פרק זה הוא פרק קצר שבו נזכיר בקצרה את הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות ונגדיר את מטריצת סילבסטר של שני פולינומים, ובסוף נגדיר את הרזולטנט.

הגדרות אלו ילוו אותנו לאורך כל העבודה פעמים במשפטים עצמם ופעמים בהוכחות של המשפטים.

הגדרה 1.1 תזכורת הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות

נרשום את ההגדרה של הטרמיננטה לפי תמורות

תהי $A=\left(\alpha_{i,j}\right)$ מגודל $n\times n$

$$\det\left(A\right)=\sum_{\sigma\in S_{n}}\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)\sigma_{1,\sigma(1)}\sigma_{2,\sigma(2)}\cdots\sigma_{n,\sigma(n)}$$

$\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)=1$ אם התמורה זוגית, ו $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)=-1$ אם התמורה אי-זוגית.

כאשר התמורות הם בין שורות המטריצה לעמודותיה כלומר אם עבור השורה ה i ניקח את האיבר בעמודה ה j נקבל את "ההזזה" $i\to j$.

נעבור לדוגמא.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\
4 & 2 & 3\\
1 & 5 & 3
\end{pmatrix}$$

נחשב את $\det\left(A\right)$לפי הגדרה זו

נבחר לדוגמא את תמורת הזהות $S_{3}\ni\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\
1 & 2 & 3
\end{pmatrix}$

השורה הראשונה מייצגת את השורה במטריצה והשורה השניה בתמורה מייצגת את העמודה במטריצה

ולכן במקרה זה נבחר מהשורה הראשונה את האיבר מהעמודה הראשונה, מהשורה השניה את האיבר בעמודה השניה, וכן הלאה

נחשב את $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)$ הזוגיות של התמורה, תמורת הזהות היא זוגית ולכן הסימן היא 1

ובסה"כ נקבל את המכפלה $2\cdot2\cdot3$

נבחר לדוגמא את התמורה $S_{n}\ni\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\
3 & 1 & 2
\end{pmatrix}$

במקרה זה מהשורה הראשונה נבחר את האיבר מהעמודה השלישית, מהשורה השניה את האיבר מהעמודה הראשונה, ומהשורה השלישית את האיבר בעמודה השניה

ע"י פירוק לחילופים נקבל את $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)$

$$\left(132\right)=\left(13\right)\left(21\right)$$

ולכן הסימן הינו 1 ולכן בסה"כ נקבל את המכפלה $1\cdot4\cdot5$

עבור החילוף $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\
2 & 1 & 3
\end{pmatrix}$ $\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)$ אי זוגי ונקבל את המכפלה $-3\cdot4\cdot3$

ולאחר חישוב כל התמורות נקבל ש

$$\begin{aligned}\det\left(A\right) & =\sum_{\sigma\in S_{n}}\operatorname{sgn}\left(\sigma\right)\sigma_{1,\sigma(1)}\sigma_{2,\sigma(2)}\cdots\sigma_{n,\sigma(n)}\\
 & =2\cdot2\cdot3-2\cdot3\cdot5-3\cdot4\cdot3+3\cdot3\cdot1-1\cdot2\cdot1+1\cdot4\cdot5\\
 & =12-30-36+9-2+20=25
\end{aligned}$$

הגדרה 1.2 מטריצת סילבסטר

יהיו שני פולינומים $g(x), f(x)$, מעל שדה F.

נסמן $g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j$, $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

מטריצת סילבסטר של שני הפולינומים היא מטריצה מגודל $n \times m$ המוגדרת ע"י,

$$\mathrm{Syl}(f,g)=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

האיבר במיקום (i,j) שווה ל a_{n+i-j} כאשר $1 \le i \le m$ ו- b_{i-j} אם $m+1 \le i \le m+n$.

כאשר נתייחס לפולינומים כטור אין סופי המוגדר כך :

$a_i = 0$ אם $i > n$ או $i < 0$

$a_i = 0$ אם $i > m$ או $i < 0$.

במילים אחרות

ב- m השורות הראשונות יש את המקדמים של f באופן הבא,

בשורה הראשונה מתחילים מהמקום הראשון עם a_n בעמודה שלאחריה a_{n-1} וכן הלאה לכל איברי f , יש n איברים ולכן בסה"כ יתמלאו n עמודות נשארו m עמודות אותן נאכלס עם אפסים ,

בשורה השניה נבצע את אותו הדבר עם שינוי קטן a_nיזוז אחד ימינה כלומר נתחיל את האיכלוס של התאים מהעמודה השניה, ואת העמודה הראשונה נאכלס באפס.

ובאופן הזה עד השורה ה m שבה יהיו בהתחלה m אפסים ובסוף n איברי f.

ואותו דבר נעשה עבור g עם n השורות האחרונות.

דוגמא :

נגדיר $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, $g(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$

$m=2$ $n=3$

$$\mathrm{Syl}_{n,m}(f,g)=\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

הגדרה 1.3 הרזולטנט

יהיו שני פולינומים $g(x), f(x)$, מעל שדה F.

נגדיר את הרזולטנט שלהם להיות

$$R_{n,m}(f,g)=\det\left(\mathrm{syl}_{n,m}(f,g)\right)$$

הערה

הגדרה 1.2 נכונה לכל שני פולינומים ממעלה קטנה מ n, m, ובמקרה זה נשלים את הפולינום עם מקדמים 0.

כלומר :

אם $\deg(f) \leq k < m$ נגדיר $\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot x^i$ כאשר a_i הם המקדמים בפולינום f, וכיון שהשלמנו עם מקדמים 0 אז $f = \hat{f}$.

ובאותו אופן נעשה עם הפולינום השני אם המעלה שלו קטנה מ m.

במקרה ששני הפולינומים קטנים m, n אז במטריצת סילבסטר נקבל עמודת אפסים ולכן $R_{n,m}(f,g) = 0$.

נשים לב

שעבור שני פולינומים f, g מעל שדה F.

המקדמים של הפולינומים f, g יכולים לקבל כל ערך בשדה F, ולכן נוכל להתייחס אליהם כאל משתנים בלתי תלויים.

ולכן נוכל להתייחס לדטרמיננטה כפולינום מעל שדה F עם $m+n$ משתנים בלתי תלויים.

דוגמא:

עבור $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ $g(x) = b_1x + b_0$

נחשב את הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר

$$\begin{aligned} R_{2,1}(f,g) &= \det\left(\mathrm{syl}_{2,1}(f,g)\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = a_0b_1^2 + a_2b_0^2 - b_0a_1b_1 \end{aligned}$$

קיבלנו פולינום ב 5 משתנים בלתי תלויים מעל שדה F, כאשר המשתנים הבלתי תלויים הם a_2, a_1, a_0, b_1b_0.

בהבחנה זו נעשה שימוש במהלך העבודה

הראשון יהיה המשפט הבא

משפט 1.4

יהיו $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_jx^j$, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ פולינומים בשדה F

$R_{n,m}(f,g)$ הוא פולינום הומוגני עם מקדמים שלמים במקדמים a_i, b_i

כאשר עבור $a_n \dots a_0$ המעלה היא m

ועבור $b_m \dots b_0$ המעלה היא n.

הוכחה

הוכחה זו מתבססת על הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות.

נחזור למטריצת סילבסטר, זוהי מטריצה מסדר $n+m \times n+m$

נתבונן באיבר כלשהוא בסכום הנתון ע"י הגדרת הדטרמיננטה נבחר $\sigma \in S_{n+m}$

המחובר בסכום מתקבל ע"י כפל של בין איברי המטריצה כך שכל שורה וכל עמודה מופיעה בדיוק פעם אחת .

כלומר עבור $\sigma_{i_1,j_1}, \sigma_{i_2,j_2}$ אם $i_1 \neq i_2$ אז $j_1 \neq j_2$ לכל i_k, j_l $1 \leq k, l \leq n+m$

וכלן בסה"כ מספר האיברים במכפלה הינו כמספר השורות (או העמודות) וזה בדיוק $n+m$

כאשר לפי הגדרת מטריצת סילבסטר מ m השורות הראשונות מקבלים מקדמים של הפולינום $f(x)$

ומ n השורות האחרונות מקבלים מקדמים מהפולינום $g(x)$

ולכן בסה"כ סכום החזקות של האיבר σ הוא m מאיברי $f(x)$ ו n מאיברי $g(x)$

כנדרש.