פרק 2:

תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה.

1. $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\;\; g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ פולינומים מעל שדה F.
2. ללא הגבלת כלליות ניתן להניח ש F הוא שדה הפיצול של $f\cdot g$, כלומר F מכיל את כל השורשים של f ו- g.
3. $\xi_0\dots\xi_n$ הם השורשים של f, ו $\eta_0\dots\eta_m$ הם השורשים של g.

הרזולטנט

בפרק זה נגדיר את הרזולטנט של שני פולינומים ע"י מכפלת השורשים. הגדרה **1.4** + הערה **1.5** נותנת לנו הגדרה רחבה יותר מהגדרה שנביא עכשיו, בהגדרה שנביא עכשיו מניחים ש $\deg\left(g\right)=m,\deg\left(f\right)=n$.

בהמשך הפרק נוכיח שהגדרה 1.4 והגדרה 2.1 שקולות.

נזכיר שלמען הנוחות עד שנוכיח את השקילות בין ההגדרות בהגדרה 2.1 נסמן את הרזולטנט של f,g ע"י $R\left(f,g\right)$.

<u>הגדרה 2.1 (הגדרת הרזולטנט לפי מכפלת השורשים)</u>

יהיו f,g פולינומים מעל שדה F.

אם $m=0$ ו $n>0$, $R\left(f,g\right)=a_0^m$.

אם $n=0$ ו $m>0$, $R\left(f,g\right)=b_0^n$.

אם $m=n=0$, $R\left(f,g\right)=a_0b_0$.

אם $n,m>0$

$$R\left(f,g\right)=a_n^mb_m^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right)\quad.(2.1)$$

<u>דוגמא</u>

$$f\left(x\right)=x\left(x^2-4\right)=x\left(x+2\right)\left(x-2\right)=x^3-4x$$

$$g\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-3\right)=x^2-2x-3$$

נבחין כי השורשים של f הם $0,2,-2$ והשורשים של g הם $-1,3$.

נסמן

$$\xi_1=0,\xi_2=2,\xi_3=-2\quad \eta_1=-1,\eta_2=3$$

נציב במשוואה (2.1) כאשר $a_n^m=1^2\,,b_m^n=1^3$.

$$\left(\left(0-\left(-1\right)\right)\left(0-3\right)\right)\left(\left(2-\left(-1\right)\right)\left(2-3\right)\right)\left(\left(-2-\left(-1\right)\right)\left(-2-3\right)\right)=45$$

קבלנו ש-

$$R\left(f,g\right)=45$$

נחשב לפי הגדרה 1.1 את $\text{Syl}\left(f,g\right)$:

$$R\left(f,g\right)=\begin{vmatrix}1&0&-4&0&0\\0&1&0&-4&0\\1&-2&-3&0&0\\0&1&-2&-3&0\\0&0&1&-2&-3\end{vmatrix}$$

נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס.

ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & 5 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & & & & 5 \end{pmatrix}$$

לאחר שנשלים את כל התמורות נקבל את התמורות הבאות :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1} .$$

"את הסימן רשמנו מתחת לתמורה".

לאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל

$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$

כלומר במקרה זה קבלנו שקילות בין הגדרה 1.4 להגדרה 2.1.

כדי להוכיח את משפט 2.1, נשתמש בצורה שקולה לו שנביא במשפט 2.2, והוכחה של משפט 2.1 תקפה גם למשפט 2.2, ומכיון שכך נוכיח את משפט 2.2 ולאחר מיכן נפנה להוכחה של משפטים 2.1 ו 2.2.

משפט 2.2

יהיו f, g פולינומים מעל שדה F

I. $R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i)$.

II. $R(f,g) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(\eta_j)$.

הוכחת משפט 2.2

טענה זו נובעת כמעט ישירות מהמשפט היסודי של האלגברה.

נציין שלפי המשפט היסודי של האלגברה מעל שדה F ניתן לרשום את f, g כמכפלה של גורמים לינאריים.

הוכחת I.

נרשום את g כמכפלה של גורמים לינארים :

$$g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m} (x - \eta_j) .$$

נציב $\xi_0 \dots \xi_n$ ב g נקבל

$$g(\xi_i) = b_m \prod_{j=1}^{m} (\xi_i - \eta_j) . \quad (*)$$

משרשור השווינות הבא נקבל את השוויון

$$a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\xi_i - \eta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} b_m \prod_{j=1}^{m} (\xi_i - \eta_j)$$

$$\text{hence } (*) = \boxed{a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i)} .$$

הוכחת II

תחילה נבחין

$$a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left(\xi_i - \eta_j\right) = (-1)^{nm} b_m^n a_n^m \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \left(\eta_j - \xi_i\right) \ .$$

נרשום את f כמכפלה של גורמים לינאריים

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^n \left(x - \xi_i\right) \ . \ (**)$$

נציב $\eta_0 \dots \eta_m$

$$f\left(\eta_j\right) = a_n \prod_{i=1}^n \left(\eta_j - \xi_i\right) \ .$$

ולכן שוב משרשור השוויונות הבא נקבל

$$\begin{aligned} a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left(\xi_i - \eta_j\right) &= (-1)^{nm} b_m^n a_n^m \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n \left(\eta_j - \xi_i\right) \\ &= (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m a_n \prod_{i=1}^n \left(\eta_j - \xi_i\right) \\ \text{hence } (**) &= \boxed{(-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f\left(\eta_j\right)} . \end{aligned}$$

כנדרש.

נעבור עכשיו להוכחת משפטים 2.1 ו 2.2, תחילה נוכיח שתי טענות עזר שנצטרך להם בהוכחה.

<u>טענה עזר 2.4</u>

יהיו f, g פולינומים ממעלה m, n בהתאמה כך שמתקיים $m \le n$, ויהי h פולינום כך ש $\deg(h) \le n - m$.

מתקיים

$$R(f + hg, g) = R(f, g) \ .$$

באופן סימטרי אם $n \le m$ אז עבור h כך ש $\deg(h) \le m - n$ מתקיים

$$R(f, g + hf) = R(f, g) \ .$$

.

הדרישה ש $\deg(h) \le n - m$ במקרה הראשון (ובדומה $\deg(h) \le m - n$) הכרחית, נניח ש- $\deg(h) > n - m$ ולכן $\deg(gh) >$ $n - m + m = n$ ולכן גם $\deg(f + hg) > n$ ואז השוויון לא יוכל להתקיים.

<u>הוכחה</u>

נוכיח באינדוקציה על המעלה של h, נניח ש $k \le n - m$ ונסמן $h = \sum_{l=\rho}^{k} h_\rho x^\rho$.

תחילה נוכיח שהמשפט מתקיים עבור מונום יחיד cx^ρ עם $\rho \in \mathbb{Z}$, ובפרט הוא מתקיים עבור $h_\rho x^\rho$.

נוכל להניח ללא הגבלת כלליות ש $k = n - m$ ע"י הגדרת $h_\rho = 0$ לכל שאר החזקות.

מכיון ש $m<n$, לפי הגדרת מטריצת סילבסטר נקבל

$$\begin{pmatrix} a_n+cb_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-\rho-1} & a_{n-2}+cb_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n+h_\rho b_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2+cb_2 & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = R_{,}\left(f+\left(cx^\rho\right)g,g\right)$$

הביטוי $n-\rho$ נובע מכך שהכפל cx^ρ מזיז את איברי g ρ מקומות כי $cx^\rho b_j x^j = cb_j x^{j+\rho}$, ולאחר הצבה $i=j+\rho$ נקבל $j=i-\rho$ כלומר המקדם של החזקה ה i הוא $b_{i-\rho}$.

מכך ש $\rho<n-m$, כל אחד מ m השורות הראשונות ב $\mathrm{Syl}\left(f+cx^\rho g,g\right)$ הוא סכום של השורה המתאימה במטריצה $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$ עם אחד השורות האחרונות וקומבינציה לינארית של שורות אחרות.

במילים אחרות ניתן לעבור מ $\mathrm{Syl}\left(f,g\right)$ ל $\mathrm{Syl}\left(f+cx^\rho g,g\right)$ ע"י פעולות על השורות של המטריצה וקומבינציה לינארית של שורות אחרות. אבל הוספת קומבינציה לינארית של שורות לשורה אחרת במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה ולכן :

$$\boxed{R_{,}\left(f+\left(h_\rho x^\rho\right)g,g\right)=R\left(f,g\right)}$$

הנחת האינדוקציה :

נניח שהטענה נכונה עבור פולינום ממעלה $k-1$ ונוכיח עבור פולינום ממעלה k.

צעד האינדוקציה :

$$\begin{aligned} \boxed{R_{,}\left(f+hg,g\right)} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k}h_l x^l\right)g,g\right)\right) \\ &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k-1}h_l x^l\right)g+\left(h_k x^k\right)g,g\right)\right) \\ \text{step induction} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(h_k x^k\right)g,g\right)\right) \\ \text{case base} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f,g\right)\right) \\ &= \boxed{R\left(f,g\right)} \end{aligned}$$

כנדרש.

נשים לב שתוך כדאי שרשור השוויונות קבלנו ש

$$\mathrm{Syl}\left(f+hg,g\right)=\mathrm{Syl}\left(f,g\right) \quad (2.4)$$

בשוויון זה נעשה שימוש בהמשך.

עבור המקרה השני $R_{,}\left(f,g+hf\right)=R\left(f,g\right)$ נקבל את השוויון באותו האופן.

<u>טענת עזר 2.5</u>

I. אם $\deg\left(g\right)\le k\le m$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_n^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)\ .$$

II. אם $\deg(f) \le k \le n$ אז

$$R_{n,m}(f,g) = (-1)^{(n-k)m} b_m^{n-k} R_{k,m}(f,g)\ .$$

הוכחה

הוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר,

כלומר נניח ש $g_m = 0$. אז

$$\mathrm{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

נבחין שאם נמחק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\mathrm{Syl}(f,\hat{g}) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

כאשר $\hat{g}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j$ ומכיון ש $b_m = 0$ אז $\hat{g}(x) = g(x)$, ולכן אם נפתח את הדטרמיננטה $R(f,g)$ לפי העמודה הראשונה נקבל:

$$\boxed{R(f,g)} = a_n R_{n,m}(f,\hat{g}) = \boxed{a_n R_{n,m-1}(f,g)}.$$

בשביל לסיים את ההוכחה נגדיר את g לכל $\deg(g) \le j \le m$ להיום עם מקדם 0, ונקבל

$$\begin{aligned} R(f,g) &= a_n R_{n,m-1}(f,g) \\ &= a_n a_n R_{n,m-2}(f,g) \\ &= \left(\underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{r\text{ times}}\right) R_{n,m-r}(f,g) \\ &= a_n^r R_{n,m-r}(f,g) \end{aligned}$$

כאשר $m-r-1$ הוא המקדם הראשון שאינו 0 .

נסמן $m-r=k$ ונקבל $R(f,g)=a_n^{m-k}R_{n,k}(f,g)$ כנדרש.

הוכחת II.

לפי 1.9

$$R(f,g)=(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)$$

לפי I והתנאי ש $\deg(f)<k<n$ נקבל

ולכן

$$(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)=(-1)^{nm}b_m^{n-k}R_{m,k}(g,f)\ .$$

שוב לפי משוואה 1.9

$$R_{m,k}(g,f)=(-1)^{km}R_{k,m}(f,g)$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)&=(-1)^{nm}b_m^{n-k}(-1)^{km}R_{k,m}(f,g)\\&=(-1)^{m(n+k)}b_m^{n-k}R_{k,m}(f,g)\ .\end{aligned}$$

ומכיון של $m+n+k$ ו $n-k$ אותה זוגיות נקבל לאחר כל השוויונות

$$\boxed{R(f,g)=(-1)^{m(n-k)}b_m^{n-k}R_{k,m}(f,g)}$$

כנדרש.

הוכחת משפט 2.1 ו 2.2

נוכיח באינדוקציה על הגודל של המטריצה $n+m$

לפי המוסכמות בראש הפרק והמשפט היסודי של האלגברה נוכל לרשום את f,g כמכפלה של גורמים לינאריים

$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^{n}(x-\xi_i)\quad g(x)=b_m\prod_{j=1}^{m}(x-\eta_j)\ .$$

בסיס האינדוקציה:

עבור $m=n=0$ הטענה מתקיימת.

עבור המקרה $n=0$ ו $m>0$ לפי הבחנה 1.3

$$R(f,g)=\det(\mathrm{Syl}(f,g))=b_0^n\ .$$

ובדומה עבור $m=0$ ו $n>0$

$$R(f,g)=\det(\mathrm{Syl}(f,g))=a_0^m\ .$$

הנחת האינדוקציה:

נניח שמשפט 2.1 נכון לכל ערך מטריצה קטנה מ $n+m$.

מקרה 1:

$0<n=\deg(f)\leq m=\deg(g)$.

קיימים פולינומים q,r כך ש $\deg(r)<\deg(f)$ ומתקיים

$$g=qf+r$$

נבחין כי

$$\deg(g-r)=\deg(qf)$$

ולכן נקבל את השוויונות הבאים

$$\deg(q)=\deg(qf)-\deg(f)=\deg(g-r)-n=m-n\,.$$

קבלנו ש $\deg(q)=m-n$ ולכן נוכל להשתמש בטענת עזר 2.4, נקבל

$$(*)\ \ R(f,g)=R_{,}(f,g-qf)=R_{,}(f,r)\ \ .$$

נחלק שוב למקרים.

מקרה א. $r\neq 0$ נסמן $k=\deg(r)\geq 0$,

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.5

$$(**)\ \ R_{n,m}(f,r)\overset{2.5}{\widehat{=}}a_n^{m-k}R_{n,k}(f,r)\overset{\text{base induction}}{\widehat{=}}a_n^{m-k}a_n^k\prod_{i=1}^{n}r(\xi_i)=a_n^m\prod_{i=1}^{n}g(\xi_i)$$

השוויון האחרות נובע מכך ש ξ_i הם שורשים של f ולכן

$$\boxed{g(\xi_i)}=\underbrace{q(\xi_i)\,f(\xi_i)}_{=0}+r(\xi_i)=\boxed{r(\xi_i)}\,.$$

מ $(*)$ ו- $(**)$ נקבל את הנדרש.

מקרה ב. $r=0$,

$$g=fq\,.$$

לפי ההנחה הראשונה של מקרה זה $n>0$ ולכן

$$\text{Syl}(f,r)=\text{Syl}(f,0)=\text{"0"}\,.$$

"0" בשוויון האחרון הכוונה למטריצת האפס.

ולכן

$$R\left(f,g\right)=0\,.$$

מצד שני כיון ש f מחלק את g אז השורשים של f הם שורשים של g גם כן, ולכן בנוסחה 2.1 קיימים ξ_i ו η_j כך ש $\eta_j = \xi_i$ ולכן המכפלה מתאפסת, ומתקיים השוויון הנדרש.

מקרה 2.

$.m=\deg\left(g\right)<n=\deg\left(f\right)$

כמו במקרה הקודם קיימים q,r כך ש $\deg\left(r\right)<m$ ומתקיים

$$f=gq+r$$

ומאותם נימוקים כמו במקרה הקודם

$$(***)\ R\left(f,g\right)=R_{,}\left(f-gq,g\right)=R_{,}\left(r,g\right)$$

ופה נחלק שוב למקרים

מקרה א.

$r\neq0$ נסמן $k=\deg\left(r\right)\geq0$, ומהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.5 נקבל

$$\begin{aligned}(****)\ \boxed{R_{n,m}\left(r,g\right)} & \overset{2.5}{\widehat{=}}\left(-1\right)^{(n-k)m}b_m^{n-k}R_{k,m}\left(r,g\right)\\ \text{base induction}\rightarrow & =\left(\left(-1\right)^{(n-k)m}b_m^{n-k}\right)\left(\left(-1\right)^{km}b_m^{k}\prod_{j=1}^{m}r\left(\eta_j\right)\right)\\ & =\left(-1\right)^{nm}b_m^{n}\prod_{j=1}^{m}r\left(\eta_j\right)\\ & =\boxed{\left(-1\right)^{nm}b_m^{n}\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_j\right)}\end{aligned}$$

ושוב השוויון האחרון נובע מכך ש η_j הם שורשים של g ולכן

$$f\left(\eta_j\right)=\underbrace{g\left(\eta_j\right)q\left(\eta_j\right)}_{=0}+r\left(\eta_j\right)$$

ושוב מ $(***)$ ו $(****)$ נקבל את הנדרש.

מקרה ב.

$r=0$, דומה מאוד לאותו מקרה בהוכחה הקודמת

$$\text{Syl}\left(r,g\right)=\text{Syl}\left(0,g\right)=\text{"0"}\,.$$

ולכן

$$R_{n,m}\left(0,g\right)=0$$

וכמו כן השורשים של g הם שורשים של f ג"כ ולכן המכפלה (2.1) מתאפסת ונקבל את השוויון..