## פרק 2:

תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה.

1. $f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\ \ g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ פולינומים מעל שדה $F$.
2. ללא הגבלת כלליות ניתן להניח ש $F$ הוא שדה הפיצול של $f\cdot g$, כלומר $F$ מכיל את כל השורשים של שניהם.
3. $\xi_n\ ...\ \xi_0$ הם השורשים של $f$, ו $\eta_m\ ...\ \eta_0$ הם השורשים של $g$.

## הרזולטנט

**<u>משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)</u>**

יהיו $f,g$ פולינומים מעל שדה $F$.

$$R_{m.n}\left(f,g\right)=a_n^mb_m^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_i-\eta_j\right)\quad(2.1)$$

את ההוכחה נביא מיד לאחר הדוגמא.

**<u>דוגמא</u>**

$f\left(x\right)=x\left(x^2-4\right)=x\left(x+2\right)\left(x-2\right)=x^3-4x$

$g\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-3\right)=x^2-2x-3$

נבחין כי השורשים של $f$ הם $0,2,-2$ והשורשים של $g$ הם $-1,3$.

נסמן

$$\xi_1=0,\xi_2=2,\xi_3=-2\quad\eta_1=-1,\eta_2=3$$

נציב במשוואה $(2.1)$ כאשר $a_n^m=1^2\ ,b_m^n=1^3$.

$$\left(\left(0-\left(-1\right)\right)\left(0-3\right)\right)\left(\left(2-\left(-1\right)\right)\left(2-3\right)\right)\left(\left(-2-\left(-1\right)\right)\left(-2-3\right)\right)=45$$

קבלנו ש-

$$\boxed{R_{m.n}\left(f,g\right)=45}$$

נחשב לפי הגדרה $1.1$ את הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר של $f,g$ :

$$R_{3.2}\left(f,g\right)=\begin{vmatrix}1&0&-4&0&0\\0&1&0&-4&0\\1&-2&-3&0&0\\0&1&-2&-3&0\\0&0&1&-2&-3\end{vmatrix}$$

נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס.

ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & 5 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & & & & 5 \end{pmatrix}$$

לאחר שנשלים את כל התמורות נקבל את התמורות הבאות:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=1} .$$

"את הסימן רשמנו מתחת לתמורה".

לאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל

$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$

כלומר במקרה זה קבלנו את השוויון במשפט $2.1$, עכשיו נעבור להוכחה.

**הוכחת משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)**

לצורך הוכחת משפט הרזולטנט נצטרך כמה טענות עזר, נביא את הטענות ואת ההוכחות שלהם לפני המשפט.

ניתן לדלג על הוכחות של טענות העזר בקריאה ראשונה.

**טענה עזר 2.2**

יהיו $f,g$ פולינומים מעל שדה $F$

I. $R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\xi_i)$.

II. $R(f,g) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\eta_j)$

**הוכחה**

טענה זו נובעת כמעט ישירות ממשפט הרזולטנט ומהמשפט היסודי של האלגברה.

לפי המשפט היסודי של האלגברה מעל שדה $F$ ניתן לרשום את $f,g$ כמכפלה של גורמים לינאריים.

הוכחת I.

לפי המשפט היסודי של האלגברה נרשום את $g$ כך:

$$g(x) = b_m \prod_{j=1}^m (x - \eta_j) \ .$$

נציב $\xi_m \dots \xi_0$ ב $g$ נקבל

$$(*) \ \ g(\xi_i) = b_m \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) \ .$$

משרשור השווינות הבא נקבל את השוויון

$$\begin{aligned} \boxed{R(f,g)} &= a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) \\ &= a_n^m \prod_{i=1}^n b_m \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) \\ \text{hence } (*) &= \boxed{a_n^m \prod_{i=1}^n g(\xi_i)} \end{aligned}$$

כנדרש.

עבור $f$ נדרש עוד תהליך ע"מ לקבל את השוויון, תחילה נפתח דיון אינטואיטיבי .

נרשום את $f$ גם כן כמפכלה של גורמים לינאריים :

$$f\left(x\right)=a_n\prod_{i=1}^{n}\left(x-\xi_i\right)\ .$$

דיון אינטואיטיבי :

אם נהפוך במטריצת סילסבסטר בין $f$ ל $g$ כלומר ש $g$ תיהיה ב $n$ שורות הראשונות ו $f$ ב $m$ שורות האחרונות נקבל את שוויון I בצורה הבאה

$$R\left(g,f\right)=b_m^n\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_j\right)\ .$$

החלפת שורות במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה פרט לסימן ולכן ע"י פעולות של החלפת השורות נקבל את השוויון הבא

$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^k R\left(g,f\right)=\left(-1\right)^k b_m^n\prod_{j=1}^{m}f\left(\eta_j\right)\ .$$

נותר לברר מהו $k$ כלומר מה הסימן.

נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות נדרש ע"מ להפוך בין $f,g$.

ההחלפה בין השורות תיעשה באופן הבא :

את השורה הראשונה נעביר להיות בשורה השניה את השניה לשלישית וכן הלאה עד האחרונה. את האחרונה נעביר להיות השורה הראשונה.

בכתיב תמורות נקבל את המעגל

$$\left(r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}\ldots r_{n+m}\right)\ .$$

נבצע את המעגל הזה $n$ פעמים. כך נקבל שהשורה הראשונה (של המטריצה המקורית) תיהיה במקום ה $n+1$ "ואז $f$ תיהיה ב $m$ השורות האחרונות", והשורה ה $m$ (של המטריצה מקורית) תיהיה בשורה הראשונה כלומר $g$ תיהיה ב $n$ השורות הראשונות (מספר השורות הוא $n+m$).

החתימה של מחזור באורך $l$ הוא $l-1$ (לא נוכיח טענה זו במסגרת העבודה הזו) ולכן כל מחזור כזה הוא באורך $l=n+m-1$.

נבצע $n$ מחזורים כאלו ע"מ להחליף בין $f$ ל $g$ ולכן בסה"כ נקבל שהסימן הוא

$$\left[\left(-1\right)^{(m+n-1)}\right]^n=\left(-1\right)^{(nm+n^2-n)}=\left(-1\right)^{nm}\ .$$

השוויון האחרות מתקיים כיון ש- $n^2-n=n\left(n-1\right)$ תמיד מספר זוגי כי $n$ זוגי או $n-1$ זוגי, ולכן $nm+n^2-n$ ו $mn$ חולקים את אותה זוגיות.

ולכן בסה"כ הוכחנו II.

<u>הערה :</u>

נשים לב שתוך כדי ההוכחה קבלנו ש-

$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{nm}R\left(g,f\right)\quad(2.2)\ .$$

במשוואה זו נעשה שימוש בהמשך.

**<u>טענה עזר 2.4</u>**

יהיו $f,g$ פולינומים ממעלה $m,n$ בהתאמה כך שמתקיים $m \le n$

ויהי $h$ פולינום כך ש $\deg\left(h\right) \le n-m$.

אז מתקיים

$$R_{n,m}\left(f+hg,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)\ .$$

באופן סימטרי אם $n \le m$ אז עבור $h$ כך ש $\deg\left(h\right) \le m-n$ מתקיים

$$R_{n,m}\left(f,g+hf\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)\ .$$

.

הדרישה ש $\deg\left(h\right) \le n-m$ במקרה הראשון (ובדומה $\deg\left(h\right) \le m-n$) הכרחית אחרת $\deg\left(hg\right) > n+m$ ולכן גם $\deg\left(f+hg\right) > n+m$ ואז השוויון לא יוכל להתקיים.

**<u>הוכחה</u>**

נוכיח באינדוקציה על המעלה של $h$. נניח ש $k \le n-m$ ונסמן $h=\sum_{l=1}^{k}h_l x^l$.

תחילה נוכיח שהמשפט מתקיים עבור מונום יחיד $cx^{\rho}$ עם $\rho \in \mathbb{Z}$.

נוכל להניח ללא הגבלת כלליות ש $k=n-m$ ע"י הגדרת $h_{\rho}=0$ לכל שאר החזקות.

מכיון ש $m<n$, לפי הגדרת מטריצת סילבסטר נקבל

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

$$b_j x^j c x^{\rho}=b_j c x^{j+\rho}\ \ j+\rho=r,\ \ j=r-\rho$$

$$\begin{pmatrix}
a_n+cb_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-\rho-1} & a_{n-2}+cb_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & a_n+h_{\rho}b_n & a_{n-1}+cb_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_2+cb_2 & a_1+cb_1 & a_0+cb_0\\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0
\end{pmatrix}=R_{n,m}\left(f+\left(cx^{\rho}\right)g,g\right)$$

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

מכך ש $\rho<n-m$, כל אחד מ $m$ השורות הראשונות ב $R_{n,m}\left(f+cx^{\rho}g,g\right)$ הוא סכום של השורה המתאימה במטריצה $R_{n,m}\left(f,g\right)$ עם אחד השורות האחרונות וקומבינציה לינארית של שורות אחרות.

במילים אחרות ניתן לעבור מ $R_{n,m}\left(f,g\right)$ ל $R_{n,m}\left(f+cx^{\rho}g,g\right)$ע"י פעולות על השורות של המטריצה וקומבינציה לינארית של שורות אחרות. אבל הוספת קומבינציה לינארית של שורות לשורה אחרת במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה ולכן:

$$\boxed{R_{n,m}\left(f+\left(h_{\rho}x^{\rho}\right)g,g\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)}$$

הנחת האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור פולינום ממעלה $k-1$ ונוכיח עבור פולינום ממעלה $k$.

צעד האינדוקציה:

$$\begin{aligned}\boxed{R_{n,m}\left(f+hg,g\right)} &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k}h_lx^l\right)g,g\right)\\ &= R_{n,m}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k-1}h_lx^l\right)g+\left(h_kx^k\right)g,g\right)\\ \text{step induction} &= R_{n,m}\left(f+\left(h_kx^k\right)g,g\right)\\ \text{case base} &= \boxed{R_{n,m}\left(f,g\right)}\end{aligned}$$

כנדרש.

עבור המקרה השני $R_{n,m}\left(f,g+hf\right)=R_{n,m}\left(f,g\right)$ נקבל את השוויון באותו האופן.

**<u>טענת עזר 2.5</u>**

i. אם $\deg\left(g\right)\le k\le m$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=a_n^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right).$$

ii.אם $\deg\left(f\right)\le k\le n$ אז

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{(n-k)m}b_m^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right).$$

**<u>הוכחה</u>**

הוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר,

כלומר נניח ש $g_m=0$. אז

$$\mathrm{Syl}\left(f,g\right)=\begin{pmatrix}a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0\\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0\end{pmatrix}.$$

נבחין שאם נמחק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\mathrm{Syl}\left(f,\hat{g}\right)=\begin{pmatrix}a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0\\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0\end{pmatrix}.$$

כאשר $\hat{g}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j$ ומכיון ש $b_m = 0$ אז $\hat{g}(x) = g(x)$, ולכן אם נפתח את הדטרמיננטה $R_{n,m}(f,g)$ לפי העמודה הראשונה נקבל ש

$$\boxed{R_{n,m}(f,g)} = a_n R_{n,m}(f,\hat{g}) = \boxed{a_n R_{n,m-1}(f,g)}.$$

נסמן $k = m-1$ ונפתח עוד קצת את השוויון הזה ונקבל

$$\begin{aligned} a_n R_{n,m-1}(f,g) &= a_n^{m-(m-1)} R_{n,m-1}(f,g) \\ &= \boxed{a_n^{m-k} R_{n,k}(f,g)} \end{aligned}$$

קבלנו את הטענה עבור $k = m-1$.

i. הוכחה באינדוקציה לאחור על $k$.

עבור $k = m$ מתקבל השוויון מיידי

$$\boxed{R_{n,m}(f,g)} = a_n^0 R_{n,k}(f,g) = \boxed{a_n^{m-k} R_{n,k}(f,g)}.$$

בסיס האינדוקציה:

עבור $k = m-1$ כלומר $g_m = 0$ ראינו כי הטענה נכונה.

הנחת האינדוקציה:

נניח שהטענה נכונה עבור $m - l \le k = m$.

נוכיח את הטענה עבור $k = m - l - 1$.

לפי הנחת האינדוקציה

$$R_{n,m}(f,g) = a_n^{m-(m-l)} R_{n,m-l}(f,g)\ .$$

נתבונן ב $R_{n,m-l}(f,g)$; זה למעשה הרזולטנט של $f, g$ כך שעבור $g$ ניקח עד החזקה $m-l$

ולפי ההנחה המקדם של החזקה $m-l-1$ הוא $0$

אבל אנחנו כבר יודעים לפי בסיס האינדוקציה שעבור $R_{n,m-l}(f,g)$ מתקיים ש

$$R_{n,m-l}(f,g) = a^n R_{n,m-l-1}(f,g)\ .$$

ולכן בסה"כ נקבל את השוויון

$$\begin{aligned} \boxed{R_{n,m}(f,g)} &= a_n^{m-(m-l)} R_{n,m-l}(f,g) \\ \text{step induction} &= a_n^{m-(m-l)} a_n R_{n,m-l-1}(f,g) \\ &= a_n^{m-(m-l-1)} R_{n,m-l-1}(f,g) \\ &\boxed{a_n^{m-k} R_{n,k}(f,g)} \end{aligned}$$

הוכחת II.

לפי משוואה $(2.2)$

$$R_{n,m}(f,g)=(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)$$

לפי I והתנאי ש $\deg(f)<k<n$ נקבל ש- $R_{m,n}(g,f)=b_m^n\prod_{j=1}^m f(\eta_j)$

ולכן

$$(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)=(-1)^{nm}b_m^{n-k}R_{m,k}(g,f)\ .$$

שוב לפי משוואה $(2.2)$

$$R_{m,k}(g,f)=(-1)^{km}R_{k,m}(f,g)$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)&=(-1)^{nm}b_m^{n-k}(-1)^{km}R_{k,m}(f,g)\\&=(-1)^{m(n+k)}b_m^{n-k}R_{k,m}(f,g)\ .\end{aligned}$$

ומכיון של $m+n+k$ ו $n-k$ אותה זוגיות נקבל לאחר כל השוויונות

$$\boxed{R_{n,m}(f,g)=(-1)^{m(n-k)}b_m^{n-k}R_{k,m}(f,g)}$$

כנדרש.

**<u>הוכחת משפט הרזולטנט</u>**

נוכיח באינדוקציה על הגודל של המטריצה $n+m$

לפי המוסכמות בראש הפרק

$$f(x)=a_n\prod_{i=1}^n(x-\xi_i)\quad g(x)=b_m\prod_{j=1}^m(x-\eta_j)$$

**<u>בסיס האינדוקציה (חסר)</u>**

הנחת האינדוקציה:

נניח שמשפט הרזולטנט מתקיים לכל ערך מטריצה קטנה מ $n+m$, ובהנחה זה אנחנו כוללים שזה נכון לכל $f,g$ שקטנות מ $n,m$ בהתאמה(**צריך להסביר למה**)

מקרה 1:

$$0<n=\deg(f)\le m=\deg(g)$$

קיימים פולינומים $q,r$ כך ש $\deg(r)<\deg(f)$ומתקיים ש -

$$g=qf+r$$

נבחין כי

$$\deg(g-r)=\deg(qf)$$

ולכן נקבל את השוויונות הבאים

$$\deg\left(q\right)=\deg\left(qf\right)-\deg\left(f\right)=\deg\left(g-r\right)-n=m-n$$

מטענת עזר 2 נקבל

$$R_{n,m}\left(f,g\right)=R_{n,m}\left(f,g-qf\right)=R_{n,m}\left(f,r\right)$$

נחלק שוב למקרים.

מקרה 1 $r\neq0$ נסמן $k=\deg\left(r\right)\geq0$

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 3

$$R_{n,m}\left(f,r\right)=a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,r\right)=a_{n}^{m-k}a_{n}^{k}\prod_{i=1}^{n}r\left(\xi_{i}\right)=a_{n}^{m}\prod_{i=1}^{n}g\left(\xi_{i}\right)$$

השוויון האחרות נובע מכך ש $\xi_{i}$ הם שורשים של $f$ ולכן

$$\boxed{g\left(\xi_{i}\right)}=\underbrace{q\left(\xi_{i}\right)f\left(\xi_{i}\right)}_{=0}+r\left(\xi_{i}\right)=\boxed{r\left(\xi_{i}\right)}.$$

קבלנו את הטענה עבור $0<n=\deg\left(f\right)\leq m=\deg\left(g\right)$ ו $r\neq0$.

עבור $r=0$

$$g=fq$$

לפי ההנחה של מקרה זה $n>0$ ולכן

$$Syl_{n,m}\left(f,r\right)=Syl_{n,m}\left(f,0\right)$$

ולכן

$$R_{n,,m}\left(f,r\right)=0$$

מצד שני כיון ש $f$ מחלק את $g$ אז השורשים של $f$ הם שורשים של $g$ גם כן,

ולכן בנוסחה 2.1 **צריך להשלים**

לפי טענת עזר 2

$$\begin{aligned}R_{n,,m}\left(f,g\right) & =R_{n,,m}\left(f,g-qf\right)=R_{n,,m}\left(f,0\right)\\
 & =R_{n,,m}\left(f,r\right)=0
\end{aligned}$$

ויתר מזה

$$g\left(\xi_{1}\right)=f\left(\xi_{1}\right)q\left(\xi_{1}\right)=0$$

כלומר $\xi_1$ הוא שורש של $g$ גם ולכן ?????

מקרה 2

$n=0$

$$\begin{aligned}R_{0.m}\left(f,g\right)&=a_{n}^{m}b_{m}^{0}\prod_{i=1}^{0}\prod_{j=1}^{m}\left(\xi_{i}-\eta_{j}\right)\\&=a_{n}^{m}\end{aligned}$$

והטענה מתקיימת

מקרה 3

$m=\deg\left(g\right)<n=\deg\left(f\right)$ הוכחה זה דומה למקרה 1,

וכמו כן עבור $m=0$ הוכחה דומה עבור מקרה 2

לא נחזור על הוכחות אלו