Projet de mathématiques

Interprétation géométrique des règles du jeu de SET

Nathan C. Romain B.

3 avril 2019

Table des matières

1 Présentation du jeu de SET **1**
1.1 Origine 1
1.2 But 1
1.3 Règles 1

2 Aspect Mathématique **1**
2.1 Combinatoire 1
2.2 Interprétation géométrique des règles 2
2.3 Taille maximale d'un *cap* 3
2.3.1 Taille maximale d'un *2-cap* 3
2.3.2 Taille maximale d'un *3-cap* 3
2.3.3 Taille maximale d'un *4-cap* 3

3 Conclusion **5**

Résumé

Dans ce sujet, on verra comment interpréter les règles du jeu de SET de manière géométrique, puis grâce à cette interprétation comment déterminer le nombre de cartes minimal à disposer devant soi pour pouvoir toujours trouver un triplet de cartes.

1 Présentation du jeu de SET

1.1 Origine

Le Jeu de SET a été inventé par Marsha Falco en 1974. L'idée du jeu est venue lorsque Marsha essayait de comprendre si l'épilepsie chez les bergers allemands était héritée. Elle représentait les données génétiques des chiens sous la forme de symboles en dessinant sur des fiches. Marsha a constaté qu'il était amusant de trouver les différentes combinaisons et SET est né. Au fil des années, Marsha a perfectionné le jeu en jouant avec sa famille et ses amis. Il a finalement été lancé en 1990.

1.2 But

Chaque joueur doit trouver le maximum de sets. Un set est composé de trois cartes dont les quatre caractéristiques (prises séparément) sont :

— soit totalement identiques (par exemple les trois cartes ont la même forme),

— soit totalement différentes (par exemple chacune des trois cartes est d'une couleur différente).

1.3 Règles

Le jeu commence en disposant douze cartes devant les joueurs. Le premier joueur qui voit un set prend les trois cartes et les garde dans sa pile de gain. On complète avec trois cartes de la pioche. Si aucun set ne figure parmi les 12 cartes, on ajoute 3 cartes, mais on ne complètera pas après qu'un joueur a trouvé une solution. Le jeu est fini quand toutes les cartes ont été tirées et qu'il n'y a plus de set dans celles qui restent. Le gagnant est celui qui a le plus grand nombre de sets.

2 Aspect Mathématique

2.1 Combinatoire

Nombre de cartes Chaque carte du jeu de SET est unique, en effet une carte représente une combinaison de quatre attributs, chacun des attributs pouvant prendre trois valeurs. Il y a donc $3^4 = 81$ cartes dans le jeu de SET.

Probabilité d'obtenir un set en tirant 3 cartes au hasard Avant de calculer la probabilité, il est important d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème de construction d'un Set)**.** *Pour deux cartes, il y a exactement une carte qui complète ces deux cartes en un set.*

Démonstration. Par définition, si les deux cartes ont la même forme alors la troisième carte a cette forme sinon les deux cartes n'ont pas la même forme alors la troisième carte a une forme différentes des deux autres. On cherche ainsi une carte vérifiant cette condition pour la forme et pour les autres attributs. □

D'après le théorème précédent, après avoir tiré deux cartes la troisième existe parmi les 79 cartes restantes. On en déduit qu'on a une probabilité de $1/79$ d'obtenir un set en tirant 3 cartes aléatoirement.

Nombre de sets dans le jeu On tire une première carte parmi les 81 cartes, puis une deuxième parmi les 80 cartes restantes, d'après le théorème 1 la troisième carte complétant le set est unique. De plus, on ne compte pas les permutations possibles des cartes tirées, on a alors $\frac{81\times 80\times 1}{3!} = 1080$ sets possibles dans le jeu.

2.2 Interprétation géométrique des règles

Chaque carte possède quatre attributs pouvant prendre trois valeurs différentes. On peut alors dire qu'un attribut est représenté par un élément appartenant à $\mathbb{F}_3$, un corps commutatif fini composé de trois éléments : 0,1,2. De plus, une carte possède quatre attributs, il y aura donc quatre dimensions (une pour chaque attribut). Une carte est alors représentée par un unique point $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}_3^4$. On peut ainsi poser le tableau suivant :

		0	1	2
x_1 :	Nombres	un	deux	trois
x_2 :	Remplissage	plein	hachuré	vide
x_3 :	Couleur	rouge	vert	violet
x_4 :	Forme	ovale	vague	losange

Exemple 1. Le point de coordonnées $(1, 0, 1, 2)$ représente la carte :  .

Sous cette formulation, on obtient la proposition suivante :

Proposition 1. *Trois cartes forment un set si et seulement si leur point représentatif dans $\mathbb{F}_3^4$ sont alignés.*

Démonstration. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}_3$. On a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ou λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents. Pour des points a, b, c appartenant à $\mathbb{F}_3^4$, avoir $a + b + c = 0$ signifie que toutes les coordonnées sont soit identiques ou soit différentes. Pour a, b, c des points de $\mathbb{F}_3^4$, on a $a + b + c = 0 \iff a - 2b + c = 0 \iff a - b = b - c$ donc les trois points sont alignés. $\square$

2.3 Taille maximale d'un *cap*

Définition 1 (d-cap)**.** On appelle *d-cap* un sous ensemble de $\mathbb{F}_3^d$ ne contenant pas trois points alignés.

Nous nous posons la question : Combien de cartes au minimum doit-on disposer devant soi pour être certain d'avoir un set ? Cela revient, entre autre, à chercher la taille maximale d'un 4-cap. D'après la séquence A090245 de l'*OEIS*[1] la taille maximale d'un 4-cap est 20, il faudra alors disposer au minimum 21 cartes devant soi pour avoir un set. Avant de démontrer ce résultat, nous étudierons des variantes du jeu de SET en considérant, par exemple, une couleur fixée pour toutes les cartes. Autrement dit, nous travaillerons d'abord dans des sous-espaces de $\mathbb{F}_3^4$.

2.3.1 Taille maximale d'un *2-cap*

Proposition 2. *La taille maximale d'un* 2-cap *est 4.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'un *2-cap* contenant 5 points x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Le plan $\mathbb{F}_3^2$ peut être décomposé comme l'union de trois droites parallèles tel qu'une droite contienne au plus deux points. (...) $\square$

2.3.2 Taille maximale d'un *3-cap*

Proposition 3. *La taille maximale d'un* 3-cap *est 9.*

Démonstration. Par l'absurde, (...) $\square$

2.3.3 Taille maximale d'un *4-cap*

Avant de commencer la démonstration, nous aurons besoin de la proposition suivante

1. L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers

Proposition 4. *Le nombre d'hyperplans contenant un sous-espace affine fixé de dimensions k dans $\mathbb{F}_3^d$ est égal à :*

$$\frac{3^{d-k}-1}{2}$$

Démonstration. Soit S un sous-espace de $\mathbb{F}_3^d$ de dimension k contenant l'origine. On peut dire que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}_3^d$ or $\mathbb{F}_3^d$ est de dimension finie donc S admet un supplémentaire noté G tel que $\mathbb{F}_3^d = S \oplus G$. De plus, l'application qui a chaque vecteur $y \in S$ associe sa classe d'équivalence $y + S$ est un isomorphisme entre G et $\mathbb{F}_3^d/S$. On en déduit qu'on a $\mathbb{F}_3^d/S \simeq G \simeq \mathbb{F}_3^{d-k}$. Les hyperplans de $\mathbb{F}_3^{d-k}$ contenant l'origine sont définis par un vecteur normal non nul au nombre de $3^{d-k}-1$. Comme il y a deux vecteurs normaux définissant un plan, il y a donc $\frac{3^{d-k}-1}{2}$ hyperplans contenant l'origine. Notons que si le sous espace fixé ne contient pas l'origine, il peut être translaté. □

Proposition 5. *La taille maximale d'un* 4-cap *est 20.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'un *4-cap* noté C contenant 21 points. L'espace $\mathbb{F}_3^4$ peut être décomposé de plusieurs façon comme l'union de trois hyperplans parallèles H_1, H_2, H_3. On obtient alors un triplet

$$\{|C \cap H_1|, |C \cap H_2|, |C \cap H_3|\}$$

où $|C \cap H_i|$ est la taille de $C \cap H_i$.

Soit x_{ijk} le nombre de triplets d'hyperplans de C. D'après la proposition 3, un *3-cap* possède au maximum 9 points, il y a donc 7 triplets d'hyperplans possibles :

$$\{i,j,k\} = \{9,9,3\}, \{9,8,4\}, \{9,7,5\}, \{9,6,6\}, \{8,8,5\}, \{8,7,6\}, \{7,7,7\}$$

De plus, pour une famille de trois hyperplans parallèles, il existe une unique droite passant par l'origine perpendiculaire à ces trois hyperplans. Le nombre de façon de décomposer $\mathbb{F}_3^4$ comme l'union de trois hyperplans parallèles est alors égal à ce nombre de droites, c'est-à-dire égal à $\frac{3^4-1}{2} = 40$, donc

$$x_{993} + x_{984} + x_{975} + x_{966} + x_{885} + x_{876} + x_{777} = 40 \tag{1}$$

Pour obtenir une autre équation, nous allons compter le nombre de *2-marked* hyperplans qui sont des paires de la forme $(H, \{x, y\} \subset H \cap C)$ où H est un hyperplan. D'après la proposition 4, le nombre d'hyperplans contenant une paire de points **fixé**, ou une ligne, est égal à $\frac{3^{4-1}-1}{2} = 13$. Il y a donc, $13\binom{21}{2} = 2730$ *2-marked* hyperplans. Par ailleurs, il y a

$$\left[\binom{9}{2} + \binom{9}{2} + \binom{3}{2}\right] x_{993} + \cdots + \left[\binom{7}{2} + \binom{7}{2} + \binom{7}{2}\right] x_{777}$$

2-marked hyperplans. En calculant chacun des coefficients, on a

$$75x_{993} + 70x_{984} + 67x_{975} + 66x_{966} + 66x_{885} + 64x_{876} + 63x_{777} = 2730 \quad (2)$$

Pour obtenir encore une autre équation en x_{ijk}, nous allons compter le nombre de *3-marked* hyperplans qui sont des paires de la forme $(H, \{x, y, z\} \subset H \cap C)$ où H est un hyperplan. D'après la proposition 4, le nombre d'hyperplans contenant trois points **fixé**, ou un plan, est égal à $\frac{3^{4-2}-1}{2} = 4$. Il y a donc, $4\binom{21}{3} = 5320$ *3-marked* hyperplans. Par ailleurs, il y a

$$\left[\binom{9}{3} + \binom{9}{3} + \binom{3}{3}\right] x_{993} + \cdots + \left[\binom{7}{3} + \binom{7}{3} + \binom{7}{3}\right] x_{777}$$

3-marked hyperplans. En calculant chacun des coefficients, on a

$$169x_{993} + 144x_{984} + 129x_{975} + 124x_{966} + 122x_{885} + 111x_{876} + 105x_{777} = 5230 \quad (3)$$

Nous pouvons désormais résoudre les équations. Nous nous intéressons qu'aux solutions entières et positives. En ajoutant, 693 fois l'équation (1) à 3 fois l'équation (3), et en soustrayant 6 fois l'équation (2), on a

$$5x_{984} + 8x_{975} + 9x_{966} + 3x_{885} + 2x_{876} = 0$$

Les uniques solution positives de cette équation sont $x_{984} = x_{975} = x_{966} = x_{885} = x_{876} = 0$. Mais l'équation (2) moins 63 fois l'équation (1) donne

$$12x_{993} + 7x_{984} + 4x_{975} + 3x_{966} + 3x_{885} + x_{876} = 210$$

Finalement, on obtient $12x_{993} = 210$ qui contredit le fait que x_{993} soit un entier. $\square$

3 Conclusion

Nous avons vu que le jeu de SET pouvait se ramener à chercher trois points alignés dans $\mathbb{F}_3^4$. Parfois, il n'existe pas de set dans les cartes disposées devant soi, on se demandait alors combien de cartes faut il au minimum disposer devant soi pour être certain de trouver un set. Pour répondre à cette question nous avons d'abord travaillé dans des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{F}_3^4$ et avons cherché les tailles maximales des *d-cap*. Lors de nos recherches, nous avons trouvé ces résultats

d	0	1	2	3	4	5	6	7
taille maximale	1	2	4	9	20	45	112	[236,291]

Il faut donc disposer au minimum 21 cartes pour être sûr de trouver un set.

Références

[1] Benjamin Lent Davis and Diane Maclagan. The card game set. *The Mathematical Intelligencer*, 25(3) :33–40, Jun 2003.