

Dynamiques de la Pêche chez les Poissons

Leila Benyamina, Elyes Lamouchi, Justin Le Sauter-Robitaille

23 novembre 2016

Résumé

Dans ce travail, il sera question d'aborder différents modèles en partant du modèle de Verlhust pour y ajouter un effet de Allee, c'est-à-dire des populations présentant une dépendance positive à la densité de la population. Ensuite, nous allons tenter de modéliser les effets que peut provoquer une récolte faite sur une population. Ainsi, nous allons modifier le modèle logistique de base et lui ajouter un nouveau terme qui tient compte de ce prélèvement. Nous considérerons ensuite deux situations dans le cas de l'exploitation contrôlée de la ressource. La première est celle lorsque la population subit un taux constant de prélèvement et la deuxième est lorsque la population subit un quota constant de prélèvement. De plus, il sera question pour nous d'étudier aussi les aspects bio-économiques reliés à ces deux cas puisque cela fait intervenir des nouveaux paramètres économiques. Nous allons également considérer le modèle de Gordon-Shaefer, qui selon lui, le point d'équilibre biologique est toujours atteint. De plus, avec l'effet Allee anthropogénique, on sera amené à considérer le modèle de Gordon-Shaefer avec une approche différente.

1 Introduction

De nos jours, les ordinateurs, les modèles et les techniques de modélisation se raffinent de plus en plus et nous tentent de créer des modèles les plus véridiques possibles. Ces modèles sont utilisés dans tellement de domaines comme la transmission des maladies ou encore les dynamiques de populations. Bien sûr, nous avons un but bien précis pour faire tous ces modèles et ces calculs et c'est de représenter les populations sous différents angles ou dans différents scénarios. Plusieurs espèces vivantes, comme le thon ou le saumon disposent d'un cycle biologique qui nécessite le recours à des modèles en temps continu pour observer l'influence de certains facteurs.

On peut vouloir observer la compétition entre deux populations ou encore comment l'interaction entre ces deux espèces bénéficie à tous, mais un des enjeux important de nos jours est l'effet de la pêche ou de la surpêche et c'est précisément ce dont il est question dans l'article de Schaefer¹. Pourquoi est-ce important d'analyser notre impact sur les populations ? Car nous sommes une force externe au milieu naturel et nous pouvons déséquilibrer le milieu et même causer l'extinction de certaines espèces si nous ne réglémentons pas la pêche.

2 Quelques modèles intrinsèques

Avant même de s'attaquer au problème de la pêche, il faut s'attarder au modèle de la population dans son habitat naturel et sans l'effet de la pêche pour observer la dynamique de la population intrinsèquement. Nous allons commencer par étudier les facteurs influençant sur l'évolution de la population de thon. Soit la rareté des ressources, la dépendance vis-à-vis du groupe et la densité de la population. À partir du modèle de base de Verhulst², il est possible de construire d'autres modèles démographiques qui sont à la fois plus élaborées et plus complexes. Nous pouvons donc modifier l'allure de l'équation différentielle à la base du modèle et pour le faire, nous allons ajouter le plus souvent un facteur multiplicatif à l'équation de base du modèle de Verhulst et par la suite regarder le comportement de la population.

Nous allons aussi considérer des populations avec un effet de Allee, c'est-à-dire des populations présentant une dépendance positive à la densité de la population. Ensuite, nous allons tenter de modéliser les effets que peut provoquer une récolte faite sur une population, par exemple : les poissons évoluent et se reproduisent, mais lorsqu'on pêche, une partie de la population est prélevée. Ainsi, nous allons modifier le modèle logistique de base et lui ajouter un nouveau terme qui tient compte de ce prélèvement.

1. Schaefer

2. Verlhust

2.1 Modèle de Verlhust

Le modèle suivant sera utilisé comme base pour les modèles à venir. Celui-ci est en une dimension et ne fait que regarder la variation dans le temps ($\frac{dP}{dt}$) de la population de poisson (P) en fonction de celle-ci et de certains paramètres comme le taux de croissance par capita (r) et la capacité du milieu (L).

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P), \text{ où } r, L > 0 \text{ et } P \geq 0 \quad (1)$$

À noter que dans ce modèle, il n'est pas abordé concrètement la façon dont une population exploite son milieu ou même lorsqu'elle exploite une ressource. On assume donc que la croissance r tient compte de tout cela. Aussi, soulignons le fait que le paramètre L dans l'équation de Verlhust représente un seuil pour la population en cas d'exploitation du milieu pour vivre ou survivre, et que si la population évolue au delà de la capacité de charge de milieu, les ressources ne seront plus suffisantes au maintien de la population de thon, et l'effectif commencera à diminuer.

On observe que la variation est positive pour des valeurs de P entre 0 et L et qu'elle devient négative pour des valeurs de P plus grande que L . Puisque L représente un seuil pour la population, si la population évolue au delà de la capacité de charge de milieu, les ressources ne seront plus suffisantes au maintien de la population de poisson et l'effectif commencera à diminuer. Dans le cas où P est plus petit que ce seuil, la population va croître jusqu'à pleine capacité du milieu et si elle dépasse cette capacité, elle redescendra naturellement vers le seuil L .

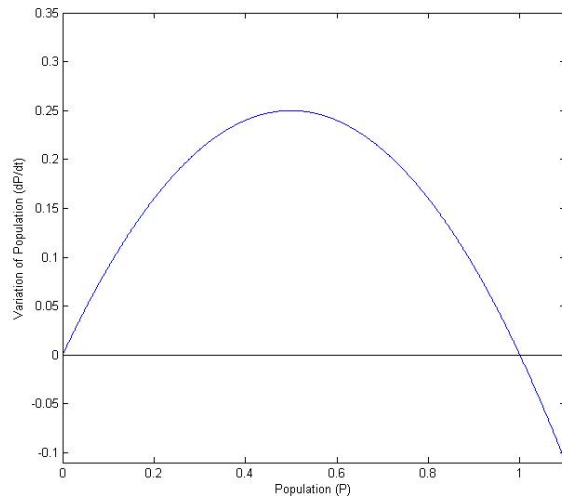


FIGURE 1 – L'équation 1 avec $r = 1$ et $L = 1$.

Ce modèle est très simple, mais peut contenir plusieurs informations, car on peut partir d'un modèle qui comprend la quantité de nourriture nécessaire par individu, la taux de reproduction de la population ainsi que la quantité de ressources du milieu. Supposons que chaque individu nécessite une quantité α de ressource pour survivre et que cette quantité est la même pour chaque individu. Nous pouvons considérer le taux de reproduction comme un paramètre β et la nourriture du milieu K et toutes ses valeurs sont constantes (Ce qui explique pourquoi ce modèle est simpliste). Nous obtenons donc que la quantité de nourriture dans le milieu est représenté par $K - \alpha P$ et on multiplie le tout par la reproduction β et par la population actuelle. On pourrait donc écrire le modèle complexe et le dérivé pour obtenir l'équation de Verlhust.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \beta P(K - \alpha P) \\ &= \alpha\beta P \left(\frac{K}{\alpha} - P \right) \\ &= rP(L - P), \text{ où } r = \alpha\beta \text{ et } L = \frac{K}{\alpha}\end{aligned}$$

On peut donc observer que la capacité du milieu peut être représentée comme la quantité de nourriture totale sur la quantité que chaque individu nécessite et la croissance de la population serait un produit de la reproduction et de la quantité de nourriture nécessaire par individu. Logiquement, on obtient que la variation de la population sera négative dans le cas où $(L - P) < 0$ ce qui équivaut à une population qui mange plus que leur part et donc plus que α par individu et donc collectivement, ils auraient besoin de manger plus que L et donc certains individus mourront de faim. Lorsque les individus mangent moins ou ne mangent pas toute la nourriture, cela laisse place à la croissance et donc $(L - P) > 0$ et $\frac{dP}{dt} > 0$.

Lorsque la variation de la population est nulle, on obtient un point d'équilibre et cela survient lorsque $P = 0$ ou $P = L$. On peut observer leur stabilité et voir vers quelle valeur, la population tend.

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P) = f(P)$$

$$f'(P) = rL - 2rP \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = rL \rightarrow \text{Instable} \\ f'(L) = -rL \rightarrow \text{Stable} \end{cases}$$

Donc pour une population de poisson dans son milieu naturel, cette population devrait tendre vers la capacité maximale du milieu. C'est bel et bien ce qu'on observe. Pour les valeurs de $r = 0.5$, $r = 1$ et $r = 2$, on voit que peu importe la population initiale, on converge vers la valeur maximale de la population

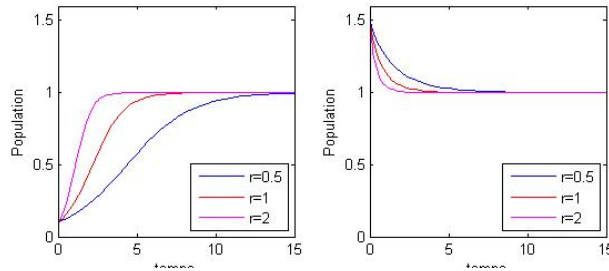


FIGURE 2 – La population de poissons P qui varie dans le temps avec $L = 1$ pour 2 valeurs initiales différentes.

soit L qui est dans notre cas $L = 1$. Le seul impact que r a sur notre fonction est la vitesse à laquelle on atteint $P = L$ et bien sûr, plus r est grand, c'est-à-dire plus la reproduction est grande, plus la croissance est rapide.

2.2 Modèle avec Effet de Allee

Le modèle parabolique est très pratique pour sa simplicité, mais ce n'est pas toutes les populations qui vont croître jusqu'à atteindre la capacité maximale du milieu. Certaines espèces nécessitent un certain nombre d'individus pour encercler leurs proies et chasser par exemple. En effet, lorsque la densité d'une population (à savoir, son effectif) descend en deçà d'une certaine valeur, le nombre d'individus devient insuffisant pour augmenter l'effectif de la population. Le taux de variation $\frac{dP}{dt}$ devient négatif et la population commence à diminuer jusqu'à extinction. Cette dépendance positive à la densité, appelé effet de Allee, revient à trois principaux types de processus biologiques :

- **Rencontre entre partenaires sexuels** : Soit une population de baleines se déplaçant au hasard et rencontrent des nouveaux partenaires sexuels au hasard . Dans un premier cas , s'il y a une baisse de densité , forcément on aura une baisse de probabilité de rencontre et donc c'est une baisse du taux de croissance par capita.
- **Effet de groupe** : Pour certaines populations , le fait de survivre en communauté peut s'avérer très bénéfique. Ainsi, lorsque le groupe présente une densité très faible , le taux de croissance est également faible. Prenons l'exemple des récifs coraux qui sont plus résistants lorsqu'ils sont plus volumineux , car ils réussissent à faire face aux intempéries.
- **Coopération entre individus** : Le lycaon , espèce en voie de disparition , est un grand chien sauvage vivant en Afrique . Il vit principalement en meute de quatre à cinq individu et mène une vie sociale très développée . Pour se nourrir , les lycaons chassent en meute selon une technique très efficace. En effet, dans le groupe , les rôles sont partagés . Certains adultes au sein du groupe doivent rester pour protéger les plus jeunes alors que d'autres partent à la chasse . Les lycaons adultes assurent donc une continuité pour la survie de l'espèce.

L'ajout de l'effet Allee dans l'équation du modèle va se faire simplement en modifiant le modèle logistique, déjà adapté à l'allocation des ressources. En effet il suffit d'ajouter un facteur $(P - a)$ à l'équation, qui nous donne :

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P)(P - a), \text{ où } r, a, L > 0 \text{ et } a < L \quad (2)$$

On observe que si $a = 0$, alors on ne retrouve pas le même modèle que Verlhust, mais on a les mêmes états stationnaires, soient $P = 0$ et $P = L$. Dans ce cas, nous obtenons la même stabilité pour chaque point.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP^2(L - P) = f(P) \\ f'(P) &= r(2PL - 3P^2) \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \rightarrow \text{Instable} \\ f'(L) = -rL^2 \rightarrow \text{Stable} \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, si la valeur de $a = L$, nous avons un problème puisque la variation $\frac{dP}{dt}$ sera négative pour toute valeur $P < L$ et si elle est plus grande que L , c'est-à-dire que si la population dépasse la capacité maximale de l'habitat, alors elle explose. Cela n'a clairement aucun sens.

$$\frac{dP}{dt} = -rP(L - P)^2 = f(P)$$

$$f'(P) = -r((L - P)^2 - 2(L - P)P) \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = -rL^2 \rightarrow \text{Stable} \\ f'(L) = 0 \rightarrow \text{Instable} \end{cases}$$

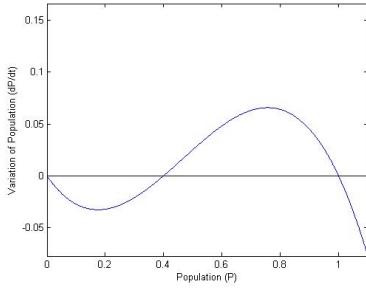


FIGURE 3 – L'équation 2 avec $r = 1$ et $L = 1$ et $a = 0.4$.

Donc nous allons nous préoccupé du cas où $0 < a < L$, puisque en $a = 0$, le système est très similaire au modèle de Verlhust et en $a = L$, le modèle n'a plus de sens puisque le point stable serait l'extinction. Dans la figure ci-contre, on observe que la variation de la population est négative pour une valeur de P plus petite que $a = 0.4$. Graphiquement, on peut voir que la population devrait augmenter pour toute valeur initiale entre a et L . De la même façon, on peut observer que si $P > L$, la population diminuera pour se rendre à la capacité maximale de l'habitat. Par contre, le point 0 est stable, contrairement au modèle de Verlhust, si le nombre d'individus descend sous le seuil a et c'est ce qui est dangereux. Bien sur, un argument géométrique n'est pas suffisant et nous allons donc analyser la stabilité de nos états stationnaires. Nos états stationnaires se trouvent lorsque $\frac{dP}{dt} = 0$ et nous obtenons donc facilement les solutions stationnaires en $P = 0$, $P = a$ et $P = L$.

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P)(P - a) = f(P)$$

$$f'(P) = -raL + 2arP + 2rLP - 3rP^2 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = -raL \rightarrow \text{Stable} \\ f'(a) = ra(L - a) \rightarrow \text{Instable} \\ f'(L) = -rL(L - a) \rightarrow \text{Stable} \end{cases}$$

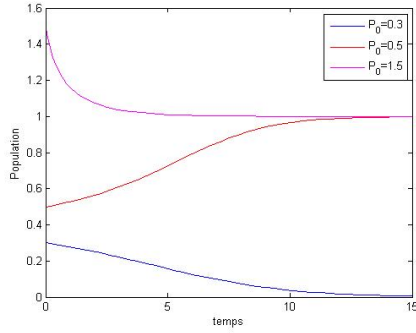


FIGURE 4 – L'équation 2 pour des différents P_0 .

Nous avons donc deux états stationnaires stables dont l'extinction. Par la figure 3, on voit bien que la dérivée de la fonction en 0 est négative ce qui rend l'extinction un attracteur. Bien sûr, nous avons aussi l'attracteur $P = L$ sinon la population ne subsisterait pas. Nous pouvons donc voir comment différentes conditions initiales vont vers les différents attracteurs.

On observe que pour une valeur initiale de la population en dessous du coefficient a , la population s'éteint et donc tend vers l'état stationnaire 0. (La courbe bleue dans le graphique où $P_0 = 0.3$ et $a = 0.4$). Les deux autres valeurs de P_0 soit 0.5 et 1.5 mènent tous deux vers l'attracteur L comme dans le modèle de Verlhust (lignes rouge et magenta).

3 Les Effets de la Pêche

Nous avons passé au travers des deux différentes fonctions que nous allons utiliser pour représenter la population de poissons. Il est impératif de comprendre comment la population fluctue par elle-même pour ensuite pouvoir comparer et analyser l'effet de certaines actions. Il est maintenant temps de s'attaquer au cœur du travail et donc d'analyser l'effet que la pêche a sur ces modèles. Pour ce faire, nous allons représenter la pêche par un terme $-P\phi(F)$ où F représentera l'effort de pêche. Ce terme prendra plusieurs formes que ce soit constante ou encore en fonction de la population de poisson. On ira même jusqu'à analyser l'effort de pêche comme une équation différentielle $(\frac{dF}{dt}(P, F))$. Ceci nous permettra de jouer avec l'effort en le variant dans le temps.

3.1 L'Effort de Pêche Constant

Nous allons commencer par prendre un terme $-P\phi(F) = -kP$. Cela est la forme la plus basique que l'on peut avoir pour une pêche. Ceci nous mène donc à des équations comme les équations 3 et 5 que l'on va étudier. D'utiliser un terme constant pour représenter la pêche se résume à pêcher une proportion k de la population actuelle.

3.1.1 Modèle de Verlhust

Dans ce modèle, nous resterons en une dimension puisque notre fonction $-P\phi(F) = -Pk$ et nous n'aurons donc pas une deuxième variable F . L'ajout de ce terme négatif change les solutions stationnaires de notre système et possiblement leur stabilité.

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P) - kP \quad (3)$$

$$= P(r(L - P) - k) = f(P) \quad (4)$$

De cette équation, nous obtenons donc deux solutions stationnaires :

$$\frac{dP}{dt} = P(r(L - P) - k)$$

$$0 = P(r(L - P) - k) \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ P = L - \frac{k}{r} \end{cases}$$

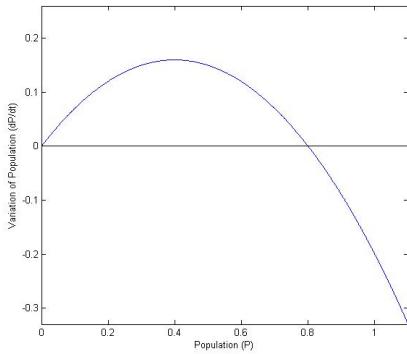


FIGURE 5 – L'équation 3 en $r = 1$, $L = 1$ et $k = 0.2$.

Nous avons maintenant deux solutions stationnaires, une qui est comme dans le modèle intrinsèque de Verlhust et un deuxième état qui est affecté par le taux pour l'effort de pêche (k). De plus, on remarque que si $\frac{k}{r} > L$, alors on obtiens un deuxième état négatif ce qui n'a pas de sens. Nous allons donc borner k supérieurement par rL . On va donc vouloir analyser la stabilité de chaque point en dérivant notre fonction $f(P)$ et regarder son signe. Bien sur, la condition que nous avons obtenu sur k sera très utile puisqu'il a modifié le deuxième état stationnaire et change

aussi la fonction $f'(P)$. Dans la figure ci-contre, on observe la solution stationnaire en $P = 0$ qui est instable car la population augmente jusqu'à atteindre $P = L - \frac{k}{r}$. Si on dépasse ce coefficient, on observe que la variation devient négative et donc on revient vers le point stable.

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P) - kP = f(P)$$

$$f'(P) = -k + rL - 2rP \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = -k + rL \Rightarrow \text{Instable car } k < rl \\ f'(L - \frac{k}{r}) = -rL + k \Rightarrow \text{Stable car } k < rl \end{cases}$$

Si nos valeurs initiales sont aussi près de 0 mais non nulle, on devrait converger vers la solution stationnaire. Il en va de même pour n'importe quel valeur de P_0 sous cette solution et même pour tout P_0 au dessus de cet état. La figure 6 illustre bien que l'on tend vers la valeur trouver, soit $P = L - \frac{k}{r}$. On observe donc que pour une terme constant pour la pêche, on conserve la convergence vers la solution stationnaire et ce pour n'importe quelle valeur initiale non nulle. La seule différence que la pêche affecte est la valeur à l'état stationnaire qui est réduit par un facteur de $-\frac{k}{r}$. Cela implique donc que la population n'atteindra plus la capacité maximale de l'habitat.

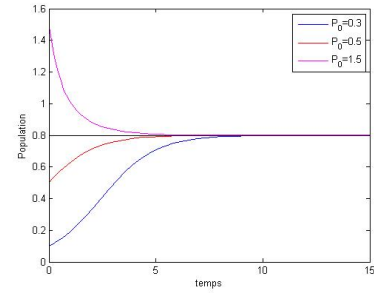


FIGURE 6 – L'équation 3 pour différents P_0 .

3.1.2 Modèle avec Effet de Allee

Dans le modèle avec l'effet de Allee, puisque la population peut déjà atteindre l'extinction par elle-même, d'ajouter la pêche au modèle va possiblement l'affecter plus qu'une population basée sur le modèle de Verlhust. Nous allons donc analyser l'équation suivante :

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P)(P - a) - kP \quad (5)$$

Nous avons déjà discuté en détails le modèle intrinsèque et l'effet de notre coefficient de pêche constant alors nous pouvons tout de suite trouver nos états stationnaires ainsi que leur stabilité. Nous pourrions encore une fois regarder graphiquement l'effet de la pêche en posant $r = 1$ et $L = 1$ dans les graphiques. Nous devons par contre regarder la valeur de k pour que le système soit valide. Nous allons utiliser Mathematica pour trouver nos états stationnaire et ensuite analyser la condition sur k .

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P)(P - a) - kP$$

$$0 = rP(L - P)(P - a) - kP$$

$$0 = P(r(L - P)(P - a) - k) \Rightarrow \begin{cases} 0 = P_1 \\ 0 = -k - raL + r(L + a)P - rP^2 \end{cases}$$

$$P_{2,3} = \frac{\sqrt{r}(L + a) \pm \sqrt{-4k + r(a - L)^2}}{2\sqrt{r}}$$

On veut des valeurs réelles et donc nous allons nous assurer que notre terme sous la racine est positif. Cela nous donnera la condition sur k .

$$0 < -4k + r(a - L)^2 \Leftrightarrow k < \frac{r(a - L)^2}{4}$$

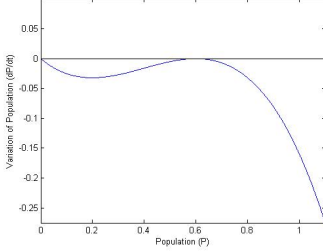


FIGURE 7 — $\frac{dP}{dt}$ pour $k = \frac{r(a-L)^2}{4}$

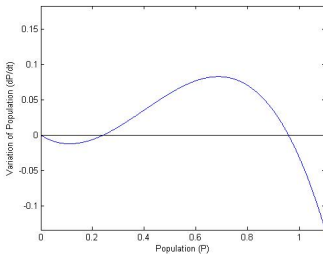


FIGURE 8 — $\frac{dP}{dt}$ pour $k < \frac{r(a-L)^2}{4}$

On remarque que pour une valeur de $k = \frac{r(a-L)^2}{4}$, nous avons bel et bien un problème au niveau de de notre population. En effet, la valeur de k aussi grande fait en sorte que notre population ne varie que négativement et tend directement à l'extinction. Si k est plus grand que la valeur du graphique, nous n'avons qu'un seul point fixe, $P = 0$, sinon nous avons un deuxième point fixe. Par contre, celui-ci est instable car des deux côtés, nous avons une variation négative sans oublier que notre dérivée est nulle en ce point. Notre modèle sera donc bien défini pour le k mentionné plus haut et nous pouvons nous attaquer au modèle bien défini. Nous avons déjà nos 3 états stationnaires, nous devons analyser la stabilité de chaque solution pour voir comment notre population fluctue dépendamment de la population initiale. Graphiquement, on s'attend à ce que $P = 0$ soit stable à cause de l'effet de Allee, mais que l'autre seul point stable sera celui le plus proche de L , car $f'(P)$ sera négative en ce point.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= rP(L - P)(P - a) - kP = f(P) \\
f'(P) &= -k - arL + 2r(L + a)P - 3rP^2 \\
\Rightarrow &\begin{cases} f'(0) = -k - arL < 0 \\ f'(P_2) = \frac{1}{2} \left(-(r(a - L)^2 - 4k) - \sqrt{r}(a + L)\sqrt{-4k + r(a - L)^2} \right) < 0 \\ f'(P_3) = \frac{1}{2} \left(-(r(a - L)^2 - 4k) + \sqrt{r}(a + L)\sqrt{-4k + r(a - L)^2} \right) > 0 \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases} P_1 = 0 \rightarrow \text{Stable} \\ P_2 = P_+ \rightarrow \text{Stable} \\ P_3 = P_- \rightarrow \text{Instable} \end{cases}
\end{aligned}$$

Tous ces calculs nous démontrent ce que l'on observait sur le graphique, mais surtout, nous connaissons les valeurs des populations aux états stationnaires. Dans le graphique ci-contre, on observe que pour des valeurs de P_0 entre les 2 plus petits états stationnaires, la solution tend vers l'extinction. En regardant la figure 8, on se rend compte que c'est logique puisque la population varie négativement dans cet intervalle. De plus, on a démontré que $P = 0$ est stable pour ces valeurs de P_0 . Les deux droites sur le graphiques représentent P_2 et P_3 . La plus petite représente la solution instable puisqu'aucune solution tend vers cette valeur. La droite la plus grande est l'autre solution stationnaire et comme on avait déterminé, la population tend vers cette valeur peu importe si P_0 est plus grand ou plus petit (mais plus grand que P_3).

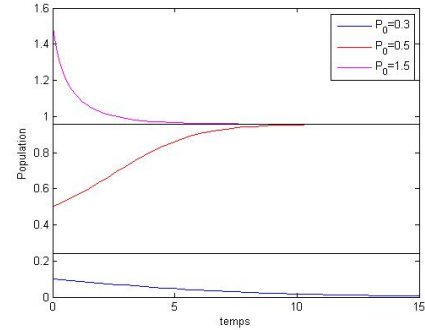


FIGURE 9 – L'équation 5 bien défini pour différents P_0 .

Malgré un terme $-P\phi(F)$ le plus simple, c'est-à-dire $-kP$, nous avons des problèmes qui surviennent très rapidement au niveau de la définition du modèle pour certaines valeurs de k . Bien sur, que $\frac{dP}{dt}$ soit toujours négatif n'est pas un problème mathématiquement. Par contre, une population de poisson devrait croître un moment donné, en assumant que l'habitat le permette, sinon il n'y aurait pas de poisson vivant dans cet habitat. Une fonction aussi simple a aussi changé les valeurs des solutions station-

naires par rapport au modèle avec effet d'Allee intrinsèque. La population n'atteint plus la valeur maximale de l'habitat L et la valeur a de l'effet d'Allee n'est plus la valeur dangereuse. Cette valeur à partir de laquelle la population s'éteint est plus grande (P_3) et donc cause plus facilement l'extinction.

3.2 L'effort de Pêche selon un prélèvement par prédateurs

En considérant la relation entre homme et poisson comme une relation de prédateur-proie. On a adopté le modèle proie-prédateur utilisé pour décrire le prélèvement proie-prédateur de la Tordeuse du bourgeon, ou la quantité prélevée est fonction de la population telle que $-P\phi(P) = \frac{-AP^2}{B^2+P^2}$.

3.2.1 Population sous Verlhust

En utilisant la forme de l'effort de pêche énoncé plus haut, on analysera le système suivant :

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P) - \frac{AP^2}{B^2 + P^2}$$

On observe l'allure de la fonction dans un graphique lorsqu'on considère $B = 1$ et $A = \frac{r}{5}$. Dans le graphique ci-contre, on observe que la fonction posséderait deux zéros, le premier en zéro et semblerait instable et le deuxième, plus petit que notre valeur maximale pour l'habitat L sera, en théorie, stable. Un problème qui servenait est que pour $A = 1$, la variation était toujours négative et donc la population atteignait l'extinction peu importe la valeur initiale. Rapidement, on peut déterminer les états stationnaires de notre solution en posant $\frac{dP}{dt} = 0$.

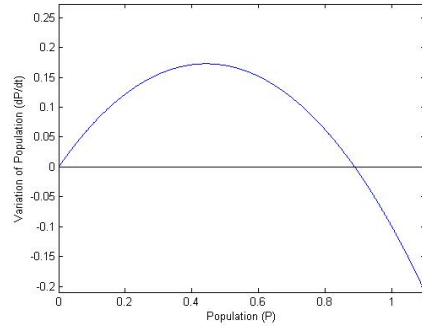


FIGURE 10 – $\frac{dP}{dt}$ en $B = 1$ et $A = \frac{r}{5}$.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= rP(L - P) - \frac{AP^2}{1 + P^2} = 0 \\
\Rightarrow &\begin{cases} P = 0 \\ r(L - P) - \frac{AP}{1+P^2} = 0 \Rightarrow r(L - P)(1 + P^2) - AP = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow &-rP^3 + rLP^2 - (r + A)P + rL = 0
\end{aligned}$$

Ce polynôme de degré 3 possède donc 3 racines dans les complexes, mais seulement une réelle dans le cas où $B = 1$. Dans Mathematica, la réponse demeure très longue et complexe. Nous pouvons tout de même analyser la valeur de $f'(\bar{P})$.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= rP(L - P) - \frac{AP^2}{1 + P^2} = f(P) \\
f'(P) &= \frac{-2AP + r(L - 2P)(1 + P^2)^2}{(1 + P^2)^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = rL > 0 \rightarrow \text{Instable} \\ f'(\bar{P}_2) < 0 \rightarrow \text{Stable} \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque $P \geq 0$ alors la dérivée de f est clairement négative pour différent paramètre A , r et L positifs. Le graphique ci-contre nous montre encore comment le seul point stable est celui plus grand que 0 et plus petit que L . Pour n'importe quel valeur initiale, les solutions tendent tous vers l'état stationnaire stable. En d'autres mots, si la population dépasse \bar{P}_2 alors la variation devient négative ce qui pousse la population à diminuer. À l'inverse, la population va croître si elle est plus petite que \bar{P}_2 pour atteindre cet équilibre.

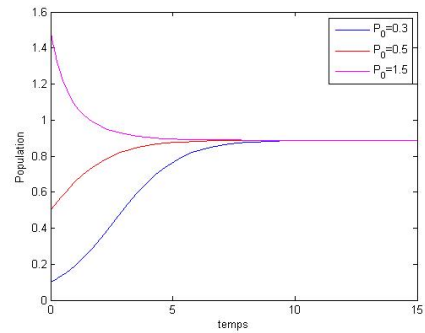


FIGURE 11 – Valeurs initiales au-dessus et sous la valeur \bar{P}_2

3.2.2 L'effet de Allee avec Prédation

En utilisant la fonction de pêche comme un prélèvement par prédation, son effet pourrait différer si la population intrinsèque se comporte différemment. L'effet de Allee appliqué à notre modèle nous retournera donc possiblement des états stationnaires différents et leur stabilité aussi pourrait changer. On va encore considérer $B = 1$ par soucis de simplicité.

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P)(P - a) - \frac{AP^2}{B^2 + P^2}$$

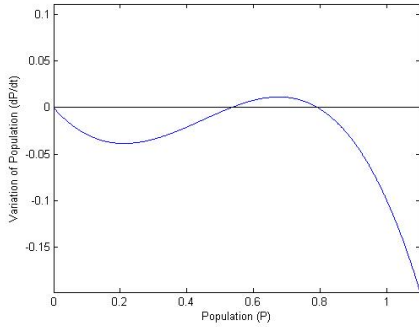


FIGURE 12 – Variation de la population avec $A = \frac{r}{5}$

Les états stationnaires seront différents et l'effet de Allee risque de s'aggraver. On observe que malgré un paramètre pour l'effet de Allee $a = 0.2$, on observe que la variation sera négative beaucoup plus longtemps que pour le modèle intrinsèque. De plus, la variation est plus grande dans la section négative et donc la population décroît rapidement vers 0 si la valeur initiale est trop petite. On remarque aussi qu'on aura 3 solutions stationnaires dont $P = 0$. Les deux autres, on aura la plus grande qui sera stable et la plus petite instable logiquement. L'intervalle par contre entre ces deux états est relativement petit comparativement à l'intervalle qui tend vers 0.

$$\frac{dP}{dt} = rP(L - P)(P - a) - \frac{AP^2}{1 + P^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ r(L - P)(P - a) - \frac{AP}{1 + P^2} = 0 \end{cases}$$

Par mathematica, on peut obtenir les zéros et nous obtenons deux zéros réelles et une paire complexe. Encore une fois, ils sont compliqués, mais on va tenter d'analyser leur stabilité sans la valeur exacte.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP(L - P)(P - a) - \frac{AP^2}{1 + P^2} = f(P) \\ f'(P) &= -\frac{2AP + r(1 + P^2)^2(a(L - 2P) + P(3P - 2L))}{(1 + P^2)^2} \\ &\Rightarrow \begin{cases} f'(0) = -raL < 0 \rightarrow \text{Stable} \\ f'(\bar{P}_-) > 0 \rightarrow \text{Instable} \\ f'(\bar{P}_+) < 0 \rightarrow \text{Stable} \end{cases} \end{aligned}$$

On peut observer que pour certains valeur de P , la dérivé devient négative. Notre valeur de \bar{P}_- serait donc hors de cet intervealle et vice versa pour \bar{P}_+ .

Dans la figure ci-contre, les différentes valeurs initiales tendent bel et bien vers différentes solutions stationnaires. Tout cela confirme l'intuition fourni par le graphique. On voit que nos valeurs initiales plus petite que \bar{P}_- tendent vers $P = 0$ et pour les autres valeurs plus grandes que \bar{P}_- , elles tendent vers la solution stable \bar{P}_+ . Pour les valeurs plus grandes que \bar{P}_+ , elle vont diminuer jusqu'à atteindre cette dernière valeur. Finalement, nous voyons comment la pêche a affecté la population sous l'effet de Allee ce qui explique pourquoi l'analyse de ces modèles est importante.

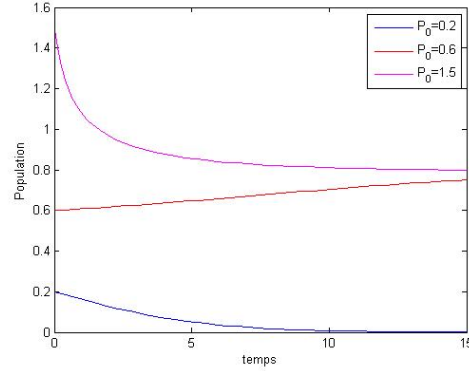


FIGURE 13 – Convergence des valeurs initiales

3.3 L'effort de Pêche variant dans le temps

On peut observer l'effort de pêche en fonction de la population et donc il varie en même et au même rythme que la population que l'on étudie. Par contre, ce n'est pas toujours le cas et de regarder un système en deux dimensions, en incluant $\frac{dF}{dt}$ dans le modèle, mènerait possiblement à différents états stationnaires et même d'autres résultats plutôt intéressants. Pour ce faire, nous allons encore une fois utiliser les 2 fonctions pour la population intrinsèque et nous allons avoir un terme $-P\phi(F)$ dans la variation de la population, mais on y ajoutera $\frac{dF}{dt}$ en fonction de F et P .

3.3.1 Modèle de Verlhust en 2 dimensions

Nous allons utiliser le système suivant comme modèle en deux dimensions (F, P) . Dans notre modèle, on observera un coefficient r et L dans le coefficient de la population qui sont exactement les mêmes que dans le modèle intrinsèque. Ensuite, nous retrouvons notre coefficient constant k , qui ne sera pas le même nécessairement, provenant de $\phi(F)$. Cette fois, pour avoir une interaction entre P et F , nous allons avoir $-kPF$ en $\frac{dP}{dt}$ et l'équation pour $\frac{dF}{dt}$ en fonction d'un autre paramètre s et selon une population $P - b$, où b est simplement pour réduire la pêche à une proportion de la population.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP(L - P) - kPF = f(P, F) \\ \frac{dF}{dt} = sF(P - b) = g(P, F) \end{cases} \quad (6)$$

Dans ce modèle, les états stationnaire seront en (\bar{P}, \bar{F}) et plus simplement en \bar{P} . Il en va de même pour P_0 qui devient (P_0, F_0) . De plus, pour ce qui est de l'analyse du système, nous avons maintenant à regarder les valeurs propres de la matrice jacobienne plutôt que la dérivée de $f(P)$. Par contre, avant de s'attaquer à la stabilité, il faut trouver nos états stationnaires.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 0 = rP(L - P) - kPF = P(r(L - P) - kF) \\ 0 = sF(P - b) \end{cases} \\ \text{De la première équation} & \Rightarrow \begin{cases} 0 = P \\ 0 = (r(L - P) - kF) \rightarrow F = \frac{r(L-P)}{k} \end{cases} \\ \text{Dans la deuxième équation} & \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \rightarrow sF(-b) = 0 \rightarrow F = 0 \\ F = \frac{r(L-P)}{k} \rightarrow \frac{sr(L-P)(P-b)}{k} = 0 \rightarrow P = b \text{ et } P = L \end{cases} \end{aligned}$$

J'obtiens de cette manière 3 solutions stationnaires : $(\bar{P}_1, \bar{F}_1) = (0, 0)$, $(\bar{P}_2, \bar{F}_2) = (b, \frac{r(L-b)}{k})$, $(\bar{P}_3, \bar{F}_3) = (L, 0)$. Si je commençais par la deuxième équation, j'obtiendrais les mêmes états stationnaires et donc aucun nouveau, ce qui confirme que je les ai tous. À partir de ces solutions, nous voulons regarder lesquelles sont stables et lesquelles sont instables. Pour ce faire, on a besoin de la matrice jacobienne du système :

$$J = \begin{pmatrix} rL - 2rP - kF & -kP \\ sF & s(P - b) \end{pmatrix}$$

Pour analyser la stabilité, on passe par les valeurs propres de la matrice aux états stationnaires. Il ne faut pas oublier que s , r , L et b sont positifs et que $L > b$.

$$\begin{aligned}
J_{(0,0)} &= \begin{pmatrix} rL & 0 \\ 0 & -sb \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = rL > 0 \\ \lambda_2 = -sb < 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ est Instable} \\
J_{(L,0)} &= \begin{pmatrix} -rL & -kL \\ 0 & s(L-b) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -rL < 0 \\ \lambda_2 = s(L-b) > 0 \end{cases} \Rightarrow (L,0) \text{ est Instable} \\
J_{(b, \frac{r(L-b)}{k})} &= \begin{pmatrix} -rb & -kb \\ \frac{sr(L-b)}{k} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} tr(J) = -rb < 0 \\ det(J) = bsr(L-b) \geq 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \left(b, \frac{r(L-b)}{k}\right) \text{ est Stable}
\end{aligned}$$

De tous ces calculs, nous observons donc un seul état stable, soit (\bar{P}_2, \bar{F}_2) . Nous pouvons donc essayer plusieurs couples de valeurs initiales pour confirmer que l'on atteint bel et bien l'état stationnaire calculé.

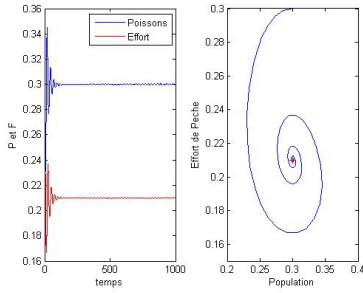


FIGURE 14 – Solutions en $b = 0.3$ et $r = 0.3$.

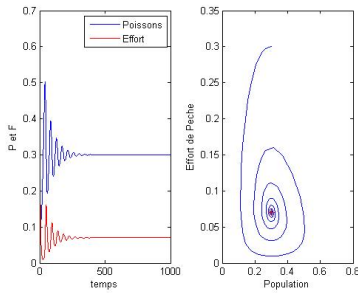


FIGURE 15 – Solutions en $b = 0.3$ et $r = 0.1$.

valeurs de P et F persistent plus longtemps lorsque b et r sont plus proches

Le cas en deux dimensions est vraiment plus intéressant puisque la convergence des valeurs pour P et F convergent de différentes façon dépendemment des paramètres. On va donc observer graphiquement ce que cela veut dire. Il faut être conscient qu'on pourrait tester une infinité de possibilités puisqu'ils sont réels pour les paramètres sans oublier que nous en avons, en considérant L constant, quatres (s, r, k, b) . En jouant avec les paramètres, on observe que s et k n'affecte pas énormément la forme même s'ils affectent la position du point. Donc ces 2 paramètres seront fixé à 1 tout comme L . De jouer avec les paramètres r et b nous donne des résultats plutôt intéressants. En effet, en testant des valeurs de b comme 0.1 et 0.3, et de même pour r , on voit comment la spirale change puisque les oscillations convergent et donc s'estompent plus rapidement pour des valeurs de b et r plus grandes. Dans les figures ci-contre, on observe que les oscillations pour les

de 0, sans être 0, car cela causerait des problèmes dans le modèle pour r et pour les solutions stationnaires pour b . On pourrait avoir des graphiques où les oscillations requièrent beaucoup plus de temps avant de converger. Puisque les valeurs de P , en bleu, et de F , en rouge oscillent dans les graphiques de gauches, cela se reflète dans les tourbillons qui apparaissent et qui convergent vers notre solution stationnaire stable.

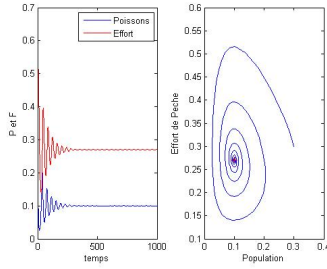


FIGURE 16 – Solutions en $b = 0.1$ et $r = 0.3$.

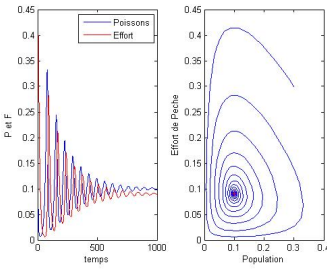


FIGURE 17 – Solutions en $b = 0.1$ et $r = 0.1$.

Les graphiques de droites sont tous la valeur de F , l'axe des ordonnées, en fonction de P , l'axe des abscisses. Nous observons donc que la solution analytique du système serait donc le produit d'une exponentielle convergente, c'est-à-dire donc sont exposant est négatif, et de cosinus et de sinus. De plus, on observe que la rotation se fait dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ce qui nous informe que les angles des \cos et \sin sont croissants. De cela, on peut conclure que nos valeurs propres pour notre matrice $J_{(\bar{P}_2, \bar{F}_2)}$ seront complexes et pas entièrement réelles, mais puisque le point est stable, alors sa partie réelle est négative ce qui rend l'exposant de l'exponentielle négatif. En prenant le cas du 4^e graphique, on peut obtenir la matrice diagonale associée à la matrice jacobienne à l'état stable.

$$D = \begin{pmatrix} -0.5 + 0.0947i & 0 \\ 0 & -0.5 - 0.0947i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.5 & 0.0947 \\ -0.0947 & -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + \sin \beta t) \\ v(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + \sin \beta t) \end{cases} \quad \text{où } \alpha < 0 \text{ et } \beta > 0$$

Nous avons donc bel et bien ce qui a été observé plus haut dans les graphiques. Les tourbillons sont donc une cause de la forme de la solution analytique. Finalement, notre système est en u et v , mais le changement de coordonnées affecte la forme passant d'un tourbillon plutôt circulaire à une sorte de tourbillon elliptique ou un peu triangulaire.

3.3.2 L'effet de Allee en 2 dimensions

Comme tout au long du document, nous avons analysé le système de Verlhust en premier, suivis de celui utilisant la population de poissons qui agit intrinsèquement selon le modèle sous l'effet de Allee. Notre système devient donc le système à 6 paramètres, car nous ajoutons le coefficient a qui crée cet effet de Allee.

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP(L - P)(P - a) - kPF = f(P, F) \\ \frac{dF}{dt} = sF(P - b) = g(P, F) \end{cases} \quad (7)$$

Remarquons que nous utilisons exactement la même modélisation au niveau de F et de l'effet de la pêche sur la population de poissons ($\frac{dP}{dt}$) et il en va de même pour l'équation de la variation de l'effort de pêche ($\frac{dF}{dt}$). Encore une fois, on peut obtenir nos états stationnaires et il y en a plus que pour Verlhust.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= rP(L - P)(P - a) - kPF = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ r(L - P)(P - a) - kF = 0 \Rightarrow F = \frac{r(L-P)(P-a)}{k} \end{cases} \\ P = 0 &\rightarrow -sbF = 0 \rightarrow F = 0 \Rightarrow (\bar{P}_1, \bar{F}_1) = (0, 0) \end{aligned}$$

Nous avons donc encore une fois l'état stationnaire $(0,0)$, par contre, comme on avait vu, il est stable dans le modèle intrinsèque ce qui est dangereux.

$$\begin{aligned} F &= \frac{r(L - P)(P - a)}{k} \Rightarrow \frac{sr(L - P)(P - a)(P - b)}{k} = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \bar{P}_2 = L \\ \bar{P}_3 = a \\ \bar{P}_4 = b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (\bar{P}_2, \bar{F}_2) = (L, 0) \\ (\bar{P}_3, \bar{F}_3) = (a, 0) \\ (\bar{P}_4, \bar{F}_4) = (b, \frac{r(L-b)(b-a)}{k}) \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons donc 4 solutions stationnaires commençant par la première équation. On peut regarder en commençant par la deuxième si des valeurs différentes apparaissent. Mais en posant $F = 0$ dans la première équation on retrouve les points 1, 2 et 3. Nous avons donc 4 états stationnaires, c'est-à-dire un de plus que pour le modèle précédent en 2 dimensions. Il faut aussi

noter que par définition, $F > 0$ ce qui pose une condition provenant du 4^e point : $a < b < L$. Pour chacun de ses états, nous devons analyser leur stabilité et pour ce faire, nous analysons les valeurs propres du jacobien.

$$J = \begin{pmatrix} -arL + 2rP(L + a) - 3rP^2 - kF & -kP \\ sF & s(P - b) \end{pmatrix}$$

À l'aide de la matrice jacobienne et des dérivées que l'on vient de calculer, on regarde cette matrice en chacun des 4 points trouvés plus tôt.

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -arL & 0 \\ 0 & -sb \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -arL < 0 \\ \lambda_2 = -sb < 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ est stable}$$

$$J_{(L,0)} = \begin{pmatrix} -rL(L - a) & -kL \\ 0 & s(L - b) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -rL(L - a) < 0 \\ \lambda_2 = s(L - b) > 0 \end{cases}$$

$$J_{(a,0)} = \begin{pmatrix} -rL(L - a) & -ka \\ 0 & s(L - b) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = ar(L - a) > 0 \\ \lambda_2 = s(a - b) < 0 \end{cases}$$

$$J_{(b, \frac{r(L-b)(b-a)}{k})} = \begin{pmatrix} rb(L + a - 2b) & -kb \\ \frac{sr(L-b)(b-a)}{k} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} tr(J) = rb(L + a - 2b) \\ det(J) = bsr(L - b)(b - a) > 0 \end{cases}$$

Nous avons donc encore une fois le points $(0,0)$ qui est stable ce qui mène à l'extinction des poissons ainsi que de l'effort de pêche pour plusieurs valeurs initiales et dépendemment des paramètres. Par la suite, les points $(L, 0)$ et $(a, 0)$ sont toujours instable, car une de leurs valeurs propres a une partie réelle positive. Dans notre dernier cas, nous avons que le déterminant est positif ce qui est bon signe. Par contre, pour que la trace soit négative, donc que le 4^e point soit stable, il nous faudrait que $b > \frac{L+a}{2}$. Dans les graphiques qui suivent, les valeurs des paramètres seront comme suit : $L = 1$, $a = 0.1$, $r = 1$, $k = 1$ et $s = 1$. Le fait que l'on aille autant de paramètres et ce sans compter les combinaisons (P_0, F_0) que l'on peut tester pour obtenir des graphiques différents. Nous n'avons gardé que les résultats intéressants.

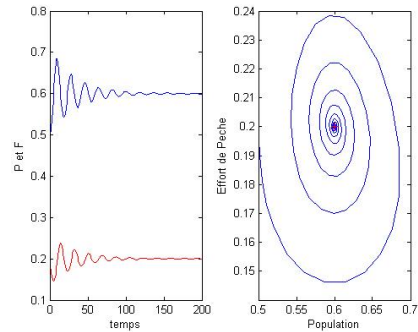


FIGURE 18 – Solution pour $b = \frac{L+a+0.1}{2}$.

Dans cette première figure, on observe comment notre solution tend vers l'état stable non nulle avec des oscillations ce qui se reflète par un tourbillon qui tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On peut donc s'attendre à obtenir, comme avec le modèle précédent, une solution sous la forme d'un produit d'une exponentielle avec un sinus et un cosinus.

On peut donc diagonaliser notre jacobien et observer le système linéaire que l'on obtient.

$$D = \begin{pmatrix} -0.03 + 0.3451i & 0 \\ 0 & -0.03 - 0.3451i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.03 & 0.3451 \\ -0.3451 & -0.03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + \sin \beta t) \\ v(t) = e^{\alpha t}(\cos \beta t + \sin \beta t) \end{cases} \quad \text{où } \alpha < 0 \text{ et } \beta > 0$$

La théorie confirme donc l'allure de notre graphique et par la même explication, le changement de coordonnée de (u, v) vers (P, F) n'affecte pas l'allure générale, mais affecte plutôt la forme des ellipses.

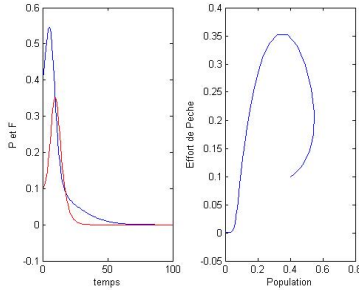


FIGURE 19 – Solution pour $b = \frac{L+a-0.4}{2}$.

Dans le cas où b est suffisamment plus petit que la valeur critique, le seul point stable est l'extinction et c'est ce qu'on observe dans les 2 graphiques. Les courbes rouge et bleu tendent vers 0 malgré qu'elles commencent en augmentant. Le 2^e graphe montre comment les valeurs de P et de F progressent l'un par rapport à l'autre pour aboutir à l'origine. Pour des valeurs plus grande et plus petite que $\frac{L+a}{2}$ suffisamment loin de cette valeur nous donne donc ce dont on s'attend. Par contre, on peut analyser ce qui se passe lorsque le point 4 passe de stable à instable. Comme on a calculé plus haut, la stabilité est perdue lorsque $b = \frac{L+a}{2}$, on peut donc observer ce qui se passe pour cette valeur.

Le graphique de droite montre l'évolution des valeurs propres de notre système. En bleu nous avons la première valeur propre qui commence avec une partie réelle positive et la deuxième est en rouge et commence avec une partie réelle négative. L'axe des abscisses représente la partie réelle de la

valeur propre et l'axe des ordonnées, la partie imaginaire. Une bifurcation de Hopf apparaît lorsque les valeurs propres, conjugués complexes, traverse l'axe des ordonnées, c'est-à-dire la droite $Re(\lambda) = 0$, avec une vitesse non nulle et donc qu'elle ne s'arrête pas sur cette droite ou ne change pas de direction à ce moment.

Dans la figure ci-contre, on a fait varier notre valeur de b allant de $\frac{L+a-1}{2}$ jusqu'à 1. On voit que les valeurs propres commencent entièrement réelles donc sur l'axe des abscisses. Une est négative et l'autre positive, mais elle se rapproche de plus en plus jusqu'à se rejoindre, toutes deux positives à ce moment, pour ensuite devenir conjugués complexes. La partie imaginaire augmente pour chacune, mais la partie réelle semble revenir sur ses pas un petit peu avant de décroître jusqu'à ce que les deux valeurs propres croisent en même temps l'axe des ordonnées. À ce moment là, elle transforme notre point instable en un état stationnaire stable. Par la suite, les parties réelles continuent de décroître ensemble jusqu'à ce que les parties imaginaires s'annulent encore et à ce moment, la deuxième valeur propre tend vers 0 et la première décroît encore. À l'aide de Matlab, on peut nous faire ressortir la valeur de b à laquelle les parties réelles sont nulles et ce qu'on obtient est exactement $\frac{L+a}{2}$.

En cette valeur, nos solutions convergent vers l'état stationnaire non nulle, mais qu'à un certain point, elle s'arrête de converger, car elle atteint une orbite. Elle tourne à l'infini sur ce qu'on appelle un cycle limite. On peut tenter de prendre une valeur initiale à l'intérieur de ce cycle pour voir ce qui se passe, mais à la place de converger, on atteint le cycle limite aussi. L'analyse de cette portion requiert le théorème de Poincaré-Bendixson pour analyser notre cycle limite. Par contre, puisque nous atteignons un cycle limite qui semble stable, on sait que notre bifurcation devrait être super-critique.

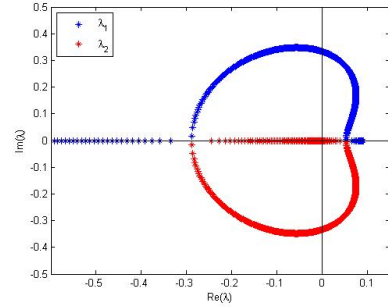


FIGURE 20 — Valeurs propres.

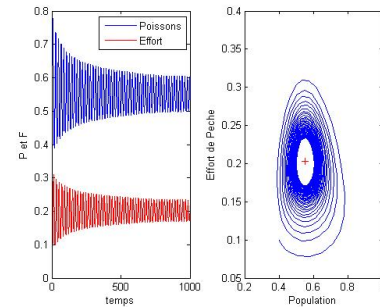


FIGURE 21 — Solutions pour $b = \frac{L+a}{2}$.

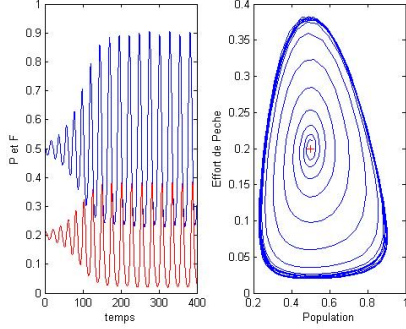


FIGURE 22 – Solutions pour $b = \frac{L+a-0.1}{2}$.

Pour des valeurs à l'intérieur du cycle limite, on voit que les spirales tendent vers l'extérieur et s'éloignent de l'état stationnaire mais s'arrête au cycle limite avec des oscillation d'amplitude constantes pour P et F . Si on prend une valeur initiale à l'extérieur on pourrait avoir des valeurs qui tendent vers le cycle limite, mais pour la grande majorité puisque malgré le cycle limite, l'état non nulle est instable et le seul état stable est l'extinction ce qui mène à l'extinction. Ce phénomène apparaissait

aussi quand b était égal à la valeur critique puisque l'état n'était toujours pas stable.

4 Les Aspects Bio-Économiques

Bien que la gestion d'une ressource biologique dépend de la densité de la population, elle dépend également de certains paramètres économiques qui font intervenir le coût de l'effort de prélèvement, ainsi que le gain obtenu à partir de la vente du produit récolté. Pour parler d'économie, il est indispensable de parler de coûts et de gains. En considérant les coûts comme étant les ressources financières et humaines investies dans la pêche, les coûts peuvent évidemment être quantifiés par l'effort de pêche. Or, deux des trois fonctions de pêches citées précédemment soit, le quota constant de la population et le prélèvement par prédateur, ne prennent pas en considération l'effort de pêche. Donc pour ces deux fonctions, on suppose que l'effort de pêche, à savoir les ressources humaines et financières investies dans les prélèvements, sont constants, d'où les coûts seront constants de même.

4.1 L'économie derrière un effort variable dans le temps

Pour le modèle de prélèvement qui est fonction de l'effort de pêche, la quantification des coûts et des gains nous sera possible en introduisant d'autres paramètres supplémentaires :

- Le taux de prélèvement est défini comme étant le produit de deux termes : $p = q \times f$ où f est l'effort de prélèvement , c'est-à-dire les ressources humaines et financières consacrées au prélèvement (pêche ou chasse) . Le paramètre q représente le taux de la population prélevée par unité d'effort.
- Une fois que la ressource est prélevée , il faut la vendre . Et donc celle-ci est vendue avec un prix de vente fixé à V par unité . Le gain ainsi obtenu est donc comme suit : $Y \times V$ où Y représente la récolte.
- Les ressources humaines et financières consacrées au prélèvement représente le coût C par unité d'effort. Le coût du prélèvement total est donc $C \times f$.

Comme dans chaque industrie, dans le milieu de la pêche, l'incitatif pour participer est que le profit net, c'est dire la différence entre les recettes totales et les coûts totaux soit positive.

Soit le gain net $G = R_{totale} - C_{total}$. L'effort de pêche étant une fonction du nombre totale de pêcheurs participants. À savoir :

- Si $G > 0$, la pêche étant profitable, un plus grand nombre de pêcheurs vont participer, d'où l'effort de pêche (c'est à dire les ressources humaines et financières consacrées au prélèvement) augmente.
- Si $G < 0$, les coûts sont supérieurs au recettes, la participation à la pêche provoque une perte nette. D'où plusieurs pêcheurs vont arrêter les prélèvements. L'effort de pêche va donc diminuer.
- Si $G = 0$, les recettes sont égales aux coûts, la participation à la pêche ne rapporte ni des gains, ni des pertes nettes. Donc, il n'y a ni un incitatif pour participer à la pêche, ni pour quitter l'industrie.

Il est donc évident que, l'évolution de l'effort de pêche, à savoir $\frac{df}{dt}$ est directement proportionnel au gain net. On a donc :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} &= rp(1 - (p/k)) - qfp \\ \frac{df}{dt} &= aG = a(R_{totale} - C_{total}) \text{ où } a > 0 \end{cases}$$

4.2 Le modèle de Gordon-Schaefer et l'équilibre bio-économique

L'équation du modèle de Gordon-Schaefer étant $\frac{dP}{dt} = k_1P(L - P) - k_2fP$, après analyse, on trouve le point stationnaire stable, $\bar{P} = K(1 - \frac{\gamma}{r})$, γ étant le taux de prélèvement. Ce point stable représente l'effectif de la population est toujours atteint. D'où la quantité prélevée est toujours $\gamma\bar{P} = \gamma K(1 - \frac{\gamma}{r})$ qui représente la récolte de pêche. Or, le taux de prélèvement, d'après le modèle Gordon-Schaefer est $\gamma = qf$. D'où la récolte Y devient : $Y = qfK(1 - \frac{qf}{r})$. Dans le même esprit que la considération économique du modèle précédent, on pose V étant le prix d'une unité de poisson. Dans ce cas, la recette totale s'écrit : $R_{totale} = VY = VqfK(1 - \frac{qf}{r})$, et le coût totale : $C_{total} = cf$, c étant le coût d'une unité d'effort (c'est-à-dire le coût d'une unité de ressource humaine et financière). L'équilibre bio-économique est atteint lorsque :

- L'état de la population devient stable : c'est-à-dire lorsque $P=K(1-\gamma/r)$
- L'exploitation de la population ne représente pas une opportunité de profit plus rentable que le reste de l'économie, à savoir la participation à la pêche rapporte un gain net nul. En introduisant la notion de gain individuel $g_{individuel} = G / n$, où n représente le nombre total des participants à la pêche, on pourra mieux analyser la tendance de l'évolution du gain d'atteindre l'équilibre bio-économique quand $G=0$. En effet, si le gain net total est positif, le nombre de participants à la pêche va nécessairement augmenter, d'où le gain total va être partagé par un plus grand nombre de participants : $g_{individuel}$ tend vers 0.