

Projet de mathématiques
Interprétation géométrique des règles du jeu de SET

Nathan C. Romain B.

21 mars 2019

Table des matières

1	Présentation du jeu de SET	1
1.1	Origine	1
1.2	But	1
1.3	Règles	1
2	Aspect Mathématique	1
2.1	Combinatoire	1
2.2	Interprétation géométrique des règles	2
2.3	Taille maximale d'un <i>cap</i>	3
2.3.1	Taille maximale d'un <i>2-cap</i>	3
2.3.2	Taille maximale d'un <i>3-cap</i>	3
2.3.3	Taille maximale d'un <i>4-cap</i>	4
3	Conclusion	4

Résumé

Dans ce sujet, on verra comment interpréter les règles du jeu de SET de manière géométrique, puis grâce à cette interprétation comment déterminer le nombre de cartes minimal à disposer devant soi pour pouvoir toujours trouver un triplet de cartes.

1 Présentation du jeu de SET

1.1 Origine

Le Jeu de SET a été inventé par Marsha Falco en 1974. L'idée du jeu est venue lorsque Marsha essayait de comprendre si l'épilepsie chez les bergers allemands était héritée. Elle représentait les données génétiques des chiens sous la forme de symboles en dessinant sur des fiches. Marsha a constaté qu'il était amusant de trouver les différentes combinaisons et SET est né. Au fil des années, Marsha a perfectionné le jeu en jouant avec sa famille et ses amis. Il a finalement été lancé en 1990.

1.2 But

Chaque joueur doit trouver le maximum de sets. Un set est composé de trois cartes dont les quatre caractéristiques (prises séparément) sont :

- soit totalement identiques (par exemple les trois cartes ont la même forme),
- soit totalement différentes (par exemple chacune des trois cartes est d'une couleur différente).

1.3 Règles

Le jeu commence en disposant douze cartes devant les joueurs. Le premier joueur qui voit un set prend les trois cartes et les garde dans sa pile de gain. On complète avec trois cartes de la pioche. Si aucun set ne figure parmi les 12 cartes, on ajoute 3 cartes, mais on ne complètera pas après qu'un joueur a trouvé une solution. Le jeu est fini quand toutes les cartes ont été tirées et qu'il n'y a plus de set dans celles qui restent. Le gagnant est celui qui a le plus grand nombre de sets.

2 Aspect Mathématique

2.1 Combinatoire

Nombre de cartes Chaque carte du jeu de SET est unique, en effet une carte représente une combinaison de quatre attributs, chacun des attributs pouvant prendre trois valeurs. Il y a donc $3^4 = 81$ cartes dans le jeu de SET.

Probabilité d'obtenir un set en tirant 3 cartes au hasard Avant de calculer la probabilité, il est important d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 1 (Théorème de construction d'un Set). *Pour deux cartes, il y a exactement une carte qui complète ces deux cartes en un set.*

Démonstration. Par définition, si les deux cartes ont la même forme alors la troisième carte a cette forme sinon les deux cartes n'ont pas la même forme alors la troisième carte a une forme différentes des deux autres. On cherche ainsi une carte vérifiant cette condition pour la forme et pour les autres attributs. \square

D'après le théorème précédent, après avoir tiré deux cartes la troisième existe parmi les 79 cartes restantes. On en déduit qu'on a une probabilité de $1/79$ d'obtenir un set en tirant 3 cartes aléatoirement.

Nombre de sets dans le jeu On tire une première carte parmi les 81 cartes, puis une deuxième parmi les 80 cartes restantes, d'après le théorème 1 la troisième carte complétant le set est unique. De plus, on ne compte pas les permutations possibles des cartes tirées, on a alors $\frac{81 \times 80 \times 1}{3!} = 1080$ sets possibles dans le jeu.

2.2 Interprétation géométrique des règles

Chaque carte est composée de quatre attributs pouvant prendre trois valeurs différentes. On peut alors dire qu'un attribut est représenté par un élément appartenant à \mathbb{F}_3 , un corps commutatif fini composé de trois éléments : 0,1,2. De plus, une carte possède quatre attributs, il y aura donc quatre dimensions (une pour chaque attribut). Une carte est alors représentée par un point de \mathbb{F}_3^4 . On peut ainsi poser le tableau suivant :

		0	1	2
x_1 :	Nombres	un	deux	trois
x_2 :	Remplissage	plein	hachuré	vide
x_3 :	Couleur	rouge	vert	violet
x_4 :	Forme	ovale	vague	losange

Exemple 1. Le point de coordonnées $(1, 0, 1, 2)$ représente la carte :



Sous cette formulation, on obtient la proposition suivante :

Proposition 1. *Trois cartes forment un set si et seulement si leur point représentatif dans \mathbb{F}_3^4 sont alignés.*

Démonstration. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{F}_3$. On a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ou λ_1, λ_2 et λ_3 sont tous différents. Pour des points a, b, c appartenant à \mathbb{F}_3^4 , on a $a + b + c = 0$ signifie que toutes les coordonnées sont soit identiques ou soit différentes. Soit a, b, c des points de \mathbb{F}_3^4 , on a $a + b + c = 0 \iff a - 2b + c = 0 \iff a - b = b - c$ donc les trois points sont alignés. \square

2.3 Taille maximale d'un *cap*

Définition 1. On appelle *d-cap* un sous ensemble de \mathbb{F}_3^d ne contenant pas trois points alignés.

Nous nous posons la question : Combien de cartes au minimum doit-on disposer devant soi pour être certain d'avoir un set ? Cela revient, entre autre, à chercher la taille maximale d'un 4-cap. D'après l'article A090245 de l'*OEIS*¹ la taille maximale d'un 4-cap est 20, il faudra alors disposer au minimum 21 cartes devant soi pour avoir un set. Avant de démontrer ce résultat, nous étudierons des variantes du jeu de SET en considérant, par exemple, une couleur fixée pour toutes les cartes. Autrement dit, nous travaillerons d'abord dans des sous-espaces de \mathbb{F}_3^4 .

2.3.1 Taille maximale d'un 2-cap

Proposition 2. La taille maximale d'un 2-cap est 4.

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'un 2-cap contenant 5 points x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Le plan \mathbb{F}_3^2 peut être décomposé comme l'union de trois droites parallèles tel qu'une droite contienne au plus deux points. (...)
 \square

2.3.2 Taille maximale d'un 3-cap

Proposition 3. La taille maximale d'un 3-cap est 9.

Démonstration. Par l'absurde, (...)
 \square

1. L'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers

2.3.3 Taille maximale d'un 4-cap

Proposition 4. *Le nombre d'hyperplans contenant un sous-espace affine fixé de dimensions k dans \mathbb{F}_3^d est égal à :*

$$\frac{3^{d-k} - 1}{2}$$

Démonstration. (...)

□

Proposition 5. *La taille maximale d'un 4-cap est 20.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'existence d'un 4-cap noté C contenant 21 points. L'espace \mathbb{F}_3^4 peut être décomposé de plusieurs façon comme l'union de trois hyperplans parallèles H_1, H_2, H_3 . On obtient alors un triplet

$$\{|C \cap H_1|, |C \cap H_2|, |C \cap H_3|\}$$

où $|C \cap H_i|$ est la taille de $C \cap H_i$.

Soit x_{ijk} le nombre de triplets d'hyperplans de C . D'après la proposition 3, un 3-cap possède au maximum 9 points, il y a donc 7 triplets d'hyperplans possibles :

$$\{i, j, k\} = \{9, 9, 3\}, \{9, 8, 4\}, \{9, 7, 5\}, \{9, 6, 6\}, \{8, 8, 5\}, \{8, 7, 6\}, \{7, 7, 7\}$$

Le nombre de façon de décomposer \mathbb{F}_3^4 comme l'union de trois hyperplans parallèles est égal au nombre de droite passant par l'origine, c'est-à-dire égal à $\frac{3^4-1}{2} = 40$, Donc

$$x_{993} + x_{984} + x_{975} + x_{966} + x_{885} + x_{876} + x_{777} = 40 \quad (1)$$

D'après la proposition 4, 1

□

3 Conclusion

Références

- [1] Benjamin Lent Davis and Diane Maclagan. The card game set. *The Mathematical Intelligencer*, 25(3) :33–40, Jun 2003.