

## פרויקט C: חישוב כבידה בשיטת tree

בהינתן מערכת המאופיינת על ידי מיקום ומהירות התחלתיים של נקודות מסה, יש לחשב את המערכת בזמן סופי, בהתחשב בכוח הכבידה בין נקודות המסה.

חישוב הכוחות נעשה בשיטת עץ (tree) כפי שיתואר להלן. את ההתפתחות בזמן יש לתאר על ידי שיטת Runge-Kutta מסדר רביעי עם בקרת גודל צעד הזמן (כלומר, שימוש בצעד בודד וצעד כפול, ניתן להשתמש בפונקציות שנכתבו בתרגילים במהלך הקורס).

מסיבות נומריות, יש לרכך את נוסחת הכוח, כך ש:  $\vec{f} = -\frac{Gm_1m_2}{(r+s)^2} \frac{\vec{r}}{r}$  כאשר  $\vec{f}$  הוא הכוח בין חלקיק במסה  $m_1$  לחלקיק במסה  $m_2$ ,  $\vec{r}$  הוא הווקטור בין מיקומי החלקיקים ו- $r$  הוא גודלו. הריכוך נעשה על ידי  $s$  שהוא מרחק קבוע.

המצב ההתחלתי מאופיין על ידי  $N$  נקודות במסה  $m$  כל אחת כך שסך המסה הוא  $M = mN$ . הנקודות נמצאות בצפיפות אחידה בנפח כדור ברדיוס  $R$ . מהירות הנקודות מפולגת מכסווליאנית עם מהירות אופיינית  $V = \langle v^2 \rangle^{0.5}$  כלומר, כל אחד משלושת רכיבי המהירות מפולג נורמלית עם מרכז ב-0 וסטיית תקן  $\sigma = V/\sqrt{3}$ .

חישוב הכוח בשיטת עץ<sup>1</sup>:

הרעיון הבסיסי הוא שכשמחשבים את הכוחות הפועלים על אחת מנקודות המסה, נמנעים מחישוב פרטני של הכוחות המופעלים על ידי כל אחת מנקודות המסה האחרות, אלא שמזהים מקבצים של נקודות מסה ומחשבים את הכוח שמפעיל מרכז המסה שלהן אם הן רחוקות מספיק. כך מקבלים שחישוב הכוחות מתכונתי ל- $N \log N$  ולא ל- $N^2$ .

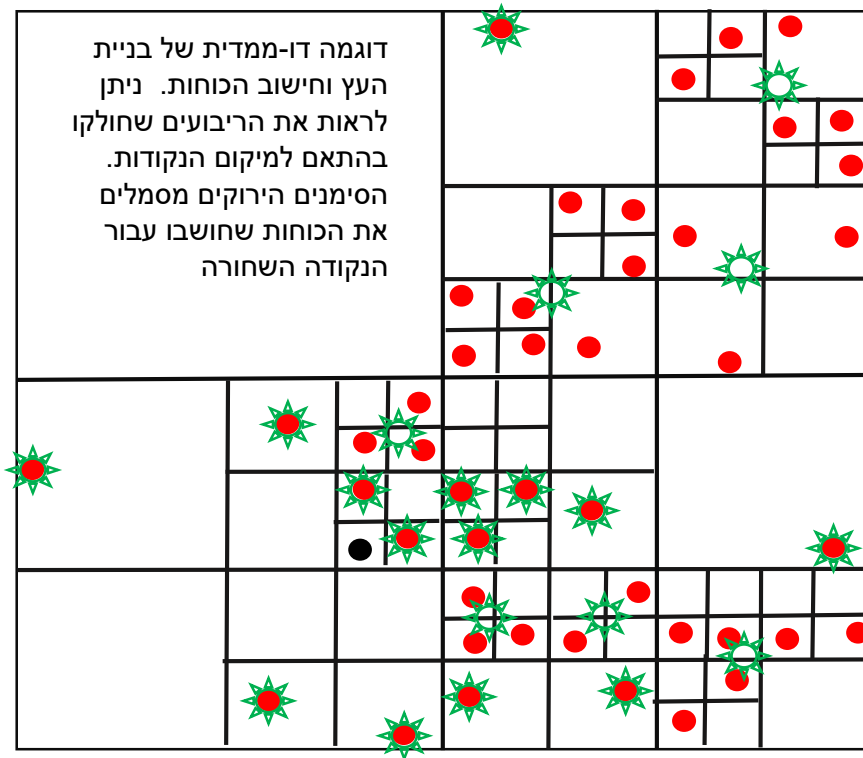
המימוש עוקב אחר השלבים הבאים:

- בכל צעד זמן בונים עץ לוגי הנגזר מההתפלגות המרחבית העדכנית של נקודות המסה:
  - מתחילים מקובייה המכילה את כל נקודות המסה
  - מחלקים את הקובייה ל-8 תת-קוביות על ידי חציית כל אחד מממדי הקובייה.
  - מחשבים לכל תת-קובייה את מספר נקודות המסה שבתוכה, את המסה הכוללת ואת מיקום מרכז המסה וכן את גודלה  $L$  (אורך האלכסון הראשי).
  - כל תת-קובייה בה יש יותר מנקודת מסה אחת, מחולקת שוב ל-8 תת-קוביות באופן רקורסיבי.
- בסופו של תהליך מקבלים עץ לוגי בו העלים הם תת-קוביות בהן יש לכל היותר נקודת מסה אחת.

---

<sup>1</sup> כפי שהוצע ב: Barnes, J. & Hut, P., "A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm", Nature 324, p. 449–446 (1986)

- לצורך חישוב הכוחות, עוברים על כל נקודות המסה, ומחשבים לכל נקודה את הכוח הכולל על ידי:
  - מעבר על עץ תתי-הקוביות מהשורש (כלומר הקובייה המכילה את כל המערכת).
  - אם יש רק נקודת מסה אחת בתת-הקובייה, מוסיפים את תרומת הנקודה לכוח הפועל על נקודת המסה (כמובן, עבור נקודות השונות מהנקודה התורנית אליה מחשבים את הכוחות).
  - עבור כל תת-קובייה שהמסה שלה גדולה מאפס, בודקים אם נקודת המסה אליה מחשבים את הכוחות נמצאת בתת-הקובייה,
    - אם כן, בודקים באופן רקורסיבי את תתי-הקוביות של תת-הקובייה.
    - אם לא, מחשבים את המרחק  $D$  של נקודת המסה למרכז המסה של תת-הקובייה ואם  $\frac{D}{L} < \theta$  בודקים באופן רקורסיבי את תתי-הקוביות של תת-הקובייה.  $\theta$  הוא קבוע שהוגדר מראש ומאפיין את החישוב.
    - אם  $\frac{D}{L} \geq \theta$  מוסיפים את תרומת תת-הקובייה לכוח הפועל על נקודת המסה תוך התחשבות במסה הכולל בתת-הקובייה ובמרחק  $D$  ממנה (שימוש בנוסחת הכוח שצוינה לעיל).
- מחשבים את המהירויות והמיקומים של נקודות המסה בהתאם לכוח על כל אחת מהן על ידי פתרון משוואות התנועה הדיפרנציאליות:  $\vec{v} = \vec{f}/m$ ,  $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ , בשיטת RK כפי שהוגדר לעיל.



## משלות:

1. לחשב את התפתחות מערכת עד זמן  $20\text{Gyear}$  שבמצב ההתחלתי שלה יש כ-5000 נקודות מסה המפולגות אקראית בנפח כדור ברדיוס  $50\text{KParsec}$  ומסה כוללת  $M = 10^{11}M_\odot$ . המהירויות ההתחלתיות מפולגות אקראית כפי שתואר לעיל עם מהירות אופיינית  $V = 80\text{km/s}$ . פרמטר הקריטריון בחישוב הכוחות:  $\theta = 1$  ופרמטר הדיוק עבור האינטגרציה הזמנית בשיטת RK במונחים של השגיאה המרבית בתזוזת נקודת מסה ביחידות של גודל קופסת החישוב הוא  $\varepsilon = 0.1$ . פרמטר הריכוך בחישוב הכוח:  $S = 1\text{KParsec}$ . גודל מרבי של קופסת החישוב בכל ממד  $\pm 666\text{KParsec}$ . אם חלקיק חורג מקופסה זו ניתן לסלק אותו מהחישוב. יש להציג:

- מיקום הנקודות (בצורה גרפית תלת-ממדית) במספר זמנים במהלך החישוב.
- שימור האנרגיה כתלות בזמן (כלומר ההפרש היחסי בין האנרגיה העדכנית לאנרגיה ההתחלתית).
- את היחס  $-2E_k/E_g$  כתלות בזמן (כש- $E_k$  היא האנרגיה הקינטית ו- $E_g$  היא האנרגיה הגרביטציונית). יש להציג שני קווים בגרף: אחד בו מוסיפים לאנרגיה העדכנית את האנרגיה של החלקיקים שעזבו את קופסת החישוב (לפי הערך שהיה כשעזבו) ואחד בו לא מוסיפים.
- פרופיל הצפיפות החומרית (צפיפות כתלות ברדיוס) בסקלת  $\log\text{-}\log$ , כולל השוואה למודל King: 
$$\rho(r) = \frac{\rho_c}{\left[1 + \left(\frac{r}{r_c}\right)^\alpha\right]^\beta}$$
 כאשר מבצעים התאמה מיטבית של  $\rho_c, r_c, \alpha, \beta$  (לצורך ביצוע ההתאמה אפשר להשתמש באחת מהחבילות הסטנדרטיות של פייתון).

2. לחשב באופן דומה התפתחות עבור  $V = 65\text{km/s}$  ועבור  $V = 95\text{km/s}$  ולהציג את פרופילי הצפיפות הסופיים המתקבלים. גם כאן יש להתאים ולהציג את מודל King אך לעשות זאת על ידי בחירה מיטבית של  $\rho_c, r_c$  בלבד עבור ערכי  $\alpha, \beta$  שהותאמו בסעיף הקודם (לחילופין, ניתן לעשות התאמה מחודשת ל- $\alpha, \beta$  אך חובה להקפיד ששלושת המקרים ינותחו עם ערכים זהים שלהם). יש להגיש טבלה המציגה את הפרמטרים שהותאמו לכל אחד משלושת החישובים.