



浙江大学  
ZHEJIANG UNIVERSITY

# 中国空间站机械臂运动仿真

## 机器人技术与实践 实验报告

2025 年 12 月 21 日

罗建明 程韬 王昱涵 陈廷峰 魏云翔 李浩博  
浙江大学  
机器人技术与实践, 2025

## 目录

I. DH 参数 .....	1
II. 逆运动学解析解 .....	1
III. 轨迹规划 .....	2
III.1. 核心思路 .....	2
III.2. 实现细节 .....	2
IV. 运动仿真 .....	3
IV.1. 核心思路 .....	3
IV.2. 实现细节 .....	3
初始化 .....	3
轨迹数据加载 .....	3
时间规划 .....	3
插值策略 .....	3
换基处理 .....	3
换基处理的原理与必要性 .....	4
实时控制循环 .....	4
V. 附录 .....	5
V.1. 逆运动学解析解 .....	5
VI. 七自由度机械臂逆运动学报告 .....	5
VI.1. 1. 方程建立 .....	5
1.1 正运动学：构造各级变换矩阵 ${}^{i-1}T_i$ .....	5
1.2 变换矩阵的两种表达式（选取 $T_{57}, T_{17}, T_{16}$ ） .....	5
1.3 标量方程 E1-E7（由矩阵元素对齐得到） .....	5
VI.2. 2. 方程求解 .....	6
0. 记号与问题结构 .....	6
0.1 关节变量 .....	6
0.2 末端位姿输入 .....	6
0.3 基座方向向量（关键中间变量） .....	7
1. (E1-E3)：姿态投影表达 .....	7
1.1 几何解释 .....	7
2. (E4)：圆解集 .....	7
2.1 关键几何结论 .....	8
2.2 冗余自由度 .....	8
3. 已知 $\mathbf{u}$ ：求解 $q_1, q_2, q_6, q_7$ .....	8
3.1 解 $q_1, q_2$ .....	8
3.2 解 $q_6$ .....	8
3.3 解 $q_7$ .....	9
4. 已知 $q_1, q_2, q_6, q_7$ ：求解组合角 .....	9
4.1 由第五个方程求 $\sin \varphi$ .....	9
5. 已知组合角：求解 $q_3, q_4$ （和差法，非奇异） .....	9
5.1 构造两条仅含 $q_3, \beta$ 的方程 .....	9
5.2 和差变量替换 .....	10
5.3 求解流程（非奇异 $\sin d \neq 0$ ） .....	10

5.4 回代求 $q_4, q_5$ .....	10
--------------------------	----

## I. DH 参数

在本实验中，我们实际上并未直接使用 DH 参数进行建模。相反，我们通过定义符合 IK 求解器要求的一般关节树结构来构建 IK 链，具体定义可见 `data/A-base-arm.json` 和 `data/B-base-arm.json` 文件。

需要注意的是，在定义坐标系和旋转轴时，必须与仿真环境中机械臂的定义保持一致，不能随意定义，否则会导致机械臂驱动错误。

图 Figure 1 展示了我们使用的坐标系定义示意图：

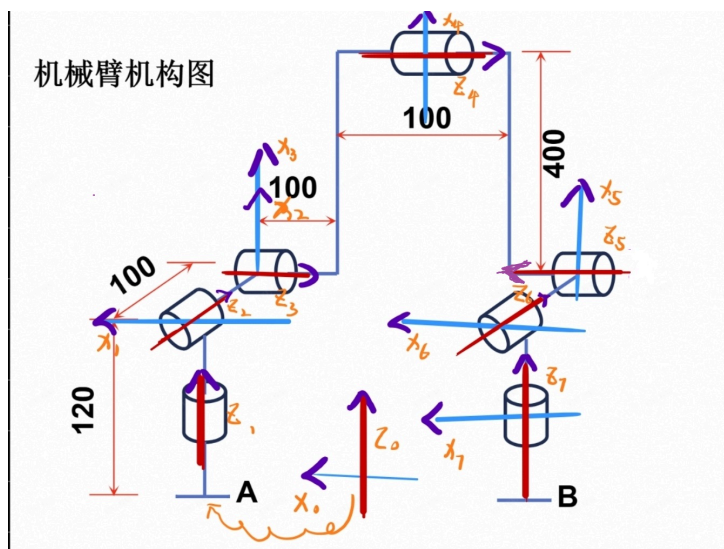


Figure 1 — 坐标系定义示意图

出于实验完整性的考量，我们在下面给出推导的 MDH (Modified Denavit-Hartenberg) 参数表。参数列顺序为： $[a_{i-1}, \alpha_{i-1}, d_i, \theta_i]$ ，其中长度单位为 mm，角度单位为度。

```
# Modified DH 参数表
# 列顺序: [a(i-1), alpha(i-1), d(i), theta(i)]
# 单位: 长度(mm), 角度(deg)
dh_params_deg = [
    [0, 0, 120, 0],
    [0, 90, 100, 90],
    [0, -90, 0, 0],
    [400, 0, 150, 0],
    [-400, 180, -150, 0],
    [0, -90, -100, -90],
    [0, -90, -120, 0],
]
```

## II. 逆运动学解析解

注：我们最后实际上并没有使用到逆运动学解析解，仅仅出于实验的完整性考量 (PPT 中要求)，我们在这里给出逆运动学解析解的推导过程。因为这段推导有点长且不重要，详细的推导过程请参见附录 Section V.1。

### III. 轨迹规划

轨迹规划模块（`traj.py`）的核心任务是：定义末端执行器的关键位置和姿态，通过逆运动学求解得到每个关键点对应的关节角度，并将结果保存为 `trajectory_results.json` 文件，供后续运动仿真阶段使用。

#### III.1. 核心思路

我们的核心思路是：定义几个末端执行器关键点，然后通过 IK 求解得到每个关键点的关节角度。轨迹规划阶段的产出就是这些关节角度 `trajectory_results.json`，运动仿真阶段将会基于这些关节角进行插值，从而得到每个时刻的控制关节角。

这里我们实际上并没有使用逆运动学解析解的 IK，而是使用了我们此前实现的基于逆雅可比方法的 IK 求解器。我们每次求解关键点 IK 时，都会使用上一个关键点的关节角度作为初始值，辅以该 IK 方法的“变化连续性”，我们期望能够得到一个相对更平滑的关节角度变化轨迹。另外通过在部分不重要的关键点通过放宽姿态容差和容许未完全收敛的解，从而减少因关键点取用不佳、可解性不佳导致的规划失败。

#### III.2. 实现细节

`traj.py` 的实现主要包括以下几个部分：

关键点定义：我们为两个运动步骤分别定义了关键点序列。Step 1 以 B 为基座、A 为末端执行器，定义了 5 个关键点的相对位置 `POS_A_REL` 和欧拉角 `EULER_A`。Step 2 以 A 为基座、B 为末端执行器，同样定义了 5 个关键点的相对位置 `POS_B_REL` 和欧拉角 `EULER_B`。

IK 求解流程：`solve_trajectory` 函数是通用的轨迹求解函数，其工作流程如下：

1. 根据基座类型（“A-base”或“B-base”）加载对应的骨骼文件
2. 查找末端执行器（通过 `find_effector` 函数寻找没有子节点的 `FixedJoint`）
3. 构建 IK 链，初始化 T-Pose
4. 对每个关键点进行 IK 求解：
  - 如果关键点已有预设关节角度，则直接使用
  - 否则，将上一个关键点的关节角度作为初始值（保证连续性）
  - 调用 `solve_ik` 函数求解，得到满足目标位姿的关节角度
5. 将所有关键点的关节角度保存到结果列表中

换基处理：这是本实验的一个关键难点。当从 Step 1（B-base）切换到 Step 2（A-base）时，由于两个基座的关节顺序完全相反，且链的方向相反，需要进行角度映射：

- B-base 的关节顺序：`[J7-B, J6, J5, J4, J3, J2, J1-A]`
- A-base 的关节顺序：`[J1-A, J2, J3, J4, J5, J6, J7-B]`

因此，当使用 Step 1 最后一个关键点的关节角度作为 Step 2 第 0 个关键点的初始值时，需要：

1. 反转关节顺序：`angles[::-1]`
2. 取反每个角度：`[-a for a in angles]`

这样可以得到：`initial_angles_for_step2 = [-a for a in result_a[-1][::-1]]`

结果输出：所有关键点的关节角度（已归一化到 `[0, 2π)` 范围）被保存到 `trajectory_results.json` 文件中，包含每个关键点的索引、相对位置、欧拉角和关节角度信息。

## IV. 运动仿真

运动仿真模块( `main.py` )负责在 CoppeliaSim 中控制机械臂按照规划好的轨迹进行运动。我们使用 `coppeliastm_zmqremoteapi_client.RemoteAPIClient` 通过外部 Python 脚本对仿真机械臂进行控制。

### IV.1. 核心思路

核心思路是: 基于 `trajectory_results.json` 中的关键点关节角度, 再设定每一段从一个关键点到另一个关键点的运动时长 `FRAME_TIME`, 通过五次多项式插值, 得到中间时刻的关节角度, 然后通过 `sim.setJointPosition()` 直接设置到机械臂的关节角度中。

### IV.2. 实现细节

#### 初始化

程序首先连接到 CoppeliaSim 仿真环境, 获取所有关节和链对象的句柄, 并定义 A-base 和 B-base 两种基座下的关节列表和链结构。

#### 轨迹数据加载

从 `trajectory_results.json` 文件中读取 Step 1 和 Step 2 的关键点关节角度数据, 转换为 numpy 数组格式 (单位为弧度)。

#### 时间规划

为每个关键点段设定运动时长 `FRAME_TIME`, 并计算累积时间点 `cumulative_times`, 用于确定当前时刻处于哪个时间段。

#### 插值策略

- 对于大部分关键点段, 使用 `angle_interpolate_2` 函数进行两点间的五次多项式插值, 保证起点和终点的速度、加速度均为零, 实现平滑运动
- 对于某些特殊段 (如 Step 1 的关键点 1-2-3 段和 Step 2 的关键点 6-7-8 段), 使用 `angle_interpolate_3` 函数进行三点间的五次多项式插值, 经过中间点, 从而使运动更加平滑。

#### 换基处理

这是运动仿真阶段的关键难点。在 Step 1 完成后、Step 2 开始前, 需要切换基座, 我们将其封装在一个 `switch_base` 函数中。具体处理方式为:

1. `main.py` 调用 `switch_base` 函数, 传入新的链结构 `A_base_chain`、旧基座关节列表 `B_base_joints` 和新基座关节列表 `A_base_joints`
2. `switch_base` 函数内部会:
  - 记录新基座的位置 (确保换基前后位置不变)
  - 读取旧基座下的当前关节角度
  - 将所有关节角度清零 (避免 `inplace=True` 在非零角度下的问题)
  - 断开所有对象的父子关系, 重新建立新的父子关系
  - 将旧基座下的关节角度映射到新基座: 反转顺序并取反每个角度
  - 设置新基座下的关节角度
  - 恢复新基座位置

### 换基处理的原理与必要性

换基操作之所以如此复杂，不能简单地直接更改父子关系，推测根本原因在于 CoppeliaSim 的关节实现机制。

在 CoppeliaSim 中，每个子关节存储的（也是我们通过 `sim.setJointPosition()` 能够操作的）应该实际上是相对于其父关节的相对位姿。当父子关系断开时，这个相对位姿信息就失去了参考系，变得无意义。即便使用 `inplace=True` 参数强制子关节的世界位姿保持不变，这样的操作也会更改关节的零位 (T-Pose)，导致换基后机械臂的 T-Pose 发生变化。一旦 T-Pose 改变，我们关于关节角度的建模和一切基于该模型的 IK 计算都将静默失效，因为所有的关节角度都是相对于 T-Pose 定义的。

因此，我们必须在断开父子关系前将所有关节角度归零，回到 T-Pose 状态。但为了保持机械臂的当前姿态，我们需要先读取旧基座下的当前关节角度，以便在换基后恢复。在恢复关节角度时，由于链的顺序是反的 (B-base 的关节顺序 `[J7-B, J6, J5, J4, J3, J2, J1-A]` 与 A-base 的关节顺序 `[J1-A, J2, J3, J4, J5, J6, J7-B]` 完全相反)，且链的方向相反，所以我们需要对旧关节角度进行反转并取反：`[-a for a in angles[::-1]]`。

另外，由于清空关节角度时是基于旧基座的，这会导致新基座的位姿发生变化（因为新基座在旧基座下是作为子链的一部分存在的）。因此，我们还需要在换基操作的最后恢复新基座的位置，确保换基前后新基座在世界坐标系中的位置保持不变，从而保证整个换基过程的连续性和正确性。

综上所述，`switch_base` 函数的复杂流程是为了在 CoppeliaSim 的关节实现机制下，既保持机械臂的当前姿态，又确保 T-Pose 的一致性，同时还要处理基座位置的变化，这是一个多约束条件下的精确操作。

### 实时控制循环

在主循环中，根据当前仿真时间 `t` 确定处于哪个时间段，然后：

- 如果是 Step 1，使用 `B_base_joints` 设置关节角度
- 如果是 Step 2，首先检查是否需要换基（仅在 Step 1 刚完成时执行一次），然后使用 `A_base_joints` 设置关节角度
- 对每个关节调用相应的插值函数，计算当前时刻的关节角度并设置到仿真环境中
- 调用 `client.step()` 触发下一步仿真

通过这种方式，机械臂能够平滑地从 Step 1 的关键点运动到 Step 2 的关键点，并在换基时保持运动的连续性。



## V. 附录

### V.1. 逆运动学解析解

## VI. 七自由度机械臂逆运动学报告

### VI.1. 1. 方程建立

#### 1.1 正运动学：构造各级变换矩阵 ${}^{i-1}T_i$

根据 Craig-MDH 参数表（略），对每个关节建立齐次变换：

$${}^{i-1}T_i = R_x(\alpha_{i-1})T_x(a_{i-1})R_z(\theta_i)T_z(d_i)$$

各级相乘得到末端正运动学：

$${}^0T_7 = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_7$$

期望末端位姿写成：

$${}^0T_7^d = \begin{pmatrix} n_x & a_x & o_x & p_x \\ n_y & a_y & o_y & p_y \\ n_z & a_z & o_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中  $n, a, o$  为旋转矩阵三列， $p$  为位置向量。

#### 1.2 变换矩阵的两种表达式（选取 $T_{57}, T_{17}, T_{16}$ ）

为了从矩阵等式中构造标量方程，选取三段子链并写出两种表达：

(1) 末端子链  ${}^5T_7$

1. 正运动学表达（关节变量侧）： ${}^5T_7 = {}^5T_6 {}^6T_7$

2. 由期望位姿反推（目标侧）： ${}^5T_7 = ({}^0T_5)^{-1} {}^0T_7^d$

(2) 基座到末端  ${}^1T_7$

1. 正运动学表达： ${}^1T_7 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6 {}^6T_7$

2. 目标侧表达： ${}^1T_7 = ({}^0T_1)^{-1} {}^0T_7^d$

(3) 基座到第 6 坐标系  ${}^1T_6$

1. 正运动学表达： ${}^1T_6 = {}^1T_2 {}^2T_3 {}^3T_4 {}^4T_5 {}^5T_6$

2. 目标侧表达（由  ${}^1T_7$  去掉末端一节）： ${}^1T_6 = {}^1T_7 ({}^6T_7)^{-1} = ({}^0T_1)^{-1} {}^0T_7^d ({}^6T_7)^{-1}$

#### 1.3 标量方程 E1-E7（由矩阵元素对齐得到）

来自  ${}^5T_7$  的姿态与位置分量（用于求  $q_1, q_2, q_6, q_7$ ）

(E1) ( ${}^5T_7[2, 0]$ )

$$\cos(q_6) \cos(q_7) = n_x \cos(q_1) \cos(q_2) + n_y \sin(q_1) \cos(q_2) + n_z \sin(q_2)$$



(E2) ( ${}^5T_7[2, 1]$ )

$$-\cos(q_6) \sin(q_7) = a_x \cos(q_1) \cos(q_2) + a_y \sin(q_1) \cos(q_2) + a_z \sin(q_2)$$

(E3) ( ${}^5T_7[2, 2]$ )

$$-\sin(q_6) = o_x \cos(q_1) \cos(q_2) + o_y \sin(q_1) \cos(q_2) + o_z \sin(q_2)$$

(E4) ( ${}^5T_7[2, 3]$ )

$$120 \sin(q_6) = p_x \cos(q_1) \cos(q_2) + p_y \sin(q_1) \cos(q_2) + p_z \sin(q_2) - 120 \sin(q_2) + 300$$

说明：E1-E4 是“末端子链”约束，主要用于先解出  $q_1, q_2, q_6, q_7$

来自  ${}^1T_7$  的姿态分量（用于组合角）

(E5) ( ${}^1T_7[1, 2]$ )

$$\sin(q_3 + q_4 - q_5) \cos(q_6) = -o_x \sin(q_1) + o_y \cos(q_1)$$

该式给出组合角  $\varphi = q_3 + q_4 - q_5$  的约束。

来自  ${}^1T_6$  的位置分量（用于  $q_3, q_4, q_5$ ）

(E6) ( ${}^1T_6[1, 3]$ )

$$00 \sin(q_3) - 400 \sin(q_3 + q_4) + 100 \cos(q_3 + q_4 - q_5) - 100 = -120o_x \sin(q_1) + 120o_y \cos(q_1) - p_x \sin(q_1) + p_y \cos(q_1)$$

(E7) ( ${}^1T_6[2, 3]$ )

$$-300 \sin(q_2) - 100 \sin(q_3 + q_4 - q_5) \cos(q_2) + 400 \cos(q_2) \cos(q_3) - 400 \cos(q_2) \cos(q_3 + q_4) = 120o_z + p_z - 120$$

## VI.2. 2. 方程求解

### 0. 记号与问题结构

#### 0.1 关节变量

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)$$

定义简写：

$$c_i = \cos q_i, \quad s_i = \sin q_i$$

#### 0.2 末端位姿输入

##### 1. 旋转矩阵列向量：

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{o} = \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix}$$

##### 2. 末端位置：

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

假设  $[\mathbf{n}\mathbf{a}\mathbf{o}] \in \text{SO}(3)$ 。

### 0.3 基座方向向量（关键中间变量）

$$\mathbf{u} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_1 c_2 \\ s_1 c_2 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

显然有  $|\mathbf{u}| = 1$

$\mathbf{u}$  是一个仅由  $q_1, q_2$  决定的单位向量，它将在后续成为冗余自由度的载体。

#### 1. (E1-E3): 姿态投影表达

原始方程组前三项可统一写为内积形式：

$$\mathbf{n}^T \mathbf{u} = \cos q_6 \cos q_7 \quad (\text{E1})$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{u} = -\cos q_6 \sin q_7 \quad (\text{E2})$$

$$\mathbf{o}^T \mathbf{u} = -\sin q_6 \quad (\text{E3})$$

#### 1.1 几何解释

1.  $(\cos q_6 \cos q_7, -\cos q_6 \sin q_7, -\sin q_6)$  是一个单位向量；
2.  $(\mathbf{n}^T \mathbf{u}, \mathbf{a}^T \mathbf{u}, \mathbf{o}^T \mathbf{u})$  是  $\mathbf{u}$  在末端坐标系下的坐标。

因此 (E1-E3) 表示：

$\mathbf{u}$  在  $\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{o}$  坐标系下的表示由  $(q_6, q_7)$  决定

这三式并不会完全约束  $\mathbf{u}$ ，而只是把  $\mathbf{u}$  与  $(q_6, q_7)$  绑定。

#### 2. (E4): 圆解集

第四个方程为：

$$120 \sin q_6 = \mathbf{p}^T \mathbf{u} - 120 \sin q_2 + 300$$

利用

$$\sin q_6 = -\mathbf{o}^T \mathbf{u}, \quad \sin q_2 = u_z$$

代入并整理得：  $(\mathbf{p} + 120\mathbf{o} - 120\mathbf{e}_z)^T \mathbf{u} = -300$

其中

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.1 关键几何结论

前四个方程等价于：

$$\begin{cases} |\mathbf{u}| = 1 \\ \mathbf{k}^T \mathbf{u} = -300 \end{cases} \quad \mathbf{k} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} + 120\mathbf{o} - 120\mathbf{e}_z$$

这是：

1. 一个单位球面
2. 与一个平面

的交集。

## 2.2 冗余自由度

1. 若  $|-300| < |\mathbf{k}|$ ：解集是一个圆
2. 若等于：唯一解
3. 若大于：无解

因此在一般非退化情况下：

$\mathbf{u}$  具有 1 维自由度，可用圆参数  $\psi$  表达

这是七自由度系统的结构性冗余来源。

## 3. 已知 $\mathbf{u}$ ：求解 $q_1, q_2, q_6, q_7$

此时  $\mathbf{u}$  被视为已知输入条件（由冗余参数选定）。

### 3.1 解 $q_1, q_2$

由定义直接反解：

$$q_1 = \text{atan2}(u_y, u_x)$$

$$q_2 = \text{atan2}\left(u_z, \sqrt{u_x^2 + u_y^2}\right)$$

奇异性说明：若  $u_x = u_y = 0$ ，即  $c_2 = 0$ ，则  $q_1$  不可观（基座竖直奇异）。

### 3.2 解 $q_6$

由 (E3)：

$$\sin q_6 = -(\mathbf{o}^T \mathbf{u})$$

因此：

$$q_6 = \arcsin(-\mathbf{o}^T \mathbf{u})$$

存在标准两分支：

$$q_6 \in \{\theta, \pi - \theta\}$$

### 3.3 解 $q_7$

由 (E1-E2)：

$$\begin{aligned}\cos q_7 &= \frac{\mathbf{n}^T \mathbf{u}}{\cos q_6} \\ \sin q_7 &= -\frac{\mathbf{a}^T \mathbf{u}}{\cos q_6}\end{aligned}$$

于是：

$$q_7 = \text{atan2}(-\mathbf{a}^T \mathbf{u}, \mathbf{n}^T \mathbf{u})$$

腕部奇异：若  $\cos q_6 = 0$ ，则 (E1-E2) 同时退化为 0，此时  $q_7$  自由。

### 4. 已知 $q_1, q_2, q_6, q_7$ ：求解组合角

定义组合角：

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} q_3 + q_4 - q_5$$

#### 4.1 由第五个方程求 $\sin \varphi$

原式：

$$\sin(q_3 + q_4 - q_5) \cos q_6 = -o_x \sin q_1 + o_y \cos q_1$$

整理得：

$$\sin \varphi = \frac{-o_x \sin q_1 + o_y \cos q_1}{\cos q_6}$$

因此：

$$\varphi \in \{\arcsin(\cdot), \pi - \arcsin(\cdot)\}$$

并可同时确定：

$$\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

### 5. 已知组合角：求解 $q_3, q_4$ （和差法，非奇异）

定义：

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} q_3 + q_4$$

#### 5.1 构造两条仅含 $q_3, \beta$ 的方程

由第六、七式整理得：

$$400(\sin q_3 - \sin \beta) = A$$

$$400(\cos q_3 - \cos \beta) = B$$

其中  $A, B$  是已知标量 (由  $q_1, q_2, \varphi, \mathbf{p}, \mathbf{o}$  决定)。

### 5.2 和差变量替换

设:

$$m = \frac{q_3 + \beta}{2}, \quad d = \frac{q_3 - \beta}{2}$$

利用恒等式:

$$\sin q_3 - \sin \beta = 2 \cos m \sin d$$

$$\cos q_3 - \cos \beta = -2 \sin m \sin d$$

代入得:

$$\begin{cases} 800 \cos m \sin d = A \\ -800 \sin m \sin d = B \end{cases}$$

### 5.3 求解流程 (非奇异 $\sin d \neq 0$ )

1. 取比值得:

$$\tan m = -\frac{B}{A}$$

→ 解出  $m$  (模  $\pi$ )

2. 回代任一式求:

$$\sin d = \frac{A}{800 \cos m}$$

3. 得:

$$q_3 = m + d, \quad \beta = m - d$$

### 5.4 回代求 $q_4, q_5$

$$q_4 = \beta - q_3$$

$$q_5 = \beta - \varphi$$