

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT

PROJET DE MATHÉMATIQUES

Interprétation géométrique des règles du jeu de SET

Nathan COZZO

Romain BOUARAH

supervisé par
Paul LAURAIN

Année 2019

Résumé

Dans ce sujet, on verra comment interpréter les règles du jeu de SET de manière géométrique, puis grâce à cette interprétation comment déterminer le nombre de cartes minimal à disposer devant soi pour pouvoir toujours trouver un triplet de cartes.

Table des matières

1	Présentation du jeu de SET	2
1.1	Origine	2
1.2	But	2
1.3	Règles	2
2	Notions mathématiques utilisées	3
2.1	Le corps fini \mathbb{F}_3	3
2.2	Principe des tiroirs	3
2.3	Relation d'équivalence et classe d'équivalence	4
2.3.1	Relation d'équivalence	4
2.3.2	Classe d'équivalence	4
2.4	Espace affine	4
2.5	Espace vectoriel quotient	5
3	Aspect Mathématiques	6
3.1	Combinatoire	6
3.2	Interprétation géométrique des règles	6
3.3	Taille maximale d'un <i>d-cap</i>	7
3.3.1	Taille maximale d'un <i>2-cap</i>	7
3.3.2	Taille maximale d'un <i>3-cap</i>	9
3.3.3	Taille maximale d'un <i>4-cap</i>	9
4	Conclusion	11

1 Présentation du jeu de SET

1.1 Origine

Le Jeu de SET a été inventé par Marsha Falco en 1974. L'idée du jeu est venue lorsque Marsha essayait de comprendre si l'épilepsie chez les bergers allemands était héréditaire. Elle représentait les données génétiques des chiens sous la forme de symboles en dessinant sur des fiches. Marsha a constaté qu'il était amusant de trouver les différentes combinaisons et SET est né. Au fil des années, Marsha a perfectionné le jeu en jouant avec sa famille et ses amis. Il a finalement été lancé en 1990.

1.2 But

Chaque joueur doit trouver le maximum de sets. Un set est composé de trois cartes dont les quatre caractéristiques (prises séparément) sont :

- soit totalement identiques (par exemple les trois cartes ont la même forme),
- soit totalement différentes (par exemple chacune des trois cartes est d'une couleur différente).













			
			
			

TABLE 1 – Avez-vous trouvé les 8 sets ?

1.3 Règles

Le jeu commence en disposant douze cartes devant les joueurs. Le premier joueur qui voit un set prend les trois cartes et les garde dans sa pile de gain. On complète avec trois cartes de la pioche. Si aucun set ne figure parmi les 12 cartes, on ajoute 3 cartes, mais on ne complètera pas après qu'un joueur a trouvé une solution. Le jeu est fini quand toutes les cartes ont été tirées et qu'il n'y a plus de set dans celles qui restent. Le gagnant est celui qui a le plus grand nombre de sets.

2 Notions mathématiques utilisées

Avant d'aborder l'aspect mathématiques du jeu de set, en particulier l'interprétation géométrique des règles; nous allons expliquer et illustrer les notions mathématiques indispensables à la compréhension de la section suivante.

2.1 Le corps fini \mathbb{F}_3

Le corps commutatif fini \mathbb{F}_3 est composé de trois éléments distincts qui sont 0, 1 et 2. Il peut s'interpréter comme l'anneau $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ correspondant au calcul modulaire sur les restes des entiers dans la division par 3. Un élément de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est la classe des éléments ayant tous le même reste par la division euclidienne par 3, cet élément est identifié par un membre de sa classe.

Exemple 1. $\bar{2}$ représente la classe contenant les éléments 2, 5, 8, 11 etc. Comme il n'y a pas d'ambiguïté, 2 désignera aussi cette classe.

Remarque 1. Comme 3 est un nombre premier chaque élément non nul de \mathbb{F}_3 est inversible, c'est l'inverse modulaire. L'inverse modulaire d'un entier relatif a pour la multiplication modulo n est un entier u satisfaisant l'équation $au \equiv 1 \pmod{n}$.

Les lois $(+, \times)$ sont les mêmes que sur \mathbb{Z} mais modulo 3.

$+$	0	1	2	\times	0	1	2
0	0	1	2	0	0	0	0
1	1	2	0	1	0	1	2
2	2	0	1	2	0	2	1

Remarque 2. Étant donné que nous sommes modulo 3, le plan \mathbb{F}_3^2 se comporte comme un tore. Ce comportement reste valable aux dimensions supérieures.

2.2 Principe des tiroirs

Le principe des tiroirs, ou encore le principe des pigeons (en anglais : pigeonhole principle) qui peut paraître trivial mais qui a son importance dans ce sujet. L'idée est simple : on place n chaussettes dans m tiroirs, et si $n > m$ alors il y a au moins un tiroir qui doit contenir strictement plus d'une chaussette.

On peut énoncer ce principe autrement :

Définition 1. Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E| > |F|$ et si $f : E \rightarrow F$ est une application alors il existe un élément de F qui admet au moins deux antécédents par f . Il n'existe donc pas d'application injective de E dans F .

2.3 Relation d'équivalence et classe d'équivalence

2.3.1 Relation d'équivalence

La relation d'équivalence permet, dans un ensemble, de mettre en relation des éléments qui sont similaires par une certaine propriété.

Définition 2 (Relation d'équivalence). Une relation d'équivalence sur un ensemble E est une relation binaire \sim sur E qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 2. Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la relation d'équivalence correspond à la congruence sur les entiers. On vérifie aisément que la congruence est réflexive, symétrique et transitive.

2.3.2 Classe d'équivalence

Grâce à la relation d'équivalence, on peut regrouper des éléments similaires ensembles ; on définit ainsi la notion de classe d'équivalence.

Définition 3 (Classe d'équivalence). On définit la classe d'équivalence $[x]$ d'un élément x de E comme l'ensemble des y de E tels que $x \sim y$, autrement dit, on a $y \in [x] \Leftrightarrow x \sim y$. On appelle représentant de $[x]$ n'importe quel élément de $[x]$.

Remarque 3. D'après la définition, on a alors $x \sim y \Leftrightarrow [y] = [x]$.

Exemple 3. Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, -1, 2, 5, etc sont des représentants de $[2] = \{x \equiv 2 \pmod{3} | x \in \mathbb{Z}\}$.

2.4 Espace affine

Définition 4 (Espace affine). Un ensemble E est un espace affine s'il existe un espace vectoriel V et une application de $E \times V$ dans E qui au point A et au vecteur \vec{u} associe un point de E noté $A + \vec{u}$ vérifiant

1. $\forall A \in E, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V, (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v})$
2. $\forall (A, B) \in E^2, \exists! \vec{u} \in V, A + \vec{u} = B$

L'espace vectoriel V s'appelle alors la direction de l'espace affine E .

Remarque 4. Un espace affine peut être vu comme un espace vectoriel dont on a oublié l'origine.

Définition 5 (Sous-espace affine). Soit E un espace affine de direction V . Une partie F de E est un sous-espace affine de E , s'il est vide ou s'il existe un point A de F tel que l'ensemble $W = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in F\}$ soit un sous-espace vectoriel de V .

Exemple 4. Dans \mathbb{R}^2 les droites passant par l'origine sont des espaces vectoriels. Les autres droites sont des sous-espaces affines.

2.5 Espace vectoriel quotient

Nous savons déjà que si F est un sous-espace vectoriel de E et E de dimension finie alors F admet un supplémentaire G tel que $E = F \oplus G$. Il n'y a pas de façon "naturelle" de choisir ce supplémentaire. En revanche, il existe une construction naturelle associant F et E qui est un supplémentaire de F .

Construction Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On définit la relation d'équivalence \sim sur E tel que $x \sim y$ si $x - y \in F$ où $(x, y) \in E^2$. On a alors la classe d'équivalence de x définit tel que $[x] = \{x + u \mid u \in F\}$ (u parcourt F mais x reste fixé). L'ensemble de ces classes d'équivalences est appelé *l'espace vectoriel quotient de E modulo F* noté E/F .

Exemple 5. Soit $E = \mathbb{R}^2$ le plan cartésien et F une ligne passant par l'origine. L'espace vectoriel quotient E/F peut être représenté comme l'ensemble des lignes dans E parallèles à F .

3 Aspect Mathématiques

3.1 Combinatoire

Nombre de cartes Chaque carte du jeu de SET est unique, en effet une carte représente une combinaison de quatre attributs, chacun des attributs pouvant prendre trois valeurs. Il y a donc $3^4 = 81$ cartes dans le jeu de SET.

Probabilité d'obtenir un set en tirant 3 cartes au hasard Avant de calculer la probabilité, il est important d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème de construction d'un Set). *Pour deux cartes, il y a exactement une carte qui complète ces deux cartes en un set.*

Démonstration. Par définition, si les deux cartes ont la même forme alors la troisième carte a cette forme sinon les deux cartes n'ont pas la même forme alors la troisième carte a une forme différente des deux autres. On cherche ainsi une carte vérifiant cette condition pour la forme et pour les autres attributs. \square


D'après le théorème précédent, après avoir tiré deux cartes la troisième existe parmi les 79 cartes restantes. On en déduit qu'on a une probabilité de $1/79$ d'obtenir un set en tirant 3 cartes aléatoirement.

Nombre de sets dans le jeu On tire une première carte parmi les 81 cartes, puis une deuxième parmi les 80 cartes restantes, d'après le théorème 1 la troisième carte complétant le set est unique. De plus, on ne compte pas les permutations possibles des cartes tirées, on a alors $\frac{81 \times 80 \times 1}{3!} = 1080$ sets possibles dans le jeu.

3.2 Interprétation géométrique des règles

Chaque carte possède quatre attributs pouvant prendre trois valeurs différentes. On peut alors dire qu'un attribut est représenté par un élément appartenant à \mathbb{F}_3 , un corps commutatif fini composé de trois éléments : 0,1,2. De plus, une carte possède quatre attributs, il y aura donc quatre dimensions (une pour chaque attribut). Une carte est alors représentée par un unique point $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}_3^4$. On peut ainsi poser le tableau suivant :

		0	1	2
x_1 :	Nombres	un	deux	trois
x_2 :	Remplissage	plein	hachuré	vide
x_3 :	Couleur	rouge	vert	violet
x_4 :	Forme	ovale	vague	losange

Exemple 6. Le point de coordonnées $(1, 0, 1, 2)$ représente la carte :  .

Sous cette formulation, on obtient la proposition suivante :

Proposition 1. *Trois cartes forment un set si et seulement si leur point représentatif dans \mathbb{F}_3^4 sont alignés.*

Démonstration. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}_3$. On a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ou λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents. Pour des points a, b, c appartenant à \mathbb{F}_3^4 , avoir $a + b + c = 0$ signifie que toutes les coordonnées sont soit identiques ou soit différentes. Pour a, b, c des points de \mathbb{F}_3^4 , on a $a + b + c = 0 \iff a - 2b + c = 0 \iff a - b = b - c$ donc les trois points sont alignés. \square

3.3 Taille maximale d'un d -cap

Définition 6 (d -cap). On appelle d -cap un sous-ensemble de \mathbb{F}_3^d ne contenant pas trois points alignés.

Définition 7 (Taille maximale d'un d -cap). La taille maximale d'un d -cap est le nombre maximum de points que l'on peut placer dans \mathbb{F}_3^d tel qu'aucune droite ne passe par trois points.

Nous nous posons la question : Combien de cartes au minimum doit-on disposer devant soi pour être certain d'avoir un set ? Cela revient, entre autre, à chercher la taille maximale d'un 4-cap. D'après la séquence A090245 de l'*OEIS*¹ la taille maximale d'un 4-cap est 20, il faudra alors disposer au minimum 21 cartes devant soi pour avoir au moins un set.

Avant de démontrer ce résultat, nous étudierons des variantes du jeu de SET en considérant, par exemple, une couleur fixée pour toutes les cartes. Autrement dit, nous travaillerons d'abord dans des sous-espaces de \mathbb{F}_3^4 .

3.3.1 Taille maximale d'un 2-cap

Proposition 2. *La taille maximale d'un 2-cap est 4.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe un 2-cap représenté avec 5 points que l'on note x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Le plan \mathbb{F}_3^2 peut être décomposé comme l'union de trois lignes parallèles horizontales.

Chaque ligne contient au plus 2 points, par conséquent il existe deux lignes horizontales contenant chacune deux points du cap et une autre ligne,

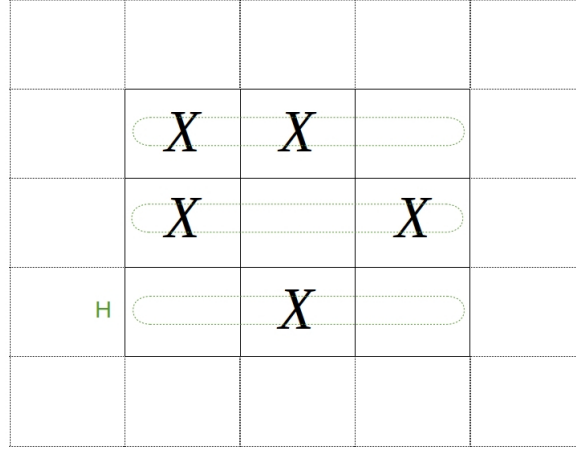


FIGURE 1 – Décomposition de \mathbb{F}_3^2 comme l'union de trois droites horizontales parallèles

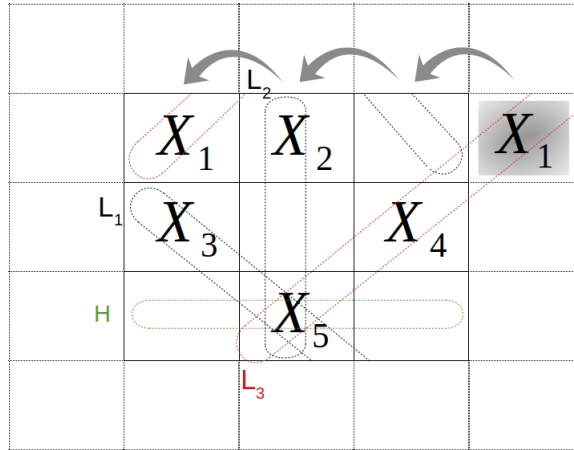


FIGURE 2 – Les quatre lignes contenant le point x_5

notée H , qui contient exactement un point qui sera le point x_5 . Finalement, il y a exactement 4 lignes contenant le point x_5 , que nous notons L_1, L_2, L_3, H .

Or la ligne H ne contient aucun des points x_1 à x_4 donc selon le principe des tiroirs, il y a deux de ces points noté x_r et x_s qui se trouvent sur une ligne L_i où $1 \leq i \leq 3$. Cela montre que la ligne L_i contient les points x_5, x_r, x_s formant donc un SET et cela contredit l'hypothèse de départ car un 2-cap est un sous espace affine de \mathbb{F}_3^2 qui ne contient pas de points alignés (colinéaire). \square

1. L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers

3.3.2 Taille maximale d'un 3-cap

Proposition 3. *La taille maximale d'un 3-cap est 9.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe un 3-cap avec dix points. L'espace \mathbb{F}_3^3 peut être décomposé comme l'union de trois plans parallèles.

Puisque l'intersection de n'importe quel plan avec le 3-cap est un 2-cap, la proposition 2 implique qu'aucun plan ne peut contenir plus de quatre points du cap.

Cela signifie que le plan contenant le plus petit nombre de points doit contenir deux ou trois points, car s'il contenait quatre points, nous aurions besoin d'un total de douze points, et pour un point ou zéro cela signifierait au plus neuf points. Appelons ce plan H , et notons qu'il y a au moins sept points du cap, x_1, \dots, x_7 , non contenu dans H .

Soient a et b deux points du cap sur le plan H . Il existe exactement quatre plans dans l'espace \mathbb{F}_3^3 contenant à la fois a et b , que l'on désigne par H, M_1, M_2, M_3 . Puisque H ne contient pas les points x_1, \dots, x_7 , selon le principe des tiroirs, l'un des plans M_i doit contenir trois de ces points x_r, x_s, x_t . Cela montre que le plan M_i contient un total de cinq points du cap, ce qui contredit la proposition 2.

Malheureusement, cette méthode n'est pas assez puissante pour prouver que la taille maximale d'un 4-cap est 20. \square

3.3.3 Taille maximale d'un 4-cap

Avant de commencer la démonstration, nous aurons besoin de la proposition suivante

Proposition 4. *Le nombre d'hyperplans contenant un sous-espace affine fixé de dimensions k dans \mathbb{F}_3^d est égal à :*

$$\frac{3^{d-k} - 1}{2}$$

Démonstration. Soit S un sous-espace de \mathbb{F}_3^d de dimension k contenant l'origine. On sait que S est un sous-espace vectoriel de \mathbb{F}_3^d et \mathbb{F}_3^d est de dimension finie donc S admet un supplémentaire noté G tel que $\mathbb{F}_3^d = S \oplus G$.

L'application qui à chaque vecteur $y \in G$ associe sa classe d'équivalence $y + S$ est un isomorphisme entre G et \mathbb{F}_3^d/S . On en déduit qu'on a $\mathbb{F}_3^d/S \simeq G \simeq \mathbb{F}_3^{d-k}$.

Les hyperplans de \mathbb{F}_3^{d-k} contenant l'origine sont définis par un vecteur normal non nul au nombre de $3^{d-k} - 1$. Comme il y a deux vecteurs normaux définissant un plan, il y a donc $\frac{3^{d-k}-1}{2}$ hyperplans contenant l'origine.

Remarque 5. Notons que si le sous espace fixé ne contient pas l'origine, il peut être translaté.

□

Proposition 5. *La taille maximale d'un 4-cap est 20.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'un 4-cap noté C contenant 21 points. L'espace \mathbb{F}_3^4 peut être décomposé de plusieurs façon comme l'union de trois hyperplans parallèles H_1, H_2, H_3 . On obtient alors un triplet

$$\{|C \cap H_1|, |C \cap H_2|, |C \cap H_3|\}$$

où $|C \cap H_i|$ est la taille de $C \cap H_i$.

Soit x_{ijk} le nombre de triplets d'hyperplans de C . D'après la proposition 3, un 3-cap possède au maximum 9 points, il y a donc 7 triplets d'hyperplans possibles :

$$\{i, j, k\} = \{9, 9, 3\}, \{9, 8, 4\}, \{9, 7, 5\}, \{9, 6, 6\}, \{8, 8, 5\}, \{8, 7, 6\}, \{7, 7, 7\}$$

De plus, pour une famille de trois hyperplans parallèles, il existe une unique droite passant par l'origine perpendiculaire à ces trois hyperplans. Le nombre de façon de décomposer \mathbb{F}_3^4 comme l'union de trois hyperplans parallèles est alors égal à ce nombre de droites, c'est-à-dire égal à $\frac{3^4-1}{2} = 40$, donc

$$x_{993} + x_{984} + x_{975} + x_{966} + x_{885} + x_{876} + x_{777} = 40 \quad (1)$$

Pour obtenir une autre équation, nous allons compter le nombre de 2-marked hyperplans qui sont des paires de la forme $(H, \{x, y\} \subset H \cap C)$ où H est un hyperplan. D'après la proposition 4, le nombre d'hyperplans contenant une paire de points **fixé**, ou une ligne, est égal à $\frac{3^4-1-1}{2} = 13$. Il y a donc, $13 \binom{21}{2} = 2730$ 2-marked hyperplans. Par ailleurs, il y a

$$\left[\binom{9}{2} + \binom{9}{2} + \binom{3}{2} \right] x_{993} + \cdots + \left[\binom{7}{2} + \binom{7}{2} + \binom{7}{2} \right] x_{777}$$

2-marked hyperplans. En calculant chacun des coefficients, on a

$$75x_{993} + 70x_{984} + 67x_{975} + 66x_{966} + 66x_{885} + 64x_{876} + 63x_{777} = 2730 \quad (2)$$

Pour obtenir encore une autre équation en x_{ijk} , nous allons compter le nombre de 3-marked hyperplans qui sont des paires de la forme $(H, \{x, y, z\} \subset$

$H \cap C$) où H est un hyperplan. D'après la proposition 4, le nombre d'hyperplans contenant trois points **fixé**, ou un plan, est égal à $\frac{3^4-2-1}{2} = 4$. Il y a donc, $4\binom{21}{3} = 5320$ *3-marked* hyperplans. Par ailleurs, il y a

$$\left[\binom{9}{3} + \binom{9}{3} + \binom{3}{3} \right] x_{993} + \cdots + \left[\binom{7}{3} + \binom{7}{3} + \binom{7}{3} \right] x_{777}$$

3-marked hyperplans. En calculant chacun des coefficients, on a

$$169x_{993} + 144x_{984} + 129x_{975} + 124x_{966} + 122x_{885} + 111x_{876} + 105x_{777} = 5230 \quad (3)$$

Nous pouvons désormais résoudre les équations. Nous nous intéressons qu'aux solutions entières et positives. En ajoutant, 693 fois l'équation (1) à 3 fois l'équation (3), et en soustrayant 6 fois l'équation (2), on a

$$5x_{984} + 8x_{975} + 9x_{966} + 3x_{885} + 2x_{876} = 0$$

Les uniques solutions positives de cette équation sont $x_{984} = x_{975} = x_{966} = x_{885} = x_{876} = 0$. Mais l'équation (2) moins 63 fois l'équation (1) donne

$$12x_{993} + 7x_{984} + 4x_{975} + 3x_{966} + 3x_{885} + x_{876} = 210$$

Finalement, on obtient $12x_{993} = 210$ qui contredit le fait que x_{993} soit un entier. \square

4 Conclusion

Nous avons vu que le jeu de SET pouvait se ramener à chercher trois points alignés dans \mathbb{F}_3^4 . Parfois, il n'existe pas de set dans les cartes disposées devant soi, on se demandait alors combien de cartes faut il au minimum disposer devant soi pour être certain de trouver un set. Pour répondre à cette question nous avons d'abord travaillé dans des sous-espaces vectoriels de \mathbb{F}_3^4 et avons cherché les tailles maximales des *d-cap*. Lors de nos recherches, nous avons trouvé ces résultats

d	0	1	2	3	4	5	6
taille maximale	1	2	4	9	20	45	112

Il faut donc disposer au minimum 21 cartes pour être sûr de trouver un set.

Références

- [1] Benjamin Lent Davis and Diane Maclagan. The card game set. *The Mathematical Intelligencer*, 25(3) :33–40, Jun 2003.
- [2] Paul R. Halmos. *Finite-Dimensional Vector Spaces : Second Edition*. Dover Publications, 2017.
- [3] Pierre Jalinière. Le jeu set. *Image des mathématiques*, 2013.