פרק 2:

תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה.

1. $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ פולינומים מעל שדה F.
2. ללא הגבלת כלליות ניתן להניח ש F הוא שדה הפיצול של $f\cdot g$, כלומר F מכיל את כל השורשים של f ו- g.
3. $\xi_0 ... \xi_n$ הם השורשים של f, ו $\eta_0 ... \eta_m$ הם השורשים של g.

הרזולטנט

משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)

יהיו f,g פולינומים מעל שדה F.

$$R(f,g)=a_n^m b_m^n\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\xi_i-\eta_j) \quad .(2.1)$$

מקרה טרוויאלי, כאשר $\deg(f)<n$ וגם $\deg(g)<m$, המכפלה מתאפסת, וזה נכון גם לפי הגדרה 1.4 כמו שראינו בהערה 1.6.

דוגמא

$$f(x)=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2)=x^3-4x$$
$$g(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$$

נבחין כי השורשים של f הם $0,2,-2$ והשורשים של g הם $-1,3$.

נסמן

$$\xi_1=0,\xi_2=2,\xi_3=-2 \quad \eta_1=-1,\eta_2=3$$

נציב במשוואה (2.1) כאשר $a_n^m=1^2$, $b_m^n=1^3$.

$$((0-(-1))(0-3))((2-(-1))(2-3))((-2-(-1))(-2-3))=45$$

קבלנו ש-

$$\boxed{R(f,g)=45}$$

נחשב לפי הגדרה 1.1 את $\mathrm{Syl}(f,g)$:

$$R(f,g)=\begin{vmatrix}1&0&-4&0&0\\0&1&0&-4&0\\1&-2&-3&0&0\\0&1&-2&-3&0\\0&0&1&-2&-3\end{vmatrix}$$

נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס.

ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & & & & 5\end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & & & & 5\end{pmatrix}$$

לאחר שנשלים את כל התמורות נקבל את התמורות הבאות :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5\end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix}}_{\operatorname{sgn}(\sigma)=1} .$$

"את הסימן רשמנו מתחת לתמורה".

לאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל

$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$

כלומר במקרה זה קבלנו את השוויון במשפט 2.1.

משפט 2.2 (משפט שקול למשפט הרזולטנט)

יהיו f, g פולינומים מעל שדה F

I. $R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i)$.

II. $R(f,g) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(\eta_j)$.

מכיון שבהוכחת משפט 2.1 נשתמש בצורה השקולה משפט 2.2, אז תחילה נוכיח את שקילות המשפטים 2.2 ו 2.3

טענת עזר 2.3

יהיו f, g פולינומים מעל שדה F.

$$R(f,g) = (-1)^{nm} R(g,f) \quad (2.2) \ .$$

הוכחה

נפתח בדיון אינטואיטיבי :

ניתן לעבור מ $\operatorname{Syl}(f,g)$ ל $\operatorname{Syl}(g,f)$, ע"י פעולות על שורות המטריצה,ולכן נבדוק מה יהיה המחיר לעבור מ $\operatorname{Syl}(f,g)$ ל $\operatorname{Syl}(g,f)$.

נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות בין השורות נדרש ע"מ להפוך בין f, g וזה יהיה הסימן המבוקש.

נעבור להוכחה.

ההחלפה בין השורות תיעשה באופן הבא :

את השורה הראשונה נעביר להיות בשורה השניה את השניה לשלישית וכן הלאה עד האחרונה. את האחרונה נעביר להיות השורה הראשונה.

בכתיב תמורות נקבל את המעגל

$$(r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} \ldots r_{n+m}) \ .$$

נבצע את המעגל הזה n פעמים. כך נקבל שהשורה הראשונה (של המטריצה המקורית) תיהיה במקום ה $n+1$ "ואז f תיהיה ב m השורות האחרונות", והשורה ה m (של המטריצה מקורית) תיהיה בשורה הראשונה כלומר "g תיהיה ב n השורות הראשונות" (מספר השורות הוא $n+m$).

החתימה של מחזור באורך l הוא $l-1$ (הוכחת טענה זו חורגת ממסגרת המאמר הזה) ולכן כל מחזור כזה הוא באורך $l = n + m - 1$.

נבצע n מחזורים כאלו ע"מ להחליף בין f ל g ולכן בסה"כ נקבל שהסימן הוא

$$\left[(-1)^{(m+n-1)}\right]^n = (-1)^{(nm+n^2-n)} = (-1)^{nm} \ .$$

השוויון האחרות מתקיים כיון ש- $n^2-n=n(n-1)$ תמיד מספר זוגי כי n זוגי או $n-1$ זוגי, ולכן $nm+n^2-n$ ו mn חולקים את אותה זוגיות.

ולכן בסה"כ הוכחנו טענה עזר 2.2.

במשוואה (2.2) נעשה שימוש בהמשך.

<u>הוכחת שקילות המשפטים 2.1 ו 2.2</u>

נרצה להוכיח ש

$$\boxed{a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\xi_i-\eta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(\eta_j)}$$

ובהוכחה עצמה נוכיח את ששרשור השוויונות שווה ל $R(f,g)$

טענה זו נובעת כמעט ישירות מהמשפט היסודי של האלגברה.

נשים לב שלפי המשפט היסודי של האלגברה מעל שדה F ניתן לרשום את f,g כמכפלה של גורמים לינאריים.

<u>הוכחת I.</u>

נרשום את g כמכפלה של גורמים לינארים :

$$g(x) = b_m \prod_{j=1}^{m}(x-\eta_j) \ .$$

נציב $\xi_0 \dots \xi_m$ ב g נקבל

$$g(\xi_i) = b_m \prod_{j=1}^{m}(\xi_i-\eta_j) \ . \ \ (2.3)$$

משרשור השווינות הבא נקבל את השוויון

$$a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(\xi_i-\eta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} b_m \prod_{j=1}^{m}(\xi_i-\eta_j)$$

$$\text{hence } (2.3) = \boxed{a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i)}$$

עבור f נשתמש בטענת עזר 2.3 ע"מ לקבל את השוויון.

<u>הערה :</u> בהוכחת משפט הרזולטנט ללא תלות בהוכחה הנוכחית נוכיח את השוויון $R(f,g) = a_n^m \prod_{i=1}^{n} g(\xi_i)$ ולכן נוכל להשתמש בטענת עזר (2.3), למען הסדר הטוב לא הבאנו את ההוכחה הזו כאן אלא נשאיר אותו להוכחת משפט הרזולטנט.

נרשום את f כמכפלה של גורמים לינאריים.

לפי I

$$R(g,f) = b_m^n \prod_{j=1}^{m} f(\eta_j)$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
R\left(f,g\right) &\overset{(2.3)}{\cong} \left(-1\right)^{nm} R\left(g,f\right) \\
&= \left(-1\right)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^{m} f\left(\eta_j\right)
\end{aligned}
$$

כנדרש.

<u>הוכחת משפט 2.1 (משפט הרזולטנט)</u>

לצורך הוכחת משפט הרזולטנט נצטרך שתי טענות עזר, נביא את הטענות ואת ההוכחות שלהם לפני המשפט.

<u>טענה עזר 2.4</u>

יהיו f,g פולינומים ממעלה m,n בהתאמה כך שמתקיים $m\le n$, ויהי h פולינום כך ש $\deg\left(h\right)\le n-m$.

אז מתקיים

$$R\left(f+hg,g\right)=R\left(f,g\right)\ .$$

באופן סימטרי אם $n\le m$ אז עבור h כך ש $\deg\left(h\right)\le m-n$ מתקיים

$$R\left(f,g+hf\right)=R\left(f,g\right)\ .$$

.

הדרישה ש $\deg\left(h\right)\le n-m$ במקרה הראשון (ובדומה $\deg\left(h\right)\le m-n$) הכרחית, נניח ש- $\deg\left(h\right)>n-m$ ולכן $\deg\left(gh\right)>n-m+m=n$ ולכן גם $\deg\left(f+hg\right)>n$ ואז השוויון לא יוכל להתקיים.

<u>הוכחה</u>

נוכיח באינדוקציה על המעלה של h, נניח ש $k\le n-m$ ונסמן $h=\sum_{l=\rho}^{k}h_\rho x^\rho$.

תחילה נוכיח שהמשפט מתקיים עבור מונום יחיד cx^ρ עם $\rho\in\mathbb{Z}$, ובפרט הוא מתקיים עבור $h_\rho x^\rho$.

נוכל להניח ללא הגבלת כלליות ש $k=n-m$ ע"י הגדרת $h_\rho=0$ לכל שאר החזקות.

מכיון ש $m<n$, לפי הגדרת מטריצת סילבסטר נקבל

$$
\begin{pmatrix}
a_n+cb_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-\rho-1} & a_{n-2}+cb_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & a_n+h_\rho b_{n-\rho} & a_{n-1}+cb_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_1+cb_1 & a_0+cb_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_2+cb_2 & a_1+cb_1 & a_0+cb_0\\
b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0
\end{pmatrix}
= R_{,}\left(f+\left(cx^\rho\right)g,g\right)
$$

הביטוי $n-\rho$ נובע מכך שהכפל cx^ρ מזיז את איברי g ρ מקומות כי $cx^\rho b_j x^j=cb_jx^{j+\rho}$, ולאחר הצבה $i=j+\rho$ נקבל $j=i-\rho$ כלומר המקדם של החזקה ה i הוא $b_{i-\rho}$.

מכך ש $\rho<n-m$, כל אחד מ m השורות הראשונות ב $\operatorname{Syl}\left(f+cx^\rho g,g\right)$ הוא סכום של השורה המתאימה במטריצה $\operatorname{Syl}\left(f,g\right)$ עם אחד השורות מ n השורות האחרונות וקומבינציה לינארית של שורות אחרות.

במילים אחרות ניתן לעבור מ $\mathrm{Syl}(f,g)$ ל $\mathrm{Syl}(f+cx^{\rho}g,g)$ ע"י פעולות על השורות של המטריצה וקומבינציה לינארית של שורות אחרות. אבל הוספת קומבינציה לינארית של שורות לשורה אחרת במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה ולכן :

$$\boxed{R_{,}\left(f+\left(h_{\rho}x^{\rho}\right)g,g\right)=R\left(f,g\right)}$$

הנחת האינדוקציה :

נניח שהטענה נכונה עבור פולינום ממעלה $k-1$ ונוכיח עבור פולינום ממעלה k.

צעד האינדוקציה :

$$\begin{aligned}
\boxed{R_{,}\left(f+hg,g\right)} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k}h_{l}x^{l}\right)g,g\right)\right)\\
&= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(\sum_{l=1}^{k-1}h_{l}x^{l}\right)g+\left(h_{k}x^{k}\right)g,g\right)\right)\\
\text{step induction} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f+\left(h_{k}x^{k}\right)g,g\right)\right)\\
\text{case base} &= \det\left(\mathrm{Syl}\left(f,g\right)\right)\\
&= \boxed{R\left(f,g\right)}
\end{aligned}$$

כנדרש.

נשים לב שתוך כדאי שרשור השוויונות קבלנו ש

$$\mathrm{Syl}\left(f+hg,g\right)=\mathrm{Syl}\left(f,g\right)\quad(2.4)$$

בשוויון זה נעשה שימוש בהמש.

עבור המקרה השני $R_{,}\left(f,g+hf\right)=R\left(f,g\right)$ נקבל את השוויון באותו האופן.

טענת עזר 2.5

i. אם $\deg\left(g\right)\leq k\leq m$ אז

$$R\left(f,g\right)=a_{n}^{m-k}R_{n,k}\left(f,g\right)\ .$$

ii.אם $\deg\left(f\right)\leq k\leq n$ אז

$$R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{(n-k)m}b_{m}^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)\ .$$

הוכחה

הוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר,

כלומר נניח ש $g_{m}=0$. אז

$$\mathrm{Syl}\left(f,g\right)=\begin{pmatrix}
a_{n} & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{n} & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{1} & a_{0} & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{2} & a_{1} & a_{0}\\
0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_{1} & b_{0} & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_{2} & b_{1} & b_{0}
\end{pmatrix}\ .$$

נבחין שאם נמחק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\operatorname{Syl}(f,\hat{g})=\begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0\\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

כאשר $\hat{g}(x)=\sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j$ ומכיון ש $b_m=0$ אז $g(x)=\hat{g}(x)$, ולכן אם נפתח את הדטרמיננטה $R(f,g)$ לפי העמודה הראשונה נקבל:

$$\boxed{R(f,g)}=a_n R_{n,m}(f,\hat{g})=\boxed{a_n R_{n,m-1}(f,g)}.$$

בשביל לסיים את ההוכחה נגדיר את g לכל $\deg(g)\le j\le m$ להיום עם מקדם 0, ונקבל

$$\begin{aligned} R(f,g) &= a_n R_{n,m-1}(f,g)\\ &= a_n a_n R_{n,m-2}(f,g)\\ &= \left(\underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{r\text{ times}}\right) R_{n,m-r}(f,g)\\ &= a_n^r R_{n,m-r}(f,g) \end{aligned}$$

כאשר $m-r-1$ הוא המקדם הראשון שאינו 0 .

נסמן $m-r=k$ ונקבל $R(f,g)=a_n^{m-k}R_{n,k}(f,g)$ כנדרש.

הוכחת II.

לפי משוואה (2.2)

$$R(f,g)=(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)$$

לפי I והתנאי ש $\deg(f)<k<n$ נקבל

ולכן

$$(-1)^{nm}R_{m,n}(g,f)=(-1)^{nm}b_m^{n-k}R_{m,k}(g,f)\ .$$

שוב לפי משוואה (2.2)

$$R_{m,k}(g,f)=(-1)^{km}R_{k,m}(f,g)$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned} (-1)^{nm}R_{m,n}(g,f) &= (-1)^{nm}b_m^{n-k}(-1)^{km}R_{k,m}(f,g)\\ &= (-1)^{m(n+k)}b_m^{n-k}R_{k,m}(f,g)\ . \end{aligned}$$

ומכיון של $m+n+k$ ו $n-k$ אותה זוגיות נקבל לאחר כל השוויונות

$$\boxed{R\left(f,g\right)=\left(-1\right)^{m(n-k)}b_m^{n-k}R_{k,m}\left(f,g\right)}$$

כנדרש.

הוכחת משפט הרזולטנט

נוכיח באינדוקציה על הגודל של המטריצה $n+m$

לפי המוסכמות בראש הפרק והמשפט היסודי של האלגברה נוכל לרשום את f,g כמכפלה של גורמים לינאריים

$$f\left(x\right)=a_n\prod_{i=1}^{n}\left(x-\xi_i\right)\quad g\left(x\right)=b_m\prod_{j=1}^{m}\left(x-\eta_j\right)\ .$$

בסיס האינדוקציה (חסר)

הנחת האינדוקציה:

נניח שמשפט הרזולטנט מתקיים לכל ערך מטריצה קטנה מ $n+m$, ובהנחה זה אנחנו כוללים שזה נכון לכל f,g שקטנות מ n,m בהתאמה לפי הערה 1.6.

מקרה 1:

$0<n=\deg\left(f\right)\leq m=\deg\left(g\right)$.

קיימים פולינומים q,r כך ש $\deg\left(r\right)<\deg\left(f\right)$ ומתקיים

$$g=qf+r$$

נבחין כי

$$\deg\left(g-r\right)=\deg\left(qf\right)$$

ולכן נקבל את השוויונות הבאים

$$\deg\left(q\right)=\deg\left(qf\right)-\deg\left(f\right)=\deg\left(g-r\right)-n=m-n\,.$$

קבלנו ש $\deg\left(q\right)=m-n$ ולכן נוכל להשתמש בטענת עזר 2.4, נקבל

$$(*)\ R\left(f,g\right)=R_{,}\left(f,g-qf\right)=R_{,}\left(f,r\right)\ .$$

נחלק שוב למקרים.

מקרה 1. $r\neq 0$ נסמן $k=\deg\left(r\right)\geq 0$,

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.5

$$(**)\ R_{n,m}\left(f,r\right)=a_n^{m-k}R_{n,k}\left(f,r\right)=a_n^{m-k}a_n^k\prod_{i=1}^{n}r\left(\xi_i\right)=a_n^m\prod_{i=1}^{n}g\left(\xi_i\right)$$

השוויון האחרות נובע מכך ש ξ_i הם שורשים של f ולכן

$$\boxed{g(\xi_i)} = \underbrace{q(\xi_i)\,f(\xi_i)}_{=0} + r(\xi_i) = \boxed{r(\xi_i)}.$$

מ $(*)$ ו- $(**)$ קבלנו את הטענה עבור $0 < n = \deg(f) \leq m = \deg(g)$ ו $r \neq 0$.

מקרה 2. $r = 0$,

$$g = fq\,.$$

לפי ההנחה הראשונה של מקרה זה $n > 0$ ולכן

$$\mathrm{Syl}(f,r) = \mathrm{Syl}(f,0) = "0"\,.$$

"0" בשוויון האחרון הכוונה למטריצת האפס.

ולכן

$$R(f,g) = 0\,.$$

מצד שני כיון ש f מחלק את g אז השורשים של f הם שורשים של g גם כן, ולכן בנוסחה 2.1 קיימים ξ_i ו η_j כך ש $\xi_i = \eta_j$ ולכן המכפלה מתאפסת.

מקרה 2

$n = 0$

$$\begin{aligned} R_{0,m}(f,g) &= a_n^m b_m^0 \prod_{i=1}^{0} \prod_{j=1}^{m} \left(\xi_i - \eta_j\right) \\ &= a_n^m \end{aligned}$$

והטענה מתקיימת

מקרה 3

$m = \deg(g) < n = \deg(f)$.

כמו במקרה הקודם קיימים q, r כך ש $\deg(r) < m$ ומתקיים

$$f = gq + r$$

ומאותם נימוקים כמו במקרה הקודם

$$(*)\ R(f,g) = R_{,}(f - gq, g) = R_{,}(r,g)$$

ופה נחלק שוב למקרים $r \neq 0$ נסמן $k = \deg(r) \geq 0$, ומהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.5 נקבל

$$
\begin{aligned}
(**)\ R_{n,m}(r,g) &= (-1)^{(n-k)m}\, b_m^{n-k} R_{k,m}(r,g) \\
&= \left((-1)^{(n-k)m}\, b_m^{n-k}\right)\left((-1)^{km}\, b_m^{k} \prod_{j=1}^{m} r(\eta_j)\right) \\
&= (-1)^{nm}\, b_m^{n} \prod_{j=1}^{m} r(\eta_j) \\
&= (-1)^{nm}\, b_m^{n} \prod_{j=1}^{m} f(\eta_j)
\end{aligned}
$$

ושוב השוויון האחרון נובע מכך ש η_j הם שורשים של g ולכן

$$f(\eta_j) = \underbrace{g(\eta_j)\, q(\eta_j)}_{=0} + r(\eta_j)$$

ולכן בסה"כ קבלנו את 2.2 II.

עבור $r = 0$, דומה מאוד לאותו מקרה בהוכחה הקודמת

$$\mathrm{Syl}(r,g) = \mathrm{Syl}(0,g) = \text{"0"}\ .$$

ולכן

$$R_{n,m}(0,g) = 0$$

וכמו כן השורשים של f הם שורשים של f ג"כ ולכן המכפלה (2.1) מתאפסת ונקבל את השוויון.

מקרה 2. $m = 0$.

$$R_{0,m}(f,g) = a_n^0 b_m^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{0} (\xi_i - \eta_j) = b_m^n$$