

# האוניברסיטה הפתוחה

עבודה סמינריונית בנושא הרזולטנט

אליסף לרר

ת.ז. 308376458

מנחה : אלעד פארן



## תוכן העניינים :

1.....	הקדמה.....
2.....	פרק 1.....
6.....	פרק 2.....
14.....	פרק 3.....
19.....	בבליוגרפיה.....



## הקדמה

במבניים אלגבריים לומדים שבהינתן שני פולינומים ע"י האלגוריתם של אוקלידס ניתן למצוא את המחלק המשותף המירבי שלהם, ע"י המחלק המשותף המירבי ניתן למצוא את השורשים המשותפים של שני הפולינומים. בעבודה זו נרצה להוכיח דרך נוספת לדעת האם לשני פולינומים יש מחלק שורשים משותפים בדרך פשוטה יותר ללא צורך להשתמש באלגוריתם של אוקלידס, אמנם לא נקבל מהם השורשים, אבל בדרך הרבה יותר פשוטה נוכל לדעת האם יש שורשים. ובנוסף (לא בעבודה זו) בדרך שבה נוכיח בעבודה זו ניתן להרחיב לפולינומים בכמה משתנים, כלומר ניתן לדעת האם לשני פולינומים בכמה משתנים יש שורשים משותפים. ונציין שהאלגוריתם של אוקלידס טוב רק לפולינומים במשתנה יחיד ולא בכמה משתנים. תחילה נזכיר בקצרה את הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות, ונגדיר את מטריצת סילבסטר, ובהמשך נגדיר את הרזולטנט ונוכיח את משפט הרזולטנט (פרק 2) שהוא החלק העיקרי של העבודה. את המשפט עצמו מתי לשני פולינומים יש שורשים משותפים נוכיח בפרק 3, וכן נוכיח עוד כמה תוצאות מעניינות שנובעות מידי ממשפט הרזולטנט.

## פרק 1.

# מטריצת סילבסטר

פרק זה הוא פרק קצר שבו נזכיר בקצרה את הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות ומטריצת סילבסטר של שני פולינומים, ובסוף הפרק נגדיר את הרזולטנט.

הגדרות אלו ילוו אותנו לאורך כל העבודה פעמים במשפטים עצמם ופעמים בהוכחות של המשפטים.

### הגדרה 1.1 הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות<sup>[1]</sup>

תהי  $A = (a_{i,j})$  מטריצה מגודל  $n \times n$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma_{1,\sigma(1)} \sigma_{2,\sigma(2)} \cdots \sigma_{n,\sigma(n)}.$$

הסכום הוא על  $n!$  התמורות  $\sigma$  של המספרים  $\{1, 2, \dots, n\}$ , כאשר אם עבר השורה  $i$  ניקח את האיבר בעמודה  $j$  וקרל את "ההזזה"  $j$  ו- $i$ ,  $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$  אם התמורה זוגית, ו- $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$  אם התמורה אי-זוגית.

נעבור לדוגמא:

תהי מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

נחשב את  $\det(A)$  לפי הגדרה 1.1.

נבחר לדוגמא את תמורת הזהות  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$

השורה הראשונה מייצגת את השורה במטריצה והשורה השנייה בתמורה מייצגת את העמודה במטריצה, ולכן במקרה זה נבחר מהשורה הראשונה את האיבר מהעמודה הראשונה, מהשורה השנייה את האיבר בעמודה השנייה, וכן הלאה.

תמורת הזהות היא זוגית ולכן  $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ , ובסה"כ מתמורת הזהות נקבל את המכפלה  $2 \cdot 2 \cdot 3$ .

נבחר תמורה נוספת  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$ , במקרה זה מהשורה הראשונה נבחר את האיבר מהעמודה השלישית, מהשורה השנייה את האיבר מהעמודה הראשונה, ומהשורה השלישית את האיבר בעמודה השנייה.

ע"י פירוק לחילופים נקבל את  $\operatorname{sgn}(\sigma)$ ,

$$(132) = (13)(21).$$

קבלנו  $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$  ולכן בסה"כ מתמורה זו נקבל את המכפלה  $1 \cdot 4 \cdot 5$ .

תמורה נוספת לדוגמא  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ , זהו חילוף ולכן  $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$  ובסה"כ מתמורה זו נקבל את המכפלה  $-3 \cdot 4 \cdot 3$ .

לאחר חישוב כל התמורות נקבל

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sgn}(\sigma) \sigma_{1,\sigma(1)} \sigma_{2,\sigma(2)} \cdots \sigma_{n,\sigma(n)} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 12 - 30 - 36 + 9 - 2 + 20 = 25. \end{aligned}$$

## הגדרה 1.2 מטריצת סילבסטר

יהיו שני פולינומים  $f(x), g(x)$  מעל שדה  $K$ .

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$$

נסמן  $Syl(f, g) = Syl_{n,m}(f, g)$  היא מטריצה מגודל  $(n+m) \times (n+m)$  המוגדרת ע"י

$$Syl(f, g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

ב-  $m$  השורות הראשונות יש את המקדמים של  $f$  באופן הבא:

בשורה הראשונה מתחילים מהמקום הראשון עם  $a_n$  בעמודה שלאחריה  $a_{n-1}$  וכן הלאה עד  $a_0$ . בפולינום  $f$  יש  $n$  איברים ולכן בסה"כ יתמלאו  $n$  העמודות הראשונות. נשארו  $m$  עמודות אותן נאכלס עם אפסים.

בשורה השניה נבצע את אותו הדבר עם שינוי קטן:  $a_n$  יוז אחד ימינה כלומר נתחיל את האיכלוס של התאים מהעמודה השניה, ואת העמודה הראשונה נאכלס באפס. ובאופן הזה נמלא את שורות המטריצה כשכל פעם מתחילים מהעמודה הבאה, עד השורה ה-  $m$  שבה יהיו בהתחלה  $m$  אפסים ובסוף  $n$  איברי  $f$ .

באותו האופן נאכלס את  $n$  השורות האחרונות עם איברי הפולינום  $g$ . בשורה ה-  $m+1$  את העמודה הראשונה נאכלס עם  $g_m$  את העמודה השניה עם  $g_{m-1}$  וכך נמשיך עד העמודה ה-  $m$ , ואת שאר העמודות נאכלס באפסים. בשורה ה-  $m+2$  נתחיל בעמודה השניה עם  $g_m$  ואת העמודה הראשונה נאכלס באפס, ונמשיך באופן הזה כמו עם  $f$ .

נביא הגדרה נוספת כללית יותר.

יהיו  $f, g$  פולינומים ממעלה  $n, m$  בהתאמה.  $Syl_{n,m}(f, g)$  מוגדרת באופן הבא:  $Syl_{n,m}(f, g)$  שווה ל-  $a_{n+i-j}$  כאשר  $1 \leq i \leq n$  ו-  $1 \leq j \leq m$ . אם  $i > n$  או  $i < 0$  אז  $a_i = 0$ . אם  $j > m$  או  $j < 0$  אז  $b_j = 0$ .

דוגמא:

$$g(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0, f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

במקרה זה  $m = 2, n = 3$ , לכן

$$Syl_{2,3}(f, g) = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

## 1.3 הבחנה

אם אחד הפולינומים  $f$  או  $g$  ממעלה 0 אז  $Syl(f, g)$  היא מטריצה משולשת.

## הגדרה 1.4 הגדרת הרזולטנט

יהיו שני פולינומים  $f(x), g(x)$  מעל שדה  $F$ .

נגדיר את הרזולטנט שלהם

יהיו  $n, m \in \mathbb{N}$

אם  $n = m = 0$  אז  $R(f, g) = a_0 b_0$ .

בכל מקרה אחר

$$R(f, g) = \det(\text{Syl}_{n,m}(f, g)) .$$

### 1.5 הערה

לפי הגדרה 1.4  $R(f, g)$  נקבע באופן חת"ע לפי  $f, g$ .  
 נכתוב את ההגדרה 1.4 לכל שני פולינומים ממעלה קטנה מ-  $n, m$ , עבור  $f$  נשלים עד למעלה  $n$  עם מקדמים 0, ובאותו אופן עבור  $g$  נשלים עד למעלה  $m$  עם מקדמים 0.  
 ובאופן הזה הגדרה 1.4 נכונה לכל שני פולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-  $n, m$ .

~~ביתר ביטחון:~~

~~אם  $\deg(f) \leq k < m$  נגדיל  $\hat{f}(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i + \sum_{i=k+1}^n 0 \cdot x^i$  כאשר  $a_i$  הם המקדמים של הפולינום  $f$ , ולכן  $\hat{f} = f$ .  
 ובאותו אופן נעשה עם הפולינום  $g$  אם  $\deg(g) < m$ .~~

באופן כללי נמשיך להשתמש בסימון  $R(f, g)$ , במקרים שנרצה להתייחס למימד בצורה מפורשת נציין זאת ע"י  $R_{n,m}(f, g)$ .

### 1.6 הבחנה

נבחין שבמקרה שגם  $\deg(f) < n$  וגם  $\deg(g) < m$ , ב  $\text{Syl}(f, g)$  נקבל עמודות אפסים ולכן  $R_{n,m}(f, g) = 0$ .

### 1.7 הערה

עבור שני פולינומים  $f, g$  מעל שדה  $K$ ,  
 נוסף לשדה  $F$  את המשתנים  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  ונסמן  $F = K(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m)$ .  
 אם נסמן  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  ו  $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$  הם פולינומים מעל  $F$ .  
 ~~$\deg(\text{Syl}(f, g))$  היא בעצמה איבר של  $F$  כלומר פולינום מעל השדה  $K$  במשתנים  $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ .~~  
 ולכן נוכל להתייחס  $\det(\text{Syl}(f, g))$  כפולינום במשתנים אלו.  
 מכאן ולהבא כשנזכיר את השדה  $F$  כוונתנו ל-  $F$  כפי שהיא מוגדרת בהערה 1.7.

### דוגמא:

עבור  $f(x) = b_1 x + b_0$  ו  $g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ,  
 נחשב את הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר

$$\begin{aligned} R(f, g) &= \det(\text{Syl}_{2,1}(f, g)) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = a_0 b_1^2 + a_2 b_0^2 - b_0 a_1 b_1 . \end{aligned}$$

קיבלנו איבר בשדה  $F$ , שהוא פולינום ב 5 משתנים בלתי תלויים  $a_2, a_1, a_0, b_1, b_0$  מעל השדה  $K$ .

### משפט 1.8

יהיו  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  ו  $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$  פולינומים מעל שדה  $F$ .  
 $R(f, g)$  הוא פולינום הומוגני עם מקדמים שלמים במקדמים  $a_i, b_i$ , כאשר עבור  $a_n \dots a_0$  המעלה היא  $m$ , ועבור  $b_m \dots b_0$  המעלה היא  $n$ .

### הוכחה

הוכחה זו מתבססת על הגדרת הדטרמיננטה לפי תמורות.  
 נחזור ל  $\text{Syl}(f, g)$ , זוהי מטריצה מסדר  $(n+m) \times (n+m)$ , נתבונן באיבר כלשהוא בסכום הנתון בהגדרה 1.1 נבחר  $\sigma \in S_{n+m}$ .  
 המחזור בסכום מתקבל ע"י כפל בין איברי המטריצה כך שכל שורה וכל עמודה בדיוק פעם אחת.  
 כלומר עבור  $\sigma_{i_1, j_1}, \sigma_{i_2, j_2}$  אם  $i_1 \neq i_2$  אז  $j_1 \neq j_2$  לכל  $1 \leq k, l \leq n+m$ , ולכן בסה"כ מספר האיברים במכפלה הינו כמספר השורות (או העמודות) וזה בדיוק  $n+m$ .

לפי הגדרה 1.2 מ- $m$  השורות הראשונות מקבלים מקדמים של הפולינום  $f(x)$ , ומ- $n$  השורות האחרונות מקבלים מקדמים מהפולינום  $g(x)$ , ובסה"כ סכום החזקות של האיבר  $\sigma$  הוא  $m$  מאיברי  $f(x)$  ו- $n$  מאיברי  $g(x)$ .  
 כנדרש.

## טענה 1.9

יהיו  $f, g$  פולינומים מעל שדה  $F$ .

$$R_{n,m}(f, g) = (-1)^{nm} R_{m,n}(g, f) \quad (1.1).$$

## הוכחה

נפתח בדיון אינטואיטיבי:

ניתן לעבור מ- $Syl(f, g)$  ל- $Syl(g, f)$  ע"י פעולות על שורות המטריצה, ולכן נבדוק מה יהיה המחיר לעבור מ- $Syl(f, g)$  ל- $Syl(g, f)$ .  
 נזכור שהחלפת שורות בין שורות המטריצה מחליפה את הסימן של הדטרמיננטה, ולכן נרצה לבדוק כמה החלפות בין השורות נדרש ע"מ להפוך בין  $f, g$  וזה יהיה הסימן המבוקש.

נעבור להוכחה.

ההחלפה בין השורות תיעשה באופן הבא:

את השורה הראשונה נעביר להיות בשורה השנייה, את השנייה לשלישית, וכן הלאה עד האחרונה. את האחרונה נעביר להיות השורה הראשונה.

בכתיב תמורות נקבל את

$$(r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1} \dots r_{n+m}).$$

נבצע את המעגל הזה  $n$  פעמים. כך נקבל שהשורה הראשונה (של המטריצה המקורית) תהיה ה- $n+1$  ואז  $f$  תהיה ב- $m$  השורות האחרונות, והשורה ה- $m$  (של המטריצה מקורית) תהיה בשורה הראשונה כלומר " $g$  תהיה ב- $n$  השורות הראשונות" (מספר השורות הוא  $n+m$ ).

החתימה של מחזור באורך  $l$  הוא  $l-1$  (הכנסת נוצה זו סובבת ממסגרת המאמר הזה [2] ולכן כל מחזור כזה הוא באורך  $l = n+m-1$ ).  
 נבצע  $n$  מחזורים כאלו ע"מ להחליף בין  $f$  ל- $g$  ולכן בסה"כ נקבל שהסימן הוא

$$\left[ (-1)^{(m+n-1)} \right]^n = (-1)^{(nm+n^2-n)} = (-1)^{nm}.$$

השוויון האחרון מתקיים כיון ש- $n^2 - n = n(n-1)$  תמיד מספר זוגי כי  $n$  זוגי או  $n-1$  זוגי, ולכן  $n^2 - n$  ו- $nm$  חולקים את אותה זוגיות.

## פרק 2.

# הרזולטנט

תחילה נציג כמה מוסכמות לפרק זה.

1.  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  ו  $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$  פולינומים מעל שדה  $F$  (השדה שהוגדר בהערה 1.7).  
 2. ללא הגבלת כלליות, ניתן להניח ש  $F$  הוא שדה הפיצול של  $f \cdot g$ , כלומר  $F$  מכיל את כל השורשים של  $f$  ו-  $g$ .  
 3.  $\xi_0 \dots \xi_n$  הם השורשים של  $f$ , ו  $\eta_0 \dots \eta_m$  הם השורשים של  $g$ .

### משפט 2.1 משפט הרזולטנט

יהיו  $f, g$  פולינומים מעל שדה  $F$ .

אם  $m = 0$  ו  $n > 0$ ,  $R(f, g) = a_0^m$ .

אם  $n = 0$  ו  $m > 0$ ,  $R(f, g) = b_0^n$ .

אם  $n = m = 0$ ,  $R(f, g) = a_0 b_0$ .

אם  $n, m > 0$ ,

א.ב.!

$$R_{n,m}(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) \quad (2.1)$$

### דוגמא

$$f(x) = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2) = x^3 - 4x$$

$$g(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$$

נבחין כי השורשים של  $f$  הם  $0, 2, -2$  והשורשים של  $g$  הם  $3, -1$ .

נסמן

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 2, \xi_3 = -2, \eta_1 = -1, \eta_2 = 3$$

נציב במשוואה (2.1) כאשר  $a_n^m = 1^2, b_m^n = 1^3$ .

$$((0 - (-1))(0 - 3))((2 - (-1))(2 - 3))((-2 - (-1))(-2 - 3)) = 45$$

קבלנו ש-

$$R(f, g) = 45$$

נחשב לפי הגדרה 1.1 את  $\text{Syl}(f, g)$ :

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$



נבחין שמהשורה הראשונה תמיד נבחר את העמודה הראשונה או השלישית אחרת המכפלה תתאפס. ומאותו הטעם מהשורה החמישית נבחר את האיבר החמישי ולכן התמורות יהיו מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & 5 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & & & & 5 \end{pmatrix}$$



לאחר שנשלים את כל ההמורות נקבל את התמורות הבאות:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=-1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{sgn}(\sigma)=1}.$$

לאחר חישוב של המכפלות המתאימות נקבל

$$(-27) - (-36) + (48) - (-36) + (-48) = 45$$

כלומר במקרה זה מתקיים משפט 2.1.

כדי להוכיח את משפט 2.1, נשתמש בצורה שקולה משפט 2.2, ומכיון שכך תחילה נוכיח את משפט 2.2 ולאחר מכן נפנה להוכחה של משפטים 2.1 ו 2.2.

## משפט 2.2



יהיו  $f, g$  פולינומים מעל שדה  $F$ .

$$I. R(f, g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\xi_i).$$

$$II. R(f, g) = (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\eta_j).$$

## הוכחת משפט 2.2

טענה זו נובעת כמעט ישירות מהמשפט היסודי של האלגברה, כי נניח שלפי המשפט היסודי של האלגברה מעל שדה  $F$  ניתן לרשום את  $f, g$  כמכפלה של גורמים לינאריים. הוכחת I.

נרשום את  $g$  כמכפלה של גורמים לינאריים:

$$g(x) = b_m \prod_{j=1}^m (x - \eta_j).$$



נציב  $\xi_0 \dots \xi_n$  ב  $g$  ונקבל

$$g(\xi_i) = b_m \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j). \quad (*)$$

משרשר השוויונות הבא נקבל את השוויון

$$a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^n b_m \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j)$$

$$\text{hence } (*) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\xi_i).$$

ללא הבנתי

(2.1)



מכיון ש  $m < n$ , לפי הגדרת מטריצת סילבסטר נקבל

$$\begin{pmatrix} a_n + cb_{n-\rho} & a_{n-1} + cb_{n-\rho-1} & a_{n-2} + cb_{n-\rho-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n + h_\rho b_{n-\rho} & a_{n-1} + cb_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 + cb_1 & a_0 + cb_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 + cb_2 & a_1 + cb_1 & a_0 + cb_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = R_\rho(f + (cx^\rho)g, g)$$

הביטוי  $n - \rho$  נובע מכך שהכפל  $cx^\rho$  מזיז את איברי  $g$  מקומות כי  $cx^\rho b_j x^j = cb_j x^{j+\rho}$ , לאחר הצבה  $i = j + \rho$  נקבל  $j = i - \rho$  כלומר המקדם של החזקה  $i$  הוא  $b_{i-\rho}$ .

מכך ש  $\rho < n - m$ , כל אחד מ  $m$  השורות הראשונות ב  $Syl(f + cx^\rho g, g)$  הוא סכום של השורה המתאימה במטריצה  $Syl(f, g)$  עם אחד השורות  $n$  השורות האחרונות. ~~קומבינציה לינארית של שורות אחרות~~  
במילים אחרות ניתן לעבור מ  $Syl(f, g)$  ל  $Syl(f + cx^\rho g, g)$  ע"פ פעולות על השורות של המטריצה. ~~קומבינציה לינארית של שורות אחרות~~  
אבל הוספת קומבינציה לינארית של שורות לשורה אחרת במטריצה לא משנה את הדטרמיננטה! ~~לכן~~

$$R_\rho(f + (h_\rho x^\rho)g, g) = R(f, g)$$

הנחת האינדוקציה:

ניח שהטענה נכונה עבור פולינום ממעלה  $k - 1$  ונוכיח עבור פולינום ממעלה  $k$ .

צעד האינדוקציה:

$$\begin{aligned} R_\rho(f + hg, g) &= \det \left( Syl \left( f + \left( \sum_{l=1}^k h_l x^l \right) g, g \right) \right) \\ &= \det \left( Syl \left( f + \left( \sum_{l=1}^{k-1} h_l x^l \right) g + (h_k x^k) g, g \right) \right) \\ \text{step induction} &= \det (Syl(f + (h_k x^k)g, g)) \\ \text{case base} &= \det (Syl(f, g)) \\ &= R(f, g) \end{aligned}$$

נדרש. צריל לבדוק האם אני משתמש בזה ואם זה לא שובר לא הוכחה בהמשך.

wrong

~~נשים לב שגם בדאג שרשור השוויונות קבלנו ש~~

$$Syl(f + hg, g) = Syl(f, g) \quad (2.2)$$

בשוויון זה נעשה שימוש בהמשך.

~~עבור המקרה השני  $R_\rho(f, g + hf) = R(f, g)$  נקבל את השוויון באותו האופן.~~

## טענת עזר 2.4

I. אם  $\deg(g) \leq k \leq m$  אז

$$R_{n,m}(f, g) = a_n^{m-k} R_{n,k}(f, g).$$

II. אם  $\deg(f) \leq k \leq n$  אז

$$R_{n,m}(f, g) = (-1)^{(n-k)m} b_m^{n-k} R_{k,m}(f, g).$$

### הוכחה

ה הוכחה מתבססת על כך שאם המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 0 אז התת מטריצת המתקבלת ע"י מחיקת השורה הראשונה והעמודה הראשונה היא מטריצת סילבסטר.

כלומר נניח ש  $g_m = 0$  אז

$$\text{Syl}(f, g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

$b_m$

נבחין שאם נמחק את השורה הראשונה והעמודה הראשונה נקבל את המטריצה

$$\text{Syl}(f, \hat{g}) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

כאשר  $\hat{g}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} b_j x^j$  מכיון ש  $b_m = 0$  אז  $\hat{g}(x) = g(x)$  לכן אם נפתח את הדטרמיננטה  $R(f, g)$  לפי העמודה הראשונה נקבל:

$$\boxed{R(f, g)} = a_n R_{n,m}(f, \hat{g}) = \boxed{a_n R_{n,m-1}(f, g)}.$$

בטבל לסיים את הוכחה נגדיר את  $g$  לכל  $0 \leq j \leq m$   $\deg(g) \leq j$  עם מקדם 0, ונקבל

$$\begin{aligned} R(f, g) &= a_n R_{n,m-1}(f, g) \\ &= a_n a_n R_{n,m-2}(f, g) \\ &= \left( \underbrace{a_n a_n \dots a_n}_{r \text{ times}} \right) R_{n,m-r}(f, g) \\ &= a_n^r R_{n,m-r}(f, g). \end{aligned}$$

באופן 1.  $r$  הוא המקדם הראשון שאינו 0.

נסמן  $m - r = k$  ונקבל  $R(f, g) = a_n^{m-k} R_{n,k}(f, g)$  כנדרש.

הוכחת II.

לפי 1.9

$$R(f, g) = (-1)^{nm} R_{m,n}(g, f)$$

לפי I והתנאי ש  $\deg(f) < k < n$  נקבל

~~דלדל~~

$$(-1)^{nm} R_{m,n}(g, f) = (-1)^{nm} b_m^{n-k} R_{m,k}(g, f) .$$

שוב לפי משוואה 1.9

$$R_{m,k}(g, f) = (-1)^{km} R_{k,m}(f, g) .$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned} (-1)^{nm} R_{m,n}(g, f) &= (-1)^{nm} b_m^{n-k} (-1)^{km} R_{k,m}(f, g) \\ &= (-1)^{m(n+k)} b_m^{n-k} R_{k,m}(f, g) . \end{aligned}$$



מכיון של  $n + k$  ו  $n - k$  אותה זוגיות נקבל לאחר כל השוויונות

$$R(f, g) = (-1)^{m(n-k)} b_m^{n-k} R_{k,m}(f, g)$$



כנדרש.

~~2.2~~ **הוכחת משפט 2.1**

נבנה באינדוקציה על הגודל של המטריצה  $n + m$ .

לפי המוסכמות בראש הפרק והמשפט היסודי של האלגברה נוכל לרשום את  $f, g$  כמכפלה של גורמים לינאריים

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \xi_i) \quad g(x) = b_m \prod_{j=1}^m (x - \eta_j) .$$

(\*)



בסיס האינדוקציה:

עבור  $m = n = 0$  הטענה מותקיימת.

עבור המקרה  $n = 0$  ו  $m > 0$  לפי הבחנה 1.3,

$$R(f, g) = b_0^n .$$

בדומה עבור  $m = 0$  ו  $n > 0$

$$R(f, g) = a_0^m .$$

~~(\*)~~

הנחת האינדוקציה:

נניח שמשפט 2.1 נכון לכל ערך מטריוצח קטנה מ  $n + m$ .

מקרה 1:

$$0 < n = \deg(f) \leq m = \deg(g)$$

קיימים פולינומים  $q, r$  כזו ש  $\deg(r) < \deg(f)$  ומתקיים ~~בן ע~~

$$g = qf + r.$$

נבחין כי

$$\deg(g - r) = \deg(qf)$$

לכן נקבל את השוויונות הבאים:

$$\deg(q) = \deg(qf) - \deg(f) = \deg(g - r) - n = m - n.$$

קבלנו ש  $\deg(q) = m - n$  לכן נוכל להשתמש בטענת עזר 2.3 נקבל

$$(*) R(f, g) = R(f, g - qf) = R(f, r).$$

נחלק שוב למקרים.

מקרה א.  $r \neq 0$  נסמן  $k = \deg(r) \geq 0$ .

מהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.4

$$(**) R_{n,m}(f, r) \stackrel{2.5}{\cong} a_n^{m-k} R_{n,k}(f, r) \stackrel{\text{base induction}}{\cong} a_n^{m-k} a_n^k \prod_{i=1}^n r(\xi_i) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\xi_i),$$

השוויון האחרות נובע מכך ש  $\xi_i$  הם שורשים של  $f$  ולכן

$$\boxed{g(\xi_i)} = \underbrace{q(\xi_i)f(\xi_i)}_{=0} + r(\xi_i) = \boxed{r(\xi_i)}.$$

מ (\*) ו- (\*\*) נקבל את הנדרש.

מקרה ב.  $r = 0$ .

$$g = fq.$$

סא

~~לפי ההנחה הראשונה של מקרה זה  $n > 0$  ולכן~~

$$\text{Syl}(f, r) = \text{Syl}(f, 0) = "0".$$

~~"0" בשוויון האחרון הכוונה למסלול יציב האפס~~

לכן

$$R(f, g) = 0.$$

למ

מצד שני כיון ש  $f$  מחלק את  $g$ , השורשים של  $f$  הם שורשים של  $g$ , ולכן בנוסחה 2.1 קיימים  $\xi_i$  ו  $\eta_j$  כך ש  $\xi_i = \eta_j$  ולכן ~~הזמנה מתייחסת, ומתקיים השוויון הנדרש.~~



מקרה 2.

$$m = \deg(g) < n = \deg(f)$$

כמו במקרה הקודם קיימים  $q, r$  כך ש  $\deg(r) < m$  ומתקיים ~~כך ש~~  $f = gq + r$ .

מאותם נימוקים כמו במקרה הקודם

$$(***) R(f, g) = R(f - gq, g) = R(r, g)$$

ופה נחלק שוב למקרים.

מקרה א.

$r \neq 0$  נסמן  $k = \deg(r) \geq 0$ , ומהנחת האינדוקציה וטענת עזר 2.4 נקבל

$$\begin{aligned} (***) R_{n,m}(r, g) &= (-1)^{(n-k)m} b_m^{n-k} R_{k,m}(r, g) \\ &= (\text{base induction}) = \left( (-1)^{(n-k)m} b_m^{n-k} \right) \left( (-1)^{km} b_m^k \prod_{j=1}^m r(\eta_j) \right) \\ &= (-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m r(\eta_j) \\ &= \boxed{(-1)^{nm} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\eta_j)} \end{aligned}$$

דיון השוויון האחרון נובע מכך ש  $\eta_j$  הם שורשים של  $g$  ולכן

$$f(\eta_j) = \underbrace{g(\eta_j) q(\eta_j)}_{=0} + r(\eta_j).$$

דיון מ  $(***)$  ו  $(***)$  נקבל את הנדרש.

מקרה ב.

$r = 0$ , דומה מאוד לאותו מקרה בהוכחה הקודמת.

$$\text{Syl}(r, g) = \text{Syl}(0, g) = "0".$$

לכן

$$R_{n,m}(0, g) = 0.$$

וכמו כן השורשים של  $g$  הם שורשים של  $f$ , ולכן המכפלה  $(2.1)$  מתאפסת ונקבל את השוויון.

# תוצאות ממשפט הרזולטנט

בפרק זה נמשיך עם המוסכמות שבתחילת פרק 2.

## 3.1 טענה

יהיו  $f, g$  פולינומים מעל שדה  $F$ . ל  $f, g$  יש שורש משותף אם ורק אם  $R(f, g) = 0$ .

### הוכחה

לפי משפט 2.1

$$R(f, g) = 0 \iff a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\xi_i - \eta_j) = 0.$$

זה מתקיים אם ורק אם קיימים  $\xi_i$  ו  $\eta_j$  כך ש  $\eta_j = \xi_i$ , כלומר אם ורק אם ל  $f$  ו  $g$  יש שורש משותף.

## 3.2 טענה

יהיו  $f, g$  פולינומים מעל שדה  $F$ . ל  $f, g$  יש גורם משותף אם ורק אם  $R(f, g) = 0$ .

### הוכחה

צד אחד

$\Leftarrow$  אם ל  $f, g$  יש גורם משותף אז  $R(f, g) = 0$ .

לפי ההוכחה ל  $f, g$  יש גורם משותף  $\alpha$  ש להם שורש משותף וממשפט 2.1 נקבל את הטענה.

$\Rightarrow R(f, g) = 0$  אז ל  $f$  ו  $g$  יש גורם משותף.

לפי ההוכחה  $R(f, g) = 0$  מטענה 3.1 ל  $f, g$  יש שורש משותף נסמן  $\alpha$ , נכל נניח את  $\alpha$  גורם משותף מ  $f, g$ .  
וקבלנו את הטענה.

לצורך המשפט הבא נזכיר מהו מימד של מטריצה.

מימד של מטריצה הוא המימד שנפרס ע"י וקטורי השורות או העמודות של המטריצה.

במקרה שהשורות תלויות לינארית או המימד שני ע"י המטריצה קטן מהגודל של המטריצה.

## משפט 3.3

יהיו  $f, g$  פולינומים בשדה  $F$ .

נסמן ב-  $h = \text{GCD}(f, g)$  את המחלק המשותף המירבי של  $f, g$ . אז

המעלה של המימד של  $\text{Syl}(f, g)$  הוא  $n + m - \deg(h)$ , ובאופן שקול המעלה של המימד של המשלים של  $\text{Syl}(f, g)$  הוא  $\deg(h)$ .

הערה: מכיון שגודל המימד של מטריצה וגודל המימד של המשלים תלויים אחד בשני, לפעמים נתייחס רק לגודל של אחד מהם כשהכוונה לשניהם.

### הוכחה

לפני שנכנסים לגוף ההוכחה נציין:

(1) החלפה בין שורות המטריצה לא משנה את המימד שנפרס ע"י וקטורי השורות (או העמודות) של המטריצה.

(2)  $\text{Syl}(f, g)$  ו  $\text{Syl}(g, f)$  שוות פרט לסדר של השורות, ולכן המימד שנפרס על ידיהם שווה, ולכן ללא הגבלת כלליות נוכל להניח ש  $m \leq n$ .

(3) קיימים  $r, q$  כך ש  $\deg(r) < m$  ו  $f = qr$ . בהוכחת טענת עזר 2.3 ראינו שאפשר לעבור מ  $\text{Syl}(f, g)$  ל  $\text{Syl}(f + (-qg), g) = \text{Syl}(r, g)$  ע"י פועלות על שורות המטריצה, ולכן המימד שלהם שווה.

רעיון ההוכחה:



נמצא את  $h$  לפי האלגוריתמים של אוקלידס, תוך כדי התהליך נקטין את גודל המטריצות ונוכיח שהמימד של המשלים של המטריצות המתקבלות לא משתנה, וכך (כפי שנראה בהוכחה עצמה) נמצא את המימד של המשלים של  $\text{Syl}(f, g)$ .

~~תהליך...~~

נחלק את ההוכחה לשלבים כדי להקל על הקורא להבין את ההוכחה.

שלב 1.

קיים  $q$  וקיים  $r$  כך ש  $k = \deg(r) < m$  ~~ומתקיים~~

$$f = qg + r.$$



$$\deg(q) = \deg(qg) - \deg(g) = n - m.$$

מתקיים תנאי משפט 2.3, ולכן לפי (2) המימד של  $\text{Syl}_{n,m}(f, g)$  ~~ש~~  $\text{Syl}_{n,m}(r, g)$ .

שלב 2

נסמן  $r = \sum_{l=0}^n v_l x^l$ , ונתבונן ב  $\text{Syl}_{n,m}(r, g)$ . נבחין של  $r$  יש  $n - k$  מקדמים שהם אפסים ולכן  $\text{Syl}_{n,m}(r, g)$  מהצורה:

$$\text{Syl}_{n,m}(r, g) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & v_{n-k-1} & v_{n-k-2} & v_{n-k-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v_{n-k-1} & v_{n-k-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_1 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & v_2 & v_1 & v_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

בעמודה הראשונה יש רק איבר יחיד  $b_m$ , ולכן וקטור זה שייך למימד שנפרש ע"י וקטורי העמודות ~~לא השורה~~, ולכן מחיקת העמודה הראשונה והשורה ה  $m + 1$  (השורה שבה יש את האיבר שאינו אפס בעמודה הראשונה) לא תשפיע על המימד של המשלים.

נובע מכך שהמימד של המשלים של  $\text{Syl}_{n,m}(r, g)$  ו  $\text{Syl}_{n-1,m}(r, g)$  שווים, כאשר  $\text{Syl}_{n-1,m}(r, g)$  היא המטריצה שהתקבלה אחרי המחיקה של השורה והעמודה המתאימה.

שלב 3

נחזור שוב על שלב 2 (במקרה ש  $n - k > 1$ ), על המטריצה  $\text{Syl}_{n-1,m}(r, g)$ , וכך נמשיך ע"י קבלת את המטריצה  $\text{Syl}_{k,m}(r, g)$ . לפי ההסבר בשלב 2 המימד של המשלים של המטריצות המתקבלות ע"י מחיקה העמודה והשורה המתאימה ~~לא~~ לא משתנה.

סיכום ביניים:

המימד של המשלים של  $\text{Syl}_{n,m}(f, g)$ ,  $\text{Syl}_{n,m}(r, g)$  ו  $\text{Syl}_{k,m}(r, g)$  שווים, כאשר  $r$  הוא השארית של החלוקה של  $f$  ב  $g$ .

שלב 4

לפי (2) ~~המימד~~ של  $\text{Syl}_{k,m}(r, g)$  ו  $\text{Syl}_{m,k}(g, r)$ .

נבצע את שלבים 3 על  $\text{Syl}_{m,k}(g, r)$ , עם  $k = \deg(r_0) < k$  ו  $q_0$  המקיימים  $g = rq_0 + r_0$ .

נמשיך שוב ושוב את שלבים 3 - 1 (כלומר נבצע את האלגוריתם של אוקלידס) עד שנקבל  $r_d$  כך ש  $r_{d-2} = q_d r_{d-1} + r_d$  כאשר  $r_d = 0$  ~~מהאלגוריתם של אוקלידס~~  $r_{d-1} = h$ .

שלב 5

משלבים 3 ו 2 המימדים של המשלימים של  $\text{Syl}_{n,m}(f, g)$ ,  $\text{Syl}_{k,m}(r, g)$ ,  $\text{Syl}_{k_0,k}(r_0, r)$ ,  $\text{Syl}_{k_1,k_0}(r_1, r_0) \dots$ ,  $\text{Syl}_{k_{d-1},l}(0, h)$  שווים.

ולכן נשאר לבדוק מהו המימד של המשלים של  $\text{Syl}_{k_{d-1},l}(0,h)$ . לפי הגדרת מטריצת סילבסטר למטריצה  $\text{Syl}_{k_{d-1},l}(0,h)$  יש  $l$  שורות אפסים ו-1 שורות בת"ל. לכן המימד של המשלים של  $\text{Syl}_{k_{d-1},l}(0,h)$  הוא  $l$ .  
 וזה בדיוק  $\deg(h)$  לכן המימד של  $\text{Syl}_{n,m}(f,g)$  הוא  $n+m-\deg(h)$ .

### משפט 3.4

יהיו  $f, g$  פולינומים מעל שדה  $F$ .  
 יהי  $v = (\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0)$  וקטור שורה מדרגה  $n+m$ .  
 מתקיים

$$v \text{Syl}_{n,m}(f, g) = 0$$

אם ורק אם  $pf + qg = 0$  כאשר  $p = \alpha_{m-1}x^{m-1} + \dots + \alpha_0x^0$  ו-  $q = \beta_{n-1}x^{n-1} + \dots + \beta_0x^0$ .

### הוכחה

נתבונן במכפלה  $\gamma = v \text{Syl}_{n,m}(f, g)$

$$\gamma = (\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0) \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( \underbrace{\alpha_{m-1}a_n + \beta_{n-1}b_m}_{\gamma_1}, \underbrace{\alpha_{m-1}a_{n-1} + \alpha_{m-2}a_n + \beta_{n-1}b_{m-1} + \beta_{n-2}b_m}_{\gamma_2}, \dots, \underbrace{\alpha_0a_0 + \beta_0b_0}_{\gamma_{n+m}} \right).$$

הרכיב ה- $j$  של  $\gamma$  מתקבל ע"י המכפלה

$$\gamma_j = (\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_0, \beta_{n-1}, \dots, \beta_0) \begin{pmatrix} a_{n+1-j} \\ \vdots \\ a_{n+m-j} \\ b_{m+1-j} \\ \vdots \\ b_{n+m-j} \end{pmatrix}.$$

כאשר  $1 \leq j \leq n+m$ ,  
 נרשום  $\gamma_j$  כסכום של טורים. הטור הראשון הוא  $\sum_{i=1}^m \alpha_{m-i}a_{n+i-j}$  ובטור השני האינדקס מתחיל מ- $m+1$  ולכן נסמן  $i = i - m$ ,  
 ונקבל  $\sum_{m+1}^{n+m} \beta_{n+m-i}b_{i-j}$ .  
 ולכן בסה"כ

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{m-i}a_{n+i-j} + \sum_{m+1}^{n+m} \beta_{n+m-i}b_{i-j}.$$

~~נתבונן באינדקסים של המקדמים~~

נוכיח ש

$$pf + qg = \sum_j \gamma_j x^j$$

ובזה נסיים את ההוכחה.

נחקור את הביטוי

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{m-i} a_{n+i-j} + \sum_{i=m+1}^{n+m} \beta_{n+m-i} b_{i-j} .$$

נחשב כל אחד מהמחוברים בנפרד.

נבצע החלפת אינדקסים  $i = m - k$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{m-i} a_{n+i-j} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k a_{n+m-k-j} = \sum_{k=0}^m \alpha_k a_{n+m-k-j}$$

(השוויון האחרון נובע מכך ש  $\alpha_m = 0$ ).

בדומה עבור הביטוי השני נבצע את ההחלפת האינדקסים  $i = m + n - k$

$$\sum_{i=m+1}^{n+m} \beta_{n+m-i} b_{i-j} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k b_{m+n-k-j} = \sum_{k=0}^n \beta_k b_{m+n-k-j}$$

(השוויון האחרון נובע מכך ש  $\beta_n = 0$ ).

בסה"כ קבלנו

$$\gamma_j = \sum_{k=0}^m \alpha_k a_{n+m-k-j} + \sum_{k=0}^n \beta_k b_{m+n-k-j}$$

נבצע החלפת אינדקסים  $0 \leq l \leq n+m, 0 \leq j \leq n+m, j = m+n-l$

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k a_{n+m-k-j} + \sum_{k=0}^n \beta_k b_{m+n-k-j} = \sum_{k=0}^m \alpha_k a_{l-k} + \sum_{k=0}^n \beta_k b_{l-k} .$$

אם  $m > l$  עבר המקרה  
מכיון שלכל  $k > l, \alpha_k = 0$  מתקיים

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k a_{l-k} = \sum_{k=0}^l \alpha_k a_{l-k} .$$

אם  $m < l$  עבר המקרה  
מכיון שלכל  $k \geq m, \alpha_k = 0$  מתקיים  $\deg(p) = m-1$  .

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k a_{l-k} = \sum_{k=0}^l \alpha_k a_{l-k} .$$

באותו אופן מתקיים

$$\sum_{k=0}^n \beta_k b_{l-k} = \sum_{k=0}^l \beta_k b_{l-k} \quad \bullet$$

קבלנו ש

$$\gamma_j = \sum_{k=0}^l \alpha_k a_{l-k} + \sum_{k=0}^l \beta_k b_{l-k} \quad (*)$$

נחשב את המכפלה

$$\begin{aligned} [fp + gq] &= \sum_i a_i x^i \sum_\tau \alpha_\tau x^\tau + \sum_i b_i x^i \sum_\tau \beta_\tau x^\tau \\ &= \sum_k \sum_{i+\tau=k} a_i \alpha_\tau x^k + \sum_k \sum_{i+\tau=k} b_i \beta_\tau x^k \\ &= \sum_k \sum_{i=0}^k a_i \alpha_{k-i} x^k + \sum_k \sum_{i=0}^k b_i \beta_{k-i} x^k \\ &= \sum_k \left( \sum_{i=0}^k a_i \alpha_{k-i} + \sum_{i=0}^k b_i \beta_{k-i} \right) x^k \\ (*) &= \boxed{\sum_k \gamma_k x^k} \end{aligned}$$

**(\*\*)**

(\*) מתקבל ע"י החלפת האינדקס  $k = i + l = k$ .



[1] . Publications. .Dover Analysis Tensor of .Applications (1957) McConnell

[2]. Prentice-Hall ed.), (3rd Applications with Algebra Abstract in Course First A ,(2006) J. Joseph Rotman,