**FACULTE DES SCIENCES DE TUNIS** **Série 0**
**Cycle préparatoire intégré** **2021-2022**
**MPI**

# Outils mathématiques pour l'électrostatique et la magnétostatique

## *I/ Equations aux dimensions*

En physique on utilise :

- Les nombres sans dimensions. Exemple : $\pi$
- Les grandeurs physiques.

Ces dernières possèdent une unité qui peut être simple ou composée. Dans le système international d'unités (SI), les grandeurs fondamentales en mécanique et en électromagnétique sont résumées dans le tableau suivant :

| Grandeurs Physiques fondamentales | Dimension de la grandeur | Nom de l'unité dans le (SI) | Symbole de l'unité dans le (SI) |
|---|---|---|---|
| Longueur | **L** | mètre | **M** |
| Masse | **M** | Kilogramme | **Kg** |
| Temps | **T** | seconde | **S** |
| Courant électrique | **I** | Ampère | **A** |

Toute grandeur physique G possède soit une unité simple du type décrit dans le tableau ci-dessus soit une unité composée. Dans ce dernier cas, elle est de la forme :
$\mathbf{G = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta}}$.

Où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\delta$ sont des puissances réelles.

Du point de vue écritures, on note l'équation aux dimensions de la grandeur physique G :
$\mathbf{[G] = [L]^{\alpha} [M]^{\beta} [T]^{\gamma} [I]^{\delta} = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\delta}}$.

Dans la pratique, il est conseillé de vérifier l'équation aux dimensions (appelée homogénéité) des grandeurs physiques.

**Application 1**

1) Déterminer les équations aux dimensions des grandeurs physiques suivantes :
La vitesse $\vec{v}$, l'accélération $\vec{a}$, la force $\vec{F}$, la raideur d'un ressort $\boldsymbol{k}$, la charge $\boldsymbol{q}$, la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.
2) Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé en un point M de l'espace par une charge ponctuelle q placée en un point O est tel que :
$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Donner l'équation aux dimensions de $\varepsilon_0$.

3) Le champ magnétique $\vec{B}$ créé en un point M de l'espace par une charge q en mouvement munie d'une vitesse $\vec{V}$ est tel que : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q\vec{V} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$ .Donner l'équation aux dimensions de $\mu_0$.

4) La permittivité $\varepsilon_0$ et la perméabilité $\mu_0$ du vide, sont liées par la relation $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ où c est la célérité de la lumière dans le vide. Vérifier l'homogénéité de cette relation.

**Application 2**

Vous passez un examen de physique où vous avez besoin de calculer la force centrifuge exercée sur une masse en rotation. Vous avez oublié sa formule mais vous gardez en tête qu'elle dépend de la masse $m$, de la vitesse de rotation $v$ et du rayon de courbure $R$. Au lieu de chercher la réponse à droite où à gauche, retrouvez la formule grâce à une analyse dimensionnelle.

## *II/ Fonctions scalaires*

**Application 3 :** ***Représentation d'une fonction à seule variable***

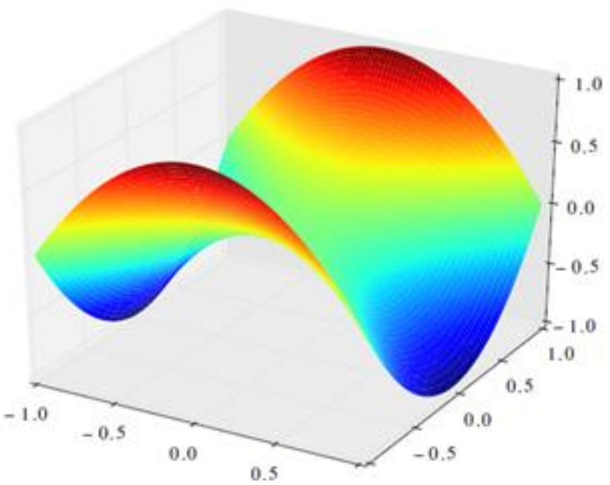
Donner l'allure des fonctions suivantes :

a- $f(r) = \frac{A}{r}$ ; b- $V(r) = \frac{A}{r^2}$ ; c- $p(r) = Ae^{-r}$ où A est une constante positive.

Pour les fonctions à une seule variable, on a l'habitude de représenter la courbe $y = f(x)$. Pour les fonction à plusieurs variables, c'est plus délicat vu que la fonction dépende de plusieurs paramètres.

***Représentation d'une fonction à plusieurs variables***

Dans le cas de deux variables par exemple, on peut étendre le tracé habituel en ne traçant pas une courbe mais une surface dans l'espace : $z = f(x, y)$. C'est une représentation qui se fait en général par ordinateur. Par exemple pour $f(x, y) = -x^2 + y^2$.




***Dérivée partielle***

Soit $f(x, y, z)$ une fonction à plusieurs variables. On appelle dérivée partielle ( si elle existe) de $f$ par rapport à $x$ la dérivée de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport à $x$ en considérant $y$ et $z$ comme constants. Elle est notée :

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$\partial$ se lit « d rond » et est réservé pour les dérivées partielles. En physique, on s'intéresse à des grandeurs plutôt qu'à des fonctions et on note souvent :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$$

Ce qui se lit « à y et z constant » pour indiquer quelles sont les autres variables considérées.

***Différentielle***

Pour une fonction $f(x,y,z)$ , on appelle différentielle de $f$ la variation infinitésimal de $f$ lorsque les grandeurs $x$ , $y$, $z$ varient de façon infinitésimal. C'est-à-dire :

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

**Application 4 :**

Soit la fonction : $f(x,y) = 2x^2y^3 + \frac{x}{y}$. Déterminer la différentielle de cette fonction.

1) Les formes différentielles suivantes sont-elles des différentielles totales exactes ?

a- $(y^2-3)x\,dx + (1+x^2)y\,dy$ .

b- $\sin(2x)\cos^2(y)dx + \sin^2(x)\sin(2y)dy$

2) Trouver la fonction $g(x,y)$ correspondante quand cela est possible.

**Application 5 : Calcul d'incertitude**

Soient deux résistances $R_1$ et $R_2$. Donner l'expression de la résistance équivalente, ses incertitudes relative et absolue dans les deux cas suivants :

a- $R_1$ et $R_2$ sont en série.

b- $R_1$ et $R_2$ sont en parallèle.

**Application 6 :**

La mesure de l'indice d'un prisme d'angle A (à $\Delta A$ près) se fait par la méthode du minimum de déviation. La déviation minimale est notée $D_m$ sa valeur est à $\Delta D_m$ près.
Calculer la précision de la détermination de l'indice n en utilisant :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+Dm}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$ On donne : A = 60°, A = = rd et n = 1,33625.

### *III- Opérations sur les vecteurs*

**<u>Application 7 :</u>**

Dans la base orthonormée $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$,on considère les deux vecteurs : $\vec{V}_1 = 3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y - 2\vec{u}_z$ et $\vec{V}_2 = -\vec{u}_x + \vec{u}_y + 6\vec{u}_z$ .

1) Calculer la norme des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ .

2) Calculer la valeur algébrique de la projection orthogonale du vecteur $\vec{V}_1$ sur la droite de direction $\vec{V}_2$ .

3) Calculer l'angle $\theta$ entre les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ .

4) Déterminer le vecteurs unitaire $\vec{n}$ colinéaire au vecteur $3\vec{V}_1 + \vec{V}_2$e et de même sens.

5°- Calculer les angles $\alpha$, $\beta$ *et* $\gamma$ que fait $\vec{n}$ respectivement avec les vecteurs $\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ .

6°- Calculer les composantes du vecteur $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. Que représente le module de ce vecteur ?

7°- Calculer le produit mixte $\left(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3\right) = \vec{V}_1 . \left(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3\right)$.Que représente ce produit ?

**<u>Application 8:</u>**

Tous les vecteurs sont exprimés dans la base orthonormée directe et fixe $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ et dépendent d'un paramètre scalaire t.

1°- Soient les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ tels que : $\vec{V}_1 = t^2\,\vec{u}_x - t\,\vec{u}_y + \vec{u}_z$ et $\vec{V}_2 = 4t\,\vec{u}_x + \vec{u}_y + \vec{u}_z$

Calculer : $\dfrac{d\vec{V}_1}{dt}$ ; $\dfrac{d\vec{V}_2}{dt}$; $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 . \vec{V}_2\right)}{dt}$ et $\dfrac{d\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right)}{dt}$.

2°- On considère un vecteur quelconque $\vec{V}(t)$.

a- Montrer que l'on a $\vec{V} . \dfrac{d\vec{V}}{dt} = V \dfrac{dV}{dt}$ où $V = \left\|\vec{V}\right\|$.

b- En déduire que si $\left\|\vec{V}\right\|$ est constante, alors $\dfrac{d\vec{V}}{dt}$ est orthogonal à $\vec{V}$ .