m)והשורה הm (של המטריצה מקורית) תיהיה בשורה הראשונה כלומר g תיהיה בn השורות הראשונות (מספר השורות הוא l=n+m-1 הסימן של מחזור באורך l הוא l=1 (לא נוכיח טענה זו במסגרת העבודה הזו) ולכן כל מחזור כזה הוא באורך l=n+m-1נבצע n מחזורים כאלו ע"מ להחליף בין f ל לg ולכן שהסימן שהסימן כאלו ע"מ מחזורים מ

$$(-1)^{(m+n-1)^n} = (-1)^{(nm+n^2-n)} = (-1)^{nm}$$



השוויון האחרות מתקיים כיון ש-n = n = n תמיד מספר זוגי כי n זוגי אוn-1 זוגי, ולכן הזוגיות של  $n = n + n^2 - n$  וn = n





נשים לב שתוך כדי ההוכחה קבלנו ש-

$$R(f,g) = (-1)^{nm} R(g,f)$$
 (2.2)



במשוואה זה נעשה שימוש בהמשך

# טענה עזר 2.4



 $m \leq n$  כך שמתקיים

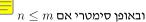


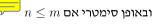
 $\deg\left(h
ight) \leq n-m$  ויהי h פולינום כך ש

אז מתקיים

$$R_{n,m}\left(f+hg,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$$







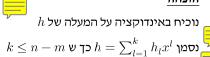
-אז עבור h כך שm-n מתקיים ש

$$R_{n,m}\left( f,g+hf\right) =R_{n,m}\left( f,g\right) \qquad \boxed{=}$$

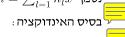


ולכן גם  $\deg\left(hg\right) \,>\, n+m$  אחרת אחרת ( $\deg\left(h
ight) \,\leq\, m-n$  ולכן ובדומה במקרה הראשון במקרה הראשון ובדומה . ואז השוויון לא יוכל להתקיים  $\deg\left(f+hg\right)>n+m$ 



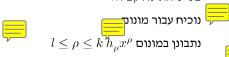












. נראה שאפשר להגיע מ $R_{n,m}\left(f+hg,g
ight)$  ל $R_{n,m}\left(f+hg,g
ight)$  ע"י פעולות על השורות של המטריצה שאינם משנות את הסימן של הדטרמיננטה.

fנוסיף את השורות של הפולינום כאשר כופלים אותם במונום לא הפולינום של הפולינום פל נוסיף את נוסיף את כופלינום ו



 $R_i \to R_i + h_\rho x^\rho R_{i+n} \ 1 \le i \le n$ 



מכיון שn < n, לפי הגדרת מטריצת סילבסטר מופיעה בת השורות האחרונות וfביאה השורות הראשונות ולפך נקבל שבכל השורות מריצת סילבסטר  $\Delta_0$  מופיעה בת השורות האחרונות ו



### <u>ולאחר הפעולה נקבל את המטריצה</u>

$$\begin{pmatrix} a_n + h_\rho x^\rho g_n & a_{n-1} + h_\rho x^\rho g_{n-1} & a_{n-2} + h_\rho x^\rho g_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n + h_\rho x^\rho g_n & a_{n-1} + h_\rho x^\rho g_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 + h_\rho x^\rho g_1 & a_0 + h_\rho x^\rho g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 + h_\rho x^\rho g_2 & a_1 + h_\rho x^\rho g_1 & a_0 + h_\rho x^\rho g_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = R_{n,m} \left( f + \left( h_\rho x^\rho \right) g_n \right)$$

 $h_
ho x^
ho$  עולות אלו לא משנות את הערך של הדטרמיננטה ולכן עבור מונום

<u>נקבלש</u>

$$R_{n,m}\left(f+\left(h_{\rho}x^{\rho}\right)g,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$$

: הנחת האינדוקציה

נניח שזה נכון עבור k-1 מונומים ונוכיח שזה נכון עבור

: צעד האינדוקציה

$$\begin{split} \boxed{R_{n,m}\left(f+hg,g\right)} &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k}h_{l}x^{l}\right)g,g\right) \\ &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k-1}h_{l}x^{l}\right)g+\left(h_{k}x^{k}\right)g,g\right) \\ &\text{step induction} &= R_{n,m}\left(f+\left(h_{k}x^{k}\right)g,g\right) \\ &\text{case base} &= \boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)} \end{split}$$

כנדרש.

. עבור המקרה השני  $R_{n,m}\left(f,g+hf
ight)=R_{n,m}\left(f,g
ight)$  נקבל את השוויון באותו עבור

### טענת עזר 2.5

אז  $\deg\left(g\right)\leq k\leq m$  אם. i

$$R_{n,m}\left( f,g\right) =a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left( f,g\right)$$

אט  $\deg\left(f\right)\leq k\leq n$  אס.ii

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{(n-k)m}b_{m}^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)$$

## הוכחה

הוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר,

כלומר נניח ש $g_m=0$  אז

$$\operatorname{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$



נבחין שאם נמחוק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\operatorname{Syl}(f,\hat{g}) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$



, $\hat{g}\left(x
ight)=g\left(x
ight)$  אז אז המכיון ש  $b_{m}=0$  ומכיון ש  $\hat{g}\left(x
ight)=\sum_{j=0}^{m-1}b_{j}x^{j}$  כאשר

ולכן אם נפתח את הדטרמיננטה  $R_{n,m}\left(f,g
ight)$  לפי העמודה את ולכן ולכן אם ולכן את הדטרמיננטה

$$\boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)} = a_{n}R_{n,m}\left(f,\hat{g}\right) = \boxed{a_{n}R_{n,m-1}\left(f,g\right)}$$





נסמן הזה השוויון את עוד קצת ונפתח ונפתח ונפתח ונפתח ונפתח k=m-1

$$\begin{aligned} a_{n}R_{n,m-1}\left(f,g\right) &= a_{n}^{m-(m-1)}R_{n,m-1}\left(f,g\right) \\ &= \boxed{a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)} \end{aligned}$$



k=m-1 וקבלנו את הטענה עבור

### <del>נעבור להוכחה עצמה</del>

.k הוכחה באינדוקציה לאחור על.i

עבור m מתקבל השוויון מיידי

$$\boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)=a_{n}^{0}R_{n,k}\left(f,g\right)=\boxed{a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)}}$$

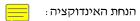


בסיס האינדוקציה:



 $g_m=0$  עבור k=m-1 עבור

ראינו כי הטענה נכונה



$$R_{n,m}\left( f,g\right) =a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left( f,g\right) \text{ }$$



$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_{n}^{m-\left(m-l\right)}R_{n,m-l}\left(f,g\right)$$

m-l החזקה עד ניקח ניקח קל כך שעבור למעשה הרזולטנט של ה $\hat{R}_{n,m-l}\left(f,g\right)$  נתבונן נתבונן 0 הוא m-l-1 הוא של החזקה המקדם המקדם ולפי

ש מתקיים אפר מתקיים אנחנו כבר יודעים לפי בסיס אנחנו לפי אנחנו כבר אנחנו אבל אנחנו אבל אנחנו לפי או לפי אנחנו לפי או לפי או

$$R_{n,m-l}(f,g) = a^n R_{n,m-l-1}(f,g)$$

ולכן בסה"כ נקבל את השוויון

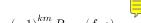
$$\begin{split} \boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)} &= a_n^{m-(m-l)} R_{n,m-l}\left(f,g\right) \\ \text{step induction} &= a_n^{m-(m-l)} a_n R_{n,m-l-1}\left(f,g\right) \\ &= a_n^{m-(m-l-1)} R_{n,m-l-1}\left(f,g\right) \\ \boxed{a_n^{m-k} R_{n,k}\left(f,g\right)} \end{split}$$

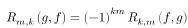
$$R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{nm}R_{m,n}\left(g,f\right)$$

ולכן

$$(-1)^{nm} R_{m,n}(g,f) = (-1)^{nm} b_m^{n-k} R_{m,k}(g,f)$$







נציב ונקבל

$$\begin{split} \left(-1\right)^{nm}R_{m,n}\left(g,f\right) &= \left(-1\right)^{nm}b_{m}^{n-k}\left(-1\right)^{km}R_{k,m}\left(f,g\right) \\ &= \left(-1\right)^{m(n+k)}b_{m}^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right) \end{split}$$





אותה אוגיות נקבל לאחר כל השוויונות m-n ו של m+n

$$\boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{m(n-k)}b_{m}^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)}$$

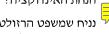
כנדרש.



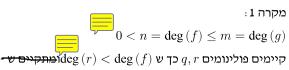
לפי המוסכמות בראש הפרק

$$f\left(x\right)=a_{n}\prod_{i=1}^{n}\left(x-\xi_{i}\right)^{\frac{1}{\nu}}g\left(x\right)=b_{m}\prod_{j=1}^{m}\left(x-\eta_{j}\right)$$

## בסיס האינדוקציה (חסר)



n,m נניח שמשפט הרזולטנט מתקיי<mark>ם לכ</mark>ל ערך מטריצה קטנה מm+m, ובהנחה זה אנחנו כוללים <del>שזה נכון ל</del>כל בהתאמה(צריך להסביר למה)



$$g = qf + r$$

נבחין כי

$$\deg\left(g-r\right) = \deg\left(qf\right)$$



ולכן נקבל את השוויונות הבאים

$$\deg\left(q\right)=\deg\left(qf\right)-\deg\left(f\right)=\deg\left(g-r\right)-n=m-n$$

מטענת עזר 2 נקבל



$$R_{n,m}\left(f,g\right)=R_{n,m}\left(f,g-qf\right)=R_{n,m}\left(f,r\right)$$

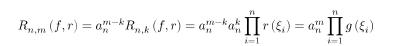


. נחלק שוב למקרים.



 $k=\deg{(r)}\geq 0$  מקרה 1eq 0 נסמן r
eq 0

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 3





fשל שורשים הם  $\xi_i$ של מכך נובע נובע אחרות השוויון האחרות נובע





יכי r כי שורשים של r כי

$$\boxed{g\left(\xi_{i}\right)} = \underbrace{q\left(\xi_{i}\right)f\left(\xi_{i}\right)}_{=0} + r\left(\xi_{i}\right) = \boxed{r\left(\xi_{i}\right)}$$

 $.r \neq 0$ ו ו  $0 < n = \deg\left(f\right) \leq m = \deg\left(g\right)$ ו וקבלנו את וקבלנו

r=0 עבור

$$g = fq$$

לפי ההנחה של מקרה זה n>0 ולכן

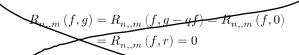
$$Syl_{n,m}\left( f,r\right) =Syl_{n,m}\left( f,0\right)$$

ולכן



 $R_{n,,m}\left( f,r\right) =0$ 

לפי טענת עזר 2



ויתר מזה

 $g\left(\xi_{1}\right)=f\left(\xi_{1}\right)q\left(\xi_{1}\right)=0$ 

בלומר  $\xi_1$  הוא שורש של g גם ולכן  $\xi_1$ ייייי

מקרה 2



$$\begin{split} R_{0.m}\left(f,g\right) &= a_{n}^{m}b_{m}^{0}\prod_{i=1}^{0}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_{i}-\eta_{j}\right) \\ &= a_{n}^{m} \end{split}$$



והטענה מתקיימת

מקרה 3



,1 הוכחה זה דומה למקרה  $m = \deg\left(g\right) < n = \deg\left(f\right)$ 

2 מקרה עבור הוכחה הוכחה m=0 וכמו כן עבור m=0

לא נחזור על הוכחות אלו