第一章

1. 某压力传感器的校准数据如下表所示：

校准数据列表

压力（Mpa）	输　出　值（mV）					
	第一次循环		第二次循环		第三次循环	
	正行程	反行程	正行程	反行程	正行程	反行程
0.00	-2.73	-2.71	-2.71	-2.68	-2.68	-2.69
0.02	0.56	0.66	0.61	0.68	0.64	0.69
0.04	3.96	4.06	3.99	4.09	4.03	4.11
0.06	7.40	7.49	7.43	7.53	7.45	7.52
0.08	10.88	10.95	10.89	10.93	10.94	10.99
0.10	14.42	14.42	14.47	14.47	14.46	14.46

试分别用端点连线法和最小二乘法求校准直线、非线性误差，并计算迟滞和重复性误差。

解：

（1）端点连线法

压力x	平均值(v)		正反行程平均值	迟滞ΔH（v）	子样方差平均根		子样标准偏差	端基法基准直线			
								理论值	误差Δ		非线性误差ΔL
	正行程	反行程			正行程	反行程			正行程	反行程	
0.00	-2.7067	-2.6933	-2.7000	0.0133	0.0178	0.0111	0.0199	-2.7000	-0.0067	0.0067	0.0000
0.02	0.6033	0.6767	0.6400	0.0733	0.0289	0.0111		0.7300	-0.1267	(0.0533)	0.0900
0.04	3.9933	4.0867	4.0400	0.0933	0.0244	0.0178		4.1600	-0.1667	(0.0733)	0.1200
0.06	7.4267	7.5133	7.4700	0.0867	0.0178	0.0156		7.5900	-0.1633	(0.0767)	0.1200
0.08	10.9033	10.9567	10.9300	0.0533	0.0244	0.0222		11.0200	-0.1167	(0.0633)	0.0900
0.10	14.45	14.4500	14.4500	0.0000	0.02	0.0200		14.4500	0.0000	0.0000	0.0000

端基法校准直线y= 171.50 x+ -2.70

满量程输出 y_{FS}= 17.1500

重复性 γ_R= 0.348%

线性度 γ_L= 0.700%

迟滞误差 γ_H= 0.272%

总精度 γ = 1.048%

（2）最小二乘法

压力x	平均值(v) 正行程	平均值(v) 反行程	正反行程平均值	迟滞ΔH（v）	子样方差平均根 正行程	子样方差平均根 反行程	子样标准偏差	最小二乘法基准直线 理论值	误差Δ 正行程	误差Δ 反行程	非线性误差ΔL
0.0	-2.7067	-2.6933	-2.7000	0.0133	0.0178	0.0111	0.0199	-2.7700	0.0633	0.0767	0.0700
0.0	0.6033	0.6767	0.6400	0.0733	0.0289	0.0111		0.6600	-0.0567	0.0167	0.0200
0.0	3.9933	4.0867	4.0400	0.0933	0.0244	0.0178		4.0900	-0.0967	(0.0033)	0.0500
0.1	7.4267	7.5133	7.4700	0.0867	0.0178	0.0156		7.5200	-0.0933	(0.0067)	0.0500
0.1	10.9033	10.9567	10.9300	0.0533	0.0244	0.0222		10.9500	-0.0467	0.0067	0.0200
0.1	14.4500	14.4500	14.4500	0.0000	0.0200	0.0200		14.3800	0.0700	0.0700	0.0700

最小二乘法校准直线y= 171.50 x+ -2.7700

满量程输出y_{FS}= 17.1500

重复性γ_R= 0.348%

线性度γ_L= 0.408%

迟滞误差γ_H= 0.272%

总精度γ = 0.757%

2．有一个温度传感器，其微分方程为

$$30\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}+3y=0.15x$$

其中 y 为输出电压（mV），x 为输入温度（$^{\circ}$C），试求该传感器的时间常数 τ 和静态灵敏度 k。

解：

$$k=\frac{b_0}{a_0}=\frac{0.15}{3}=0.05\,\mathrm{mv}/^{\mathrm{O}}\mathrm{C}$$

$$\tau=\frac{a_1}{a_0}=\frac{30}{3}=10\,\mathrm{s}$$

3. 某加速度传感器的动态特性可用如下的微分方程来描述：

$$\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,t^2}+3.0\times10^3\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}+2.25\times10^{10}\,y=11.0\times10^{10}\,x$$

式中 y——输出电荷量（pC）

x——输入加速度值（m/s^2）

试确定该传感器的 ω_0、ξ 和 k 的大小。

解：

静态灵敏度： $$k=\frac{b_0}{a_0}=\frac{11\times10^{10}}{2.25\times10^{10}}=4.8889$$

阻尼比： $$\xi=\frac{a_1}{2\sqrt{a_0a_2}}=\frac{3000}{2\sqrt{2.25\times10^{10}\times1}}=0.01$$

自振角频率：$\omega_0=\sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}=\sqrt{\dfrac{2.25\times10^{10}}{1}}=1.5\times10^5$

4. 设有两只力传感器，均可作为二阶系统来处理，自振频率分别为 800Hz 和 1200Hz，阻尼比ξ 均为 0.4，今欲测量频率为 400Hz 正弦变化的外力，应选用哪一只？并计算将产生多大的振幅相对误差和相位误差。

解：讨论传感器动态特性时，常用无量纲幅值比 $k(\omega)$。

（1）当用 $f_0=800\,\text{Hz}$、$\xi=0.4$ 的传感器测量 $f=400\,\text{Hz}$ 的信号时，

$$
\begin{aligned}
k(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\dfrac{\omega}{\omega_0}\right]^2}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\dfrac{400}{800}\right)^2\right]^2+\left[2\times0.4\times\dfrac{400}{800}\right]^2}}\\
&=1.18
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(\omega)&=-\arctan\frac{2\xi\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}=-\arctan\frac{2\times0.4\times\left(\dfrac{400}{800}\right)}{1-\left(\dfrac{400}{800}\right)^2}\\
&=-\arctan0.5333=-28.07^0
\end{aligned}
$$

该传感器的振幅相对误差为

$$\frac{k(\omega)-1}{1}\times100\%=18\%$$

相位误差为 28.07^0。

（2）当用 $f_0=1200\text{Hz}$、$\xi=0.4$ 的传感器测量 $f=400\,\text{Hz}$ 的信号时，同理可得：

$$k(\omega)=1.08$$

$$\varphi(\omega)=-16.70^0$$

振幅相对误差为 8%。相位误差为 16.70^0。

由此可见，应选用自振频率为 1200Hz 的传感器进行测量。

5. 已知某二阶系统传感器的自振频率 f_0=20kHz，阻尼比ξ =0.1。若要求传感器的输出幅值误差小于 3%，试确定该传感器的工作频率范围。

解：此二阶系统的输出幅值误差为

$$\frac{k(\omega)}{k}-1=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}}-1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]^2+\left[2\xi\frac{f}{f_0}\right]^2}}-1=\frac{1}{\sqrt{[1-x^2]^2+[2\xi x]^2}}-1$$

其中 $x=\frac{f}{f_0}$。

一般地，传感器的工作频率应小于其自有频率，否则相频特性会较差。因此有：

$$\frac{1}{\sqrt{[1-x^2]^2+[2\xi x]^2}}-1\le 0.03$$

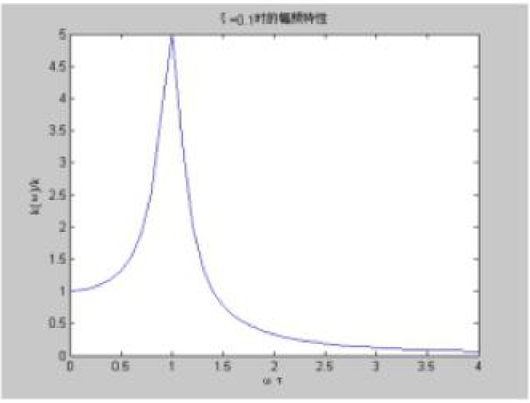
解之可得：

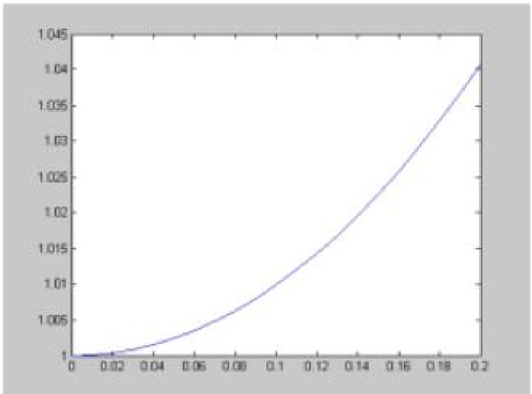
$$x\le 0.1729$$

即

$$\frac{f}{f_0}\le 0.1729$$
$$f\le 0.1729f_0=3.4537kHz$$

即，此传感器的工作频率范围为 0～3.4537kHz 。可见，由于 ξ 较小，因此，此传感器的工作频率范围也较小，在设计二阶系统传感器时，一般应选 ξ =0.6～0.7，则工作频率可达 0.5f_0。





第二章

1. 一应变片的电阻 R=120Ω，k=2.05，用作应变为 800μm/m 的传感元件。

（1）求ΔR 和ΔR/R；

（2）若电源电压 U=3V，求初始平衡时惠斯登电桥的输出电压。

解：

（1）电阻应变片的灵敏度定义为

$$k = \frac{\Delta R}{R\varepsilon}$$

因此，

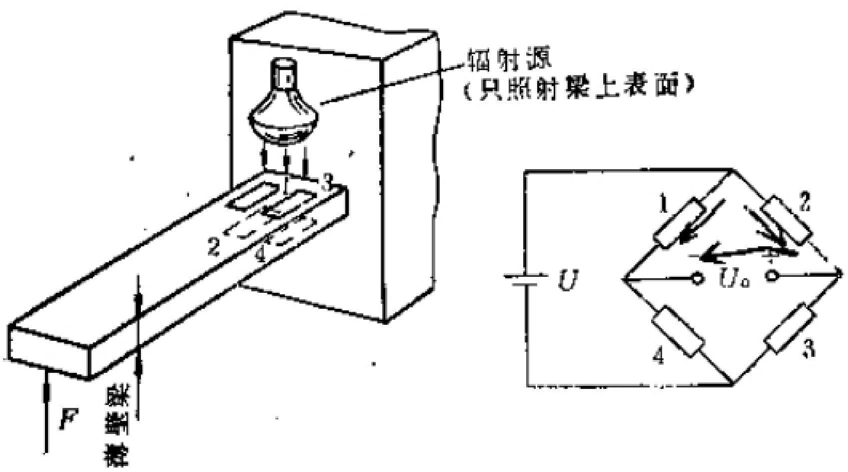
$$\frac{\Delta R}{R} = k\varepsilon = 2.05 \times 800 \times 10^{-6} = 1.64 \times 10^{-3}$$

$$\Delta R = 1.64 \times 10^{-3} \times 120 = 0.1968\Omega$$

（2）初始平衡时惠斯登电桥的输出电压为

$$U_O = \frac{U}{4}\frac{\Delta R}{R} = \frac{3}{4} \times 1.64 \times 10^{-3} = 1.23 \times 10^{-3}\,\mathrm{V} = 1.23\,\mathrm{mV}$$

2．在下图所示的系统中：



假设

（1）　当 F=0 和热源移开时，$R_1=R_2=R_3=R_4=R$，及 $U_0=0$；

（2）　各应变片的灵敏系数均为 +2.0，且其电阻温度系数为正值；

（3）　梁的弹性模量随温度增加而减小；

（4）　应变片的热膨胀系数比梁的大

（5） 假定应变片的温度和紧接在它下面的梁的温度任何时刻均是相同的。

在时间 t=0 时，在梁的自由端加上一个向上的力， 然后维持不变， 在振荡消失后， 在一稍后的时间 t_1 打开辐射热源， 然后就一直打开， 试简要绘出 U_0 和 t 的时间关系的一般形状，并通过仔细推理说明你给出这种曲线形状的理由。

解：

这里，电阻 R1～R4 接入电桥后，构成差动全桥。

在时间 t_1 以前，各应变片的温度均为 T_0，它们只受力 F 的作用，设此时的电阻增量为 Δ R，则电桥的输出电压为

$$U_O = U\frac{\Delta R}{R}$$

在时间 t_1 以后，幅射源打开，各应变片的温度将升高，设它们将线性升高，到时刻 t_2 温度稳定到 T_1，设在 t_1～t_2 中的任意时刻 t，各应变片的温度为 $T_0+\Delta T_t$，则

$$\Delta T_t = \frac{T_1 - T_0}{t_2 - t_1}(t - t_1)$$

对单个应变片，当温度变化时，由此引起的电阻相对变化量为

$$\frac{\Delta R_t}{R} = \alpha_t \Delta T_t + k(\alpha_g - \alpha_s)\Delta T_t = k_T(t - t_1)$$

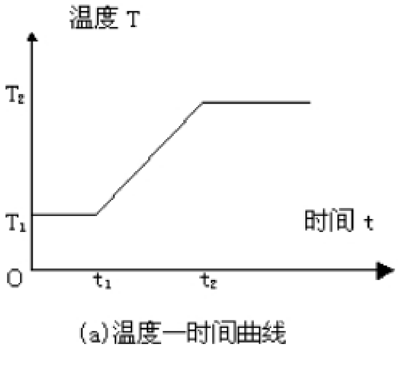
$$k_T = [\alpha_t + k(\alpha_g - \alpha_s)]\frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$$

其中，α_t 为应变片材料的电阻温度系数， k 为应变片灵敏系数， α_g 为试件（即梁）的膨胀系数，α_s 为应变片材料的膨胀系数。

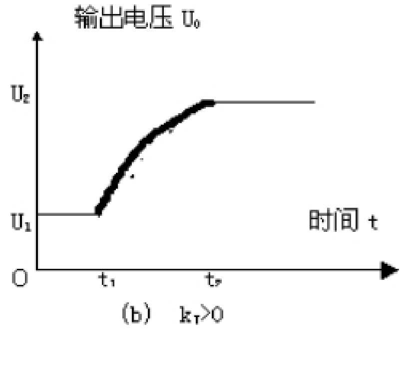
因此，在 t_1～t_2 中的任意时刻 $t_1+\Delta t$，各应变片的电阻分别为 $R+\Delta R+\Delta R_t$ 和 $R-\Delta R+\Delta R_t$，此时差动全桥的输出电压为

$$\begin{aligned} U_O &= U\left[\frac{R+\Delta R+\Delta R_t}{(R+\Delta R+\Delta R_t)+(R-\Delta R+\Delta R_t)} - \frac{R-\Delta R+\Delta R_t}{(R+\Delta R+\Delta R_t)+(R-\Delta R+\Delta R_t)}\right] \\ &= U\frac{\Delta R+\Delta R_t}{R+\Delta R_t} = U - U\frac{R-\Delta R}{R+\Delta R_t} = U - U\frac{R-\Delta R}{R(1+k_T\Delta t)} \end{aligned}$$

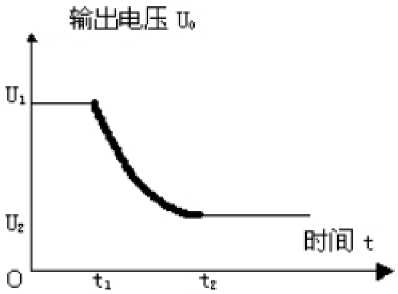
由假设（4）知，$\alpha_g<\alpha_s$；又由（2）知，$\alpha_t>0$，k=2。因此，k_T 为正、为负、为零均有可能，这取决于应变片及试件所用的材料。此时， U_0 将分别增加、减小、不变，而且变化规律为双曲线型，如下图所示。



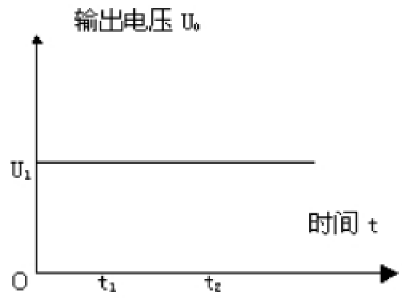
(a)温度—时间曲线



(b) $k_T>0$



（c） k_T<0



（d） k_T=0

第三章

1. 某螺管型差动式自感传感器（参见图 3-7）的结构参数为 N=800 匝，h=10mm，t=6mm，d_2=10mm，d_1=2mm，并设 a=1.30。

（1）试求平衡状态下单个线圈的电感量 L_0；

（2）若将其接入变压器电桥，电桥变压器二次侧电源频率为 10000Hz，u=1.8V，设电感线圈有效电阻可忽略，求该传感器的灵敏度 k_z。

解：

（1）平衡状态下单个线圈的电感量为

$$L_0 = N^2\left[\frac{\mu_0\pi R^2}{h-t}+\frac{\lambda t^3}{3h^2}\right] = N^2\left[\frac{\mu_0\pi(1+a)^2 d_1^2/4}{h-t}+\frac{2\pi\mu_0}{\ln(d_2/d_1)}\frac{t^3}{3h^2}\right]$$

$$=800^2\times3.1416\times(4\times3.1416\times10^{-7})\times\left[\frac{(1+1.30)^2\times(2\times10^{-3})^2}{4\times(10-6)\times10^{-3}}+\frac{2\times(6\times10^{-3})^3}{\ln(10/2)\times3\times(10\times10^{-3})^2}\right]$$

$$=0.0056\,\mathrm{H}=5.6\,\mathrm{mH}$$

（2）变压器电桥的输出电压为

$$u_O=-\frac{u}{2}\frac{\Delta Z}{Z}$$

由假设：电感线圈的有效电阻可忽略，故有

$$u_O=-\frac{u}{2}\frac{\Delta L}{L_0}$$

又差动式螺管型自感传感器的电感相对增量为

$$\frac{\Delta L}{L_0}\approx 6\frac{L_{S0}}{L_0}\frac{\Delta t}{t}$$

所以，该传感器的灵敏度为

$$k_z = \left|\frac{u_O}{\Delta t}\right| = \frac{u}{2} \times 6\frac{L_{s0}}{L_0}\frac{1}{t} = \frac{3u}{L_0}\frac{2\pi\mu_0 N^2}{\ln(d_2/d_1)}\frac{t^2}{3h^2}$$
$$= \frac{1.8}{5.6\times10^{-3}} \times \frac{2\times3.1416\times(4\times3.1416\times10^{-7})\times800^2}{\ln(10/2)} \times \frac{6^2}{10^2}$$
$$= 363.18\,\mathrm{V/m}$$

2．上述差动式自感传感器，若要控制理论线性度在 1%以内，最大量程为多少？

解：

此传感器的非线性误差为

$$\gamma_L = \frac{2L_{s0}\left|\frac{\Delta t}{t_0}\right|^3 / L_0}{\left|\frac{\Delta t}{t_0}\right|} = 2\frac{L_{s0}}{L_0}\left|\frac{\Delta t}{t_0}\right|^2 \times 100\%$$

因此，要使其理论线性度为 1%，其最大量程应满足如下公式：

$$\gamma_L = 2\times\frac{0.0023}{0.0056}\times\left|\frac{\Delta t_{\max}}{6}\right|^2 \times 100\% = 1\%$$

由此可得，其最大量程为

$$\Delta t_{\max} = \frac{6\times\sqrt{0.01\times0.0056}}{\sqrt{2\times0.0023}} \approx 0.67\,\mathrm{mm}$$

3. 有一差动变压器式传感器，设已知 $h=h_1=15\mathrm{mm}$，$l_1=30\mathrm{mm}$，$r_2=10\mathrm{mm}$，$r_1=2\mathrm{mm}$，$N_1=N_2=1000$ 匝，反串接线，励磁电压有效值 $U=3\mathrm{V}$，频率 4000Hz，试求：

（1）平衡点的互感系数 M_a、M_b；

（2）平衡点的传感器灵敏度 k；

（3）当最大位移 $x=1.2\mathrm{mm}$ 时，理论线性度相对误差 γ_L。

解：

（1）在平衡点有 $x=0$，因此

$$M_a = M_b = \frac{\pi\mu_0 N_1 N_2 l_1 (l_1 - h_1)}{8hl_1\ln(r_2/r_1)}$$
$$= \frac{3.1416\times(4\times3.1416\times10^{-7})\times1000\times1000\times0.03\times(0.03-0.015)^2}{8\times0.015\times0.03\times\ln(10/2)}$$
$$= 0.0046\,\mathrm{H} = 4.6\,\mathrm{mH}$$

（2）平衡点的传感器灵敏度为

$$k = \frac{3N_2}{hN_1}\frac{l_1^2 - h_1^2}{3l_1^2 - 2h_1 l_1}U$$
$$= \frac{3\times1000}{0.015\times1000}\times\frac{0.03^2 - 0.015^2}{3\times0.03^2 - 2\times0.015\times0.03}\times3$$
$$= 225\,\mathrm{V/m}$$

(3) 理论线性度相对误差为

$$\gamma_L=\frac{-4(3l_1^2-2h_1l_1)+12(l_1^2-h_1^2)}{(l_1^2-h_1^2)(3l_1^2-2h_1l_1)}x^2=740.74x^2=740.74\times0.0012^2=0.001=0.1\%$$

第四章

1. 表 4.1 中单组式变面积型平板形线位移电容传感器，两极板相互覆盖的宽度为 4mm，两极板的间隙为 0.5mm，极板间介质为空气，试求其静态灵敏度？若极板相对移动 2mm，求电容变化量？

解：单组式变面积型平板形线位移电容传感器的灵敏度为

$$k=\frac{dC}{dx}=d\left(\frac{\varepsilon\, ax}{d}\right)/dx=\frac{\varepsilon\, a}{d}=\frac{4\times10^{-3}\times8.85\times10^{-12}}{0.5\times10^{-3}}=7.08\times10^{-11}\ \mathrm{F/m}$$

若极板相对移动 2mm，则电容变化量为

$$\Delta C=k\Delta x=7.08\times10^{-11}\times2\times10^{-3}=1.416\times10^{-13}\ \mathrm{F}=0.1416\mathrm{pF}$$

2．表 4.1 中单组式变面积型圆柱形线位移电容传感器，其可动极筒外径为 9.8mm，定极筒内径为 10mm，两极筒遮盖长度为 1mm，极筒间介质为空气，试求其电容值？当供电频率为 60Hz 时，求其容抗值？

解：单组式变面积型圆柱形线位移电容传感器的电容量为

$$C=\frac{2\pi\varepsilon\, l}{\ln(r_2/r_1)}=\frac{2\times3.1416\times8.85\times10^{-12}\times1\times10^{-3}}{\ln(10/9.8)}=2.7524\times10^{-12}\ \mathrm{F}=2.7524\,\mathrm{pF}$$

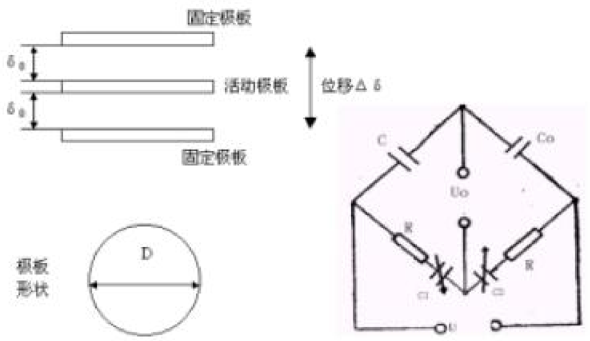
当供电频率为 60Hz 时，其容抗为

$$R=\frac{1}{2\pi\ f\,C}=\frac{1}{2\times3.1416\times60\times2.7524\times10^{-12}}=9.6373\times10^{8}\,\Omega=963.73\,\mathrm{M}\Omega$$

3. 在压力比指示系统中采用的电容传感元件及其电桥测量线路如下图所示。已知：δ_0=0.25mm，D=38.2mm，R=5.1KΩ，U=60V(A.C)，f=400Hz，C=0.001μF，C_0=0.001μF。试求：

（1） 该电容传感器的电压灵敏度（单位 V/m）K_u

（2） 当电容传感器活动极板位移Δδ=10μm 时，输出电压 U_0的值。



解：

$$C_1=\frac{\varepsilon S}{\delta_0-\Delta\delta}=\frac{\pi D^2}{4(\delta_0-\Delta\delta)}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon S}{\delta_0+\Delta\delta}=\frac{\pi D^2}{4(\delta_0+\Delta\delta)}$$

对电桥有：

$$Z_1=C \qquad Z_2=C_0$$

$$Z_3=R+\frac{1}{j\omega C_1}$$

$$Z_4=R+\frac{1}{j\omega C_2}$$

初始，$\Delta\delta=0$，因此 $C_1=C_2$，故 $Z_3=Z_4$，电桥满足平衡条件 $Z_1Z_4=Z_2Z_3$，此时 $U_0=0$。
当传感器极板向上移动 $\Delta\delta$时，根据等效发电机原理，输出电压

$$U_0=\left(\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}-\frac{Z_3}{Z_3+Z_4}\right)U$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+\frac{1}{j\omega C_0}}-\frac{R+\frac{1}{j\omega C_1}}{R+\frac{1}{j\omega C_1}+R+\frac{1}{j\omega C_2}}\right)U$$

$$=\left(\frac{C_0}{C+C_0}-\frac{j\varpi R+\frac{4(\delta_0-\Delta\delta)}{\pi D^2}}{2j\varpi R+\frac{4(\delta_0-\Delta\delta)}{\pi D^2}+\frac{4(\delta_0+\Delta\delta)}{\pi D^2}}\right)U$$

$$=\left(\frac{C_0}{C+C_0}-\frac{j\varpi R\pi D^2+4(\delta_0-\Delta\delta)}{2j\varpi R\pi D^2+8\delta_0}\right)U$$

$$=\left(\frac{C_0}{C+C_0}-\frac{1}{2}+\frac{2\Delta\delta}{j\varpi R\pi D^2+4\delta_0}\right)U$$

$$=\frac{2\Delta\delta}{j\varpi R\pi D^2+4\delta_0}U$$

因此

（1） 此电容传感器的电压灵敏度为

$$K_u=\left|\frac{\Delta U_0}{\Delta\delta}\right|=\left|\frac{2U_0}{j\omega R\pi D^2+4\delta_0}\right|=\frac{2U_0}{\sqrt{(j\omega R\pi D^2)^2+(4\delta_0)^2}}$$

$$=120000(V/m)$$

（2） 输出电压为

$$U_0=K_u\Delta\delta$$

$$=120000*10*10^{-6}$$

$$=1.2(V)$$

4.对变极距式电容传感元件，若初始极板间距为 δ_0=1mm，当电容 C 的线性度规定为：（1）0.1%，（2）1.0%，（3）2.0%时，求允许的极距最大变化量 $\Delta\delta_{max}$。

解：对变极距电容传感器有：

初始电容为 $C_0=\frac{\varepsilon S}{\delta_0}$

变极距后，电容为 $C=\frac{\varepsilon S}{\delta_0-\Delta\delta}$

因此有：

$$\frac{C}{C_0}=\frac{\delta_0}{\delta_0-\Delta\delta}=\frac{1}{1-\frac{\Delta\delta}{\delta_0}}$$

$$=1+\frac{\Delta\delta}{\delta_0}+(\frac{\Delta\delta}{\delta_0})^2+(\frac{\Delta\delta}{\delta_0})^3+\cdots$$

故 $C\approx\frac{\Delta\delta}{\delta_0}C_0$

其非线性误差来、主要来自于，对无穷极数的截断。

因此，其线性度为

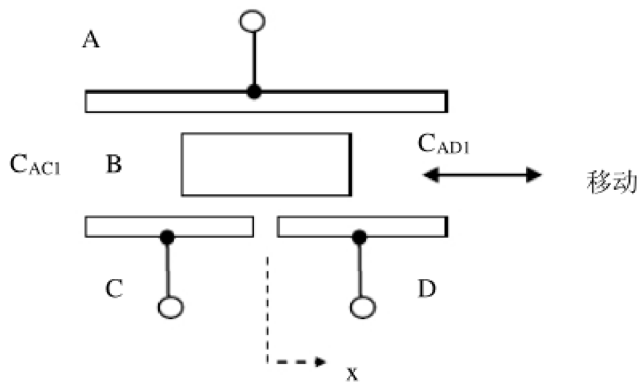
$$\delta_L=\frac{\Delta_{max}}{y_{F\bullet S}}\approx\frac{C_0(\frac{\Delta\delta_{max}}{\delta_0})^2}{C_0\frac{\Delta\delta_{max}}{\delta_0}-0}=\frac{\Delta\delta_{max}}{\delta_0}$$

故，要满足一定的线性度，要求

$$\Delta\delta_{max}\le\delta_L\cdot\delta_0$$

因此，当 δ_0=1mm 时，若要求电容 C 的线性度为（1）0.1%；（2）1.0%；（3）2.0%，所允许的极距的最大变化量为（1）0.001mm；（2）0.01mm；（3）0.02mm。

5.差动非接触式电容位移传感器如下图所示，由 4 块置于空气中的平行平板组成。其中极板 A、C 和 D 是固定的，板 B 可如图所示移动，其厚度为 t，并距两边固定极板的距离均为 d。板 B、C 和 D 的长度均为 L，板 A 的长度为 2L。所有极板的宽度都为 b，板 C 和 D 之间的间隙以及边缘效应可以忽略，试导出极板 B 从中点位移 x=±L/2 时，电容 CAC 和 CAD 的表达式，x=0 是对称位置。



解：C_{AC}是由 A、B 两极板之间的电容 C_{AB}和 B、C 两极板间的电容 C_{BC}

串联后，再与 A、C 两极板间的电容 C_{AC1} 并联而得。

类似地，C_{AD} 是由 A、B 两极板之间的电容 C_{AB} 和 B、D 两极板间的电容 C_{BD} 串联后，再与 A、D 两极板间的电容 C_{AD1} 并联而得。

以向左移动的方向为 x 移动的正方向，则

$$C_{AB}=\frac{\varepsilon bl}{\delta}$$

$$C_{BC}=\frac{\varepsilon b(l/2+x)}{\delta} \qquad C_{BD}=\frac{\varepsilon b(l/2-x)}{\delta}$$

$$C_{AC1}=\frac{\varepsilon b(l/2-x)}{2\delta+t} \qquad C_{AD1}=\frac{\varepsilon b(l/2+x)}{2\delta+t}$$

因此

$$C_{AC}=C_{AC1}+\frac{C_{AB}C_{BC}}{C_{AB}+C_{BC}}=\frac{\varepsilon b(l/2-x)}{2\delta+t}+\frac{\frac{\varepsilon bl}{\delta}\frac{\varepsilon b(l/2+x)}{\delta}}{\frac{\varepsilon bl}{\delta}+\frac{\varepsilon b(l/2+x)}{\delta}}$$

$$=\frac{\varepsilon b(l/2-x)}{2\delta+t}+\frac{\varepsilon bl}{\delta}\frac{l/2+x}{3l/2+x}=\frac{\varepsilon b(l/2-x)}{2\delta+t}+\frac{\varepsilon bl}{\delta}\frac{1+2\frac{x}{l}}{3+2\frac{x}{l}}$$

$$C_{AD}=C_{AD1}+\frac{C_{AB}C_{BD}}{C_{AB}+C_{BD}}=\frac{\varepsilon b(l/2+x)}{2\delta+t}+\frac{\varepsilon bl}{\delta}\frac{1-2\frac{x}{l}}{3-2\frac{x}{l}}$$

当 $x=\frac{l}{2}$ 时，$C_{AC}=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon bl}{\delta}, C_{AD}=\frac{\varepsilon bl}{2\delta+t}$

当 $x=-\frac{l}{2}$ 时，$C_{AC}=\frac{\varepsilon bl}{2\delta+t}, C_{AD}=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon bl}{\delta}$

第五章

1．某感应式速度传感器总刚度 c 为 3200N/m，测得其固有频率为 20Hz，今欲将其固有频率减小到 10Hz，问刚度应为多少？（提示：$\omega_0=\sqrt{c/m}$）

解：固有频率与刚度之间的关系式为

$$\omega_0=\sqrt{c/m}$$

因此，欲将感应式速度传感器的固有频率减小到 10Hz，刚度应满足

$$c:3200=10^2:20^2$$

即

$$c=800\text{N/m}$$

2．某霍尔元件 l、b、d 尺寸分别为 1.0cm、0.35cm、0.1cm，沿 l 方向通以电流 I=1.0mA，在垂直 lb 平面方向加有均匀磁场 B=0.3T，传感器的灵敏度系数为 22V/(A·T)，试求其

输出霍尔电动势及载流子浓度。

解：此霍尔元件的输出霍尔电动势为

$$U_H = k_H IB = 22\times(1.0\times10^{-3})\times0.3 = 6.6\times10^{-3}\,\mathrm{V} = 6.6\,\mathrm{mV}$$

因为

$$k_H = \frac{R_H}{d} = \frac{1}{ned}$$

所以，此霍尔元件的载流子浓度为

$$n = \frac{1}{k_H ed} = \frac{1}{22\times(1.602\times10^{-19})\times(1\times10^{-3})} = 2.8374\times10^{20}$$

第六章

1. 某压电晶体的电容为 1000pF，电荷灵敏度为 Kq=2.5C/cm，连接电缆电容为 Ce=3000pF，示波器的输入阻抗为 1MΩ，并联电容为 50pF，求

（1） 压电晶体的电压灵敏度；

（2） 测量系统的高频响应；

（3） 如系统允许的测量幅值误差为 5%，可测量的最低频率是多少？

（4） 如频率为 10HZ，允许误差为 5%，用并联连接方式，电容值为多大？

解：

（1） 此压电晶体的电容 Ca=1000pF，故，此压电晶体的电压灵敏度为

$$k_u = \frac{k_q}{C_a} = \frac{2.5}{1000}\times10^{12} = 2.5\times10^{9}\,V/cm$$

（2） 此压电传感器的总有效电容为

$$C = C_a + C_c + C_e = 1000+50+3000 = 4050pF$$

因此，此传感器的高频响应为

$$U_{SC} = \frac{q}{C} = \frac{k_q\Delta\delta}{C} = \frac{2.5}{4050}\Delta\delta\times10^{12} = 6.17\times10^{8}\times\Delta\delta\,(V)$$

其电压灵敏度为

$$k_u = \frac{U_{SC}}{\Delta\delta} = 6.17\times10^{8}\,V/cm$$

（3） 此系统的相对幅频特性为

$$K = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

其中 C=4050pF，R=10^6Ω

因允许误差为 5%，故取 K=0.95，因此允许的角频率下限为

$$\omega_L = \frac{K}{RC}\sqrt{\frac{1}{1-K^2}} = \frac{0.95}{10^6 \times 4050 \times 10^{-12}}\sqrt{\frac{1}{1-0.95^2}} = 751.22$$

因此，允许的频率下限为

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = 119.56 \approx 120Hz$$

（4） 如果已知频率下限为 10Hz，则传感器的总有效电容 C 为

$$C = \frac{K}{\sqrt{1-K^2}}\frac{1}{2\pi fR} = \frac{0.95}{\sqrt{1-0.95^2} \times 2 \times 3.14159 \times 10 \times 10^6} = 48422\,pF$$

因此电路的并联电容应为

$$C_c = C - C_a - C_e = 48422 - 1000 - 3000 = 44422pF = 44.422nF$$

2. 分析压电式加速度传感器的频率响应特性。又若测量电路的 $C_{总}$=1000pF，$R_{总}$=500MΩ，传感器固有频率 f_0=30KHZ，相对阻尼系数 ξ=0.5，求幅值误差在 2%以内的使用频率范围。

解：压电元件受外力作用时，压电元件的两个极性表面将产生电荷，由于输出信号很小，通常将此电信号输入到高输入阻抗的前置放大器 （电压放大器或电荷放大器） 中变换为低阻抗输出信号，由于前置放大器的输入电阻和压电元件的绝缘电阻做到无穷大， 因此，压电电荷就会通过放大器的输入电阻和传感器本身的泄漏电阻漏掉， 这就从原理上决定了压电式传感器不能测量绝对静态物理量。前置放大器的实际输入电压与理想输入电压 （即当 R 无穷大时）之比的相对幅频特性为

$$K = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

式中 τ 为测量回路的时间常数，$\tau = R(C_a + C_C + C_e)$

ω 为作用在压电元件上的频率。

上式决定了压电传感器的低限频率 ω_L，则

$$\tau \ge \frac{1}{\omega_L}$$

据此选择与配置各电阻和电容的值。

由压电式加速度传感器的频响特性决定其高限频率，其幅值比为

$$\left|\frac{x_i}{a_m}\right| = \frac{(\frac{1}{\omega_0})^2}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (2\xi(\frac{\omega}{\omega_0}))^2}}$$

式中 ω_0为传感器的固有频率。

x_i是质量块相对于传感器壳体位移的幅值

a_m是加速度幅值

ξ 是相对阻尼系数

根据题义，把已知数代入以上两式便得

对于低限频率：

$$\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}=1-0.02=0.98=k$$

因此，

$$\omega=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\frac{1}{\tau}=\frac{0.98}{\sqrt{1-0.98^2}}\frac{1}{500\times10^6\times1000\times10^{-12}}=9.90$$

因此，低限频率为

$$f_L=\frac{\omega_L}{2\pi}=\frac{9.90}{2\cdot3.1415927}=1.6Hz$$

对于高限频率：

$$(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_0})^2=|\frac{a_m}{x_i}|^2\left(\frac{1}{\omega_0}\right)^4$$

略去小项 $\left(\frac{1}{\omega_0}\right)^4$，得

$$1-2(\frac{\omega}{\omega_0})^2+(\frac{\omega}{\omega_0})^4+2\times0.5(\frac{\omega}{\omega_0})^2=0$$

解这个方程，略去虚数项，得近似解

$$\frac{\omega}{\omega_0}=0.71$$

因此，$f_H=\frac{\omega_H}{2\pi}=\frac{0.48\times2\times3.1415927\times30K}{2\times3.1415927}=20.7\,\text{kHz}$

故该加速度计使用频率范围为 1.6Hz～20.7KHz 。

3. 石英晶体压电式传感器，面积为 1cm^2，厚度为 1mm，固定在两金属板之间，用来测量通过晶体两面力的变化。材料的弹性模量为 9×10^{10}Pa，电荷灵敏度为 2pC/N，相对介电常数为 5.1，材料相对两面间电阻是 10^{14}Ω。一个 20pF 的电容和一个 100MΩ的电阻与极板并联。若所加力 F=0.01sin(1000t)N ，求：

（1）两极板间电压峰值；（2）晶体厚度的最大变化。

解：（1）

此石英晶体的电阻为 $R_i=10^{14}\Omega$，

石英晶体的电容为 $C_a=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}=\frac{5\times8.85\times10^{-12}\times1\times10^{-4}}{0.1\times10^{-2}}=4.425pF$，

因此，此压电传感器的总有效电容为

$$C = 4.425 + 20 = 24.425\,pF$$

此压电传感器的总有效电阻为

$$R = \frac{10^{14} \cdot 10^{8}}{10^{14} + 10^{8}} = 10^{8}\,\Omega$$

因此，两个极板间的峰值电压为

$$U_a = \left|\frac{q}{C_a}\right| = \left|\frac{k_q F}{C_a}\right| = \frac{2\times10^{-12}\times0.01}{4.425\times10^{-12}} = 4.52mV$$

（2）压电晶体所受力与晶体厚度变化量 Δd 的关系为

$$F = Y \cdot S \cdot \frac{\Delta d}{d}$$

其中， F 为压电晶体所受压力；

Y 为杨式模量；

S 为压电晶体的面积；

D 为压电晶体的厚度。

因此，$\Delta d = \dfrac{F \cdot d}{Y \cdot S} = \dfrac{0.01\times0.1\times10^{-2}}{9\times10^{10}\times1\times10^{-4}} = 1.11\times10^{-12}\,m$

即，压电晶体厚度的最大变化量为 1.11×10^{-12} 米。

第七章

1. 在自由空间，波长 λ =500nm 的光从真空进入金刚石（折射率 n_d=2.4）。在通常情况下，当光通过不同物质时频率不变，试计算金刚石中波的速度和波长。

解：由折射定理知：

$$\frac{v_0}{v_d}=\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_d}=\frac{n_d}{n_0}$$

其中 v0、vd 分别为光在真空和金刚石中的传播速度，因此有

$$v_d=\frac{n_0}{n_d}v_0=\frac{1}{n_d}c=1.25\times10^8 m/s$$

由 v=λ f，且光通过不同物质时频率不变，知，其波长为

$$\lambda_d=\frac{v_d}{f}=\frac{c}{n_d f}=\frac{\lambda}{n_d}=\frac{500}{2.4}=208.33nm$$

2. 利用斯乃尔定理推导出临界角 θ c 表达式，计算水（ n=1.33 ）与空气（n=1）分界面的θ c 的值。

解：由斯乃尔定理知：

$$NA=n_0\sin\theta_c=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

所以，临界角为

$$\theta_c=\arcsin\frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0}$$

本题中，n_0=1, n_2=1, n_1=1.33，因此，临界角为

$$\theta_c=\arcsin\frac{\sqrt{1.33^2-1}}{1}=1.0693=61.267^0$$

3. 求光纤 n_1=1.46，n_2=1.45 的 NA 值；如外部的 n_0=1，求最大入射角 θ m=?

解：

$$NA=n_0\sin\theta_c=\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\sqrt{1.46^{25}-1.45^2}=0.1706$$

最大入射角为

$$\theta_m=\theta_c=\arcsin\frac{NA}{n_0}=\arcsin 0.1706=0.1714=9.8220^0$$