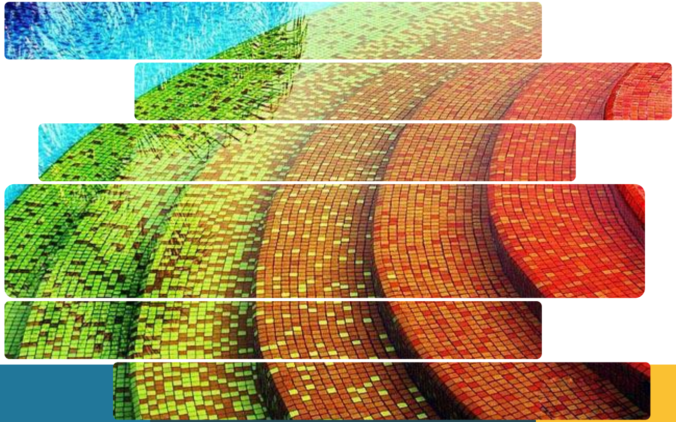


10 梯度下降法

西安科技大学 牟琦
muqi@xust.edu.cn

10.1 梯度下降法原理

中国大学MOOC

- 求解**线性回归**模型——函数求极值
  - **解析解**

    根据严格的推导和计算得到，是方程的**精确解**

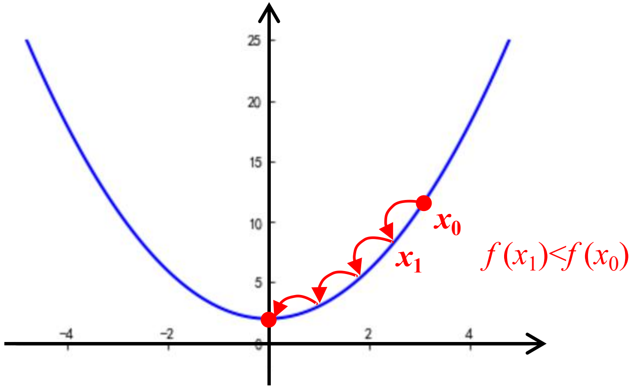
    能够在**任意精度**下满足方程
  - **数值解**

    通过某种**近似计算**得到的解

    能够在**给定的精度**下满足方程

■ 一元凸函数求极值

$$f(x)=x^2+2$$



迭代法求极小值（步长=0.2）

迭代次数	x_i	候选值	$y=x^2+2$	取值	迭代次数	x_i	候选值	$y=x^2+2$	取值
0	3	2.8	9.84	√	8	1.4	1.2	3.44	√
		3.2	12.24				1.6	4.56	
1	2.8	2.6	8.76	√	9	1.2	1	3	√
		3	11				1.4	3.96	
2	2.6	2.4	7.76	√	10	1	0.8	2.64	√
		2.8	9.84				1.2	3.44	
3	2.4	2.2	6.84	√	11	0.8	0.6	2.36	√
		2.6	8.76				1	3	
4	2.2	2	6	√	12	0.6	0.4	2.16	√
		2.4	7.76				0.8	2.64	
5	2	1.8	5.24	√	13	0.4	0.2	2.04	√
		2.2	6.84				0.6	2.36	
6	1.8	1.6	4.56	√	14	0.2	0	2	√
		2	6				0.4	2.16	
7	1.6	1.4	3.96	√	15	**0**	-0.2	2.04	
		1.8	5.24				0.2	2.04	

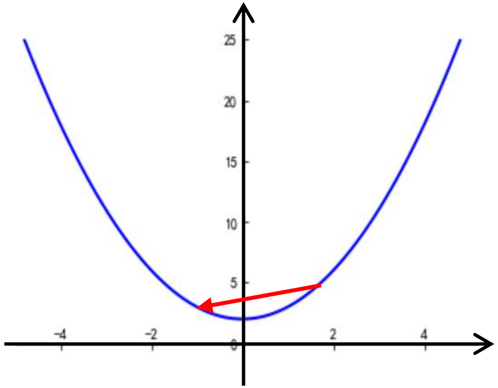
迭代法求极小值（步长=0.5）

迭代次数	x_i	候选值	$y=x^2+2$	移动方向
0	3	2.5	8.25	√
		3.5	14.25	
1	2.5	2	6	√
		3	11	
2	2	1.5	4.25	√
		2.5	8.25	
3	1.5	1	3	√
		2	6	
4	1	0.5	2.25	√
		1.5	4.25	
5	0.5	0	2	√
		1	3	
6	**0**	**-0.5**	**2.25**	
		0.5	**2.25**	

10.1 梯度下降法原理

震荡

overshoot the minimum



迭代法求极小值（步长=0.7）

迭代次数	x_i	候选值	$y=x^2+2$	移动方向
0	3	2.3	7.29	√
		3.7	15.69	
1	2.3	1.6	4.56	√
		3	11	
2	1.6	0.9	2.81	√
		2.3	7.29	
3	0.9	0.2	2.04	√
		1.6	4.56	
4	0.2	−0.5	2.25	√
		0.9	2.81	
5	−0.5	−1.2	3.44	
		0.2	2.04	√
6	0.2	−0.5	2.25	√
		0.9	2.81	
7	−0.5	−1.2	3.44	
		0.2	2.04	√
8	0.2	−0.5	2.25	√
		0.9	2.81	

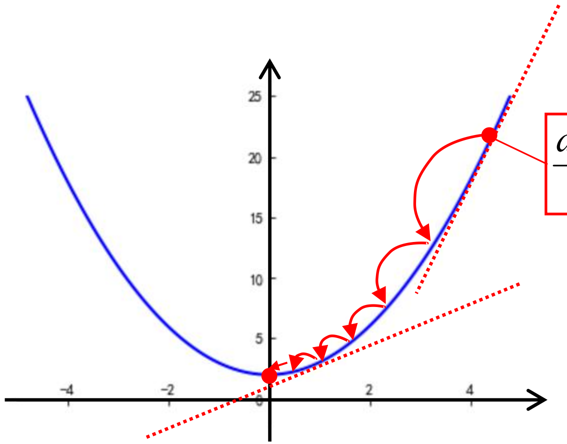
步长太小，迭代次数多，收敛慢

步长太大，引起震荡，可能无法收敛

$$步长=\eta\frac{df(x)}{dx}$$

η：学习率

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-\eta\frac{df(x)}{dx}$$



$$\frac{df(x)}{dx}$$

- 自动调节步长
- 自动确定下一次更新的方向
- 保证收敛性

■ 二元凸函数求极值

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \eta \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$
$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \eta \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

模为方向导数的最大值

方向为取得最大方向导数的方向

梯度：

$$\overrightarrow{grad} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

只要能够把**损失函数**描述成**凸函数**

那么就一定可以采用**梯度下降法**

以**最快**的速度更新**权值向量w**

找到使损失函数达到**最小值点**的位置