TECNOLOGIAS EDUCATIVAS (E-book):

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

Coleção: APRENDER

Organizadores:

GILMAR BORNATTO

NADIA SANZOVO

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

CÂMPUS PATO BRANCO

Coleção

APRENDER

Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo: perspectivas para o desenvolvimento de competências formativas, utilizando as Tecnologias da Informação e da Comunicação – TIC.

Organização: Nadia Sanzovo – UTFPR/ Pato Branco – Brasil

Colaboração Científica: Joaquim José Jacinto Escola – UTAD/ Vila Real – Portugal

Colaboração Técnica (Pesquisa, seleção e lincagem de material Web):

Anderson Mendes – Bacharelado em Engenharia da Computação
Felix Penna – Licenciatura em Matemática

Volume III – E-book/ Ensino Superior

Bornatto, Gilmar; Sanzovo, Nadia. (Organizadores). **Tecnologias Educativas (e-book)**: Cálculo Diferencial e Integral II. Disponível em: <http://pb.utfpr.edu.br/labvirtual/inicio.html> .

T255 Tecnologias educativas [recurso eletrônico] : cálculo diferencial e integral II/

Organização de Gilmar Bornatto e Nadia Sanzovo ; colaboração de Anderson Mendes e Felix Penna. – Pato Branco : UTFPR, 2016.

v. 1 : il. ; 30 cm. – (Coleção APRENDER.) -

Modo de acesso: Word Wide Web:

<HTTP://>xxxxxxxxxxxxxxx

Inclui bibliografia

ISBN 978-85-xxxxxx (on-line)

Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

Apresentação

Na Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, além da I, está presente nos cursos de Engenharias, Tecnologias e outros cursos que possuem a Matemática como alicerce. É uma das disciplinas que têm como principal objetivo abordar conteúdos gerais que servirão para sustentar aprendizagens posteriores, em disciplinas específicas dos cursos.

Em relação à reprovação em Cálculo II na UTFPR, um levantamento realizado por meio de consulta ao Sistema Acadêmico em um dos dois maiores câmpus da instituição (Câmpus Pato Branco) apontou que os percentuais de reprovação variaram de 37% a 60%, nas turmas de calouros de engenharia, entre os anos de 2010 e 2014. Convém alertar que tais índices não caracterizam uma situação particular dentro da instituição.

Cientes desse entrave, não concebendo como natural o elevado índice de insucesso dos alunos frente a essa disciplina e priorizando efetivamente por uma educação de qualidade, os gestores do câmpus Pato Branco, juntamente com o Departamento de Educação (DEPED) e professores do Departamento de Matemática, têm buscado incessantemente por soluções que amenizem esse problema – o elevado número de reprovações em Cálculo. Dentre as medidas que já foram adotadas estão: oferta de cursos de pré-cálculo (realizadas em formatos diferenciados), oferta de inúmeros horários de monitorias (incluindo monitoria para matemática básica), oferta de horários de atendimento com os professores no período extraclasse, oferta da disciplina em formato EAD (para alunos que já haviam cursado a disciplina presencialmente e reprovado, porém que tiveram frequência superior a 75%).

O Laboratório Virtual da UTFPR - Câmpus Pato Branco está sendo desenvolvido com o intuito de disponibilizar conteúdos organizados – e-book – hospedados por disciplinas na plataforma *Moodle*, num modelo de intersecção e interação, utilizando as tecnologias da informação e comunicação, para criar serviços que dão suporte ao ensino e à pesquisa. Este modelo engloba desde a seleção e organização dos conteúdos até processos de interação e comunicação que favoreçam a criação de comunidades aprendentes (SANZOVO & ESCOLA, 2016).

Dessa forma apresentamos o Volume III – E-book/ Ensino Superior:

Bornatto, Gilmar; Sanzovo, Nadia. (Organizadores). Tecnologias Educativas (e-book): Cálculo Diferencial e Integral II. Disponível em:< http://moodle.pb.utfpr.edu.br/moodle/course/index.php?categoryid=108>.

Esperamos uma vez mais que possa contribuir para a aprendizagem desses conteúdos e também esperamos as críticas e sugestões para a melhoria desses AO (Objetos de Aprendizagem).

Pato Branco, outono de 2017.

Os organizadores!

Capítulo 1

INTEGRAL DEFINIDA

Continuação

Objetivos (ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de):

1. Definir integral inferior e integral superior;
2. Calcular o valor da integral definida por definição;
3. Aplicar o teorema fundamental do cálculo e suas propriedades;
4. Calcular integral definida por substituição de variáveis;
5. Resolver exercícios que envolvam integrais impróprias;
6. Resolver exercícios que envolvam integrais impróprias de funções descontínuas;
7. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas retangulares;
8. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas polares;
9. Calcular áreas delimitadas por funções em coordenadas paramétricas;
10. Calcular volume de um sólido de revolução;
11. Calcular o comprimento de um arco em coordenadas retangulares, paramétricas e polares;
12. Calcular a superfície de um sólido de revolução;
13. Resolver problemas através da integral nas áreas de física, produção, economia entre outras aplicações;
14. Resolver exercícios usando uma ferramenta tecnológica.

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a integral definida. Uma das principais aplicações da integral definida encontra-se em problemas que envolvem cálculo de área e volumes. Por exemplo, seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Nosso propósito é determinar a área da região delimitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$, conforme Figura 1.1 abaixo:

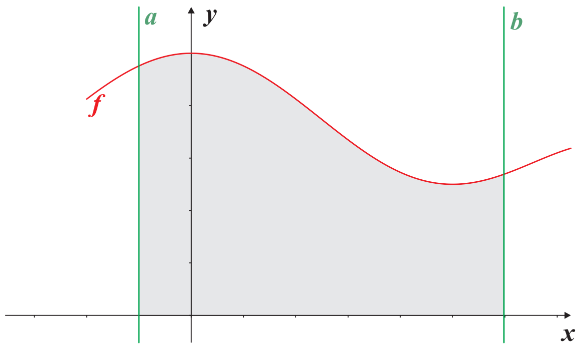


Figura 1.1: Área da região R

Estimando o valor da área R: Sabemos como calcular a área de um retângulo (*base* $\times$ *altura*). A área de um polígono podemos obter subdividindo-o em triângulos e retângulos. No entanto, não é tão fácil encontrar a área de uma região com lados curvos. Assim, parte do problema da área é utilizar uma ideia intuitiva do que é a área de uma região. Recordemos que, para definir uma tangente, primeiro aproximamos a inclinação da reta tangente por inclinações de retas secantes e então tomamos o limite dessas aproximações. Utilizaremos uma ideia semelhante para obter áreas.

Por exemplo para calcular a área da região R vamos dividir o intervalo $[a, b]$ em 2 subintervalos de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{2}$. Denotamos os extremos destes subintervalos por x_i, onde $i \in \{0, 1, 2\}$. Veja que, neste caso, temos $x_0 = a$, $x_1 = c$ e $x_2 = b$. Na Figura 1.2, considere os retângulos de largura Δx e altura $M_i = Max\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

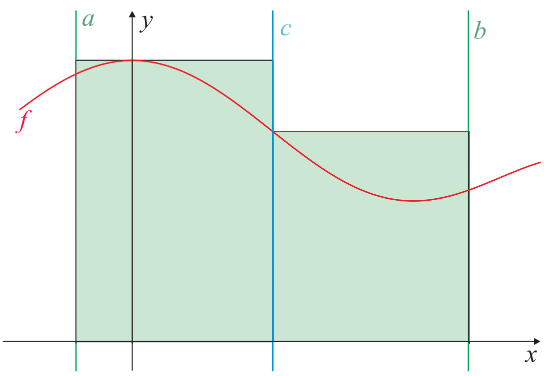


Figura 1.2: Estimativa por soma de áreas de retângulos

Deste modo obtemos um polígono circunscrito a região R cuja área é dada pela soma da área dos dois retângulos. Como a base é a mesma, podemos dizer que a área é dada por $\sum_{i=1}^{2} M_i \Delta x$, onde $M_i = Max\{f(x) : \ x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Você acha que podemos comparar a área da região R representada pela Figura 1.1 e a região formada pelos retângulos da Figura 1.2? A diferença é muito grande? O que aconteceria com esta diferença se dividíssemos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com $n = 3, 4, 5, 6, \cdots$?

A definição formal de integral definida envolve a soma de muitos termos pequenos (diferenciais), com a finalidade de obter-se uma quantidade total após esta operação. Assim há uma conexão entre o cálculo integral e diferencial, onde o Teorema Fundamental do Cálculo relaciona a integral com a derivada. As integrais estão envolvidas em inúmeras situações: usando a taxa (derivada) podemos obter a quantidade (integral) de óleo que vaza de um tanque durante um certo tempo; utilizando a leitura do velocímetro de um ônibus espacial é possível calcular a altura atingida por ele em um dado intervalo de tempo. Assim, pode-se usar a integral para resolver problemas concernentes a volumes, comprimentos de curvas, predições populacionais, saída de sangue do coração, força sobre uma represa, potência consumida e a energia usada em um intervalo de tempo na cidade de Joinville, etc.

O Cálculo da Área

Primeiramente aproximaremos a área da regiã R delimitada por gráficos de funções por soma de áreas de retângulos inscritos ou circunscritos para então tomarmos o limite das áreas desses retângulos, à medida que se aumenta o número destes, conforme a Figura 1.3.

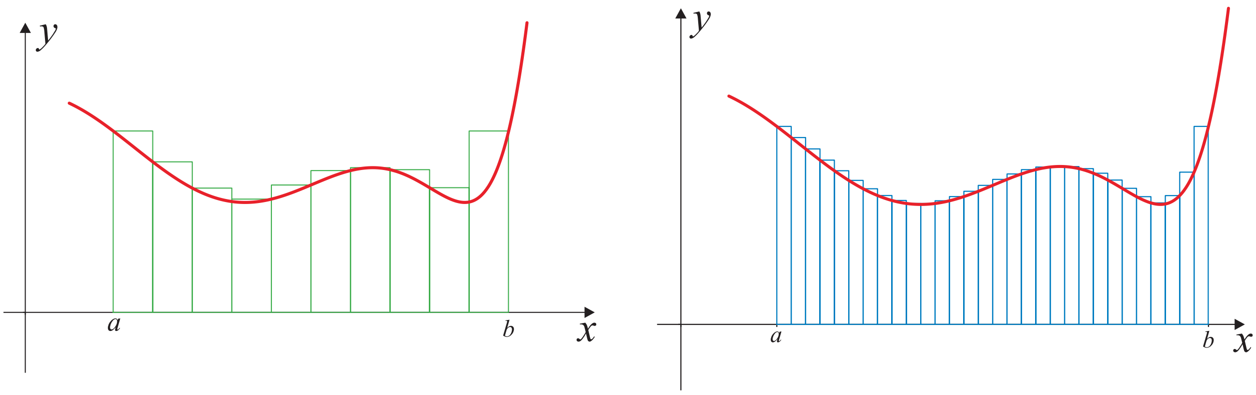


Figura 1.3: Aproximando áreas com n retângulos

E desta forma, a área total desejada será obtida pela soma das áreas retangulares quando suas bases se tornam cada vez menores, isto é, quando $\Delta x \to 0$ (ou equivalentemente, quando o número de retângulos se torna cada vez maior, isto é, $n \to \infty$). Você consegue formalizar, matematicamente, este resultado?

Para dar início a essa formalização, veremos algumas definições auxiliares.

1.2 Partição

Definição 1.2.1 *Seja $[a, b]$ um intervalo. Denominamos partição de $[a, b]$ ao conjunto ordenado de pontos*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\}$$

tais que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

e que dividem $[a, b]$ em n-subintervalos, a saber,

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{i-1}, x_i], ..., [x_{n-1}, x_n],$$

denominados intervalos da partição. Além disso, podemos escrever

$$\begin{aligned}
|[x_0, x_1]| &= x_1 - x_0 = \Delta x_1 \\
|[x_1, x_2]| &= x_2 - x_1 = \Delta x_2 \\
|[x_2, x_3]| &= x_3 - x_2 = \Delta x_3 \\
&\cdots \\
|[x_{i-1}, x_i]| &= x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \\
&\cdots \\
|[x_{n-1}, x_n]| &= x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.2 *Considerando o intervalo* $[1, 12]$, *o conjunto de pontos* $P = \{1, 2, 4, 8, 12\}$ *é uma partição de* $[1, 12]$. *Os intervalos dessa partição são* $[1, 2], [2, 4], [4, 8]$ *e* $[8, 12]$.

Naturalmente, temos $1 = x_0 < 2 = x_1 < 4 = x_2 < 8 = x_3 < 12 = x_4$.

Definição 1.2.3 *Seja* $[a, b]$ *um intervalo e considere*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n\} \quad e \quad Q = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, y_0, \cdots, x_{i,} \cdots, x_n\}$$

duas partições de $[a, b]$. *Dizemos que a partição* Q *é um refinamento da partição* P *se* $P \subset Q$.

Exemplo 1.2.4 *Consideremos o intervalo* $[1, 12]$. *Os conjuntos de pontos*

$$P = \{1, 2, 4, 8, 12\} \quad e \quad Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12\}$$

são duas partições de $[1, 12]$ *com* $P \subset Q$. *Então* Q *é um refinamento de* P.

1.3 Soma Superior

Consideraremos sempre uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida num intervalo fechado $[a, b]$ e limitada nesse intervalo, isto é, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.

Definição 1.3.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e seja* $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\}$ *uma partição de* $[a, b]$, *com* $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. *Seja* M_i *o valor supremo de* f *no intervalo* $[x_{i-1}, x_i]$, *onde* $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. *Denominamos soma superior de* f *em relação à partição* P *e denotamos por* $\overline{S}(f, P)$ *à expressão:*

$$\overline{S}(f, P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + .. + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \quad (1.3.1)$$

Exemplo 1.3.2 *Considere a função* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = xsenx$. *Na Figura 1.4 podemos ver o gráfico de uma soma superior referente a uma partição composta por 15 pontos. Já uma soma superior referente a uma partição com maior número de pontos (80 pontos), é ilustrada pela Figura 1.5.*

Note que, conforme aumentamos o número de pontos da partição, aqui uniformemente distribuídos, a soma superior $\overline{S}(f, P)$ vai se aproximando da área sob o gráfico de $f(x) = x \sin x$, no intervalo $[0, 2]$.

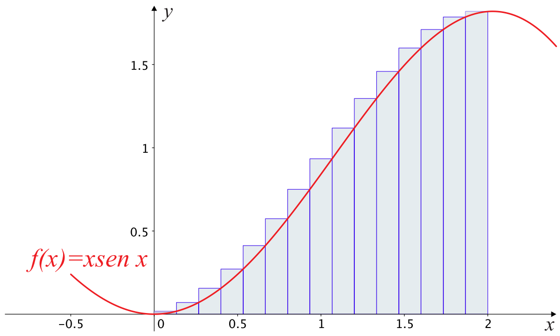


Figura 1.4: Soma Superior, $\overline{S}(f, P)$, P com 15 pontos: $A = 1,863$ u.a.

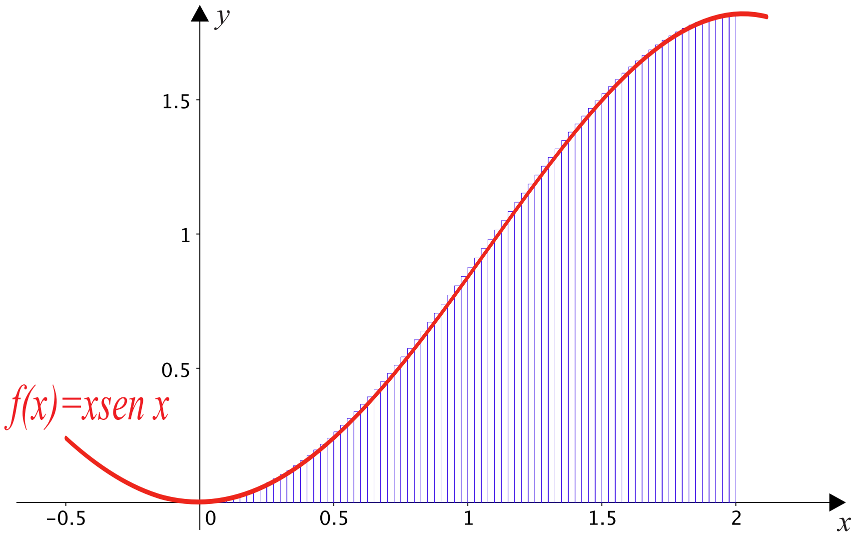


Figura 1.5: Soma Superior, $\overline{S}(f, P)$, P com 80 pontos: $A = 1,746$ u.a.

1.4 Soma Inferior

Definição 1.4.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e seja $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n\}$ uma partição de $[a, b]$, onde $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Seja m_i o valor ínfimo de f no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$. Denominamos soma inferior de f em relação à partição P e denotamos por $\underline{S}(f, P)$ à expressão:*

$$\underline{S}(f, P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}). \quad (1.4.1)$$

Exemplo 1.4.2 *Considere a função $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = xsenx$. Na Figura 1.6 podemos ver o gráfico de uma soma inferior referente a uma partição composta por um número reduzido de pontos (15 pontos) e na Figura 1.7 de uma soma inferior referente a uma partição com maior número de pontos (80 pontos).*

Note que, aumentando o número de pontos de $[a, b]$ a soma inferior $\underline{S}(f, P)$ vai se aproximando da área sob o gráfico de $f(x) = x \sin x$ no intervalo $[0, 2]$.

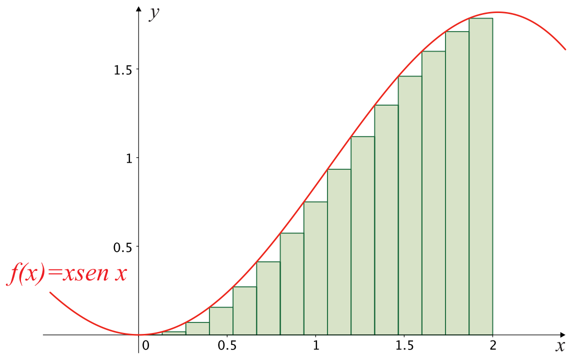


Figura 1.6: Soma Inferior, $\underline{S}(f,P)$, P com 15 pontos: $A = 1,642$ u.a.

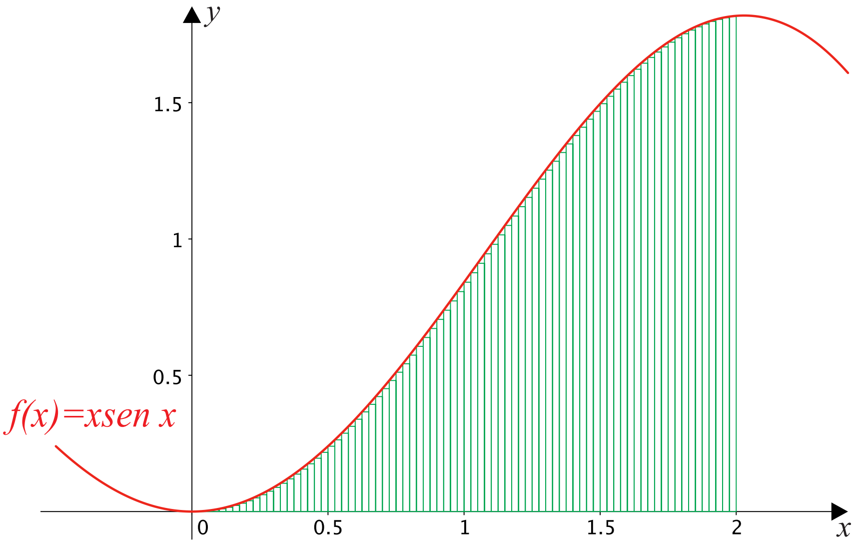


Figura 1.7: Soma Inferior, $\underline{S}(f,P)$, P com 80 pontos: $A = 1,718$ u.a.

1.5 Função Integrável

Definição 1.5.1 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é integrável se*

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f,P) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f,P)$$

ou seja, se

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

sendo $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ qualquer partição de $[a,b]$.

No caso de uma função integrável, denotaremos a **integral definida de f de a até b** por

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(w_i)(x_i - x_{i-1}), \ \textit{onde} \quad w_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Observação 1.5.2 *As somas superiores e inferiores acima definidas são casos particulares de* **Somas de Riemann,** *que são quaisquer expressões da forma $S = \sum_{i=1}^{n} f(w_i)\Delta x_i$, onde $w_i \in [x_{i-1}, x_i]$ não é necessariamente um máximo ou um mínimo de f em cada subintervalo* *da partição considerada, nem Δx_i é necessariamente constante. No entanto, em nossos propósitos, não iremos considerar esses casos mais gerais.*

Ainda, como $f(x)$ pode ser negativa, certos termos de uma soma superior ou inferior também podem ser negativos. Consequentemente, nem sempre $\underline{S}(f,P)$ e $\overline{S}(f,P)$ irão representar uma soma de áreas de retângulos. De forma geral, estas somas representam a soma das áreas dos retângulos situados acima do eixo-x (onde $f \geq 0$) com o negativo das áreas dos retângulos que estão situados abaixo deste eixo (onde $f \leq 0$).

Observação 1.5.3 *Para calcular integrais definidas usando a definição de somas superiores ou inferiores, serão usadas as seguintes expressões:*

(i) $\underbrace{1+1+1+...+1}_{k\ vezes} = k$

(ii) $1+2+3+...+k = \dfrac{(1+k)k}{2}$

(iii) $1^2+2^2+3^2+...+k^2 = \dfrac{k\,(k+1)\,(2k+1)}{6}$

(iv) $1^3+2^3+3^3+...+k^3 = \dfrac{k^2\,(k+1)^2}{4}$

(v) $1^4+2^4+3^4+...+k^4 = \dfrac{k\,(k+1)\,(6k^3+9k^2+k-1)}{30}$

Exemplo 1.5.4 *Usando a definição de soma superior, encontre a área delimitada pelas curvas $y = x^2+1$, $x=0$, $x=4$ e $y=0$ (sabendo que a função é integrável).*

Solução: Tomamos $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma partição do intervalo $[0,4]$, conforme ilustra a Figura 1.8

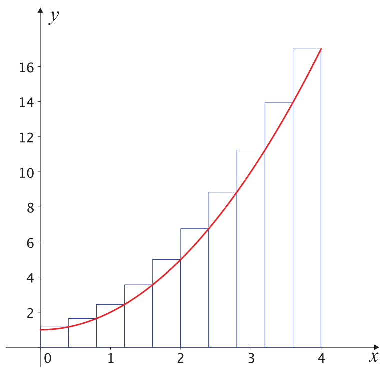


Figura 1.8: Soma Superior de $f(x) = x^2+1$ com 10 retângulos

Como os subintervalos da partição podem ser quaisquer, podemos admitir que todos possuem o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$. Portanto, temos que $\Delta x = \dfrac{4-0}{n} = \dfrac{4}{n}$ e podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ como sendo

$$x_0 = 0,\ x_1 = \Delta x,\ x_2 = 2\Delta x,\ x_3 = 3\Delta x, ...,\ x_n = n\Delta x.$$

Seja M_i o supremo de $f(x) = x^2 + 1$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como neste exemplo temos uma função crescente, o máximo de f em cada subintervalo ocorre no seu extremo direito, ou seja, $M_i = f(x_i)$. Assim, a soma superior de f é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + ... + M_n\Delta x \\
&= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x \\
&= f(\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + f(3\Delta x)\Delta x + ... + f(n\Delta x)\Delta x \\
&= \Delta x[(\Delta x)^2 + 1 + (2\Delta x)^2 + 1 + (3\Delta x)^2 + 1 + ... + (n\Delta x)^2 + 1] \\
&= \Delta x[1 + 1 + ... + 1 + (\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^2 + 9(\Delta x)^2 + ... + n^2(\Delta x)^2] \\
&= \Delta x[n + \Delta x^2(1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)] \\
&= \Delta x\left(n + \Delta x^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= \frac{4}{n}\left(n + \frac{4^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\
&= 4 + \frac{64}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
&= 4 + \frac{32}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 4 + \frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{32}{3n^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é dada por

$$\int_0^4 (x^2+1)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(4 + \frac{64}{3} + \frac{32}{n} + \frac{32}{3n^2}\right) = \frac{76}{3}.$$

Agora, se desejarmos encontrar a soma inferior de f, quais modificações deveremos efetuar nos cálculos acima? Sugere-se que o estudante refaça este exercício, prestando bastante atenção no que ocorre com as alturas dos retângulos inscritos e nas consequências deste fato.

Exemplo 1.5.5 *Usando a definição de soma inferior, encontre a área delimitada pelas curvas* $y = 16 - x^2$, $x = 1$, $x = 4$ *e* $y = 0$ *(sabendo que a função é integrável).*

Solução: Tomamos $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma partição do intervalo $[1, 4]$, conforme ilustra a Figura 1.9

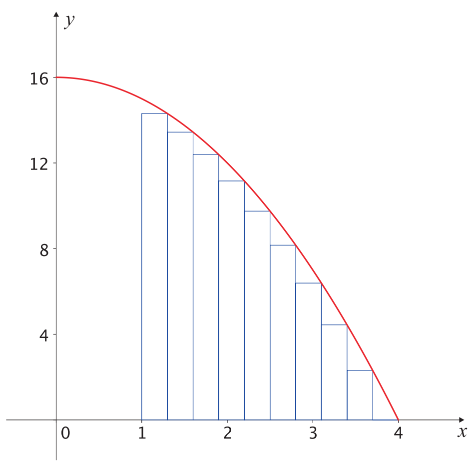


Figura 1.9: Soma Inferior de $f(x) = 16 - x^2$ com 10 retângulos

Como os subintervalos da partição podem ser quaisquer, podemos admitir que todos possuem o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$. Portanto, temos que $\Delta x = \dfrac{4-1}{n} = \dfrac{3}{n}$ e podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ como sendo

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \Delta x,\ x_2 = 1 + 2\Delta x,\ x_3 = 1 + 3\Delta x,\ \cdots,\ x_n = 1 + n\Delta x.$$

Seja m_i o ínfimo de $f(x) = 16 - x^2$ no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como no intervalo $[1, 4]$ a função é decrescente, o mínimo de f em cada subintervalo ocorre no seu extremo direito, ou seja, $m_i = f(x_i)$. Assim, a soma inferior de f é dada por

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,P) &= m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x + ... + m_n\Delta x \\
&= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + ... + f(x_n)\Delta x \\
&= f(1+\Delta x)\Delta x + f(1+2\Delta x)\Delta x + f(1+3\Delta x)\Delta x + ... + f(1+n\Delta x)\Delta x \\
&= [16-(1+\Delta x)^2 + 16 - (1+2\Delta x)^2 + 16 - (1+3\Delta x)^2 + \cdots + 16 - (1+n\Delta x)^2]\Delta x \\
&= 16n\Delta x + [1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 + 2\cdot 2\Delta x + (2\Delta x)^2 + 1 + 2\cdot 3\Delta x + (3\Delta x)^2 + \\
&\quad + \cdots + 1 + 2\cdot n\Delta x + (n\Delta x)^2]\Delta x \\
&= 16n\Delta x - n\Delta x - 2(1+2+3+\cdots+n)(\Delta x)^2 - (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)(\Delta x)^3 \\
&= 15n\Delta x - 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\cdot(\Delta x)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot(\Delta x)^3 \\
&= 15n\cdot\frac{3}{n} - 9\cdot\frac{n^2+n}{n^2} - 9\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{2n^3} \\
&= 45 - 9 - \frac{9}{n} - 9 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2} = 27 - \frac{45}{2n} - \frac{9}{2n^2}
\end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é dada por

$$\int_1^4 (16-x^2)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(27 - \frac{45}{2n} - \frac{9}{2n^2}\right) = 27.$$

Observação 1.5.6 *Até o momento não exigimos que a função seja contínua. Isso porque a condição de continuidade não é necessária para que uma função seja integrável. Daqui para frente só trabalharemos com funções contínuas. A integrabilidade de funções não contínuas não será objeto de nosso estudo.*

Propriedades das Integrais

Se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são funções integráveis, então são válidas as seguintes propriedades:

i. Se $f(x)$ é uma função constante, i.e., $f(x) = c$ então $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$.

ii. Se k é uma constante então $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.

iii. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

iv. Se $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

v. Se $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, então $m\,(b-a) \leq \int_a^b f\,(x)\,dx \leq M\,(b-a)\,.$

vi. Se $c \in [a,b]$ então $\int_a^b f\,(x)\,dx = \int_a^c f\,(x)\,dx + \int_c^b f\,(x)\,dx.$

vii. A troca dos limitantes de integração acarreta a mudança no sinal da integral definida, ou seja,

$$\int_a^b f\,(x)\,dx = -\int_b^a f\,(x)\,dx.$$

viii. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Exemplo 1.5.7 *Determine a soma superior e a soma inferior para $f(x) = x^2 - 2x + 2$ no intervalo $[-1,2]$. A seguir, utilize-as para calcular a área da região situada abaixo do gráfico de f e entre as retas $y = 0$, $x = -1$ e $x = 2$.*

Solução: A Figura 1.10 ilustra o gráfico da soma superior de f referente a uma partição composta de 15 pontos. Observe que as alturas dos retângulos circunscritos não possuem o mesmo comportamento em todo o intervalo. Isso ocorre porque a função é decrescente no intervalo $[-1,1]$ e crescente em $[1,2]$. Para obter a expressão para a soma superior de f usaremos a Propriedade vi. Tomaremos uma partição para o intervalo $[-1,1]$ e outra para o intervalo $[1,2]$.

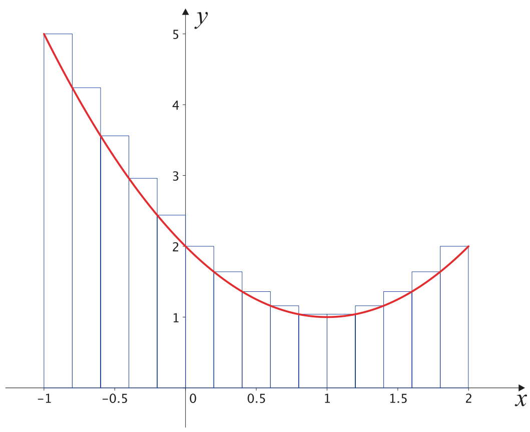


Figura 1.10: Soma Superior de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ com 15 retângulos

Soma Superior para o intervalo $[-1,1]$

Seja $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma partição do intervalo $[-1,1]$, de tal forma que todos os subintervalos de P possuam o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$. Portanto, temos que a base de cada um dos retângulos é dada por $\Delta x = \dfrac{1-(-1)}{n} = \dfrac{2}{n}$ e assim podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ como sendo

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1 + \Delta x, \quad x_2 = -1 + 2\Delta x, \quad x_3 = -1 + 3\Delta x, \quad \cdots, \quad x_n = -1 + n\Delta x.$$

Agora vamos determinar as alturas dos retângulos circunscritos. Seja M_i o supremo de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ no subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Como neste intervalo a função é decrescente o máximo de f em cada subintervalo ocorre no seu extremo esquerdo, ou seja, $M_i = f(x_{i-1})$. Assim, a soma superior de f é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + \cdots + M_n\Delta x \\
&= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x \\
&= f(-1)\Delta x + f(-1+\Delta x)\Delta x + f(-1+2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(-1+(n-1)\Delta x)\Delta x \\
&= \Delta x\{5 + \left[(-1+\Delta x)^2 - 2(-1+\Delta x) + 2\right] + \left[(-1+2\Delta x)^2 - 2(-1+2\Delta x) + 2\right] + \\
&\quad + \cdots + \left[(-1+(n-1)\Delta x)^2 - 2(-1+(n-1)\Delta x) + 2\right]\} \\
&= \Delta x\{5 + \left[(1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2) + 2 - 2\Delta x + 2\right] + \left[1 - 4\Delta x + 2^2(\Delta x)^2 + 2 - 4\Delta x + 2\right] + \\
&\quad + \cdots + \left[1 - 2(n-1)\Delta x + (n-1)^2(\Delta x)^2 + 2 - 2(n-1)\Delta x + 2\right]\} \\
&= \Delta x\{5 + \left[5 - 4\Delta x + (\Delta x)^2\right] + \left[5 - 8\Delta x + 2^2(\Delta x)^2\right] + \\
&\quad + \cdots + \left[5 - 4(n-1)\Delta x + (n-1)^2(\Delta x)^2\right]\} \\
&= \Delta x\left[5n - 4\Delta x\,(1 + 2 + \cdots + (n-1)) + (\Delta x)^2\left(1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\right)\right] \\
&= \frac{2}{n}\cdot\left[5n - 4\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{(n-1)n\,(2n-1)}{6}\right] \\
&= \frac{2}{n}\cdot\left[5n - 4(n-1) + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2n^2-3n+1}{n}\right)\right] \\
&= 2 + \frac{8}{n} + \frac{4}{3}\cdot\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.
\end{aligned}$$

Soma Superior para o intervalo $[1,2]$

Seja $Q = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ uma partição do intervalo $[1,2]$, de tal forma que todos os subintervalos de Q possuam o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \cdots = \Delta x_n$. Portanto, temos que a base de cada um dos retângulos é dada por $\Delta x = \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ e assim podemos atribuir valores para cada $x_i \in Q$ como sendo

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 1+\Delta x,\quad x_2 = 1+2\Delta x,\quad x_3 = 1+3\Delta x,\ \cdots,\ x_n = 1+n\Delta x.$$

Como neste intervalo a função é decrescente as alturas dos retângulos circunscritos, M_i, ocorre no extremo direito de cada subintervalo, i.e., $M_i = f(x_i)$. Assim a soma superior de f em $[1,2]$ relativa a partição Q é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,Q) &= M_1\Delta x + M_2\Delta x + M_3\Delta x + \cdots + M_n\Delta x \\
&= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\
&= [f(1+\Delta x) + f(1+2\Delta x) + f(1+3\Delta x) + \cdots + f(1+n\Delta x)]\Delta x \\
&= \{[(1+\Delta x)^2 - 2(1+\Delta x) + 2] + [(1+2\Delta x)^2 - 2(1+2\Delta x) + 2] + \\
&\quad +[(1+3\Delta x)^2 - 2(1+3\Delta x) + 2] + \cdots + [(1+n\Delta x)^2 - 2(1+n\Delta x) + 2]\}\Delta x \\
&= \{[1+(\Delta x)^2] + [1+(2\Delta x)^2] + [1+(3\Delta x)^2] + \cdots + [1+(n\Delta x)^2]\}\Delta x \\
&= n\Delta x + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)(\Delta x)^3 \\
&= n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}
\end{aligned}$$

Portanto, a soma superior de f em $[-1,2]$ é

$$\overline{S}(f,P\cup Q) = \frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = 6 + \frac{9}{2n} + \frac{3}{2n^2}.$$

Para determinar a soma inferior de f, basta encontrar as alturas dos retângulos inscritos. A Figura 1.11 ilustra o gráfico da soma inferior de f referente a uma partição composta de 15 pontos. Observe que as alturas dos retângulos inscritos não possuem o mesmo comportamento em todo o intervalo. Isso ocorre porque a função é decrescente no intervalo $[-1, 1]$ e crescente em $[1, 2]$. Para obter a expressão para a soma inferior de f usaremos novamente a Propriedade vi, tomando uma partição para o intervalo $[-1, 1]$ e outra para o intervalo $[1, 2]$.

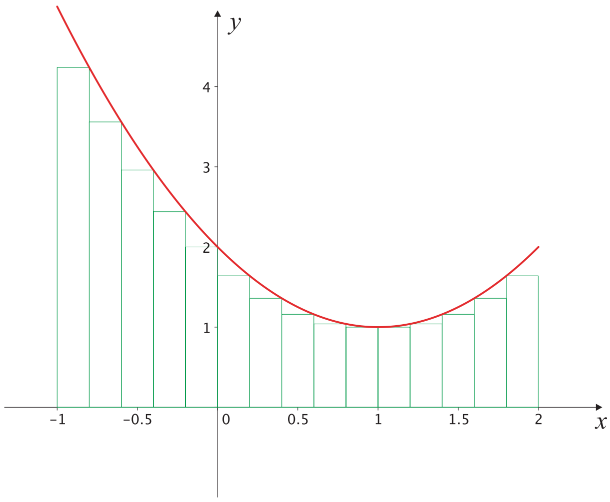


Figura 1.11: Soma Inferior de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ com 15 retângulos

Soma Inferior para o intervalo $[-1, 1]$

Considere a partição P tomada acima. A altura dos retângulos inscritos, m_i, ocorre no extremo direito de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i.e., $m_i = f(x_i)$.

Assim, a soma inferior de f em $[-1, 1]$, relativa a partição P, é dada por

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, P) &= m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x + \cdots + m_n\Delta x \\
&= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x \\
&= f(-1 + \Delta x)\Delta x + f(-1 + 2\Delta x)\Delta x + f(-1 + 3\Delta x)\Delta x + \cdots + f(-1 + n\Delta x)\Delta x \\
&= \Delta x\big\{ \big[(-1 + \Delta x)^2 - 2(-1 + \Delta x) + 2\big] + \big[(-1 + 2\Delta x)^2 - 2(-1 + 2\Delta x) + 2\big] + \\
&\quad + \cdots + \big[(-1 + n\Delta x)^2 - 2(-1 + n\Delta x) + 2\big] \big\} \\
&= \Delta x\big\{ \big[1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 2 - 2\Delta x + 2\big] + \big[1 - 4\Delta x + 2^2(\Delta x)^2 + 2 - 4\Delta x + 2\big] + \\
&\quad + \cdots + \big[1 - 2n\Delta x + n^2(\Delta x)^2 + 2 - 2n\Delta x + 2\big] \big\} \\
&= \Delta x \left\{\left[5 - 4\Delta x + (\Delta x)^2\right] + \left[5 - 8\Delta x + 2^2(\Delta x)^2\right] + \cdots + \left[5 - 4n\Delta x + n^2(\Delta x)^2\right]\right\} \\
&= \Delta x \left[5n - 4\Delta x\,(1 + 2 + \cdots + n) + (\Delta x)^2 \left(1 + 2^2 + \cdots + n^2\right)\right] \\
&= \frac{2}{n} \cdot \left[5n - 4 \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{(n+1)n}{2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}\right] \\
&= \frac{2}{n} \cdot \left[5n - 4(n+1) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n}\right)\right] \\
&= 2 - \frac{8}{n} + \frac{4}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{14}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.
\end{aligned}$$

Soma Inferior para o intervalo $[1, 2]$

Considere a partição Q tomada acima. A altura dos retângulos inscritos, m_i, ocorre no extremo esquerdo de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i.e., $m_i = f(x_{i-1})$.

Assim, a soma inferior de f em $[1, 2]$, relativa a partição Q, é dada por

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, Q) &= m_1\Delta x + m_2\Delta x + m_3\Delta x + \cdots + m_n\Delta x \\
&= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x \\
&= f(1)\Delta x + f(1+\Delta x)\Delta x + f(1+2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(1+(n-1)\Delta x)\Delta x \\
&= \Delta x\{1 + \big[(1+\Delta x)^2 - 2(1+\Delta x) + 2\big] + \big[(1+2\Delta x)^2 - 2(1+2\Delta x) + 2\big] + \\
&\quad + \cdots + \big[(1+(n-1)\Delta x)^2 - 2(1+(n-1)\Delta x) + 2\big]\} \\
&= \Delta x\{1 + [1 + (\Delta x)^2] + [1 + (2\Delta x)^2] + \cdots + [1 + ((n-1)\Delta x)^2]\} \\
&= n\Delta x + [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2](\Delta x)^3 \\
&= n \cdot \frac{1}{n} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, a soma inferior de f em $[-1, 2]$ é

$$\underline{S}(f, P \cup Q) = \frac{14}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = 6 - \frac{9}{2n} + \frac{3}{2n^2}.$$

Finalmente, utilizando a soma superior de f, obtemos que a área da região desejada é dada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x + 2)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - 2x + 2)dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{14}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) + \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{14}{3} + \frac{4}{3} = 6.
\end{aligned}$$

Note que obteríamos o mesmo resultado utilizando a soma inferior de f.

Exemplo 1.5.8 *Utilize a* **definição de integral definida** *para determinar a área da região R delimitada por $f(x) = 9$ e $g(x) = x^2$, com $x \leq 0$, sabendo que f e g são funções integráveis.*

Solução: A região R está sombreada na Figura 1.12.

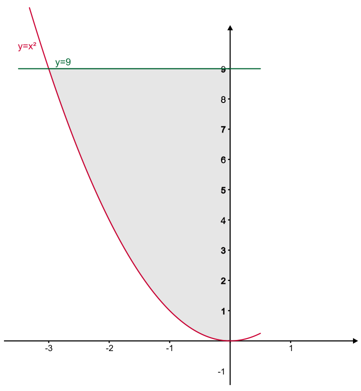


Figura 1.12: Região R

A área da região R pode ser interpretada como sendo a área da região R_1 menos a área da região R_2, onde R_1 é a região retangular limitada pelas curvas $y = g(x)$, $y = 0$, $x = -3$ e $x - 0$ e R_2 é a região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -3$ e $x - 0$.

Área de R_1 : $A_{R_1} = \int_{-3}^{0} 9dx = 9[0 - (-3)] = 27$u.a. (usando as propriedades de integral definida).

Área de R_2 : Os retângulos inscritos na região R_2 estão representados na Figura 1.13. A área

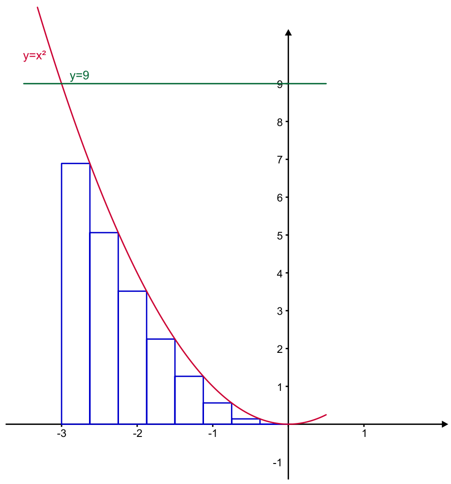


Figura 1.13: Soma inferior da região R_2 com 7 retângulos

de R_2 é dada por $A_{R_2} = \int_{-3}^{0} x^2 dx$ usando somas de áreas de retângulos inscritos tomamos uma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[-3, 0]$, de tal forma que todos os subintervalos de P possuam o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$. Portanto, temos que a base de cada um dos retângulos é dada por $\Delta x = \dfrac{0 - (-3)}{n} = \dfrac{3}{n}$ e assim podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ como sendo

$$x_0 = -3, \;\; x_1 = -3 + \Delta x, \;\; x_2 = -3 + 2\Delta x, \cdots, \;\; x_n = -3 + n\Delta x.$$

Agora vamos determinar as alturas dos retângulos inscritos. Como neste exemplo temos uma função decrescente, cada retângulo inscrito atinge sua altura no ponto x_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, ou seja, a altura de cada retângulo é $g(x_i) = x_i^2$. Assim, a soma de Riemann de g relativa a partição P e com as alturas definidas é dada por

$$\begin{aligned}
\underline{S}(g, P) &= \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\Delta x \\
&= [(-3 + \Delta x)^2 + (-3 + \Delta x)^2 + \cdots + (-3 + \Delta x)^2]\Delta x \\
&= \left[\left(9 - 6\Delta x + (\Delta x)^2\right) + \left(9 - 6 \cdot 2\Delta x + (2\Delta x)^2\right) + \cdots + \left(9 - 6 \cdot n\Delta x + (n\Delta x)^2\right)\right] \Delta x \\
&= 9n\Delta x - 6(\Delta x)^2(1 + 2 + \cdots + n) + (\Delta x)^3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\
&= 27 - \frac{54}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 27 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= 9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}
\end{aligned}$$

Portanto, usando retângulos inscritos obtemos que

$$A_{R_2} = \lim_{n \to +\infty} \left(9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \right) = 9\text{u.a.}.$$

Logo, a área da região R é

$$A_R = A_{R_1} - A_{R_2} = 27 - 9 = 18\text{u.a.}.$$

Exemplo 1.5.9 *Utilize soma de áreas de retângulos inscritos para calcular* $\displaystyle\int_0^4 (-x^2 - 1)dx$.

Solução: O gráfico de $f(x) = -x^2 - 1$ e os retângulos inscritos na região de integração R da integral desejada estão representados na Figura 1.14.

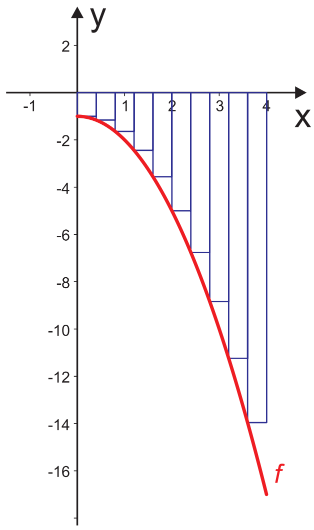


Figura 1.14: Retângulos inscritos na região R

Para calcular $\displaystyle\int_0^4 (-x^2 - 1)dx$ usando somas de áreas de retângulos inscritos tomamos uma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ do intervalo $[0, 4]$, de tal forma que todos os subintervalos de P possuam o mesmo diâmetro, isto é, $\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = ... = \Delta x_n$. Portanto, temos que a base de cada um dos retângulos é dada por $\Delta x = \frac{4-(0)}{n} = \frac{4}{n}$ e assim podemos atribuir valores para cada $x_i \in P$ como sendo

$$x_0 = 0, \;\; x_1 = \Delta x, \;\; x_2 = 2\Delta x, \cdots, \;\; x_n = n\Delta x.$$

Agora vamos determinar as alturas dos retângulos inscritos. Como neste exemplo temos uma função decrescente e negativa, cada retângulo inscrito atinge sua altura no ponto x_{i-1}, $i = 1, 2, \cdots, n$, ou seja, a altura de cada retângulo é $f(x_{i-1})$. Assim, a soma de Riemann de

f relativa a partição P e com as alturas definidas é dada por

$$\begin{aligned}
S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \\
&= [f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_{n-i})]\Delta x \\
&= \left\{-1+[-(\Delta x)^2-1]+[-(2\Delta x)^2-1]+\cdots+[-((n-1)\Delta x)^2-1]\right\}\Delta x \\
&= -n\Delta x-[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2](\Delta x)^3 \\
&= -n\cdot\frac{4}{n}-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\cdot\left(\frac{4}{n}\right)^3 \\
&= -4-\frac{32(2n^2-3n+1)}{3n^2} = -4-\frac{64}{3}+\frac{32}{n}-\frac{32}{3n^2}
\end{aligned}$$

Portanto, usando áreas de retângulos inscritos obtemos que

$$\int_0^4 (-x^2-1)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{76}{3}+\frac{32}{n}-\frac{32}{3n^2}\right) = -\frac{76}{3}.$$

1.5.10 Teorema do Valor Médio para Integrais

Teorema 1.5.11 *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua, então existe $c\in[a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.*

Exemplo 1.5.12 *No Exemplo 1.5.4 obtemos que $\int_0^4 (x^2+1)dx = \frac{76}{3}$. Determine, se existir, um número que satisfaça o teorema do valor médio para esta integral.*

Solução: Como $f(x)=x^2+1$ é uma função contínua no intervalo $[0,4]$ o Teorema do Valor Médio para Integrais garante que existe $c\in(0,4)$ de modo que

$$\int_0^4 (x^2+1)dx = f(c)(4-0).$$

Assim,

$$c^2+1=\frac{76}{4\cdot 3}\Rightarrow c^2=\frac{16}{3}\Rightarrow c=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Observe que $c=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ não está no intervalo que procuramos a solução. Portanto, $c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ satisfaz a conclusão do Teorema 1.5.11.

O Teorema do Valor Médio para Integrais tem uma interpretação geométrica interessante se $f(x)\geq 0$ em $[a,b]$. Neste caso $\int_a^b f(x)dx$ é a área sob o gráfico de f de a até b, e o número $f(c)$ do Teorema 1.5.11 é a ordenada do ponto P do gráfico de f com abscissa c (veja a Figura 1.15) Traçando-se uma reta horizontal por P a área da região retangular limitada por essa reta, pelo eixo x e pelas reta $x=a$ e $x=b$ é $f(c)(b-a)$ e que, pelo Teorema 1.5.11, é a mesma que a área sob o gráfico de f de a até b.

Observação 1.5.13 *O número c do Teorema 1.5.11 não é necessariamente único. De fato, se f for uma função constante então qualquer número c pode ser utilizado.*

Observação 1.5.14 *O número $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ é dito valor médio de f em $[a,b]$.*

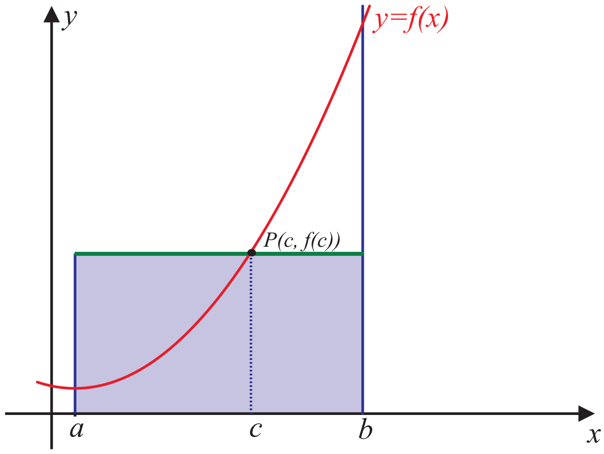


Figura 1.15: Interpretação geométrica do Teorema 1.5.11

1.6 Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua integrável. Vamos fixar o limite inferior a e variar o limite superior. Definiremos a função

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad \forall x \in [a, b].$$

Caso $f(t)$ seja sempre positiva, então $F(x)$ será numericamente igual a área do trapezóide curvilíneo da Figura 1.16.

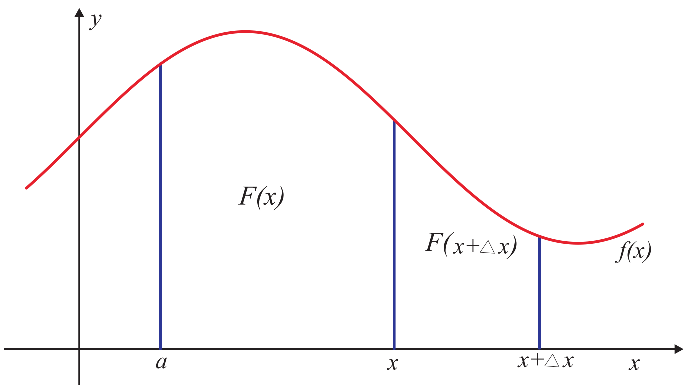


Figura 1.16: Representação geométrica de $F(x)$

Teorema 1.6.1 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, então a função $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ é uma primitiva da função f, ou seja, $F'(x) = f(x)$.*

Demonstração: Utilizando a definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt, \end{aligned}$$

porém, pelo Teorema 1.5.11, sabemos que existe $c \in [x, x+\Delta x]$ tal que

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$$

e portanto

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(c)$$

quando $\Delta x \to 0$ temos que $c \to x$ como f é contínua, obtemos que $f(c) \to f(x)$ e assim fica demonstrado que

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

■

Uma consequência desse teorema é o corolário que segue:

Corolário 1.6.2 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for contínua no intervalo $[a,b]$, então $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é derivável em (a,b) e $F'(x) = f(x)$.*

A função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida acima, é denominada primitiva de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e pelo Teorema 1.6.1 toda função contínua num intervalo $[a,b]$ possui primitiva em $[a,b]$.

Teorema 1.6.3 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ for contínua em $[a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

onde G é qualquer primitiva de f, isto é, uma função tal que $G' = f$.

Demonstração: Seja $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Pelo Teorema 1.6.1 sabemos que $F'(x) = f(x)$, isto é, F é uma primitiva de f. Se G for qualquer outra primitiva de f em $[a,b]$, então elas diferem por uma constante, isto é,

$$G(x) = F(x) + c.$$

Assim,

$$G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

Trocando t por x obtemos

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

como queríamos demonstrar. ■

A notação usual é

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)\Big|_a^b.$$

O teorema fundamental do cálculo permite que sejam determinadas as integrais definidas das funções contínuas em intervalos fechados sem usar o método visto para encontrar somas superiores e inferiores.

Exemplo 1.6.4 *Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo encontre a área sob o gráfico de* $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 + 1$.

Solução: Pelo Teorema 1.6.3 a área desejada é dada por

$$A = \int_0^4 (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3} + x\Big|_0^4 = \frac{64}{3} + 4 = \frac{76}{3}.$$

Compare este resultado com o resultado obtido no Exemplo 1.5.4.

Exemplo 1.6.5 *Calcule a área da região situada entre o eixo* x *e a curva* $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)$, *com* x *no intervalo de* $[-2, 4]$.

Solução: Uma representação gráfica pode ser visualizada na figura 1.17.

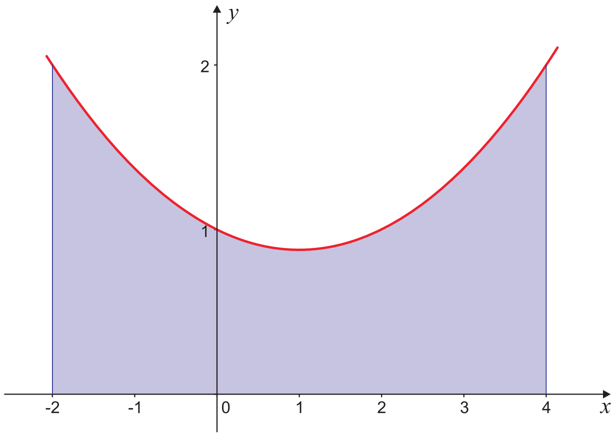


Figura 1.17: Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)$

Pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^4 \frac{1}{8}(x^2 - 2x + 8)dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right)\Big|_{-2}^4 \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{4^3}{3} - 4^2 + 8(4) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 8(-2)\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{64}{3} - 16 + 32 + \frac{8}{3} + 4 + 16\right] = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}\ u.a.
\end{aligned}$$

1.6.6 Fórmulas Clássicas para Resolver Integrais (Revisão)

Para utilizar o teorema fundamental do cálculo, é essencial que se saiba obter a primitiva (anti-derivada) de uma função. Vamos então relembrar, do cálculo I, alguns processos clássicos de integração que serão muito úteis na resolução de problemas que envolvem integral definida.

i. Mudança de Variável

Teorema 1.6.7 *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que g' é integrável e $g([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ e, além disso $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$. Então*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t)\, dt.$$

Demonstração: Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ uma função derivável com g' integrável e $g([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$ com $g(\alpha) = a$ e $g(\beta) = b$. Então f possui uma primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ e, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)).$$

Por outro lado, pela regra da cadeia temos que

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))\, g'(t) = f(g(t))\, g'(t)$$

para todo $t \in [\alpha, \beta]$, consequentemente,

$$(F \circ g)(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$$

é uma primitiva da função integrável $f(g(t))\, g'(t)$. Portanto, obtém-se:

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))\, g'(t)\, dt = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

■

Exemplo 1.6.8 *Calcular a integral definida $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$, usando o Teorema 1.6.7.*

Solução: Primeiro vamos encontrar a função $g(t)$. Seja $t = \sqrt{x-1}$ (note que $t \geq 0$), então podemos escrever $x = t^2 + 1$ e assim obtemos $g(t) = t^2 + 1$, cuja derivada é $g'(t) = 2t$. Vamos agora determinar os valores de α e β. Como temos que $g(\alpha) = a = 1$ e $g(\beta) = b = 5$ segue que

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \\ \beta^2 + 1 = 5 \quad &\Rightarrow \quad \beta^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2. \end{aligned}$$

Na sequência, determinaremos $f(g(t))$. Como $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$, obtemos

$$f(g(t)) = \frac{\sqrt{g(t) - 1}}{g(t)} = \frac{\sqrt{t^2 + 1 - 1}}{t^2 + 1} = \frac{t}{t^2 + 1}.$$

Finalmente, vamos determinar o valor da integral, usando o Teorema 1.6.7, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx &= \int_0^2 \frac{t}{t^2+1}2tdt = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \\
&= 2\int_0^2 \frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}dt = 2\int_0^2 dt - 2\int_0^2 \frac{dt}{t^2+1} = \\
&= 2t\Big|_0^2 - 2\arctan t\Big|_0^2 = 4 - 2\arctan 2.
\end{aligned}$$

ii. Integração por partes

TEOREMA 1.6.9 *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções que possuem derivadas integráveis, então*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Na prática, costumamos chamar

$$\begin{array}{lcl}
u = f(x) & \Rightarrow & du = f'(x)dx \\
dv = g'(x)dx & \Rightarrow & v = g(x)
\end{array}$$

e substituindo na igualdade acima, obtemos:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

EXEMPLO 1.6.10 *Determine o valor da integral* $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx$.

Solução: Nesse caso, fazemos:

$$\begin{array}{rcl}
u = \sin^2 x & \Rightarrow & du = 2\sin x\cos x dx \\
dv = \sin x dx & \Rightarrow & v = \int \sin x dx = -\cos x
\end{array}$$

e encontramos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx &= \sin^2 x(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\cos x(2\sin x\cos x)dx \\
&= -\sin^2 x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\sin x dx \\
&= (-\sin^2 x\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{24}.
\end{aligned}$$

1.7 Integrais Impróprias

Definição 1.7.1 *Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in [a, +\infty)$. Definimos*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

desde que o limite exista.

Exemplo 1.7.2 *Encontre o valor numérico da integral* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

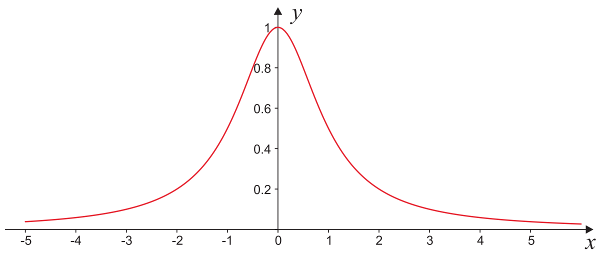


Figura 1.18: Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Solução: Veja o gráfico de f na Figura 1.18. Pela definição 1.7.1 temos que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \arctan x\Big|_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Definição 1.7.3 *Seja $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in (-\infty, b]$. Definimos*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx,$$

desde que o limite exista.

Exemplo 1.7.4 *Encontre o valor numérico da integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx$.

Solução: Pela definição 1.7.3 temos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_a^0 \\ &= \lim_{a\to-\infty} [\arctan 0 - \arctan a] = -\lim_{a\to-\infty} \arctan a = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Definição 1.7.5 *Seja $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua para todo $x \in (-\infty, +\infty)$. Definimos*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx,$$

desde que os limites existam.

Exemplo 1.7.6 *Encontre o valor numérico da integral* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

Solução: Pela definição 1.7.5, tomando $c = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \arctan x \Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to+\infty} \arctan x \Big|_{0}^{b} \\
&= \lim_{a\to-\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b\to+\infty} (\arctan b - \arctan 0) \\
&= \lim_{a\to-\infty} \arctan a + \lim_{b\to+\infty} \arctan b \\
&= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

1.8 Integral de uma Função Descontínua num Ponto c $\in [a, b]$

Definição 1.8.1 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* $[a, b]$*, exceto no ponto* $c \in [a, b]$*. Definimos*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\alpha\to c^-} \int_{a}^{\alpha} f(x)\, dx + \lim_{\beta\to c^-} \int_{\beta}^{b} f(x)\, dx,$$

desde que os limites acima existam.

Exemplo 1.8.2 *Encontre o valor numérico da integral* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx$.

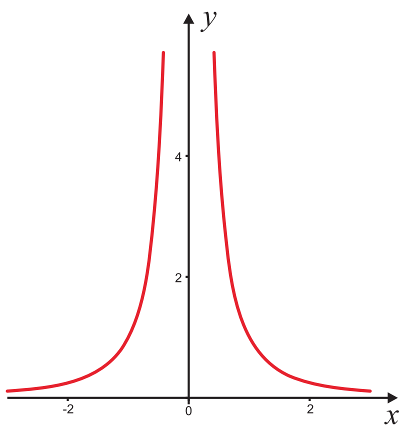


Figura 1.19: Área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Solução: O integrando é contínuo em todo ponto pertencente ao intervalo $[-1, 1]$, exceto em $x = 0$ (observe a Figura 1.19). Pela definição 1.8.1, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{\alpha \to 0^-} \int_{-1}^{\alpha} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\beta \to 0^+} \int_{\beta}^{1} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{\alpha \to 0^-} \left. \frac{-1}{x} \right|_{-1}^{\alpha} + \lim_{\beta \to 0^+} \left. \frac{-1}{x} \right|_{\beta}^{1} \\
&= \lim_{\alpha \to 0^-} \left[\frac{-1}{\alpha} - \left(\frac{-1}{-1} \right) \right] + \lim_{\beta \to 0^+} \left[-1 - \left(\frac{-1}{\beta} \right) \right] \\
&= [+\infty - 1] + [-1 + \infty] = +\infty
\end{aligned}$$

Consequentemente, a função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ não é integrável no intervalo $[-1, 1]$.

Observação 1.8.3 *Quando os limites que aparecem nas definições anteriores existem e são finitos, dizemos que a integral imprópria* **converge**. *Caso contrário, ou seja, quando um dos limites não existir, dizemos que a integral imprópria* **diverge.**

Exemplo 1.8.4 *Classifique as integrais abaixo em* **convergente** *ou* **divergente**.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+4} |x| e^x dx$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$.

Solução (a):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+4} |x| e^x dx &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} -x e^x dx + \int_{0}^{4} x e^x dx \\
&= \lim_{a \to -\infty} \left(\left. -x e^x \right|_{a}^{0} - \int_{a}^{0} -e^x dx \right) + \left. x e^x \right|_{0}^{4} - \int_{0}^{4} e^x dx \\
&= \lim_{a \to -\infty} \left(0 + a e^a + e^0 - e^a \right) + 4e^4 - 0 - (e^4 - 1) \\
&= \lim_{a \to -\infty} a e^a - \lim_{a \to -\infty} e^a + 3e^4 + 1 \\
&= \lim_{a \to -\infty} \frac{a}{e^{-a}} + 3e^4 + 1 = \lim_{a \to -\infty} \frac{1}{-e^{-a}} + 3e^4 + 1 = 3e^4 + 1
\end{aligned}$$

ou seja, a integral converge.

Solução (b):

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx &= \lim_{a \to \frac{\pi}{2}^-} \int_{0}^{a} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx + \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^+} \int_{b}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx \\
&= \lim_{a \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\left. \frac{1}{\cos x} \right|_{0}^{a} \right] + \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^+} \left[\left. \frac{1}{\cos x} \right|_{b}^{\pi} \right] \\
&= \lim_{a \to \frac{\pi}{2}^-} \left[\frac{1}{\cos a} - 1 \right] + \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^+} \left[-1 - \frac{1}{\cos b} \right] \\
&= +\infty - 2 + \infty = +\infty
\end{aligned}$$

ou seja, a integral diverge.

1.9 Aplicações da Integral Definida

1.9.1 Área em coordenadas retangulares

Vimos que, se uma função f for não negativa, isto é, $f(x) \geq 0$ para todo x no intervalo $[a, b]$, então a área da região delimitada pelas curvas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = f(x)$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

No caso mais geral, estaremos interessados em calcular a área da região situada entre os gráficos de duas funções f e g, com $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, de acordo com a Figura 1.20.

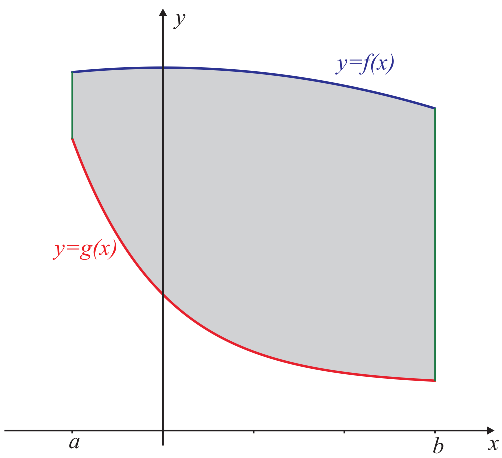


Figura 1.20: Região entre duas curvas

Nesta situação, devemos utilizar uma diferença de áreas e obter que

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

Na expressão acima, o termo $f(x) - g(x)$ corresponde à altura de um retângulo infinitesimal de base dx.

Note que, se uma função g for negativa, isto é, se $g(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$, a área da região situada entre as curvas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e $y = g(x)$ será dada por

$$A = \int_a^b [0 - g(x)]\,dx = -\int_a^b g(x)dx.$$

Exemplo 1.9.2 *Calcule a área da região situada entre o eixo x e o gráfico da função $f(x) = 2x$, com x no intervalo $[-2, 2]$.*

Solução: A representação gráfica de f pode ser observada na Figura 1.21. Como esta função tem imagem negativa no intervalo $[-2, 0]$ e não negativa no intervalo $[0, 2]$, devemos proceder como segue

$$A = \int_{-2}^0 (0 - 2x)dx + \int_0^2 (2x - 0)dx = \int_{-2}^0 -2xdx + \int_0^2 2xdx = -x^2\Big|_{-2}^0 + x^2\Big|_0^2 = 8\ u.a.$$

Logo, a área sob o gráfico da função $f(x) = 2x$, no intervalo $[-2, 2]$, é igual a 8 unidades de área.

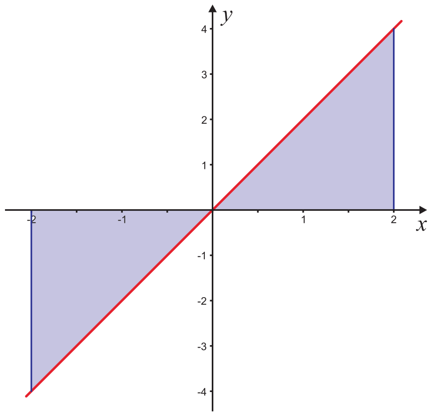


Figura 1.21: Área entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = 2x$

Exemplo 1.9.3 *Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.*

Solução: Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Devemos determinar este intervalo encontrando os pontos de interseção das curvas.

Para isso, basta resolver o sistema de equações $\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$. É fácil ver que a solução vem da igualdade $x^2 = \sqrt{x}$ e os valores de x que tornam essa sentença verdadeira são $x = 0$ e $x = 1$. Desse modo, a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ fica determinada se $x \in [0, 1]$.

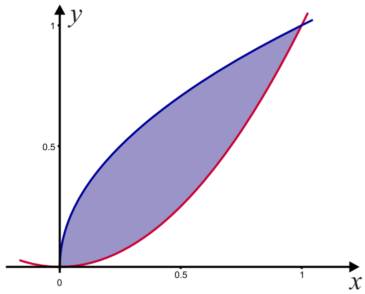


Figura 1.22: Região delimitada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

De acordo com a Figura 1.22, podemos observar que a área desejada pode ser obtida através da diferença entre as áreas das regiões situadas sob o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e sob o gráfico de $y = x^2$, com $x \in [0, 1]$.

Assim, temos que

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ u.a.$$

Portanto, a área desejada é igual a $\dfrac{1}{3}$ unidades de área.

Exemplo 1.9.4 *Calcule a área da região hachurada na Figura 1.23.*

Solução: Primeiro vamos identificar a lei que define as funções lineares presentes no gráfico. Uma reta passa pelos pontos (0,0) e (1,1) e a outra passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(2, \frac{1}{2})$. Portanto

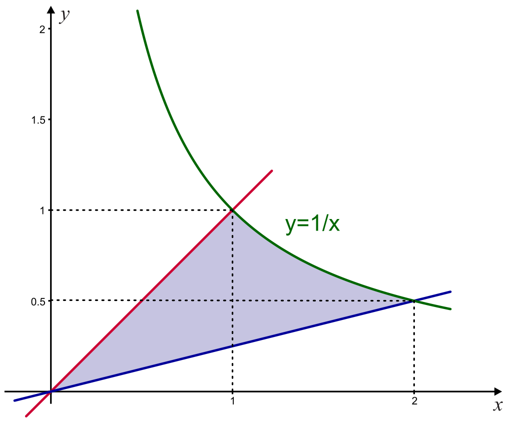


Figura 1.23: Região hachurada do Exemplo 1.9.4

as equações destas retas são $y = x$ e $y = \frac{x}{4}$, respectivamente. Existem várias maneiras de calcular esta área, uma delas está apresentada a seguir:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{4}x\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x\right) dx \\
&= \frac{3}{4}\int_0^1 x dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4}\int_1^2 x dx \\
&= \frac{3}{8}x^2\Big|_0^1 + \left(\ln|x| - \frac{1}{8}x^2\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{3}{8} + \ln(2) - \frac{1}{2} - \left(\ln(1) - \frac{1}{8}\right) \\
&= \frac{4}{8} - \frac{1}{2} + \ln(2) = \ln(2)\ u.a.
\end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é igual a $\ln(2)$ unidades de área.

Exemplo 1.9.5 *Achar a área da região delimitada pelos gráficos de $y + x^2 = 6$ e $y + 2x = 3$.*

Solução: Inicialmente, encontramos as interseções das curvas:

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow\ 6 - x^2 = 3 - 2x\ \Rightarrow\ x^2 - 2x - 3 = 0\ \Rightarrow\ x = -1 \text{ ou } x = 3.$$

A seguir, fazemos a representação gráfica da área delimitada, conforme ilustra a Figura 1.24.

Podemos então obter a área desejada calculando a área sob a parábola e descontando a área sob a reta, no intervalo de $[-1, 3]$, ou seja,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^3 [(6 - x^2) - (3 - 2x)]dx \\
&= \int_{-1}^3 (3 - x^2 + 2x)dx \\
&= 3x - \frac{x^3}{3} + x^2\Big|_{-1}^3 \\
&= 9 - \frac{27}{3} + 9 - (-3 + \frac{1}{3} + 1) = \frac{32}{3} \text{ u.a.}
\end{aligned}$$

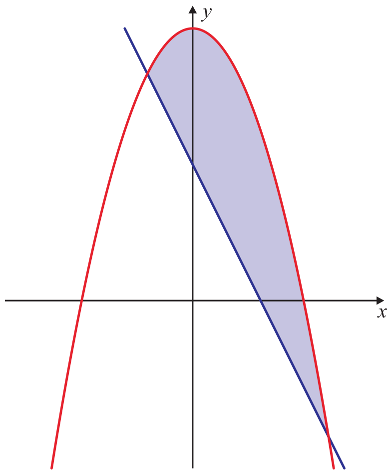


Figura 1.24: Área delimitada por $y + x^2 = 6$ e $y + 2x = 3$.

Portanto, a área desejada é igual a $\dfrac{32}{3}$ unidades de área.

Exemplo 1.9.6 *Encontre o valor da área delimitada pelas curvas* $y = x^2$, $y = 2 - x^2$ *e* $y = 2x + 8$.

Solução: Inicialmente vamos fazer uma representação gráfica, conforme ilustra a Figura 1.25. Na sequência, vamos encontrar as interseções das curvas.

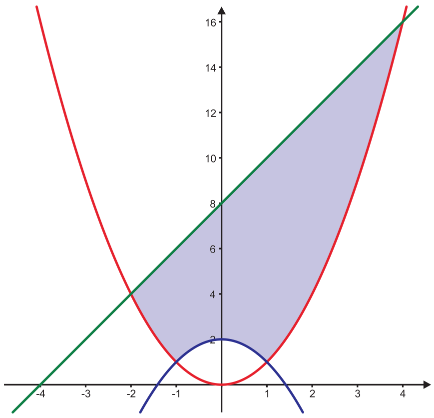


Figura 1.25: Região delimitada por $y = x^2,\ y = 2 - x^2$ e $y = 2x + 8$

Para a reta e a parábola, temos o sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$ cujas soluções são $x = 4,\ y = 16$ e $x = -2,\ y = 4$.

Para as duas parábolas, temos os sistemas $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$ cujas soluções são $x = 1,\ y = 1$ e $x = -1,\ y = 1$.

Como ocorre duas trocas no limitante inferior da região, devemos dividir a área desejada em três partes, a saber:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-2}^{-1} (2x+8) - (x^2)dx = \int_{-2}^{-1} (2x+8-x^2)dx = \frac{8}{3}, \\
A_2 &= \int_{-1}^{1} (2x+8) - (2-x^2)dx = \int_{-1}^{1} (2x+6+x^2)dx = \frac{38}{3}, \\
A_3 &= \int_{1}^{4} (2x+8) - (x^2)dx = 18.
\end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é dada por

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{8}{3} + \frac{38}{3} + 18 = \frac{100}{3} \ u.a.$$

Exemplo 1.9.7 *Calcule, de duas formas distintas, a área da região delimitada pelas curvas* $x = y + 1$ *e* $x = y^2 - 1$.

Solução: Iniciamos com a representação geométrica da região, que está esboçada na Figura 1.26. A seguir, devemos encontrar os pontos de interseção entre as curvas, igualando suas

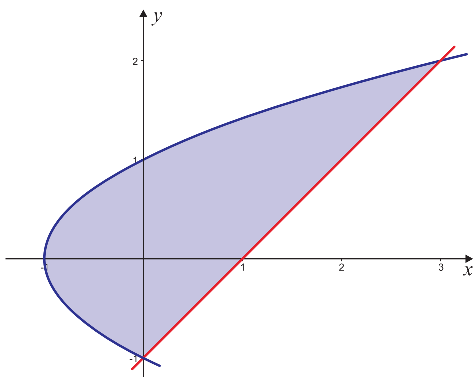


Figura 1.26: Região entre as curvas $x = y + 1$ e $x = y^2 - 1$

equações, obtendo

$$y^2 - 1 = y + 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 - y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \quad \text{e} \quad y = 2$$

e ainda,

$$y = -1 \ \Rightarrow \ x = 0 \qquad \text{e} \qquad y = 2 \ \Rightarrow \ x = 3.$$

Uma primeira forma de calcular a área desejada é proceder como nos exemplos anteriores, onde tomamos x como variável de integração. Para isso, devemos isolar y em função de x, obtendo

$$y = x - 1 \quad \text{e} \quad y = \pm\sqrt{x+1}.$$

Note que o sinal positivo na última equação corresponde à porção da parábola situada acima do eixo x e o sinal negativo corresponde a parte situada abaixo do eixo.

Como ocorre troca na limitação inferior da região, devemos tomar uma soma de integrais para calcular sua área, conforme segue

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} \sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1})dx + \int_{0}^{3} \sqrt{x+1} - (x-1)dx \\
&= \int_{-1}^{0} 2\sqrt{x+1}dx + \int_{0}^{3} (\sqrt{x+1} - x + 1)dx \\
&= \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{x^2}{2} + x\Bigg|_{0}^{3} \\
&= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{9}{2} + 3 - \frac{2}{3} = \frac{9}{2}\ u.a.
\end{aligned}$$

Uma segunda maneira de calcular esta área é mantendo y como variável independente e tomar a integração em relação a y. Neste caso, a curva superior está situada à direita,ou seja, é a reta $x = y+1$ e a curva inferior está situada à esquerda, ou seja, é a parábola $x = y^2 - 1$. Como desta forma não ocorre troca de limitação, podemos calcular a área tomando uma única integral

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} (y+1) - (y^2 - 1)dy \\
&= \int_{-1}^{2} (y - y^2 + 2)dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y\Bigg|_{-1}^{2} \\
&= 2 - \frac{8}{3} + 4 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}\ u.a.
\end{aligned}$$

Observe que a troca da variável de integração resultou numa expressão cuja integral era mais simples de ser resolvida. Desta forma, é importante saber escrever integrais que permitem calcular áreas tomando tanto x quanto y como variáveis de integração, para depois optar por resolver aquela que se mostrar mais simples.

Exemplo 1.9.8 *Escreva a(s) integral(is) que permite(m) calcular a área da região delimitada* **simultaneamente** *pelas curvas de equações* $y = \sqrt{x-2}$, $x + y = 2$ *e* $x + 2y = 5$, *tomando:*

(a) integração em relação a x. *(b) integração em relação a y.*

Solução: Iniciamos com a representação geométrica da região, esboçada na Figura 1.27. Note que temos apenas o ramo superior da parábola, pois $y = \sqrt{x-2} \geq 0$.

O próximo passo é obter as interseções entre as curvas.

Entre as duas retas, temos o sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, cuja solução é $x = -1$, $y = 3$.

Entre a parábola e uma das retas, temos o sistema $\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ x + y = 2 \end{cases}$, cuja solução é $x = 2$, $y = 0$.

E entre a outra reta e a parábola, temos o sistema $\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, cuja solução é $x = 3$, $y = 1$.

Agora podemos montar as integrais que permitem calcular a área desejada.

(a) Tomando integração em relação a x, devemos isolar y em função de x,obtendo $y = \dfrac{5-x}{2}$

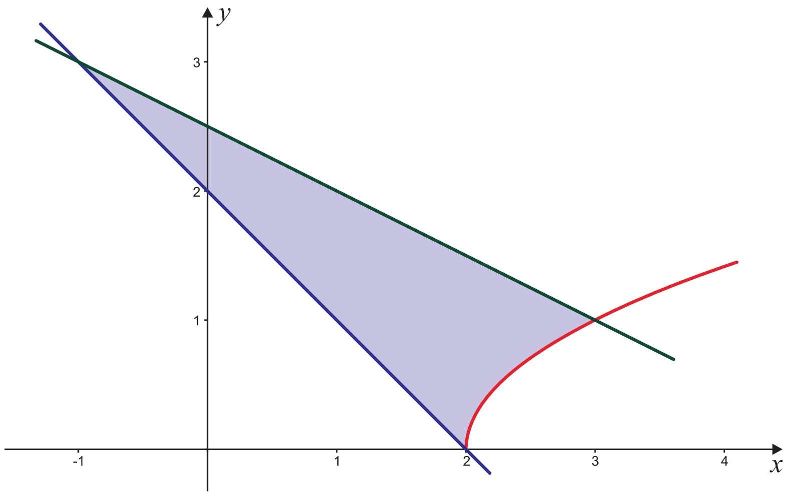


Figura 1.27: Região delimitada por $y = \sqrt{x-2}$, $x + y = 2$ e $x + 2y = 5$

para a reta superior, $y = 2-x$ para a reta inferior e $y = \sqrt{x-2}$ para a parábola, que também é um limitante inferior. Como ocorre troca na limitação inferior em $x = 2$, precisamos de duas integrais.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left[\left(\frac{5-x}{2} \right) - (2-x) \right] dx + \int_{2}^{3} \left[\left(\frac{5-x}{2} \right) - (\sqrt{x-2}) \right] dx \\ &= \int_{-1}^{2} \frac{1+x}{2} dx + \int_{2}^{3} \left(\frac{5-x}{2} - \sqrt{x-2} \right) dx. \end{aligned}$$

(b) Tomando integração em relação a y, devemos isolar x em função de y, obtendo $x = 5-2y$ para a reta superior, $x = 2 - y$ para a reta inferior e $x = y^2 + 2$ para a parábola, que neste caso também é um limitante superior. Como ocorre troca na limitação superior em $y = 1$, necessitamos também de duas integrais.

$$\begin{aligned} A &= \int_{0}^{1} \left[(y^2+2) - (2-y) \right] dy + \int_{1}^{3} \left[(5-2y) - (2-y) \right] dy \\ &= \int_{0}^{1} (y^2+y) dy + \int_{1}^{3} (3-y)\, dy. \end{aligned}$$

Neste exemplo, as duas expressões obtidas envolvem soma de integrais. Mesmo assim, é fácil notar que a expressão na qual y é a variável independente é a mais simples de ser resolvida. Assim, se o enunciado solicitasse que fosse calculado o valor numérico da área em questão, deveríamos optar por resolver esta expressão.

Exemplo 1.9.9 *A área de uma determinada região R pode ser calculada pela expressão*

$$A = \int_{1}^{2} \left[(2x^2) - (2\sqrt{x}) \right] dx + \int_{2}^{4} \left[(-2x+12) - (2\sqrt{x}) \right] dx.$$

(a) Represente geometricamente a região R.

(b) Escreva a área de R usando y como variável independente.

Solução (a): Interpretando a expressão da área dada acima temos: Quando x varia de 1 até 2 a limitação superior é $y = 2x^2$ e a limitação inferior é $y = 2\sqrt{x}$ e enquanto x

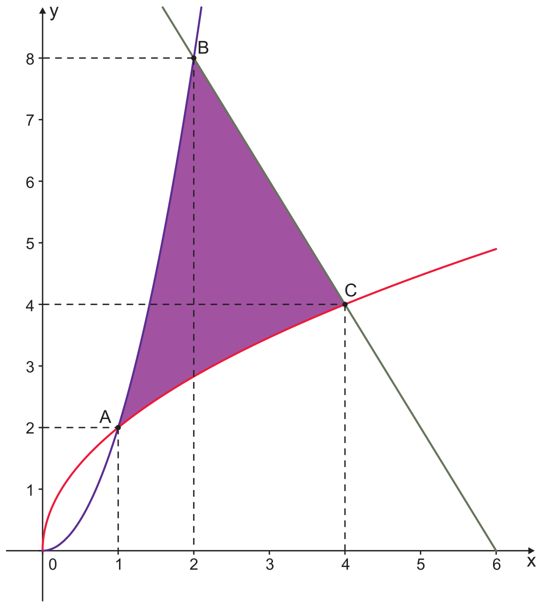


Figura 1.28: Região R

varia de 2 até 4 o limitante superior é $y = -2x + 12$ e o inferior continua sendo $y = 2\sqrt{x}$. Logo, temos que a região R é delimitada superiormente pelas curvas $y = 2x^2$, $y = -2x + 12$ e inferiormente por $y = 2\sqrt{x}$ e sua representação geométrica está sombreada na Figura 1.28.

Solução (b): Os pontos de interseção são

$A: \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow (1,2);$ $B: \begin{cases} y = 2x^2 \\ y = -2x + 12 \end{cases} \Rightarrow (2,8)$ e

$C: \begin{cases} y = -2x + 12 \\ y = 2\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow (4,4).$

Logo, usando y como variável independente para escrever a área de R temos

$$A = \int_2^4 \left(\frac{y^2}{4} - \sqrt{\frac{y}{2}} \right) dy + \int_4^8 \left(\frac{12 - y}{2} - \sqrt{\frac{y}{2}} \right) dy.$$

1.9.10 Área delimitada por curvas escritas em equações paramétricas

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, cujo gráfico delimita uma região R. A seguir, vamos obter uma nova expressão para a área da região R, utilizando as equações paramétricas $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$, com $t \in [\alpha, \beta]$, da curva descrita por f. Para isto, basta lembrar que a área de uma região retangular é dada por

$$A = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b y dx.$$

Agora, fazendo a substituição $y = \psi(t)$ e $dx = \phi'(t)dt$ e supondo que $a = \phi(\alpha)$ e $b = \phi(\beta)$ obtemos a expressão para o cálculo de área em coordenadas paramétricas:

$$A = \int_\alpha^\beta \psi(t)\phi'(t)dt.$$

Exercício Resolvido

Exemplo 1.9.11 *Encontre a área delimitada pela elipse* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Solução: As equações paramétricas da elipse dada são

$$x=\phi\left(t\right)=a\cos t \qquad \text{e} \qquad y=\psi\left(t\right)=b\sin t.$$

Desse modo, temos que

$$dx=\phi'\left(t\right)dt=-a\sin t dt$$

Vamos agora determinar os valores de α e β. Utilizando a quarta parte da área desejada, temos que x varia de 0 até a. Assim, podemos fazer $x=\phi\left(\alpha\right)=0$ e $x=\phi\left(\beta\right)=a$. Logo

$$\begin{gathered}\phi\left(\alpha\right)=0\Rightarrow a\cos\alpha=0\Rightarrow\cos\alpha=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}\\ \phi\left(\beta\right)=a\Rightarrow a\cos\beta=a\Rightarrow\cos\beta=1\Rightarrow\beta=0.\end{gathered}$$

Agora, para obter a área total interna à elipse basta utilizar a simetria da região e obter que

$$\begin{aligned}A &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t dt\\ &= 4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 2ab\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-0\right)=ab\pi.\end{aligned}$$

Exemplo 1.9.12 *Calcular a área da região que é interior a elipse* $E_1=\begin{cases}x=2\cos t\\ y=4\sin t\end{cases}$ *e exterior a elipse* $E_2=\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$.

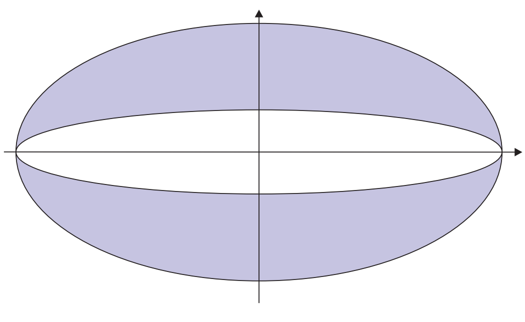


Figura 1.29: Região entre as elipses.

Solução: A região cuja área desajamos calcular pode ser vista na Figura 1.29. Novamente, podemos utilizar argumentos de simetria e calcular a área da região situada no primeiro quadrante do plano xy e multiplicar o resultado por quatro. Neste quadrante, temos que $x\in[0,2]$. No entanto

$$\begin{gathered}x=0\Rightarrow 2\cos t=0\Rightarrow t=\tfrac{\pi}{2}\\ x=2\Rightarrow 2\cos t=2\Rightarrow\cos t=1\Rightarrow t=0,\end{gathered}$$

logo, para descrever a região que nos interessa, em coordenas paramétricas, devemos integrar de $t = \frac{\pi}{2}$ até $t = 0$. Assim, notando que neste exemplo devemos tomar a diferença entre as áreas sob as elipses E_1 e E_2, obtemos

$$\begin{aligned} A &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} [4\sin t(-2\sin t)dt - 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin t(-2\sin t)]dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (-32\sin^2 t + 8\sin^2 t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -24\sin^2 t dt \\ &= 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt = \left(12t - \frac{12}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi \ u.a. \end{aligned}$$

1.9.13 Área de um setor curvilíneo em coordenadas polares

No final deste capítulo apresentamos uma breve revisão sobre coordenadas polares.

Seja $r = f(\theta)$ uma função contínua que descreve uma curva em coordenadas polares, no intervalo $[\alpha, \beta]$. Como nosso interesse é determinar a área da região delimitada por $r = f(\theta)$ vamos tomar uma partição do intervalo $[\alpha, \beta]$, conforme ilustra a Figura 1.30.

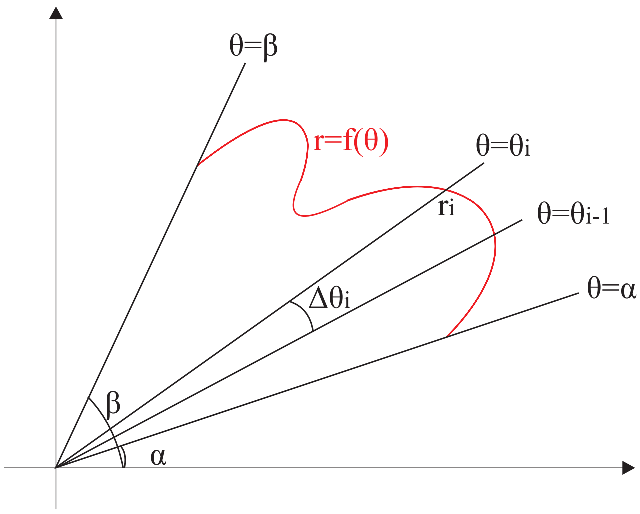


Figura 1.30: Região Polar, com $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ e $r_i = f(\theta_i)$.

Seja $X = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_n\}$ uma partição de $[\alpha, \beta]$ em que

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < ... < \theta_n = \beta.$$

Sejam $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \Delta\theta_3, ..., \Delta\theta_n$ os subarcos da partição X e seja r_i o comprimento do raio correspondente a um ângulo $\xi_i \in \Delta\theta_i$, isto é, $\theta_{i-1} \leq \xi_i \leq \theta_i$.

A área do setor circular de raio r_i e arco $\Delta\theta_i$ é dada por

$$A_i = \frac{1}{2}(r_i)^2 \Delta\theta_i$$

e a área aproximada área da região delimitada por $r = f(\theta)$ é dada por

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(r_i)^2 \Delta\theta_i.$$

Seja $|\Delta\theta|$ o subintervalo de maior diâmetro da partição X. Então, se n tender a infinito teremos que $|\Delta\theta|$ tenderá a zero. Desse modo poderemos escrever

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{|\Delta\theta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(r_i)^2 \Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

ou seja,

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta, \tag{1.9.1}$$

que nos fornece uma expressão para o cálculo de áreas delimitadas por curvas em coordenadas polares.

Exemplo 1.9.14 *Determine a área da região que é simultaneamente exterior à cardióide $r = 1 - \cos\theta$ e interior ao círculo $r = 1$.*

Solução: A Figura 1.31 ilustra a região considerada.

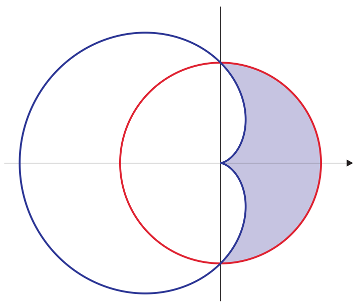


Figura 1.31: Região delimitada por um cardióide e por uma circunferência.

Como esta região é simétrica em relação ao eixo x, podemos calcular o dobro da área da porção situada no primeiro quadrante do plano xy. Neste quadrante, temos que o ângulo polar θ varia no intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainda, devemos notar que a área desejada é dada, em coordenadas polares, pela diferença entres as áreas da circunferência e da cardióide. Assim, usando a expressão 1.9.1, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1^2 d\theta - \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta - \cos^2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta - \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) d\theta = 2\sin\theta - \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, a área desejada é igual $2 - \dfrac{\pi}{4}$ unidades de área.

Exemplo 1.9.15 *Escreva, em coordenadas polares, a integral que calcula a área da região simultaneamente exterior à circunferência $r = 1$ e interior a rosácea $r = 2\cos(2\theta)$.*

Solução: A Figura 1.32 ilustra a região desejada. Para determinar os pontos de interseção das duas curvas fazemos

$$2\cos(2\theta) = 1 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ (no } 1^o \text{ quadrante).}$$

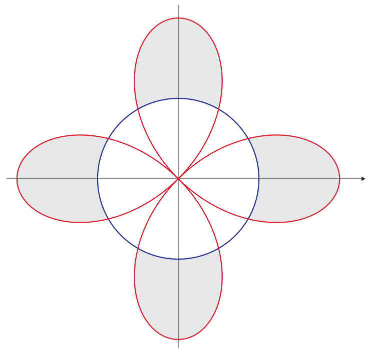


Figura 1.32: Região delimitada por uma rosácea e uma circunferência

Vamos calcular a área da região delimitada com θ no intervalo de $[0, \frac{\pi}{6}]$ e multiplicar por 8, já que as demais áreas são simétricas. Utilizando a Fórmula 1.9.1 e verificando que a área desejada é igual a área da rosácea menos a área da circunferência, obtemos

$$A = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} [(2\cos(2\theta))^2 - (1)^2] d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (4\cos^2(2\theta) - 1) d\theta.$$

Exemplo 1.9.16 *Escreva a integral que permite calcular a área da região que é simultaneamente interior as curvas $r = 5\cos\theta$ e $r = 5\sqrt{3}\sin\theta$.*

Solução: Inicialmente, devemos identificar as curvas dadas. Utilizando as relações polares $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $r^2 = x^2 + y^2$, obtemos que

$$r = 5\cos\theta \Rightarrow r^2 = 5r\cos\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 5x \Rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$$

$$r = 5\sqrt{3}\sin\theta \Rightarrow r^2 = 5\sqrt{3}r\sin\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 5\sqrt{3}y \Rightarrow x^2 + (y - \frac{5\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{75}{4}$$

e assim, vemos que a região que nos interessa está situada no interior de duas circunferências, de centros deslocados da origem, conforme ilustra a Figura 1.33.

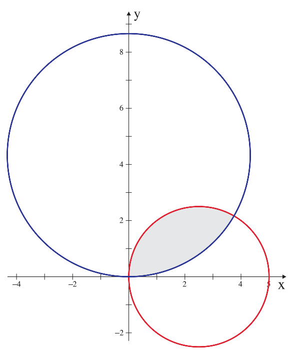


Figura 1.33: Região situada entre circunferências

A seguir, devemos determinar a interseção entre as curvas

$$5\sqrt{3}\sin\theta = 5\cos\theta \;\Rightarrow\; \sqrt{3}\tan\theta = 1 \;\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Finalmente, observamos que ao descrever a região desejada, devemos considerar $r = 5\sqrt{3}\sin\theta$ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{6}]$ e $r = 5\cos\theta$ para $\theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$. Portanto, como ocorre troca de limitação para o raio polar, necessitamos de uma soma de integrais para calcular a área desejada

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (5\sqrt{3}\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (5\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 75\sin^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2\theta d\theta. \end{aligned}$$

Exemplo 1.9.17 *A área de uma determinada região R pode ser calculada, em coordenadas polares, pela expressão*

$$I = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\ sen(\theta))^2\ d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2})^2\ d\theta\right].$$

(a) Represente geometricamente a região R.

(b) Escreva a expressão que determina a área desta região usando coordenadas cartesianas em relação: (i) à variável x; (ii) à variável y.

(c) Calcule o valor da área da região R.

Solução (a): A partir da integral dada vemos que a região R possui simetria, há troca de limitação do raio polar em $\theta = \frac{\pi}{4}$ e as funções que delimitam a área são $\rho = 2\,\text{sen}\theta$ e $\rho = \sqrt{2}$. Estas curvas são, respectivamente, as circunferências $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = \sqrt{2}$. Na Figura abaixo estão representados os gráficos destas curvas e R é a região simultaneamente interior as duas circunferências que está sombreada na Figura 1.34.

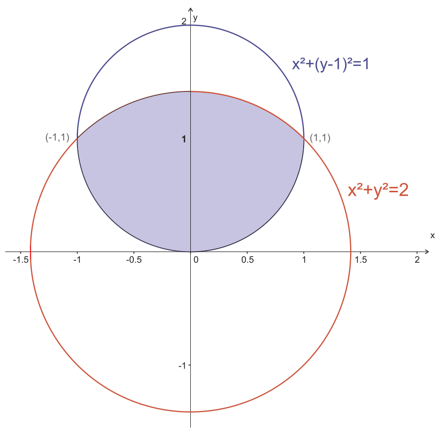


Figura 1.34: Região R

Solução (b): Interseção de $\rho = 2\ \sin\theta$ e $\rho = \sqrt{2}$ é a solução de:

$$\begin{cases} \rho &= 2\ \sin\theta \\ \rho &= \sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{4}$$

(esta interseção é dada na integral I). Em coordenadas cartesianas os pontos de interseção das curvas são $(-1,1)$ e $(1,1)$.

(i) Integração em relação à variável x :

$$I = \int_{-1}^{1} (\sqrt{2 - x^2} - 1 + \sqrt{1 - x^2})\ dx \quad \text{ou} \quad I = 2\int_{0}^{1} (\sqrt{2 - x^2} - 1 + \sqrt{1 - x^2})\ dx$$

(ii) Integração em relação à variável y :

$$I = 2\int_{0}^{1} \sqrt{2y - y^2}\ dy + 2\int_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - y^2}\ dy$$

Solução (c): Para calcular o valor da área da região R usaremos a expressão I dada em coordenadas polares. Assim,

$$\begin{aligned}
A &= 2\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2\ \text{sen}(\theta))^2\ d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2})^2\ d\theta\right] \\
&= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 4\ \text{sen}^2\theta\ d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\ d\theta \\
&= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \ \cos(2\theta)}{2}\ d\theta + 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ = \ 2\left(\theta - \frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2} \ = \ (\pi - 1)\ \text{u.a.}
\end{aligned}$$

1.10 Comprimento de Arco

1.10.1 Comprimento de Arco em Coordenadas Cartesianas

Parte 2

Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$, cujo gráfico descreve o arco $\widehat{AB}$, conforme ilustra a Figura 1.35.

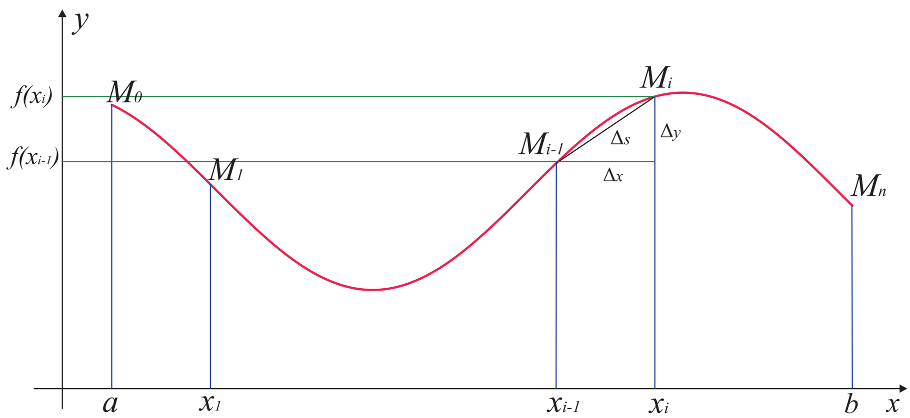


Figura 1.35: Comprimento de arco

Vamos dividir o arco $\widehat{AB}$ em subarcos por meio da partição

$$X = \{M_0,\ M_1,\ M_2,\ ...,\ M_n\}$$

em que

$$A = M_0 < M_1 < M_2 < ... < M_n = B$$

cujas abscissas são

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n.$$

Tracemos as cordas

$$\overline{M_0M_1},\ \overline{M_1M_2},\ \cdots,\ \overline{M_{i-1}M_i},\ \cdots,\ \overline{M_{n-1}M_n}$$

e designemos os seus comprimentos por

$$\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \cdots,\ \Delta S_i,\ \cdots,\ \Delta S_n.$$

Obtém-se então a linha poligonal

$$AM_0M_1\cdots M_{n-1}B$$

ao longo do arco $\widehat{AB}$ cujo comprimento aproximado é dado por

$$l_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_i + \cdots + \Delta S_n$$

ou seja,

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i. \qquad (I)$$

Mas ΔS_i é a hipotenusa do triângulo de lados Δx_i e Δy_i, de modo que podemos escrever

$$(\Delta S_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2,$$

dividindo tudo por Δx_i obtemos

$$\left(\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2$$

ou seja,

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta x_i} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

e assim

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i. \qquad (II)$$

Agora, como

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{e} \quad \Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

segue que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

e pelo teorema de Lagrange, sabemos que existe $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i).$$

Portanto, obtemos que

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(\xi_i). \qquad (III)$$

Substituindo (II) em (I) resulta que

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i \qquad (IV)$$

e substituindo (III) em (IV) resulta que

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i.$$

Seja $|\Delta x|$ o intervalo de maior diâmetro de cada partição de $\widehat{AB}$. Então, se $n \to \infty$, segue que $|\Delta x| \to 0$ e $(\xi_i) \to x$. Assim:

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{|\Delta x|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Portanto, o comprimento do arco $\widehat{AB}$ no intervalo $[a, b]$ é dado por

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \qquad (1.10.1)$$

Exemplo 1.10.2 *Determinar o comprimento do arco da curva descrita por $y = \sqrt{x}$, com x no intervalo* $[0, 4]$.

Solução: A Figura 1.36 ilustra o comprimento de arco considerado.

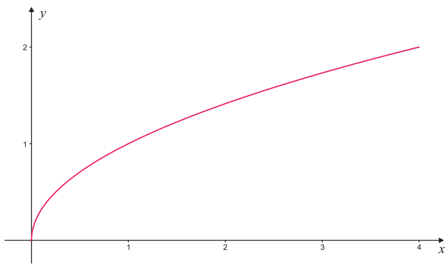


Figura 1.36: Arco de $f(x) = \sqrt{x}$

Como $y = f(x) = \sqrt{x}$ temos que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Aplicando a fórmula 1.10.1, obtemos

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx \\ &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = \int_0^4 \sqrt{\frac{4x+1}{4x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x}} dx. \end{aligned}$$

Note que esta última integral é imprópria, pois o integrando não é contínuo em $x = 0$. No entanto, neste exemplo não será preciso aplicar limites para resolver a integral, pois podemos utilizar uma mudança de variáveis. Fazendo a substituição $t^2 = x$, encontramos $dx = 2tdt$ e como $x \in [0, 4]$, obtemos que $t \in [0, 2]$. Logo

$$l = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\sqrt{4t^2+1}}{\sqrt{t^2}} 2tdt = \int_0^2 \sqrt{4t^2+1} dt.$$

Como o novo integrando agora é contínuo no intervalo de integração, podemos utilizar o teorema fundamental do cálculo e a técnica de substituições trigonométricas para encontrar que

$$\begin{aligned} l &= \left. \frac{1}{2}t\sqrt{4t^2+1} + \frac{1}{4}\ln\left(2t+\sqrt{4t^2+1}\right)\right|_0^2 \\ &= \sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln(4+\sqrt{17})\ u.c. \end{aligned}$$

1.10.3 Comprimento de um arco em coordenadas paramétricas

Sejam $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$, com $t \in [\alpha, \beta]$, as equações paramétricas da curva descrita por $y = f(x)$. Então, como $dx = \phi'(t)\,dt$ e $dy = \psi'(t)\,dt$, podemos escrever

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)\,dt}{\phi'(t)\,dt} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Substituindo na fórmula 1.10.1 obtemos

$$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\frac{(\psi'(t))^2}{(\phi'(t))^2}}\phi'(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}{\phi'(t)^2}}\phi'(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}}{\phi'(t)}\phi'(t)\,dt \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de arco em coordenadas paramétricas é dado por

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt. \tag{1.10.2}$$

Exemplo 1.10.4 *Mostre, usando coordenadas paramétricas, que o comprimento de uma circunferência de raio r é igual a $2\pi r$.*

Solução: Em coordenadas paramétricas, a circunferência é descrita por

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r\sin t \end{cases} \text{com } t \in [0, 2\pi].$$

O seu comprimento de arco, em paramétricas, de acordo com 1.10.2 é dado por

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2+(r\cos t)^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}dt = \int_0^{2\pi} r dt = rt|_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

Exemplo 1.10.5 *Calcule o comprimento de arco da astróide descrita por*

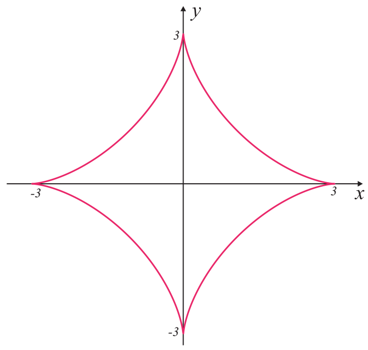


Figura 1.37: Astróide

$$\phi\,(t) = 3\cos^3 t, \qquad \psi(t) = 3\sin^3 t \qquad \textit{com } t \in [0, 2\pi].$$

Solução: A curva pode ser visualizada na Figura 1.37.

Como há simetria, podemos encontrar o comprimento do subarco situado no primeiro quadrante, tomando $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ e multiplicar o resultado obtido por quatro.

Como $\phi'\,(t) = -9\cos^2 \sin t$ e $\psi'\,(t) = 9\sin^2 t\cos t$, substituindo na fórmula 1.10.2, obtemos

$$\begin{aligned} l &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-9\cos^2 t\sin t)^2 + \left(9\sin^2 t\cos t\right)^2}dt = 4\cdot 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}dt \\ &= 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}dt = 36\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t dt = 18\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 18\ u.c. \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de arco da astróide dada é 18 unidades de comprimento.

Exemplo 1.10.6 *As equações paramétricas do movimento de uma partícula no plano são dadas por $x = 3t$ e $y = 2t^{\frac{3}{2}}$. Qual será a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$?*

Solução: A distância percorrida pela partícula é igual ao comprimento de arco da curva que descreve a sua trajetória. Aplicando a fórmula 1.10.2 para

$$x = \phi(t) = 3t \qquad \text{e} \qquad y = \psi(t) = 2t^{\frac{3}{2}}$$

com $t \in [0, 1]$, obtemos

$$\begin{aligned} l &= \int_0^1 \sqrt{3^2 + (3t^{\frac{1}{2}})^2}dt = \int_0^1 \sqrt{9 + 9t}dt \\ &= 3\int_0^1 \sqrt{1+t}dt = 2(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\ &= 2(2)^{\frac{3}{2}} - 2(1)^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2} - 2 \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Portanto, a distância percorrida pela partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$ é igual a $4\sqrt{2} - 2$ unidades de comprimento.

1.10.7 Comprimento de arco em coordenadas polares

Sejam $\phi(\theta) = r\cos\theta$ e $\psi(\theta) = r\sin\theta$ as coordenadas polares da curva $r = f(\theta)$, com $\theta \in [\alpha, \beta]$. Substituindo r por $f(\theta)$ nas equações paramétricas vem

$$\phi(\theta) = f(\theta)\cos\theta \qquad \text{e} \qquad \psi(\theta) = f(\theta)\sin\theta$$

e assim

$$\begin{aligned}\phi'(\theta) &= f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta = r'\cos\theta - r\sin\theta\\ \psi'(\theta) &= f'(\theta)\,sen\theta + f(\theta)\cos\theta \ = r' sen\theta + r\cos\theta.\end{aligned}$$

Agora

$$(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = (r'\cos\theta - r sen\theta)^2 + (r' sen\theta + r\cos\theta)^2$$

que após aplicar os produtos notáveis e simplificar, resulta em

$$(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = (r')^2 + r^2.$$

Substituindo na equação 1.10.2, obtemos a fórmula para o cálculo do comprimento de arco em coordenadas polares, que é dada por

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}\,d\theta. \tag{1.10.3}$$

Exemplo 1.10.8 *Encontrar o comprimento de arco do cardióide $r = a(1+\cos\theta)$.*

Solução: Por simetria, podemos determinar o comprimento do arco situado no primeiro e segundo quadrante e multiplicar por dois. Como $r = a(1+\cos\theta)$ tem-se $r' = -a\sin\theta$. Substituindo na fórmula 1.10.3 vem

$$\begin{aligned} l &= \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2}\,d\theta\\ &= 2\int_0^\pi \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (a(1+\cos\theta))^2}\,d\theta\\ &= 2a\int_0^\pi \sqrt{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}\,d\theta\\ &= 2a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta\\ &= 2a\cdot 2\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\\ &= 4a\cdot 2\sin\frac{1}{2}\theta\Big|_0^\pi = 8a\ u.c.\end{aligned}$$

Logo, o comprimento de arco do cardióide $r = a(1+\cos\theta)$ é igual a $8a$ *u.c.*

Exemplo 1.10.9 *Determine o comprimento de arco da porção da espiral $r = 2e^{2\theta}$ (com $\theta \geq 0$) que está situada dentro da circunferência $r = a$, onde $a > 2$.*

Solução: Inicialmente, vamos obter os limitantes de integração. Na interseção da espiral com a circunferência, temos que

$$2e^{2\theta} = a \;\Rightarrow\; e^{2\theta} = \frac{a}{2} \;\Rightarrow 2\theta = \ln\frac{a}{2} \;\;\Rightarrow\; \theta = \frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}$$

Portanto, a porção da espiral que nos interessa é descrita por $\theta \in \left[0, \frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}\right]$. Ainda, como temos $r = 2e^{2\theta}$ segue que $r' = 4e^{2\theta}$ e assim, substituindo na expressão 1.10.3 obtemos o comprimento em coordenada polares

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}} \sqrt{(4e^{2\theta})^2 + (2e^{2\theta})^2} d\theta = \int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}} \sqrt{20e^{4\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}} 2\sqrt{5}e^{2\theta} d\theta = \sqrt{5}e^{2\theta}\Big|_0^{\frac{1}{2}\ln\frac{a}{2}} = \sqrt{5}\left(\frac{a}{2} - 1\right) \; u.c. \end{aligned}$$

1.11 Volume de um Sólido de Revolução

Considere o sólido T gerado pela rotação da curva $y = f(x)$ em torno do eixo x, no intervalo $[a, b]$ como na Figura 1.38

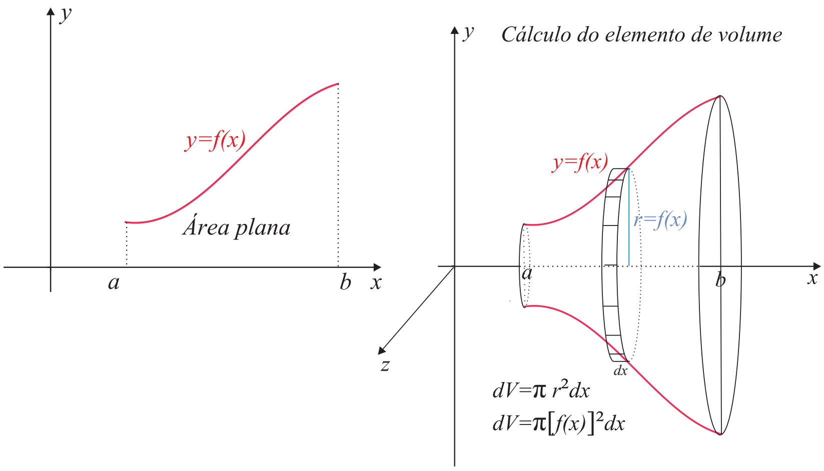


Figura 1.38: Rotação de uma curva em torno do eixo x

Seja $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e sejam $\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \cdots,\ \Delta x_n$ os subintervalos da partição. Se $\xi_i \in \Delta x_i$, então o volume do cilindro de raio $f(\xi_i)$ e altura Δx_i é dado por

$$V_i = \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i$$

e o volume aproximado do sólido será dado pela soma dos volumes dos $n - cilindros$, isto é,

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i.$$

Seja $|\Delta\theta|$ o subintervalo de maior diâmetro, então se $n \to \infty$, segue que $|\Delta\theta| \to 0$, $\xi_i \to x$ e o volume V do sólido T será dado por

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{|\Delta\theta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi\left[f(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx.$$

Portanto, o volume de um sólido de revolução (em torno do eixo x) é calculado pela expressão

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx. \tag{1.11.1}$$

Exercício Resolvido

Exemplo 1.11.1 *A fim de que não haja desperdício de ração e para que seus animais estejam bem nutridos, um fazendeiro construiu um recipiente com uma pequena abertura na parte inferior, que permite a reposição automática da alimentação, conforme mostra a Figura 1.39. Determine, usando sólidos de revolução, a capacidade total de armazenagem do recipiente, em metros cúbicos.*

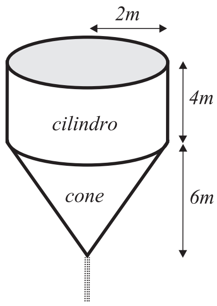


Figura 1.39: Forma do recipiente.

Solução: Vamos encontrar o volume do cilindro (V_1) e do cone (V_2.) Assim, o volume total será dado por $V = V_1 + V_2$.

Para determinar V_1 vamos rotacionar a reta $y = 2$ em torno do eixo x (Figura 1.40).

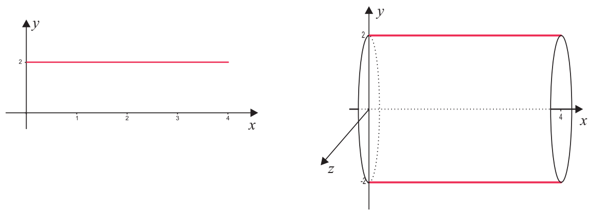


Figura 1.40: Cilindro de Revolução

Aplicando a expressão 1.11.1, obtemos

$$V_1 = \pi \int_0^4 2^2 dx = 4\pi \cdot 4 = 16\pi.$$

Já para o cone, como temos um raio $r = 2$ e altura $h = 6$, obtemos a reta $y = \frac{1}{3}x$ para rotacionar em torno do eixo x (Figura 1.41).

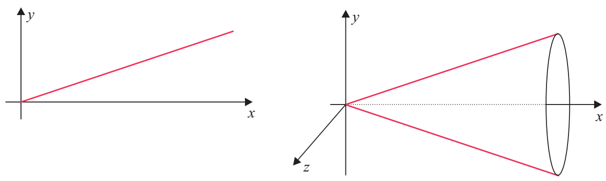


Figura 1.41: Cone de Revolução

Aplicando a expressão 1.11.1 mais uma vez, obtemos

$$V_2 = \pi \int_0^6 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{27}\pi x^3 \Big|_0^6 = \frac{6^3\pi}{27} = 8\pi.$$

Portanto o volume desejado é dado por $V = 16\pi + 8\pi = 24\pi$ $u.v.$

Exemplo 1.11.2 *Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da curva $f(x) = x^3$, com x no intervalo [1,2], em torno do eixo x.*

Solução: O sólido desejado pode ser visualizado na Figura 1.42.

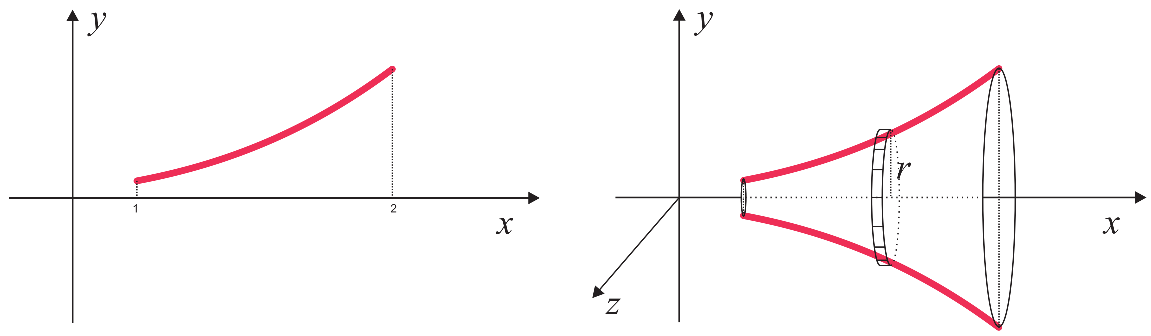


Figura 1.42: Sólido gerado pela rotação de $y = x^3$ em torno do eixo x

E o volume desejado é dado por

$$V = \pi \int_1^2 \left(x^3\right)^2 dx = \pi \int_1^2 x^6 dx = \left.\frac{\pi x^7}{7}\right|_1^2 = \frac{127\pi}{7} \ u.v.$$

Exemplo 1.11.3 *Determinar o volume do sólido gerado pela revolução da região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ em torno do eixo x (veja a Figura 1.43).*

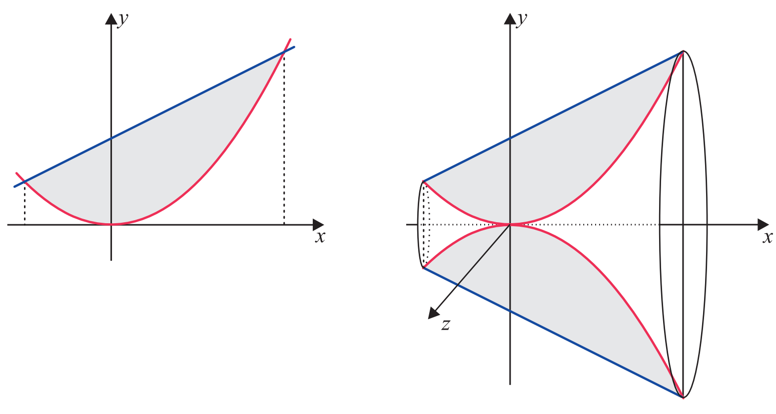


Figura 1.43: Sólido gerado pela rotação de uma região plana em torno do eixo x

Solução: Nesse exemplo não foi especificado o intervalo em que está situada a região delimitada pelas curvas. Para determinar este intervalo, devemos encontrar os pontos de interseção das curvas dadas. Igualando suas equações, obtemos

$$x^2 = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ e } x = 2.$$

A Figura 1.43 indica que o sólido desejado está situado entre duas superfícies. Assim, seu volume é dado pela diferença entre os volumes externo e interno. De acordo com 1.11.1, temos que

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-1}^{2} (x+2)^2 dx - \pi \int_{-1}^{2} \left(x^2\right)^2 dx \\
&= \pi \int_{-1}^{2} (x^2+4x+4-x^4) dx \\
&= \pi \left(\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x - \frac{1}{5}x^5 \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{72}{5}\pi \ u.v.
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.11.4 *Encontre o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva* $(x-2)^2 + y^2 = 1$ *em torno do eixo* y.

Solução: Observe na Figura 1.44 a circunferência geratriz do sólido.

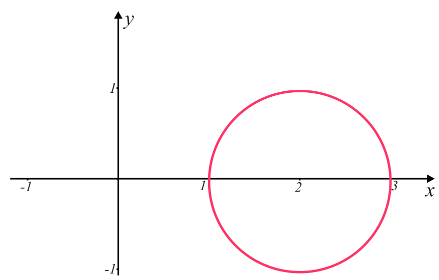


Figura 1.44: circunferência $(x-2)^2 + y^2 = 1$

Isolando a variável x na equação da circunferência, obtemos

$$(x-2)^2 = 1 - y^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2 \pm \sqrt{1-y^2}$$

Observe que o volume do sólido desejado é formado pelo volume obtido pela rotação da curva $x = 2 + \sqrt{1-y^2}$ em torno do eixo y, menos o volume obtido pela rotação da curva $x = 2 - \sqrt{1-y^2}$. Portanto, o volume desejado é igual a

$$V = V_1 - V_2,$$

onde

$$V_1 = \pi \int_{-1}^{1} (2+\sqrt{1-y^2})^2 dy$$

e

$$V_2 = \pi \int_{-1}^{1} (2-\sqrt{1-y^2})^2 dy$$

ou seja,

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [(2+\sqrt{1-y^2})^2 - (2-\sqrt{1-y^2})^2] dy = \pi \int_{-1}^{1} 8\sqrt{1-y^2} dy.$$

Para resolver esta integral, utilizamos a substituição trigonométrica $y = \sin\theta$, com $dy = \cos\theta d\theta$ e assim, obtemos que

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta \\
&= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta) d\theta \\
&= \pi[4\theta + 2\sin(2\theta)]\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, o volume desejado é igual a $4\pi^2$ unidades de volume.

1.11.5 Rotação em torno de uma Reta Paralela a um Eixo Coordenado

Até agora consideremos somente sólidos gerados por rotações de curvas em torno de um dos eixos coordenados, onde $y = f(x)$ ou $x = g(y)$ eram os raios dos cilindros de revolução (elementos de volume).

No caso mais geral, podemos rotacionar a curva $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno da reta $y = c$, de acordo com a Figura a 1.45.

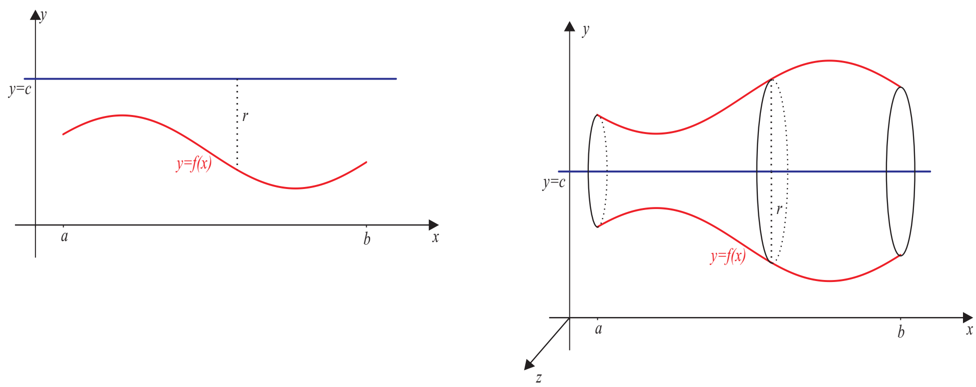


Figura 1.45: Sólido obtido pela rotação $y = f(x)$ em torno da reta $y = c$

Neste caso, o raio do cilindro infinitesimal é igual à distância entre a curva e o eixo de revolução, ou seja, é dado por

$$r = c - f(x)$$

e o volume do sólido resultante é dado por

$$V = \pi \int_a^b (c - f(x))^2 dx.$$

De forma semelhante, se a curva $x = g(y)$, com $y \in [a, b]$, for rotacionada em torno da reta $x = c$, o volume do sólido resultante é dado por

$$V = \pi \int_a^b (c - g(y))^2 dy.$$

Note que quando $c = 0$ temos novamente a revolução em torno dos eixos coordenados.

EXEMPLO 1.11.6 *Calcule o volume do sólido obtido quando a porção da pará bola $y = 2 - x^2$ que está situada acima do eixo x é rotacionada em torno da reta $y = 3$.*

Solução: Na Figura 1.46 podemos observar a curva geratriz, o eixo de revolução e o sólido de revolução obtido.

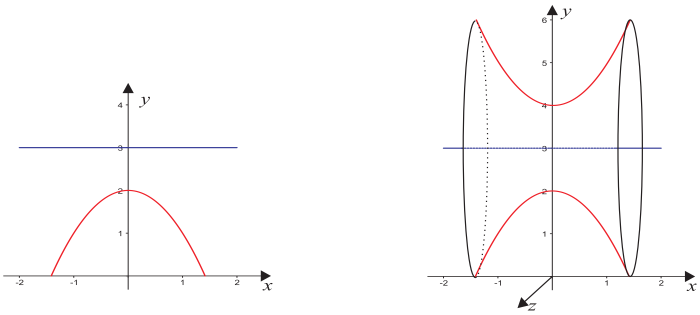


Figura 1.46: Curva geratriz e sólido de revolução obtido pela rotação de $y = 2 - x^2$ em torno de $y = 3$.

Como rotacionamos em torno de uma reta paralela ao eixo das abscissas, devemos efetuar a integração em relação a x. O intervalo de integração, definido aqui pela parte da parábola situada acima do eixo x, é descrito por $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Já o raio de rotação, dado pela distância entre a curva e o eixo de rotação, é dado por

$$r = 3 - (2 - x^2) = 1 + x^2$$

e assim, o volume desejado é dado por

$$V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 + x^2)^2 dx = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 + 2x^2 + x^4) dx = \frac{94}{15}\sqrt{2}\pi.$$

EXEMPLO 1.11.7 *Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região situada entre as curvas $y = x^2$ e $y = 2x$ é rotacionada em torno:*

(a) do eixo y; *(b) da reta $y = 5$;* *(c) da reta $x = 2$.*

Solução: A região a ser rotacionada está representada na Figura 1.47.

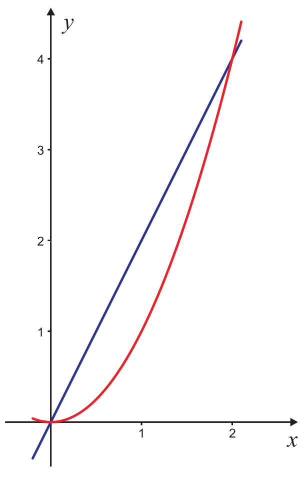


Figura 1.47: Região a ser rotacionada

As interseções entre as curvas são dadas por

$$x^2 = 2x \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \Rightarrow y = 0, \ y = 4.$$

No item (a), rotacionamos em torno do eixo das ordenadas e, por isso, devemos tomar a integração em relação a y. Como o só lido resultante será vazado, devemos tomar a diferença entre os volumes dos sólidos externo e interno.

O raio externo, definido pela parábola, é dado por $x = \sqrt{y}$. O raio interno é definido pela reta e é dado por $x = \dfrac{y}{2}$. Assim, o volume desejado é calculado pela integral

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 - \pi \int_0^4 (\frac{y}{2})^2 dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4} \right) dy.$$

Já no item (b), como rotacionamos em torno de uma reta paralela ao eixo das abscissas, devemos tomar a integração em relação a x. Novamente o sólido resultante será vazado e devemos tomar a diferença entre os volumes dos sólidos externo e interno.

O raio externo, definido pela distância entre a parábola e o eixo de rotação, é dado por $r = 5 - x^2$ e o raio interno, definido pela distância entre a reta e o eixo de rotação, é dado por $r = 5 - 2x$. O volume do novo sólido é calculado pela integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (5-x^2)^2 dx - \pi \int_0^2 (5-2x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (25 - 10x^2 + x^4) - (25 - 20x + 4x^2) dx \\ &= \pi \int_0^2 (-14x^2 + x^4 + 20x) dx. \end{aligned}$$

Por fim, como no item (c) rotacionamos em torno de uma reta paralela ao eixo das ordenadas, devemos tomar a integração em relação a y. Mais uma vez devemos tomar a diferença entre os volumes dos sólidos externo e interno.

O raio externo, neste caso, é definido pela reta e é dado por $r = 2 - \dfrac{y}{2}$ e o raio interno, agora definido pela parábola, é dado por $r = 2 - \sqrt{y}$.

Assim, o último volume desejado é calculado pela integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (2 - \frac{y}{2})^2 dy - \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 (4 - 2y + \frac{y^2}{4}) - (4 - 4\sqrt{y} + y) dy \\ &= \pi \int_0^4 (-3y + \frac{y^2}{4} + 4\sqrt{y}) dy. \end{aligned}$$

Exemplo 1.11.8 *Seja R a região sob o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ e acima do eixo x com $x \in [0, \ 4]$. Determine:*

(a) a área da região R, se existir;

(b) o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo x, se existir.

(c) o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo y, se existir.

Solução (a):

$$A = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^4 x^{-\frac{1}{2}}\ dx = \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_a^4 = \lim_{a\to 0^+}(2\sqrt{4}-2\sqrt{a}) = 2\text{u.a.}$$

Solução (b):

$$V = \pi\int_0^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\ dx = \pi\lim_{a\to 0^+}\int_a^4 \frac{1}{x}\ dx = \pi\lim_{a\to 0^+}\ln x\Big|_a^4 = \lim_{a\to 0^+}(\ln 4 - \ln a) = +\infty$$

Portanto o sólido obtido não tem volume finito.

Solução (c):

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\frac{1}{2}} (4)^2\ dy + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\left(\frac{1}{y^2}\right)^2\ dy = \pi\cdot 16\cdot\frac{1}{2} + \pi\lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{b} y^{-4}\ dy \\ &= 8\pi + \pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{b} = 8\pi + \pi\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{3b^3}+\frac{8}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}\ \text{u.v.}\end{aligned}$$

1.12 Exercícios Gerais

1. Dadas as funções $f, g : [1, 3] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2 + x$ encontre $\overline{S}(f, P)$ e $\overline{S}(g, P)$.

2. Dada a função $f : [-2, 5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2$ encontre $\underline{S}(f, P)$.

3. Determine as expressões para a **soma superior** e para a **soma inferior** de $f(x) = 5 - x^2$, considerando $x \in [1, 2]$.

4. Utilize somas superiores para calcular a área da região situada entre as curvas $y = x^4 + 2$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$.

5. Utilize a definição de integral definida para calcular $\displaystyle\int_1^3 (x^2 - 2x)dx$. (Observe que é preciso provar que a função é integrável.)

6. Utilize soma de áreas de retângulos circunscritos para calcular $\displaystyle\int_0^4 (-x^2 - 1)dx$.

7. Utilize soma de áreas de retângulos circunscritos para determinar a área sob o gráfico de $f(x) = x^3 + 1$, para $x \in [0, b]$, onde $b > 0$ é arbitrário.

8. Calcule, usando somas superiores, a área da região situada entre o gráfico de $f(x) = e^x$ e o eixo x, entre as retas $x = -1$ e $x = 2$.

9. Utilize somas inferiores para calcular a área da região situada entre a curva $x = y^2$ e o eixo y, com $y \in [0, 2]$.

10. Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que:

    (a) Se f é uma função par, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

    (b) Se f é uma função ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

    (c) Interprete geometricamente os itens anteriores.

11. Um metereologista estabelece que a temperatura T (em ^oF), num dia de inverno é dada por $T(t) = \frac{1}{20}t(t - 12)(t - 24)$, onde o tempo t é medido em horas e $t = 0$ corresponde à meia-noite. Ache a temperatura média entre as 6 horas da manhã e o meio dia. Sugestão: utilize o teorema do valor médio para integrais.

12. Encontre uma função f contínua, positiva e tal que a área da região situada sob o seu gráfico e entre as retas $x = 0$ e $x = t$ seja igual a $A(t) = t^3$, para todo $t > 0$.

13. Determine uma função f diferenciável, positiva e tal que $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = [f(x)]^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina uma nova função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} f(t)dt$. Calcule o valor de $g'(1)$, sabendo que $f(1) = 2$.

15. (ENADE) Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com derivada $\dfrac{dg}{dt}$ contínua e f a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dg}{dt}(t)dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Nessas condições avalie as afirmações que seguem.

   I A função f é integrável em todo intervalo $[a,\ b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

   II A função f é derivável e sua derivada é a função g.

   III A função diferença $f - g$ é uma função constante.

   É correto o que se afirma em

   (a) I, apenas.
   (b) II, apenas.
   (c) I e III, apenas.
   (d) II e III, apenas.
   (e) I, II e III.

   Justifique sua resposta.

16. Seja $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Verifique se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ existe.

17. Determine o valor das seguintes integrais, se possível.

   (a) $\int_1^{\sqrt{2}} xe^{-x^2} dx$ (b) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}} dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x dx$

   (d) $\int_0^1 x \sin x dx$ (e) $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}} dx$ (f) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

   (g) $\displaystyle\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[4]{x}\right) dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$ (i) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2 + 4x}} dx$

18. Encontre, se existir, o valor de cada uma das seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \left(x + \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$ (e) $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$ (i) $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} dx$ (m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} e^x dx$

   (b) $\int_0^2 x^2 \ln(x) dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x-4|} dx$ (j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ (n) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4} dx$

   (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$ (g) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{5 - x}} dx$ (k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$ (o) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ (l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x}} dx$ (p) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{(x + 1)^2} dx$

19. Os engenheiros de produção de uma empresa estimam que um determinado poço produzirá gás natural a uma taxa dada por $f(t) = 700e^{-\frac{1}{5}t}$ milhares de metros cúbicos, onde t é o tempo desde o início da produção. Estime a quantidade total de gás natural que poderá ser extraída desse poço.

20. Determine todos os valores de p para os quais $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge.

21. Determine para quais valores de $p \in \mathbb{R}$ a integral $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ converge.

22. Calcule, se possível, as seguintes integrais impróprias:

(a) $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ $\quad$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$ $\quad$ (c) $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

(d) $\int_0^1 x \ln x dx$ $\quad$ (e) $\int_0^9 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ $\quad$ (f) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$

23. Em equações diferenciais, define-se a Transformada de Laplace de uma função f por

$$L(f(x)) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ para o qual a integral imprópria seja convergente. Encontre a Transformada de Laplace de:

(a) $f(x) = e^{ax}$ $\quad$ (b) $f(x) = \cos x$ $\quad$ (c) $f(x) = \sin x$

24. A função gama é definida para todo $x > 0$ por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(a) Calcule $\Gamma(1)$ e $\Gamma(2)$.

(b) Mostre que, para n inteiro positivo, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

25. Encontre a área da região limitada pelas curvas:

(a) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(b) $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

(c) $y = -x^2 + 9$ e $y = 3 - x$.

(d) $y = \sin x$, $y = x \sin x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(e) $28 - y - 5x = 0$, $x - y - 2 = 0$, $y = 2x$ e $y = 0$.

26. Represente geometricamente a região cuja área é calculada por

$$A = \int_0^2 \left[(y+6) - (\sqrt{4-y^2})\right] dy.$$

27. Calcule a área de cada região delimitada pelas curvas dadas abaixo através de:

(i) integração em relação a x $\quad$ (ii) integra ção em relação a y.

(a) $y = x + 3$ e $x = -y^2 + 3$.

(b) $2x + y = -2$, $x - y = -1$ e $7x - y = 17$.

(c) $y = x^2 - 1$, $y = \frac{2}{x^2}$ e $y = 32x^2$.

(d) $y + x = 6$, $y = \sqrt{x}$ e $y + 2 = 3x$.

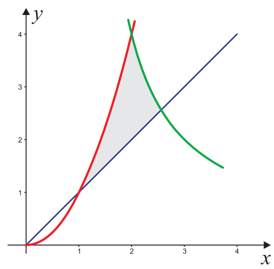
28. Represente geometricamente a região cuja área é calculada pela expressão

$$A = \int_1^2 \left[(2x^2) - \left(\frac{2}{x}\right)\right] dx + \int_2^4 \left[\left(\frac{62-15x}{4}\right) - \left(\frac{2}{x}\right)\right] dx.$$

A seguir, reescreva esta expressão utilizando y como variável independente.

29. Estabeleça a(s) integral(is) que permite(m) calcular a área da região hachurada na figura abaixo, delimitada simultaneamente pelas curvas $y = x$, $y = x^2$ e $y = \dfrac{4}{x-1}$, mediante:

(a) integração em relação a x. (b) integração em relação a y.



30. Encontre uma reta horizontal $y = k$ que divida a área da região compreendida entre as curvas $y = x^2$ e $y = 9$ em duas partes iguais.

31. A área de uma determinada região R pode ser calculada pela expressão

$$A = \int_{\frac{-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{2}x^2\right) dx.$$

Reescreva esta expressão, utilizando:

(a) integração em relação a y; (b) coordenadas paramétricas.

32. Represente geometricamente a região cuja área, em coordenadas paramétricas, é dada por

$$A = 2\int_{\pi}^{0} 3\sin t(-3\sin t)dt - 2\int_{\pi}^{0} 3\sin t(-2\sin t)dt.$$

33. Uma ciclóide é uma curva que pode ser descrita pelo movimento do ponto $P(0,0)$ de um círculo de raio a, centrado em $(0,a)$, quando este círculo gira sobre o eixo x. Pode-se representar esta ciclóide através das equações $x = a(t - \sin t)$ e $y = a(1 - \cos t)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Determine a área da região delimitada pela ciclóide.

34. Uma curva de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ é chamada astróide. Calcule a área da região delimitada pela astróide obtida quando $a = 5$.

35. Calcule a área da região situada simultaneamente no interior dos seguintes pares de curvas:

(a) $r = 3\cos\theta$ e $r = 1 + \cos\theta$;

(b) $r = 1 + \cos\theta$ e $r = 1$;

(c) $r = \sin\theta$ e $r = 1 - \cos\theta$;

(d) $r^2 = \cos(2\theta)$ e $r^2 = \sin(2\theta)$;

(e) $r = 2(1 + \sin\theta)$ e $r = 2(1 + \cos\theta)$.

36. Encontrar a área simultaneamente interior ao círculo $r = 6\cos\theta$ e exterior a $r = 2(1 + \cos\theta)$.

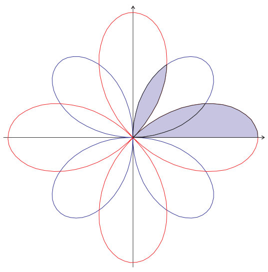
37. Calcule a área da região simultaneamente interior à curva $r = 4 + 4\cos\theta$ e exterior à $r = 6$.

38. Calcule a área da região simultaneamente interior à curva $r = 1 + \cos\theta$ e exterior à $r = 2\cos\theta$.

39. Calcule a área da região simultaneamente interior às curvas $r = \sin(2\theta)$ e $r = \sin\theta$.

40. Determine a área da região simultaneamente interior às rosáceas $r = \sin(2\theta)$ e $r = \cos(2\theta)$.

41. Escreva a integral que permite calcular a área sombreada entre as curvas $r = \sin(2\theta)$ e $r = \sqrt{3}\cos(2\theta)$, dada na figura abaixo.



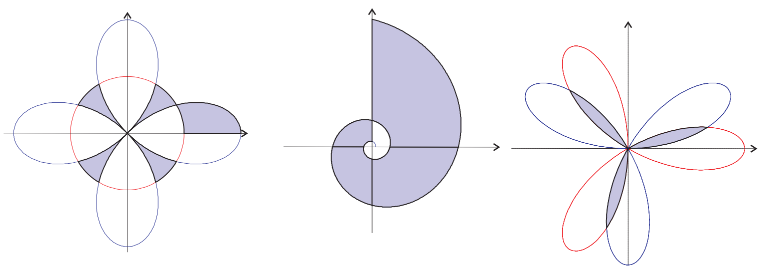
42. Seja R a porção da região simultaneamente interior às curvas $r = 2\cos\theta$ e $r = 4\sin\theta$ que está situada no exterior da curva $r = 1$. Escreva as integrais que permitem calcular:

    (a) a área da região R;

    (b) o comprimento de arco da fronteira da região R.

43. Calcule a área das regiões sombreadas nas figuras abaixo:

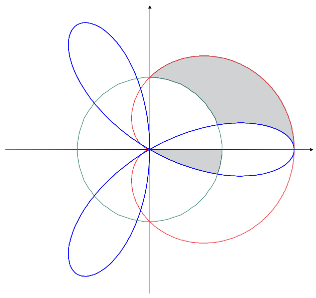
    (a) $r = 1$ e $r = 2\cos(2\theta)$ (b) $r = 2e^{\frac{1}{4}\theta}$ (c) $r = \sin(3\theta)$ e $r = \cos(3\theta)$



44. Represente geometricamente a região cuja área, em coordenadas polares, é dada por

$$I = 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\theta d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta\right].$$

45. Monte a(s) integral(is) que permite(m) calcular a área hachurada na figura abaixo, delimitada pelas curvas $r = 2 + 2\cos\theta$, $r = 4\cos(3\theta)$ e $r = 2$.



46. Calcule o comprimento de arco das curvas dadas por:
    (a) $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y}$, com $2 \leq y \leq 5$;
    (b) $x = 3 + t^2$ e $y = 6 + 2t^2$, com $1 \leq t \leq 5$;
    (c) $x = 5t^2$ e $y = 2t^3$, com $0 \leq t \leq 1$;
    (d) $x = e^t \cos t$ e $y = e^t \sin t$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;
    (e) $r = e^{-\theta}$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$;
    (f) $r = \cos^2 \frac{1}{2}\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$;

47. Determine a distância percorrida por uma partícula que se desloca entre os pontos $A(2,3)$ e $B(0,3)$ cuja posição, no instante t, é dada por $x(t) = 1 + \cos(3\sqrt{t})$ e $y(t) = 3 - \mathrm{sen}(3\sqrt{t})$.

48. A posição de uma partícula, num instante t, é dada por $x(t) = 2\cos t + 2t \sin t$ e $y(t) = 2\sin t - 2t\cos t$. Calcule a distância percorrida por esta partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = \frac{\pi}{2}$.

49. Suponha que as equações $x(t) = 4t^3 + 1$ e $y(t) = 2t^{\frac{9}{2}}$ descrevam a trajetória de uma partícula em movimento. Calcule a distância que esta partícula percorre ao se deslocar entre os pontos $A(5,2)$ e $B(33, 32\sqrt{2})$.

50. Calcule a distância percorrida por uma partícula que se desloca, entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, de acordo com as equações $x(t) = 1 + 2\cos(3t^{\frac{5}{2}})$ e $y(t) = 5 - 2\sin(3t^{\frac{5}{2}})$.

51. A curva descrita por $x(t) = 3e^{-t}\cos 6t$ e $y(t) = 3e^{-t}\sin 6t$, chamada de espiral logarítmica e está representada geometricamente na Figura 1.48. Mostre que o arco descrito por esta espiral, quando $t \in [0, +\infty)$, possui comprimento finito.

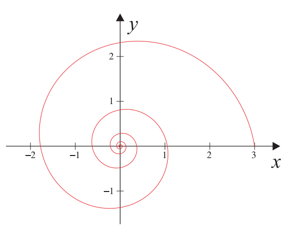


Figura 1.48: Espiral logarítmica

52. Encontre o comprimento das curvas que limitam a região formada pela interseção das curva $r = \sqrt{3}\sin\theta$ e $r = 3\cos\theta$, situada no primeiro quadrante.

53. Represente graficamente o arco cujo comprimento é calculado pela integral

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{48\cos^2\theta + 48\sin^2\theta}d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{16\sin^2\theta + 16\cos^2\theta}d\theta.$$

54. Monte as integrais que permitem calcular o comprimento do arco da fronteira da região que é simultaneamente interior à $r = 1 + \sin\theta$ e $r = 3\sin\theta$.

55. Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da curva $yx^2 = 1$, com $x \geq 1$, em torno do eixo x.

56. Determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da curva $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ em torno do eixo x.

57. Determinar o volume do toro gerado pela rotação do círculo de equação $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ em torno do eixo x, supondo $a < b$.

58. Obtenha o volume do sólido obtido pela revolução da região delimitada por:

    (a) $y = \sqrt{4-x}$, $3y = x$ e $y = 0$, em torno do eixo x;

    (b) $y = |x| + 2$, $y = x^2$, $x = -2$ e $x = 1$ em torno do eixo x;

    (c) $y = x^2$ e $y = 2$, em torno da reta $y = 2$;

    (d) $y = 1 - x^2$ e $x - y = 1$, em torno da reta $y = 3$;

    (e) $x + y = 3$ e $y + x^2 = 3$, em torno da reta $x = 2$.

59. Determine o volume do sólido obtido quando a região situada sob a curva $y = e^x$ e acima do eixo x, com $x \leq 0$, é rotacionada em torno da reta $y = 2$.

60. Um hiperbolóide de uma folha de revolução pode ser obtido pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo imaginário. Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = -3$, $x = 3$ e pelo hiperbolóide obtido pela rotação de $9y^2 - 4x^2 = 36$ em torno do eixo x.

61. Quando uma determinada região R é rotacionada em torno do eixo y, o volume do sólido resultante pode ser calculado pela expressão

$$V = \pi \int_{\frac{1}{3}}^{2} \left[\left(\frac{7-3y}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{y} \right)^2 \right] dy.$$

    Represente geometricamente a região R e, a seguir, calcule o volume do sólido obtido quando R é rotacionada em torno da reta $y = 3$.

62. Considere a região R delimitada simultaneamente pelas curvas $y = x^3$ e $x = y^3$.

    (a) Obtenha a(s) integral(is) que permite(m) calcular o perímetro da região R.

    (b) Calcule o volume do sólido obtido quando a região R é rotacionada em torno do eixo y.

    (c) Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região R é rotacionada em torno da reta $y = 1$.

63. Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região delimitada pelas curvas $y = x^2 - 4$ e $y = x - 2$ é rotacionada em torno:

(a) do eixo x (b) da reta $y = 2$ (c) da reta $x = -3$.

64. Considere a região R delimitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = 2x$, que está situada no primeiro quadrante e **abaixo** da reta $y = 2 - x$.

(a) Determine o volume do sólido obtido quando a região R é revolucionada em torno do eixo x.

(b) Escreva as integrais que permitem calcular o volume do sólido obtido quando a região R é revolucionada em torno da reta $x = -1$.

65. Mostre, via volume de sólidos de revolução, que o volume de um cone de raio r e altura h é $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

66. Mostre, via volume de sólidos de revolução, que o volume de uma esfera de raio a é $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$.

1.13 Respostas

1. $\overline{S}\,(f,P) = 8 + \dfrac{2}{n}$ e $\overline{S}\,(g,P) = \dfrac{38}{3} + \dfrac{10}{n} + \dfrac{4}{3n^2}$

2. $\underline{S}\,(f,P) = \dfrac{175}{3} - \dfrac{133}{2n} + \dfrac{133}{6n^2}$

3. $\overline{S}\,(f,P) = \dfrac{8}{3} + \dfrac{3}{2n} - \dfrac{1}{6n^2}$ e $\underline{S}\,(f,P) = \dfrac{8}{3} - \dfrac{3}{2n} - \dfrac{1}{6n^2}$

4. $\overline{S}\,(f,P) = \dfrac{11}{5} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{3n^2} - \dfrac{1}{30n^4}$

5. $\frac{2}{3}$

6. $-\frac{76}{3}$

7. $\frac{1}{4}b^4 + b$

8. $e^2 - e^{-1}$

9. $\frac{8}{3}$

10. Dica para os itens (a) e (b): use propriedades para quebrar o lado esquerdo em duas integrais, use a definição de função par (ou ímpar) e use a substituição de variáveis $u = -x$ para reescrever uma das integrais.

11. $18,9^oF$

12. $f(t) = 3t^2$

13. $f(x) = \frac{x}{2}$

14. $g'(1) = 2$

15. Item (c)

16. $\displaystyle\int_0^1 f\,(x)\,dx = \frac{1}{2}\pi$

17. .

(a) $\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-2}$	(b) $\frac{2}{3}\sqrt{10} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$	(c) $\frac{1}{3}$
(d) $\sin 1 - \cos 1$	(e) $0,405$	(f) $\frac{8}{3}$
(g) $3,202$	(h) $\ln 2$	(i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

18. .

(a) $-\frac{1}{3}$	(e) -1	(i) 4	(m) e
(b) $\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{8}{9}$	(f) 8	(j) 1	(n) *não existe*
(c) $\sin 1$	(g) 4	(k) $\frac{1}{2}\pi$	(o) *não existe*
(d) $\frac{1}{4}\pi$	(h) 1	(l) 2	(p) *não existe*

19. $3500\ m^3$

20. Converge para $p > 1$.

21. Converge para $p > 1$.

22. .

$(a)\ \frac{1}{2}e^{-1}$ $\quad (b)\ 0$ $\quad (c)$ *não existe*

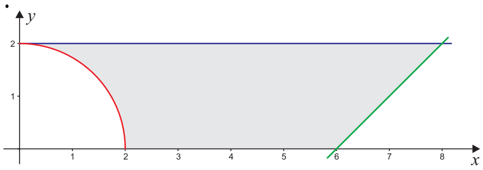
$(d)\ -\frac{1}{4}$ $\quad (e)\ 2e^3-2$ $\quad (f)\ 0$

23. $(a)\ \dfrac{1}{s-a}\quad para\ s>a \qquad (b)\ \dfrac{s}{s^2+1}\quad para\ s>0 \qquad (c)\ \dfrac{1}{s^2+1}\quad para\ s>0$

24. $(a)\ \Gamma(1)=1, \qquad \Gamma(2)=1$

25. $(a)\ 2\sqrt{2}-2 \qquad (b)\ 22 \qquad (c)\ \frac{125}{6} \qquad (d)\ 2-2\sin 1 \qquad (e)\ 17$

26. .



27. $(a)\ \frac{125}{6} \qquad (b)\ 16 \qquad (c)\ \frac{32-4\sqrt{2}}{3} \qquad (d)\ \frac{23}{6}$

28. $A=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{62-4y}{15}\right)-\left(\frac{2}{y}\right)dy+\int_{2}^{8}\left(\frac{62-4y}{15}\right)-\left(\frac{\sqrt{2}y}{2}\right)dy$

29. .

$(a)\ A=\displaystyle\int_{1}^{2}\left(x^2-x\right)dx+\int_{2}^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\left(\frac{4}{x-1}-x\right)dx$

$(b)\ A=\displaystyle\int_{1}^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}\left(y-\sqrt{y}\right)dy+\int_{\frac{1+\sqrt{17}}{2}}^{4}\left(\frac{y+4}{y}-\sqrt{y}\right)dy$

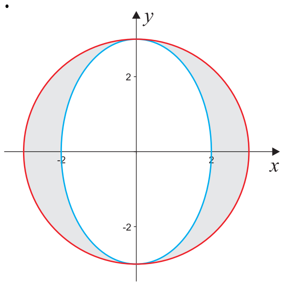
30. $k=\frac{9}{\sqrt[3]{4}}$

31. .

$(a)\ A=2\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\sqrt{y}}{\sqrt[4]{2}}dy+2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}dy$

$(b)\ A=\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\sin^2 t\,dt-\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{2}t^2dt$

32. .



33. $3a^2\pi$

34. $\frac{3\pi a^2}{8}$

35. $(a)\ \frac{5\pi}{4} \qquad (b)\ \frac{5}{4}\pi-2 \qquad (c)\ \frac{1}{2}(\pi-2) \qquad (d)\ 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (e)\ 6\pi-8\sqrt{2}$

36. 4π

37. $18\sqrt{3} - 4\pi$

38. $\frac{\pi}{2}$

39. $\frac{1}{4}\pi - \frac{3}{16}\sqrt{3}$

40. $\frac{\pi}{2} - 1$

41. Uma das várias respostas possíveis é:

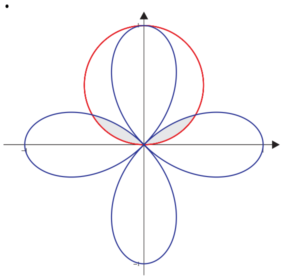
$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos 2\theta)^2 d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\sin 2\theta)^2 d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos 2\theta)^2 d\theta$$

42. (a) $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\arcsin\frac{1}{4}}^{\arctan\frac{1}{2}} (16\sin^2\theta - 1)d\theta + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \left(4\cos^2\theta - 1\right) d\theta$

(b) $l = \displaystyle\int_{\arcsin\frac{1}{4}}^{\arctan\frac{1}{2}} 4d\theta + \int_{\arctan\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{3}} 2d\theta + \int_{\arcsin\frac{1}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta$

43. (a) $\frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{4}$ (b) $4e^{\frac{9\pi}{4}} - 8e^{\frac{5\pi}{4}} + 4e^{\frac{\pi}{4}}$ (c) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

44. .



45. Uma das várias respostas possíveis é:

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{9}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - (4\cos 3\theta)^2\right] d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - 4\right] d\theta$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{9}} 4d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{6}} (4\cos 3\theta)^2 d\theta$$

46. .

(a) $\frac{1563}{40}$ (b) $24\sqrt{5}$ (c) $\frac{68}{27}\sqrt{34} - \frac{250}{27}$

(d) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2}$ (e) $\sqrt{2}(1 - e^{-2\pi})$ (f) 2

47. πu.c. (observe que a resolução da integral envolve uma integral com descontinuidade)

48. $\frac{\pi^2}{4}$

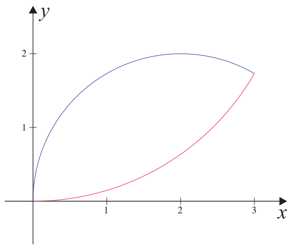
49. $\frac{352}{27}\sqrt{22} - \frac{250}{27}$

50. 192

51. O comprimento desejado é finito e igual a $\sqrt{333}$.

52. $\frac{1}{3}\sqrt{3}\pi + \frac{\pi}{2}$

53. Arco composto de dois subarcos de circunferências, conforme figura abaixo:



54. $l = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta}d\theta + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta + (1+\sin\theta)^2}d\theta$

55. $\frac{\pi}{3}$

56. $\frac{4\pi ab^2}{3}$

57. $2\pi^2 a^2 b$

58. (a) $\frac{3}{2}\pi$ (b) $\frac{92\pi}{5}$ (c) $\frac{64}{15}\sqrt{2}\pi$ (d) $\frac{162}{5}\pi$ (e) $\frac{1}{2}\pi$

59. $\frac{7}{2}\pi$

60. 32π

61. $\frac{410}{27}\pi - 6\pi\ln 6$

62. (a) $l = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1+9x^4} + \sqrt{1+\frac{1}{9}x^{\frac{-4}{3}}}\right)dx$ (b) $V = \frac{32}{35}\pi$

(c) $V = \pi\displaystyle\int_{-1}^{0}(1-\sqrt[3]{x})^2 - (1-x^3)^2dx + \pi\int_0^1 (1-x^3)^2 - (1-\sqrt[3]{x})^2dx$

63. .

(a) $V = \pi\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^4 - 9x^2 + 4x + 12)dx$ (b) $V = \pi\displaystyle\int_{-1}^{2}(20 - 13x^2 - x^4 + 8x)dx$

(c) $V = \pi\displaystyle\int_{-4}^{0}(y + 8 + 4\sqrt{y+4})dy - \pi\int_{-4}^{-3}(y + 8 - 4\sqrt{y+4})dy - \pi\int_{-3}^{0}(y^2 + 8y + 16)dy$

64. (a) $\frac{134}{189}\pi$ (b) $V = \pi\displaystyle\int_0^1 (1+\sqrt[3]{y})^2 - \left(1+\frac{y}{2}\right)^2 dy + \pi\int_1^{\frac{4}{3}}(3-y)^2 - \left(1+\frac{y}{2}\right)^2 dy$

65. Dica: Note que um cone tal como desejado pode ser obtido pela rotaç ão em torno do eixo y da reta $y = \frac{h}{r}x$, com $x \in [-r, r]$ e $y \in [0, h]$.

66. Dica: Note que a esfera pode ser obtida pela rotação da circunferência $x^2+y^2 = a^2$ em torno de qualquer eixo coordenado.

1.14 Revisão de Coordenadas Polares no $\mathbb{R}^2$

No sistema de coordenadas polares, as coordenadas consistem de uma distância e da medida de um ângulo em relação a um ponto fixo e a uma semirreta fixa. A Figura 1.49 ilustra um ponto P num sistema de coordenadas polares. O ponto fixo, denotado por O, é

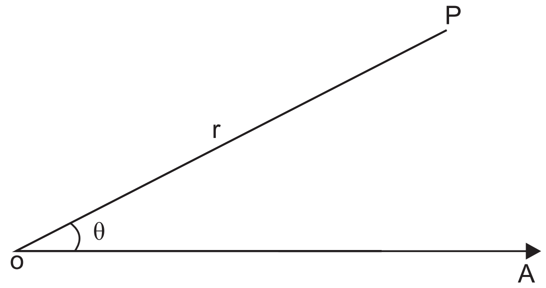


Figura 1.49: Ponto P usando coordenadas polares

chamado **pólo** ou **origem**. A semirreta fixa OA é chamada **eixo polar**. O ponto P fica bem determinado através do par ordenado (r, θ), onde r representa a distância entre a origem e o ponto P, e θ representa a medida, em radianos, do ângulo orientado $A\hat{O}P$. O segmento $\overline{OP}$, é chamado **raio**.

Relação entre o Sistema de Coordenadas Cartesianas Retangulares e o Sistema de Coordenadas Polares

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ r^2 = x^2 + y^2 \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Algumas equações em coordenadas polares e seus respectivos gráficos

Retas

1. $\theta = \theta_0$ ou $\theta = \theta_0 \pm n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ é uma reta que passa pela pólo e faz um ângulo θ_0 ou $\theta_0 \pm n\pi$ radianos com o eixo polar.

2. $r\sin\theta = a$ e $r\cos\theta = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, são retas paralelas ao eixo polar e $\theta = \frac{\pi}{2}$, respectivamente.

Circunferências

1. $r = a$, $a \in \mathbb{R}$ é uma circunferência de raio $|a|$.

2. $r = 2a\cos\theta$ é uma circunferência de raio $|a|$, com centro sobre o eixo polar e tangente ao eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$ de modo que

   (i) se $a > 0$ o gráfico está à direita do pólo;

   (ii) se $a < 0$ o gráfico está à esquerda do pólo.

3. $r = 2b\sin\theta$ é uma circunferência de raio $|b|$, com centro sobre o eixo $\theta = \frac{\pi}{2}$ e tangente ao eixo polar de modo que

   (i) se $b > 0$ o gráfico está acima do pólo;

   (ii) se $b < 0$ o gráfico está abaixo do pólo.

Limaçons

Equações do tipo $r = a \pm b\cos\theta$ ou $r = a \pm b\sin\theta$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ o gráfico varia conforme os casos abaixo.

1. se $b > a$, então o gráfico tem um laço. Veja a Figura 1.50.

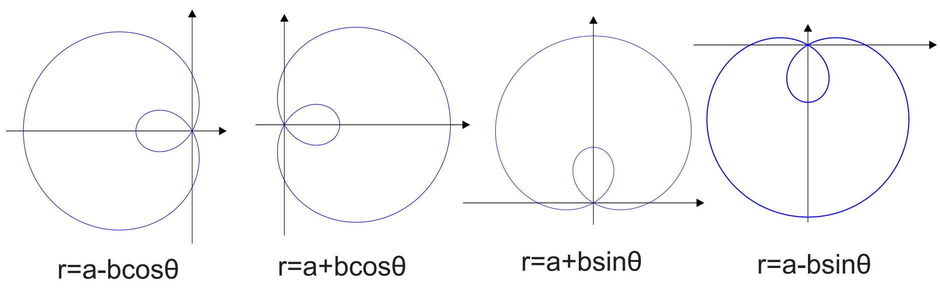


Figura 1.50: Limaçons com laço

2. se $b = a$, então o gráfico tem o formato de um coração, por isso é conhecido como **Cardióide**. Veja a Figura 1.51.

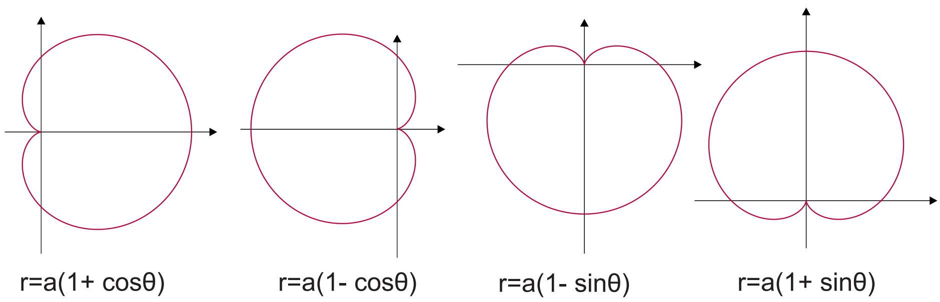


Figura 1.51: Cardióide

3. se $b < a$, então o gráfico não tem laço e não passa pelo pólo. Veja a Figura 1.52.

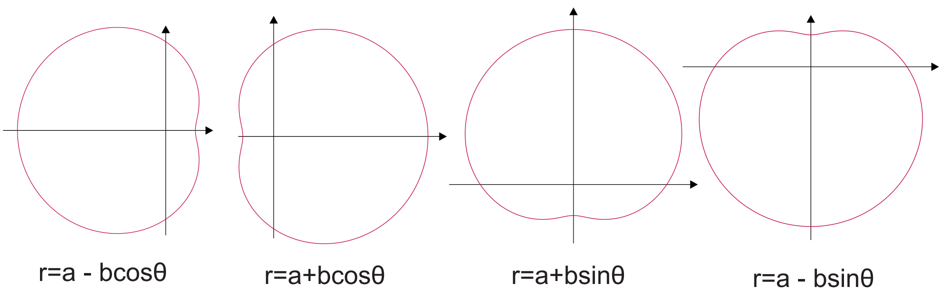


Figura 1.52: Limaçons sem laço

Rosáceas

Equações do tipo $r = a\cos(n\theta)$ ou $r = a\sin(n\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ o gráfico varia conforme os casos abaixo.

1. Se n é par temos uma rosácea com $2n$ pétalas. Veja a Figura 1.53.

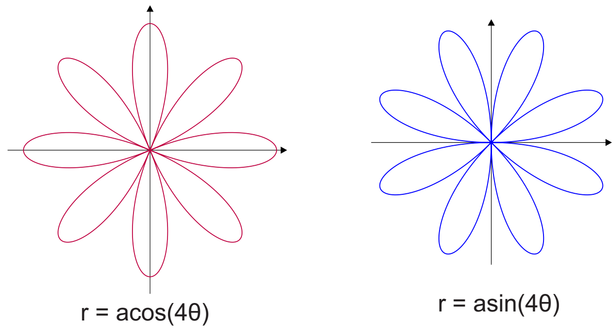


Figura 1.53: Rosáceas com $2n$ pétalas

2. Se n é ímpar temos uma rosácea com n pétalas. Veja a Figura 1.54.

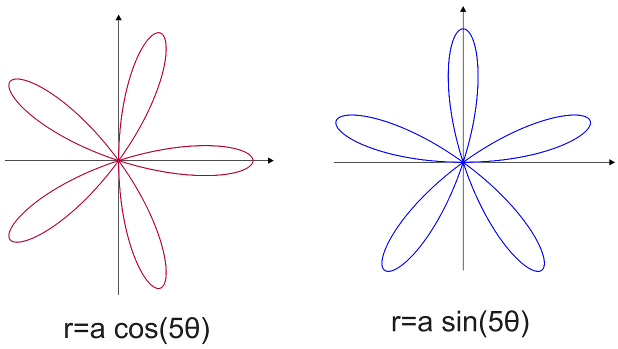


Figura 1.54: Rosáceas com n pétalas

Lemniscatas

Equações do tipo $r^2 = \pm a^a \cos(2\theta)$ ou $r^2 = \pm a^2 \sin(2\theta)$, onde $a \in \mathbb{R}$. Os gráficos para cada caso estão na Figura 1.55.

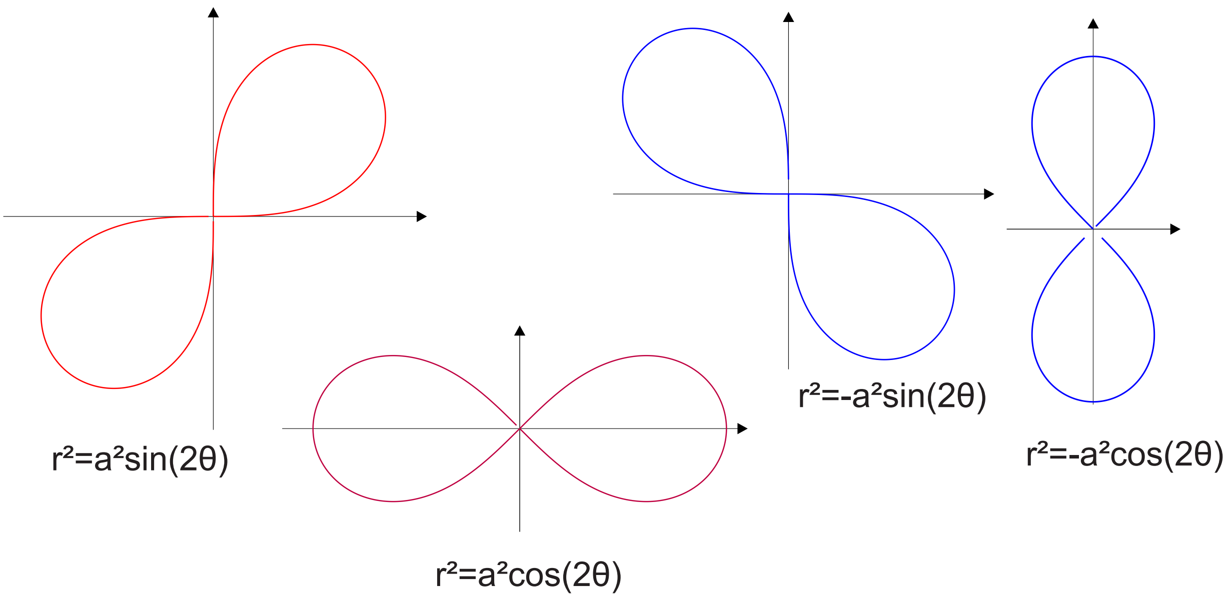


Figura 1.55: Lemniscatas

Espirais

As equações seguintes representam algumas espirais.

1. Espiral hiperbólica: $r\theta = a, \ \ a > 0$.
2. Espiral de Arquimedes: $r = a\theta, \ \ a > 0$.
3. Espiral logarítmica: $r = e^{a\theta}$.
4. Espiral parabólica: $r^2 = \theta$.

A Figura 1.56 ilustra estas espirais.

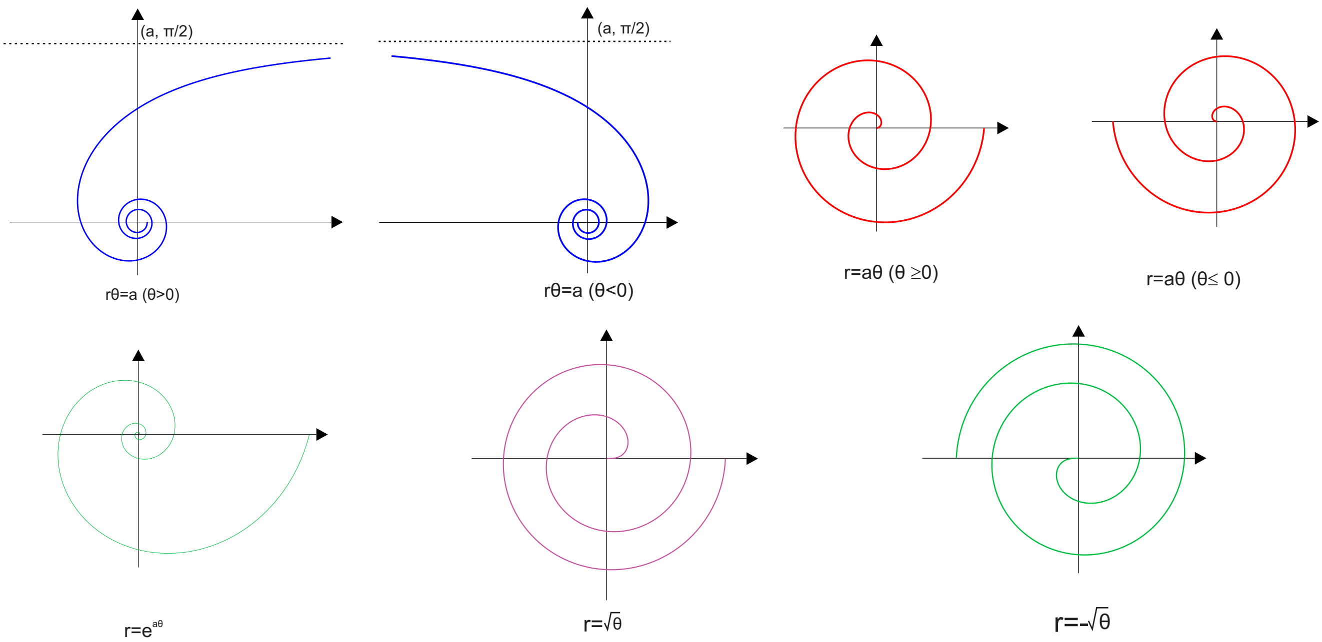


Figura 1.56: Espirais

Capítulo 2

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS E DIFERENCIAÇÃO PARCIAL

Objetivos (ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de):

1. Definir funções de várias variáveis e dar exemplos práticos;
2. Encontrar o domínio e fazer o gráfico (esferas, cones,cilindros, parabolóides, planos e interseções entre essas superfícies) com funções de várias variáveis com duas variáveis independentes;
3. Usando a definição mostrar que o limite de uma função de duas variáveis existe;
4. Verificar se uma função de duas variáveis é contínua num ponto;
5. Encontrar derivadas parciais e interpretá-las geometricamente quando a função for de duas variáveis independentes;
6. Encontrar derivadas parciais de funções compostas;
7. Encontrar as derivadas parciais de funções implícitas;
8. Resolver problemas que envolvam derivadas parciais como taxa de variação;
9. Representar geometricamente as diferenciais parciais e totais;
10. Resolver problemas que envolvam diferenciais parciais e totais;
11. Encontrar derivadas parciais de ordem superior;
12. Encontrar os extremos de uma função de duas variáveis quando existem;
13. Resolver problemas que envolvam extremos de funções de duas variáveis;
14. Resolver exercícios usando uma ferramenta tecnológica.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e no desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

2.1 Introdução

Um fabricante pode constatar que o custo da produção C de um determinado artigo depende da qualidade do material usado, do salário-hora dos operários, do tipo de maquinaria necessário, das despesas de manutenção e da supervisão. Dizemos então que C é função de cinco variáveis, porque depende de cinco quantidades diferentes. Neste Capítulo estudaremos as funções de várias variáveis, começando com o caso de funções de duas variáveis e estendendo então a um número arbitrário de variáveis. Como exemplo de função de duas variáveis podemos utilizar a área de um retângulo, função esta muito conhecida.

Consideremos o retângulo de base a e altura b. A área desse retângulo é

$$A = ab.$$

Por outro lado, se a for uma variável x podemos escrever a área desse retângulo em função de x, isto é,

$$A(x) = xb.$$

Desse modo, temos a área como função de uma variável. Podemos também, fazer variar a base e a altura simultaneamente. Nesse caso, tomando $b = y$ teremos a área dada por

$$A(x, y) = xy,$$

ou seja, a área é expressa como função de duas variáveis.

A função $A(x, y)$ é definida para todo par de pontos pertencentes ao plano $\mathbb{R}^2$ e a imagem é um número real. O convencional é escrever $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Um raciocínio análogo pode ser feito para o volume de um paralelepípedo. Sejam a, b e c as dimensões de um paralelepípedo. O volume será dado por

$$V = abc.$$

Por outro lado, se a for uma variável x podemos escrever o volume desse paralelepípedo expresso como função de uma variável x, isto é,

$$V(x) = xbc.$$

Podemos também, fazer variar as dimensões a e b simultaneamente, isto é, tomando $b = y$ teremos o volume do paralelepípedo expresso como uma função de duas variáveis x e y, ou seja,

$$V(x, y) = xyc.$$

Também é possível variar as três dimensões simultaneamente e, nesse caso tomando $z = c$ o volume do paralelepípedo será expresso como uma função de três variáveis x, y e z, isto é,

$$V(x, y, z) = xyz.$$

A função $V(x, y, z)$ é definida para toda tripla de pontos pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^3$ e a imagem é um número real. O convencional é escrever $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Vejamos um exemplo que envolve mais do que três variáveis.

Exemplo 2.1.1 *Suponhamos que uma pessoa vá a um supermercado e a nota de compras seja descrita conforme o modelo abaixo.*

Nota de compras

Produtos	Unidades	Preço por unidade	Total
Leite	2 pacotes	1,00	2,00
Pão	10	0,10	1,00
Laranja	2kg	0,50	1,00
Maçã	2kg	2,50	5,00
Açúcar	5kg	0,60	3,00
		Total a pagar	12,00

Suponhamos que as variáveis x, y, z, w e t representem, respectivamente, leite, pão, laranja, maçã e açúcar, então podemos escrever a função "total a pagar" por

$$T(x,y,z,w,t) = x + 0,1y + 0,5z + 2,5w + 0,6t.$$

A função T é uma função de cinco variáveis. Para encontrar o total a pagar referente a tabela anterior, fazemos

$$\begin{aligned} T(2,10,2,2,5) &= 2 + 0,1(10) + 0,5(2) + 2,5(2) + 0,6(5) \\ &= 2+1+1+5+3 = 12. \end{aligned}$$

A função $T(x,y,z,w,t)$ é definida para todo ponto $(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5$. O convencional é escrever $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$.

Note que, em todos os exemplos acima, a imagem da função é um número real. Com base nesses exemplos vamos definir funções de várias variáveis.

2.2 Função de Várias Variáveis

Definição 2.2.1 *Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e seja $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) \in D$. Se a cada $n-$upla ordenada pertencente a D corresponder um único número real $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, dizemos que f é uma função de $n-$variáveis, definida em D com imagem em $\mathbb{R}$. O subconjunto D é chamado domínio de f. Convencionalmente escreve-se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

Exemplo 2.2.2 *Vejamos alguns exemplos de funções de várias variáveis:*

(a) $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y) = 2x + 3y + 1$.
(b) $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y,z) = x^2 + y + z + 6$.
(c) $f : D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y,z,w) = x^2 + y^2 + z + w + 6$.
(d) $f : D \subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y,z,w,t) = x^2 + y^2 + z + w + t^2 + 6$.

Exemplo 2.2.3 *A função $z = f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$ é uma função de duas variáveis, cujo domínio é $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y > x\}$. Geometricamente, D é formado por todos os pontos do plano xy que estão situados "acima"da reta $y = x$. Já a função $w = f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é uma função de três variáveis cujo domínio são todos os pontos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, ou seja, todos os ponto de $\mathbb{R}^3$, com exceção da origem.*

Exemplo 2.2.4 *A temperatura em um ponto (x,y) de uma placa de metal plana é dada por $T(x,y) = x^2 + 4y^2$ graus.*

(a) Determine a temperatura no ponto $(3,1)$.

(b) Determine e represente geometricamente a curva ao longo da qual a temperatura tem um valor constante igual a 16 graus.

Solução: (a) Temos que $T(3,1) = 3^2 + 4 = 13$ *graus*.
(b) A curva desejada tem equação $T(x,y) = 16$, ou seja, $x^2 + 4y^2 = 16$, que nos fornece a elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, representada na Figura 2.1.

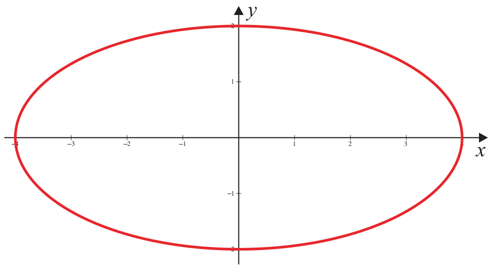


Figura 2.1: 16 graus ao longo da elipse.

2.2.5 Gráfico de uma Função de Várias Variáveis

Definição 2.2.6 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de n variáveis. Definimos o gráfico de f como o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por todos os pontos da forma*

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

onde $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

No caso $n = 2$, o gráfico de f é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Quando $n \geq 3$, não é mais possível visualizar o gráfico de f, pois este será um subconjunto de $\mathbb{R}^4$.

Exemplo 2.2.7 *O gráfico de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ é um parabolóide, conforme mostra a Figura 2.2.*

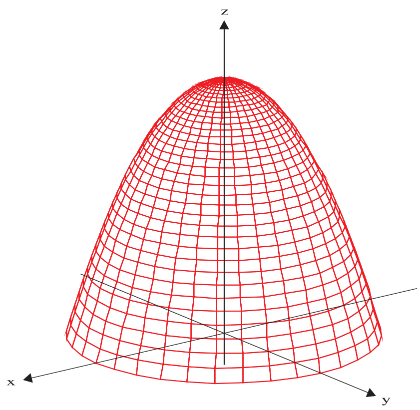


Figura 2.2: Parabolóide $z = f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

A equação de uma superfície pode ser escrita na forma implícita ou explícita, em função de duas variáveis, isto é, $F(x, y, z) = 0$ ou $z = f(x, y)$.

Exemplo 2.2.8 *A equação da esfera centrada na origem pode ser escrita como segue*

- *Implicitamente:* $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.
- *Explicitamente em função de x e y, com* $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Representação Gráfica de uma Superfície

Para representar graficamente uma superfície procede-se como segue:

1. Determina-se as interseções com os eixos cartesianos determinando os pontos

$$(x, 0, 0),\ (0, y, 0)\ e\ (0, 0, z).$$

2. Determina-se os traços das superfícies sobre os planos coordenados

   (a) xy fazendo $z = 0$ na equação da superfície;

   (b) xz fazendo $y = 0$ na equação da superfície;

   (c) yz fazendo $x = 0$ na equação da superfície.

3. Determina-se as simetrias

   (a) em relação aos planos coordenados

   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano xy se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, y, -z)$;
   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano xz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, z)$;
   - Uma superfície é simétrica em relação ao plano yz se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, z)$.

   (b) em relação aos eixos coordenados

   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo x se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(x, -y, -z)$;
   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo y se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, y, -z)$;
   - Uma superfície é simétrica em relação ao eixo z se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, z)$.

   (c) em relação à origem

   - Uma superfície é simétrica em relação à origem se para qualquer ponto $P(x, y, z)$ existe um ponto $P'(-x, -y, -z)$.

4. Secções e Extensão: Quando os traços principais não forem suficientes para caracterização da superfície, recorre-se a determinação de secções com planos paralelos aos planos coordenados. Para isso fazemos

   - $z = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, y, k) = 0$ sobre o plano coordenado xy;
   - $y = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(x, k, z) = 0$ sobre o plano coordenado xz;
   - $x = k$ sendo k uma constante na equação $F(x, y, z) = 0$, isto é, teremos a equação $F(k, y, z) = 0$ sobre o plano coordenado yz.

Exemplo 2.2.9 *Esboçar geometricamente a superfície de equação*

$$-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1.$$

Solução: Vamos proceder conforme os passos listados acima.

1. Interseções com os eixos coordenados: Os pontos $(x, 0, 0)$ e $(0, 0, z)$ não são reais e o ponto $(0, y, 0)$ é duplo ou seja temos os pontos $P(0, 4, 0)$ e $P'(0, -4, 0)$.

2. Traços sobre os planos coordenados

   - Sobre o plano xy : Fazendo $z = 0$ tem-se a hipérbole $-\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ (Figura 2.3).

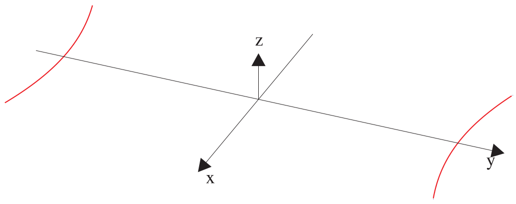


Figura 2.3: Traço sobre xy

   - Sobre o plano xz : Fazendo $y = 0$ tem-se o conjunto vazio.
   - Sobre o plano yz : Fazendo $x = 0$ tem-se a hipérbole $\dfrac{y^2}{4^2} - \dfrac{z^2}{3^2} = 1$ (Figura 2.4).

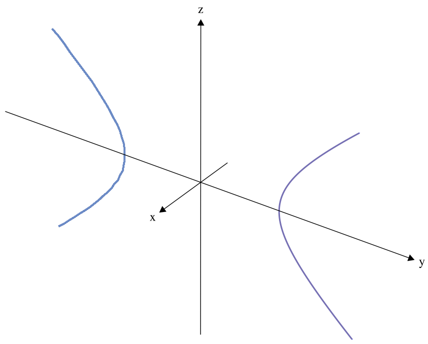


Figura 2.4: Traço sobre yz

3. Simetrias: Explicitamente, a equação $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1$ pode ser escrita como

$$y = 4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}} \qquad \text{ou} \qquad y = -4\sqrt{1 + \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2}}$$

   logo, é simétrica em relação aos planos coordenados, aos eixos coordenados e à origem.

4. Secções e extensões: fazendo $z = k$, com $k \in \mathbb{R}$, obtemos uma família de hipérboles de eixo real paralelo ao eixo$y$. Fazendo $y = k$, com $k > 4$ ou $k < -4$, obtemos uma família de elipses. Fazendo $x = k$, com $k \in \mathbb{R}$, obtemos novamente uma família de hipérboles de eixo real paralelo ao eixo y.

   - Por exemplo, fazendo $z = 3$ temos a equação de uma hipérbole (Figura 2.5)

$$-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{3^2}{3^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 2.$$

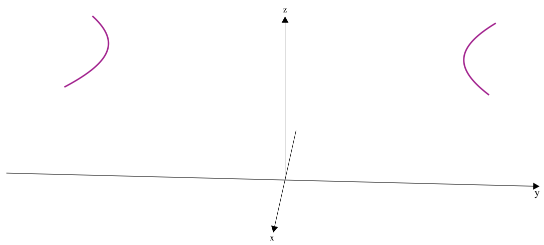


Figura 2.5: Traço sobre o plano $z = 3$.

- Por exemplo, fazendo $y = \pm 8$ temos a equação de elipses (Figura 2.6)

$$-\frac{x^2}{5^2} + \frac{(\pm 8)^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{5^2} - \frac{z^2}{3^2} = -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{5^2} + \frac{z^2}{3^2} = 3.$$

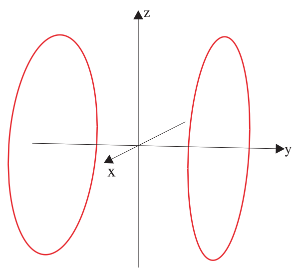


Figura 2.6: Traços sobre os planos $y = \pm 8$.

5. Construção da superfície. Os elementos fornecidos pela discussão acima permitem construir a superfície hipebólica de duas folhas, conforme a Figura 2.7.

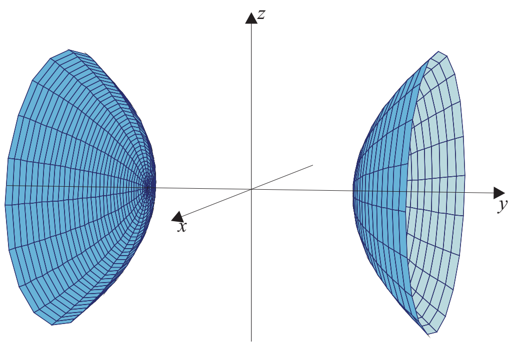


Figura 2.7: Hiperbolóide de duas folhas

Observação 2.2.10 *Note que a figura acima não é o gráfico de uma função de duas variáveis, é a representação geométrica de uma superfície cuja equação é dada explicitamente pelas funções:* $z = -3\sqrt{-1 - \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}}$ *e* $z = 3\sqrt{-1 - \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}}$.

Exemplo 2.2.11 *Considere a função de duas variáveis* $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$. *Determine o domínio de* $f(x, y)$, *construa e identifique o gráfico de* $z = f(x, y)$.

Solução: $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/ \ 4x^2 + y^2 \leq 4\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/ \ x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leq 1\}$, ou seja, o domínio de $f(x,y)$ é o conjunto de pontos do plano xy no interior da elipse $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

O gráfico de $f(x,y)$ é uma superfície, ou seja, um conjunto de ponto em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$Gr(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/ \ (x,y) \in D(f) \ \text{ e } \ z = f(x,y)\}.$$

Assim temos $z = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$ que é um ramo $(z \geq 0)$ do gráfico de $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$, esta é a equação de um elipsóide com centro na origem. Logo, o gráfico de $z = f(x,y)$ está representado na Figura 2.8.

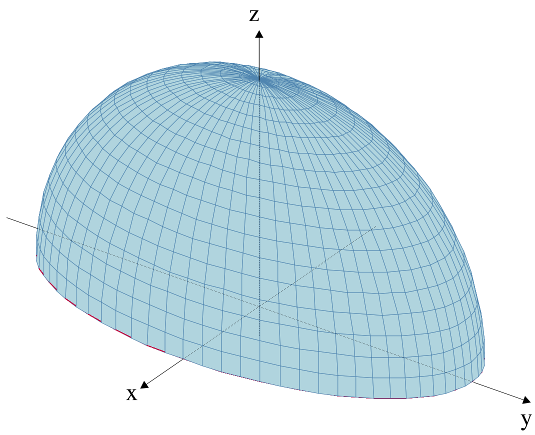


Figura 2.8: Ramo $z \geq 0$ do elipsóide $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$

2.2.12 Curvas e Superfícies de Nível

Uma curva ao longo da qual uma função de duas variáveis $z = f(x,y)$ tem valor constante (como a elipse do Exemplo 2.2.4) é denominada **curva de nível** ou **curva de contorno** de f.

A equação de uma curva de nível k para f é da forma $f(x,y) = k$. Quando a função f representa uma distribuição de temperatura, suas curvas de nível são chamadas **isotermas**. Se f representa o potencial elétrico, as curvas de nível de f são chamadas de **curvas equipotenciais**.

Suponha que uma superfície S é o gráfico de uma função $z = f(x,y)$. Se a interseção de S com o plano $z = k$ é não vazia, então ela é uma curva de nível $f(x,y) = k$. A cada ponto desta curva de nível corresponde um único ponto na superfície S que está k unidades acima do plano xy, se $k > 0$, ou k unidades abaixo dele, se $k < 0$. Ao considerarmos diferentes valores para a constante k, obtemos um conjunto de curvas chamado de **mapa de contorno de** S.

Tal mapa de contorno facilita a visualização da superfície. Quando as curvas de nível são mostradas em intervalos equi-espaçados de k, a proximidade de curvas sucessivas nos dá a informação sobre a aclividade de S. Quanto mais próximas as curvas, significa que os valores de z mudam mais rapidamente do que quando elas estão mais afastadas, ou seja, quando curvas de nível estão juntas, a superfície é "íngreme".

Exemplo 2.2.13 *Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Faça um mapa de contorno de f, mostrando as curvas de nível em* $1, 2, 3, 4, 5$.

Solução: As curvas de nível são as circunferências $x^2 + y^2 = k$. Um mapa de contorno de f pode ser visto na Figura 2.9.

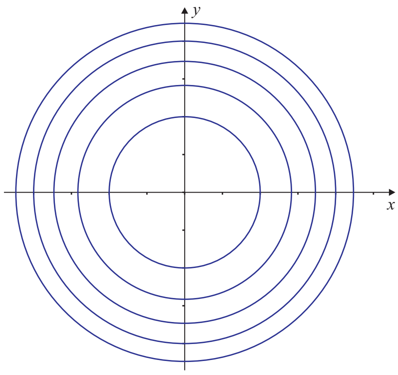


Figura 2.9: Curvas de Nível: $x^2 + y^2 = k$

Embora não possamos visualizar o gráfico de uma função de três variáveis $w = f(x, y, z)$, podemos considerar as superfícies de equações $f(x, y, z) = k$, que são chamadas de superfícies de nível de f. Ainda, toda superfície definida por uma equação em x, y, z pode ser considerada como uma superfície de nível de alguma função de três variáveis. Por exemplo, o hiperbolóide da Figura 2.7 é a superfície de nível $g(x, y, z) = 1$ onde $g(x, y, z) = -\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{z^2}{3^2}$.

2.2.14 Distâncias e Bolas no Espaço

Sejam $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $A(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ dois pontos de $\mathbb{R}^n$. A distância de P até A, denotada por $||P - A||$, é dada por

$$||P - A|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definição 2.2.15 *Sejam $A(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ um ponto de $\mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ um número real. Denominamos bola aberta de centro A e raio ε ao conjunto de todos os pontos $P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tais que $||P - A|| < \varepsilon$, ou seja,*

$$B(A, \varepsilon) = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \ \ ||P - A|| < \varepsilon\}.$$

Exemplo 2.2.16 *No plano, para $\varepsilon = 1$ e $A(1, 2)$ temos a bola aberta*

$$B((1, 2), 1) = \left\{P(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ ||(x, y) - (1, 2)|| < 1\right\}$$

que é graficamente representada pela Figura 2.10.

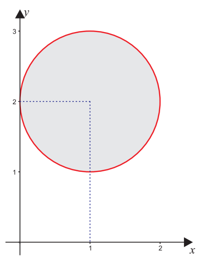


Figura 2.10: Bola aberta $B((1, 2), 1)$.

Exemplo 2.2.17 *Sejam $A(1,1,2)$ e $\varepsilon = 1$ então a bola aberta*

$$B((1,1,2),1) = \left\{P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ ||(x,y,z) - (1,1,2)|| < 1\right\}$$

está graficamente representada pela Figura 2.11.

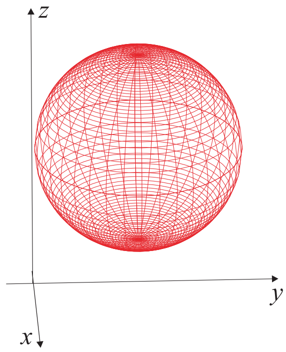


Figura 2.11: Bola aberta $B((1,1,2),1)$

2.3 Limite de uma Função de duas Variáveis

Vamos estudar a existência do limite de uma função de duas variáveis. O raciocínio análogo é feito para funções de n variáveis.

Definição 2.3.1 *Seja f uma função de duas variáveis definida numa bola aberta $B(A,r)$, exceto possivelmente em $A(x_0,y_0)$. Dizemos que o número L é o limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende para (x_0,y_0) se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < ||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta$. Nesse caso, escrevemos*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

Exemplo 2.3.2 *Mostre que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x+3y) = 11.$

Solução: *Devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - 11| < \varepsilon$ sempre que $0 < ||(x,y) - (1,3)|| < \delta$. Assim*

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 11| &= |2x + 3y - 11| \\ &= |(2x-2) + (3y-9)| \\ &= |2(x-1) + 3(y-3)| \\ &\leq |2(x-1)| + |3(y-3)| \\ &= 2|(x-1)| + 3|(y-3)| < \varepsilon \end{aligned}$$

e obtemos que

$$2|(x-1)| + 3|(y-3)| < \varepsilon. \qquad (\ I\ )$$

Por outro lado, de $0 < ||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \delta$, segue que

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta.$$

Agora, pela definição de módulo, temos que

$$|x-1| = \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

e

$$|y-3| = \sqrt{(y-3)^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta$$

e assim

$$2\,|(x-1)| + 3\,|(y-3)| < 2\delta + 3\delta = 5\delta. \qquad (\ II\ )$$

Portanto, de (I) e (II) podemos formar o sistema de inequações

$$\begin{cases} 2\,|(x-1)| + 3\,|(y-3)| < \varepsilon \\ 2\,|(x-1)| + 3\,|(y-3)| < 5\delta \end{cases}$$

Assim, podemos admitir que $5\delta = \varepsilon$ *e encontrar que* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Logo, dado $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ *tal que* $|f\,(x,y) - 11| < \varepsilon$ *sempre que* $0 < ||(x,y) - (1,3)|| < \delta$, *o que prova pela definição que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} 2x + 3y = 11$.

Observação 2.3.3 *No Cálculo 1, vimos que para existir o limite de uma função de uma variável, quando* x *se aproxima de* x_0, *é necessário que os limites laterais* $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *existam e sejam iguais. Já para funções de duas variáveis, a situação análoga é mais complicada, pois no plano há uma infinidade de curvas (caminhos) ao longo das quais o ponto* (x,y) *pode se aproximar de* (x_0, y_0). *Porém, se o limite da Definição 2.3.1 existe, é preciso então que* $f(x,y)$ *tenda para* L, *independentemente do caminho considerado. Essa ideia nos fornece uma importante regra (Teorema 2.3.4) para investigar a existência de limites de funções de duas variáveis.*

Teorema 2.3.4 *Seja* f *uma função de duas variáveis definida numa bola aberta centrada em* $A\,(x_0, y_0)$, *exceto possivelmente em* $A\,(x_0, y_0)$. *Se* $f\,(x,y)$ *tem limites diferentes quando* (x,y) *tende para* (x_0, y_0) *por caminhos diferentes, então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f\,(x,y) \quad \textbf{\textit{não existe.}}$$

Exemplo 2.3.5 *Vamos mostrar que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *não existe.*

Solução: Considere $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}$. Note que C_1 é exatamente o eixo y e é um caminho que passa pelo ponto $(0,0)$. Assim,

$$\lim_{(x,y)\underset{C_1}{\to}(0,0)} f\,(x,y) = \lim_{(0,y)\to(0,0)} f\,(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{0^2+y^2} = 0.$$

Considere agora $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = kx\}$. Note que C_2 é o conjunto de retas que passam pelo ponto $(0,0)$. Assim

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\underset{C_2}{\to}(0,0)} f\,(x,y) &= \lim_{(x,kx)\to(0,0)} f\,(x,kx) = \lim_{(x,kx)\to(0,0)} \frac{xkx}{x^2+(kx)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2k}{x^2\,(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}. \end{aligned}$$

Mostramos então que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ S_2}} f(x,y)$$

e com isso, concluímos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe.

Exemplo 2.3.6 *Vamos mostrar que* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ *existe.*

Solução: Primeiro vamos verificar se, por caminhos diferentes, o limite tem o mesmo valor numérico. Considerando $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = kx\}$, o conjunto de retas que passam pelo ponto $(0,0)$ temos

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} f(x,y) &= \lim_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,kx) = \lim_{(x,kx)\to(0,0)} \frac{3x^2kx}{x^2+(kx)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3k}{x^2(1+k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{xk}{1+k^2} = 0.\end{aligned}$$

Considerando agora $C_2 = \{(x,y) \in D;\ y = kx^2\}$, o conjunto de parábolas que passam pelo ponto $(0,0)$, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_2}} f(x,y) &= \lim_{(x,kx^2)\to(0,0)} f\left(x,kx^2\right) = \lim_{(x,kx^2)\to(0,0)} \frac{3x^2kx^2}{x^2+\left(kx^2\right)^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3x^4k}{x^2(1+k^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2k}{1+k^2x^2} = 0.\end{aligned}$$

Como $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ C_2}} f(x,y)$, segue que há probabilidades de que $L = 0$ seja o limite de $f(x,y) = \frac{3xy}{x^2+y^2}$. Para confirmar, devemos verificar se a Definição 2.3.1 está satisfeita. Devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$ sempre que $0 < ||(x,y) - (0,0)|| < \delta$. Assim,

$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|3x^2y|}{|x^2+y^2|} = \frac{3|x^2||y|}{x^2+y^2} < \varepsilon. \quad (\text{ I })$$

De $0 < ||(x,y) - (0,0)|| < \delta$ obtemos $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Sendo $x^2 \leq x^2+y^2$ e $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}$ podemos escrever

$$\frac{3|x^2||y|}{x^2+y^2} \leq \frac{3(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = 3|y| < 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta. \quad (\text{ II })$$

Comparando (I) com (II) podemos admitir que $3\delta = \varepsilon$, donde vem $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Portanto, mostramos que existe o limite existe e que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

Exemplo 2.3.7 *Calcule, se possível, o valor de* $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{3x^4(y-1)^4}{(x^4+y^2-2y+1)^3}$.

Solução: Iniciamos investigando a existência do limite, utilizando diferentes caminhos que passam pelo ponto $(0,1)$.

Utilizando os caminhos lineares $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = kx+1\}$ temos que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\underset{C_1}{\to}(0,1)} \frac{3x^4(y-1)^4}{(x^4+(y-1)^2)^3} &= \lim_{(x,kx+1)\to(0,1)} \frac{3x^4(kx)^4}{(x^4+(kx)^2)^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3k^4x^8}{x^6(x^2+k^2)^3} = 0.\end{aligned}$$

Agora, usando os caminhos parabólicos $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = kx^2+1\}$ temos que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\underset{C_2}{\to}(0,1)} \frac{3x^4(y-1)^4}{(x^4+(y-1)^2)^3} &= \lim_{(x,kx^2+1)\to(0,1)} \frac{3x^4(kx^2)^4}{(x^4+(kx^2)^2)^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{3k^4x^{12}}{x^{12}(1+k^2)^3} = \frac{3k^4}{(1+k^2)^3}.\end{aligned}$$

Portanto, como obtemos limites diferentes por caminhos distintos, concluímos que o limite não existe.

Exemplo 2.3.8 *Calcule, se possível, o valor de* $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(3,1,-5)} \frac{(x+2y+z)^3}{(x-3)(y-1)(z+5)}$.

Solução: Iniciamos investigando a existência do limite. Como temos uma função de 3 variáveis, devemos usar caminhos em $\mathbb{R}^3$. Se $v = (a,b,c)$ são as coordenadas de um vetor diretor de uma reta que passa pelo ponto $(3,1,-5)$, podemos utilizar as equações paramétricas para definir o caminho retilíneo

$$C_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 3+at,\ y = 1+bt,\ z = -5+ct\right\}.$$

Para nos aproximarmos de $(3,1,-5)$ por C_1, basta fazermos o parâmetro $t \to 0$ e assim

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\underset{C_1}{\to}(3,1,-5)} \frac{(x+2y+z)^3}{(x-3)(y-1)(z+5)} &= \lim_{t\to 0} \frac{(3+at+2+2bt-5+ct)^3}{(at)(bt)(ct)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(at+2bt+ct)^3}{abct^3} = \frac{(a+2b+c)^3}{abc}.\end{aligned}$$

Atribuindo diferentes valores para a, b, c, ou seja, utilizando caminhos retilíneos distintos para nos aproximarmos de $(3,1,-5)$ obtemos limites também distintos. Portanto, pela regra dos dois caminhos, o limite em questão não existe.

2.3.9 Propriedades dos Limites

(i) Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x,y) = ax+by+c$, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = ax_0+by_0+c$.

(ii) Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$ existem e $c \in \mathbb{R}$, então:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \pm \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$.

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cf(x,y) = c \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y).g(x,y)] = \lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y).$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}] = \dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}$ desde que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0.$

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y)]^n = \left(\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+^*$.

Proposição 2.3.10 *Se g é uma função de uma variável, contínua num ponto a, e $f(x,y)$ é uma função tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (g \circ f)(x,y) = g(a)$, ou seja,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = g\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right).$$

Exemplo 2.3.11 *Calcular* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \ln(x^2 + xy - 1)$.

Solução: Considerando as funções

$$f(x,y) = x^2 + xy - 1 \quad \text{e} \quad g(u) = \ln u,$$

temos que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 2$ e que g é contínua em $u = 2$. Aplicando a proposição acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,2)} (g \circ f)(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \ln(x^2 + xy - 1) \\
&= \ln\left(\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x^2 + xy - 1)\right) = \ln 2.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.12 *Se* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \left[\dfrac{x^2 - y^2}{x+y} \cdot f(x,y) + \ln\left(\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x+y} + 1\right)\right] = -2$, *determine* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y)$.

Solução: Como o limite dado existe, temos pelas propriedades de limites:

$$\begin{aligned}
-2 &= \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \left[\frac{x^2 - y^2}{x+y} \cdot f(x,y) + \ln\left(\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x+y} + 1\right)\right] \\
&= \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{x^2 - y^2}{x+y} \cdot \lim_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y) + \ln\left(\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \left(\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x+y} + 1\right)\right) \\
&= \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} \cdot \lim_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y) + \ln\left(\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \left(\frac{(x+y)^2}{x+y} + 1\right)\right) \\
&= \lim_{(x,y)\to(2,-2)} (x-y) \cdot \lim_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y) + \ln\left(\lim_{(x,y)\to(2,-2)} (x+y+1)\right) \\
&= 4 \cdot \lim_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y) + \ln(1) \\
&= 4 \cdot \lim_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y)
\end{aligned}$$

logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} f(x,y) = -\dfrac{1}{2}$.

Proposição 2.3.13 *Se* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *e* $g(x,y)$ *é uma função limitada em alguma bola aberta de centro* (x_0, y_0), *exceto possivelmente em* (x_0, y_0), *então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y).g(x,y) = 0.$$

Exemplo 2.3.14 *Mostre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

Solução: Consideremos $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Sabemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$, então basta mostrar que $g(x,y)$ é limitada.

Escrevendo g em coordenadas polares, temos que

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta.$$

Evidentemente, $|\cos\theta\sin\theta| \leq 1$ e portanto temos que $g(x,y)$ é limitada. Logo, pela proposição anterior, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

Outra maneira de resolver usando ainda a Proposição 2.3.13.

Sejam $f(x,y) = y$ e $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. Então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e

$$|g(x,y)| = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \quad \text{para todo} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

ou seja, $g(x,y)$ é limitada para todo $(x,y) \neq (0,0)$, logo pela Proposição acima temos o resultado desejado.

Exemplo 2.3.15 *Calcule, se existir,* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y^2 - 2xy^3}{3x^2+3y^2}$.

Solução: Usando as propriedades temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^2 - 2xy^3}{3x^2+3y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2x^2}{3}\frac{y^2}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{3}\frac{y^2}{x^2+y^2} \right) \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{3} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{3} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2}{3} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{3} = 0$, e $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ é uma função limitada numa vizinhança da origem, exceto em $(0,0)$, temos pela Proposição 2.3.13

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^2 - 2xy^3}{3x^2+3y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{3} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{3} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

2.4 Continuidade de uma Função de duas Variáveis

Definição 2.4.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0) se satisfaz as condições:*

$$\begin{array}{l} (i)\ f(x_o, y_o) \ \ existe \\ (ii) \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad existe \\ (iii) \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0). \end{array}$$

Exemplo 2.4.2 *Verifique se a função* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *é contínua em* $(0,0)$.

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da Definição 2.4.1.

(i) Como $f(0,0) = 0$, a primeira condição está satisfeita.

(ii) Vimos no Exemplo 2.3.5 que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ não existe. Portanto, a segunda condição da Definição 2.4.1 não é satisfeita.

Logo, $f(x,y)$ não é contínua em $(0,0)$.

Exemplo 2.4.3 *A função definida por* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2} & se \ (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & se \ (x,y) = (0,1) \end{cases}$ *é contínua em* $(0,1)$?

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da Definição 2.4.1.

(i) Como $f(0,1) = 0$, a primeira condição está satisfeita.

(ii) Vamos verificar se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ existe e é igual a zero (se for diferente a função não será contínua no ponto)

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^4-(y-1)^4}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{[x^2-(y-1)^2][x^2+(y-1)^2]}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \left[x^2+(y-1)^2\right] = 0.$$

(iii) Dos itens anteriores, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0 = f(0,1).$$

Portanto, a função $f(x,y)$ dada é contínua no ponto $(0,1)$.

Exemplo 2.4.4 *Verifique se a função* $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & se \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *é contínua em* $(0,0)$.

Solução: Devemos verificar se f satisfaz as condições da Definição 2.4.1.

(i) Como $f(0,0) = 0$, a primeira condição está satisfeita.

(ii) Como vimos no Exemplo 2.3.6, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$, a segunda condição está satisfeita.

(iii) Segue dos itens anteriores que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f\,(0,0)\,.$$

Portanto, as três condições da Definição 2.4.1 estão satisfeitas. Logo, $f\,(x,y)$ é contínua em $(0,0)\,.$

Exemplo 2.4.5 *Utilize argumentos consistentes para determinar, se existir, o valor de b que torne as funções definidas abaixo contínuas.*

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ b, & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(b) $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3(y-5)^2}{2x^7+3(y-5)^4}, & se \quad (x,y) \neq (0,5) \\ b, & se \quad (x,y) = (0,5) \end{cases}$

Solução (a) 1: Queremos determinar, se existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Para tal, primeiro verificaremos se por caminhos diferentes obtemos o mesmo valor numérico para este limite.

Considere o caminho $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ y = kx\}$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,kx)\to(0,0)} f(x,kx) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2(kx)^2}{x^4+(kx)^2}\right] \\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{k^2x^4}{x^2(x^2+k^2)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{k^2x^2}{x^2+k^2}\right] = 0 \end{aligned}$$

Considere o caminho $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ y = kx^2\}$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,kx^2)\to(0,0)} f(x,kx^2) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2k^2x^4}{x^4+k^2x^4}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{k^2x^2}{1+k^2}\right] = 0$$

Como por C_1 e C_2 obtivemos o limite como sendo 0, há probabilidades que o limite exista. Para confirmar devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que

$$|f(x,y)| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta.$$

Por propriedades modulares temos

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y^2}{x^4+y^2}\right| = \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} \leq \frac{x^2(x^4+y^2)}{x^4+y^2} = x^2 \leq x^2+y^2 < \delta^2$$

assim, escolhendo $\delta = \sqrt{\epsilon}$, provamos usando a definição, que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Portanto, escolhendo $b = 0$ temos que a função $f(x,y)$ é contínua em todos os pontos (x,y).

Solução (a) 2: Note que podemos escrever

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\frac{y^2}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^4+y^2}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$ e $\dfrac{y^2}{x^4+y^2}$ é uma função limitada numa vizinhança da origem, exceto em $(0,0)$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^4+y^2} = 0.$$

Portanto, escolhendo $b=0$ temos que a função $f(x,y)$ é contínua em todos os pontos (x,y).

Solução (b): Queremos determinar, se existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,5)} g(x,y)$. Para tal, primeiro verificaremos se por caminhos diferentes obtemos o mesmo valor numérico para este limite.

Considere o caminho $C_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y = kx+5\}$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_1]{}(0,5)} g(x,y) &= \lim_{(x,kx+5)\to(0,5)} g(x,kx+5) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3(kx)^2}{2x^7+3(kx)^4}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{k^2x^5}{x^4(2x^3+3k^2)}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{k^2x}{2x^3+3k^2}\right] = 0
\end{aligned}$$

Considere o caminho $C_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y = kx^2+5\}$

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow[C_2]{}(0,5)} g(x,y) = \lim_{(x,kx^2+5)\to(0,5)} g(x,kx^2+5) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3k^2x^4}{2x^7+3k^2x^8}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{k^2}{2+3k^2x}\right] = \frac{k^2}{2}$$

Como pelo caminho C_2 obtivemos o valor do limite dependendo de k temos que para valores distintos de k obtemos respostas distintas para o valor do limite, logo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,5)} g(x,y)$ não existe. Portanto, não existe b de modo que $g(x,y)$ seja contínua no ponto $(0,5)$.

2.5 Derivadas Parciais

Seja $z = f(x,y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja (x_0,y_0) um ponto do domínio de f. Fixando y_0 podemos considerar a função de uma variável $g(x) = f(x,y_0)$. A derivada desta função no ponto $x = x_0$, quando existe, denomina-se *derivada parcial de f, em relação a x, no ponto* (x_0,y_0) e indica-se por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &= g'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

De modo análogo, fixando x_0 podemos considerar a função de uma variável $h(y) = f(x_0,y)$. A derivada desta função no ponto $y = y_0$, quando existe, denomina-se *derivada parcial de f, em relação a y, no ponto* (x_0,y_0) e indica-se por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= h'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{h(y) - y(y_0)}{y - y_0} \\
&= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}
\end{aligned}$$

Assim, definimos

Definição 2.5.1 *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais e $(x, y) \in D$. As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f em (x, y) são dadas por*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

e

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Exemplo 2.5.2 *Seja $f(x, y) = x^2y + xy^2$ encontre $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.*

Solução: Aplicando a Definição 2.5.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 y + (x + \Delta x) y^2 - (x^2 y + x y^2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 y + 2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + xy^2 + y^2\Delta x - x^2 y - xy^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2xy\Delta x + y(\Delta x)^2 + y^2\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2xy + y\Delta x + y^2)\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2xy + y\Delta x + y^2 = 2xy + y^2.
\end{aligned}$$

Analogamente, encontra-se que $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) + f(x, y)}{\Delta y} = x^2 + 2xy.$

Observação 2.5.3 *Note que, para encontrar $\frac{\partial f}{\partial x}$ bastou considerar y como uma constante na função $f(x, y)$ e aplicar as regras de derivação estudadas na derivação de funções de uma variável. Para encontrar $\frac{\partial f}{\partial y}$ deriva-se em relação a y, mantendo x constante.*

Exemplo 2.5.4 *Seja $f(x, y) = 3x^2y + 2\sin xy$, encontre $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.*

Solução: Tomando y constante no primeiro caso e x no segundo, obtemos

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 6xy + 2y\cos xy$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2 + 2x\cos xy.$$

Observação 2.5.5 *No caso de f ter mais de duas variáveis, são consideradas constantes todas as variáveis em relação a qual f não está sendo derivada.*

Exemplo 2.5.6 *Seja $f(x,y,z,t) = 3x^2yz^3t^2 + 2\sin x^2yz^3t^2$. Encontre as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.*

Solução: Fazendo y, z, t constantes podemos derivar parcialmente em x :

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} = 6xyz^3t^2 + 4xyz^3t^2\cos x^2yz^3t^2.$$

Agora, fazendo x, z, t constantes, obtemos a derivada parcial em relação a y :

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial y} = 3x^2z^3t^2 + 2x^2z^3t^2\cos x^2yz^3t^2.$$

Tomando x, y, t constantes temos a derivada parcial em z :

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial z} = 9x^2yz^2t^2 + 6x^2yz^2t^2\cos x^2yz^3t^2.$$

Finalmente, mantendo x, y, z constantes, encontramos

$$\frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial t} = 6x^2yz^3t + 4x^2yz^3t\cos x^2yz^3t.$$

2.5.7 Interpretação Geométrica das derivadas parciais

Podemos interpretar geometricamente a derivada parcial como uma taxa de inclinação.

Seja $f(x,y)$ uma função de duas variáveis e seja $y = y_0$. Então, $f(x,y_0)$ descreve uma curva sobre a superfície S. Marcamos um ponto $P(x_0,y_0)$ sobre a curva $f(x,y_o)$ e traçamos uma reta t_1 tangente à curva neste ponto com coeficiente angular $m = tg\alpha$. Então $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = tg\alpha$, ou seja, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x,y_0)$ no ponto $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ (veja a Figura 2.12). Analogamente, $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ é o coeficiente angular da reta t_2 tangente à curva $f(x_0,y)$ no ponto $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, conforme ilustra a Figura 2.13.

Exemplo 2.5.8 *Determine a equação de um plano que seja tangente ao parabolóide $z = x^2+y^2$, no ponto $P(1,2,5)$.*

Solução: Note que a superfície desejada é o gráfico da função $z = f(x,y) = x^2+y^2$. Para determinar a equação do plano tangente desejado, devemos obter dois vetores pertencentes a este plano, ou seja, dois vetores tangentes ao parabolóide, no ponto P. Para isso, fazendo $y = 2$ encontramos a curva $z = f(x,2) = x^2+4$. A reta tangente a essa curva, no ponto P, é dada por

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) = 2x_0(x-x_0),$$

ou seja,

$$z - 5 = 2(x-1) \quad \Rightarrow \quad z = 2x+3, \quad \text{no plano} \quad y = 2.$$

Da geometria analítica, temos que o vetor diretor a esta reta tangente é dado por $b_1 = (1,0,2)$. Da mesma forma, fazendo $x = 1$, obtemos a curva $z = f(1,y) = 1+y^2$, cuja reta tangente, em P, é dada por

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) = 2y_0(y-y_0),$$

ou seja,

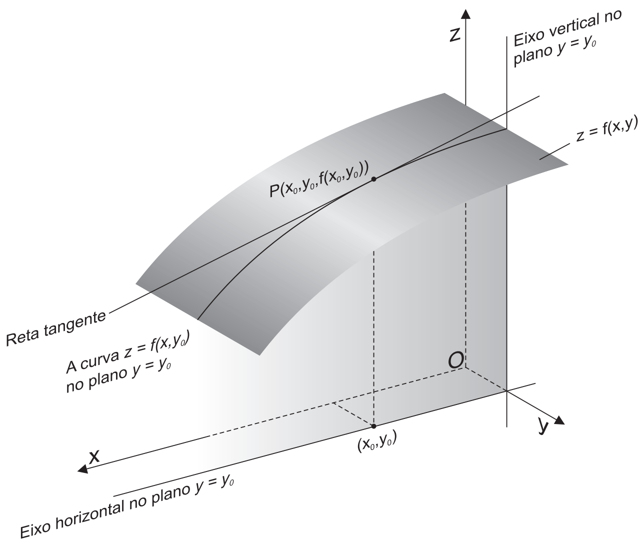


Figura 2.12: Interpretação Geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}$

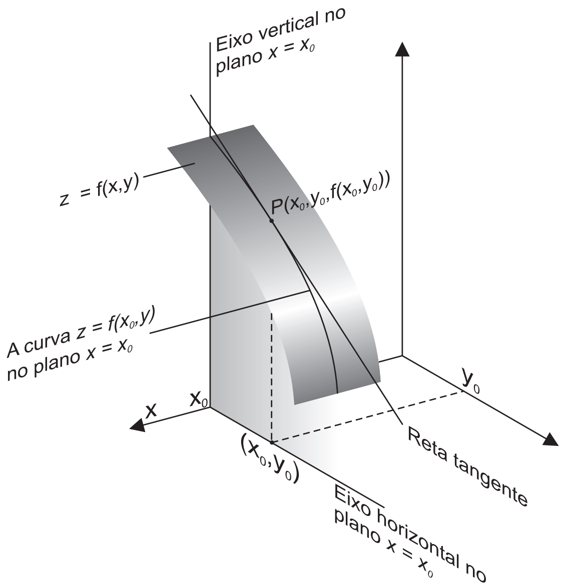


Figura 2.13: Interpretação Geométrica de $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$z - 5 = 4(y - 2) \quad \Rightarrow \quad z = 4y + 3 \quad \text{no plano } x = 1.$$

Assim, encontramos o vetor diretor $b_2 = (0, 1, 4)$. Agora podemos obter o vetor normal ao plano tangente desejado, tomando

$$b = b_1 \times b_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-2, -4, 1).$$

Portanto, a equação geral do plano desejado é dada por

$$-2x - 4y + 1z + d = 0.$$

Como este plano deve passar por $P(1, 2, 5)$, substituindo suas coordenadas na equação acima, obtemos $d = 5$. Portanto, o plano tangente ao parabolóide $z = x^2 + y^2$, no ponto $P(1, 2, 5)$, tem equação $-2x - 4y + z + 5 = 0$.

De forma geral, a maneira como estas retas tangentes t_1 e t_2 foram construídas, uma no plano $y = y_0$ e a outra no plano $x = x_0$, elas não são paralelas e como $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é o ponto de interseção destas retas, temos que elas são concorrentes, logo definem um único plano π que as contém, este plano é o **plano tangente à superfície** $z = f(x, y)$ **no ponto** $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Além disso, se C é outra curva qualquer contida na superfície $z = f(x, y)$ que passa pelo ponto P, então a reta tangente à curva C passando por P também pertence ao plano π. Para determinar a equação do plano tangente precisamos do vetor normal $\vec{n}$ ao plano e um ponto que pertence ao plano. Como t_1 e t_2 são retas contidas no plano π temos que o vetor normal $\vec{n}$ é dado pela produto vetorial dos vetores diretores destas retas e $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é um ponto que pertence ao plano π. Assim,

$$\vec{n} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \times \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),\ 1\right).$$

Usando as componentes do vetor normal e as coordenadas do ponto P, obtemos que a equação do plano π tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Exemplo 2.5.9 *Considere a superfície $z = x^2 + y^2$. Determine o(s) ponto(s) onde um plano π, que passa pelos pontos $(1, 1, 1)$ e $(2, -1, 1)$, é tangente a esta superfície.*

Solução: Sabemos que o vetor normal do plano tangente à superfície $z = x^2 + y^2$ no ponto (x_0, y_0, z_0) é dado por

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right),$$

logo, a equação do plano tangente π é dada por

$$\pi : \quad -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}x - \frac{\partial f(y - y_0)}{\partial y}y + z + d = 0$$

substituindo as derivadas parciais temos,

$$\pi : \quad -2x_0x - 2y_0y + z + d = 0.$$

Queremos encontrar o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ que pertence ao plano π e a superfície $z = x^2 + y^2$, isto é, $z_0 = x_0^2 + y_0^2$, e sabemos que os pontos $P_1(1, 1, 1)$ e $P_2(2, -1, 1)$ pertencem ao plano π. Logo, substituindo os pontos P, P_1 e P_2 na equação de π temos o seguinte sistema para resolver

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x_0x_0 - 2y_0y_0 + x_0^2 + y_0^2 + d &=& 0 \\ -2x_0 - 2y_0 + 1 + d &=& 0 \\ -4x_0 + 2y_0 + 1 + d &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} d &=& x_0^2 + y_0^2 \\ -2x_0 - 2y_0 + 1 + d &=& 0 \\ x_0 &=& 2y_0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} d &=& 5y_0^2 \\ 5y_0^2 - 6y_0 + 1 &=& 0 \\ x_0 &=& 2y_0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y_0 &=& 1 \\ x_0 &=& 2 \\ z_0 &=& 5 \end{array}\right. \text{ OU } \left\{\begin{array}{rcl} y_0 &=& \frac{1}{5} \\ x_0 &=& \frac{2}{5} \\ z_0 &=& \frac{1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P_1\left(2, 1, 5\right) \\ \\ P_2\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \end{array}\right.$$

Portanto, há dois pontos de tangência $P_1\left(2, 1, 5\right)$ e $P_2\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

2.6 Derivadas Parciais de Ordem Superior

Seja $z = f(x, y)$ uma função cujas derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ também são deriváveis. Cada uma dessas derivadas parciais poderá ser novamente derivada em relação a x e a y. Denotaremos:

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ é a segunda derivada parcial de f em relação a x;
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ é a terceira derivada parcial de f em relação a x;
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é a segunda derivada parcial de f primeiro em relação a x e depois em relação a y;
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ é a segunda derivada parcial de f primeiro em relação a y e depois em relação a x;
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ é a terceira derivada parcial de f em relação a y;

No caso da função f ter mais de duas variáveis a notação segue a mesma lógica. Por exemplo, se temos $f(x, y, z, t)$ tem-se

- $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right) = \dfrac{\partial^4 f}{\partial t \partial z \partial y \partial x}$ para representar a quarta derivada de f, primeiro em relação a x, depois em relação a y e assim sucessivamente.

Exemplo 2.6.1 *Seja* $f(x, y, z, t) = x^3 y^4 z^5 t^2$ *encontrar* $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$.

Solução: Derivamos inicialmente em relação a t, obtendo

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, z, t) = 2x^3 y^4 z^5 t,$$

a seguir, derivamos em relação a z

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t}(x, y, z, t) = 10x^3 y^4 z^4 t,$$

para após derivarmos em y

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial t}(x, y, z, t) = 40x^3 y^3 z^4 t,$$

e finalmente derivarmos em x e obter

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}(x, y, z, t) = 120x^2 y^3 z^4 t.$$

Exemplo 2.6.2 *Uma função de duas variáveis u é dita harmônica se satisfaz a equação* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, *conhecida como equação de Laplace em* $\mathbb{R}^2$. *Mostre que a função*

$$u(x,y)=e^x\sin y+e^y\cos x$$

é uma função harmônica.

Solução: Tomando as derivadas parciais sucessivas de u, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= (\sin y)\,e^x-(\sin x)\,e^y\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (\sin y)\,e^x-(\cos x)\,e^y\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= (\cos x)\,e^y+(\cos y)\,e^x\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= (\cos x)\,e^y-(\sin y)\,e^x.
\end{aligned}$$

Substituindo na equação de Laplace, obtemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=(\sin y)\,e^x-(\cos x)\,e^y+(\cos x)\,e^y-(\sin y)\,e^x=0.$$

Como a função u dada satisfez a equação de Laplace, mostramos que ela é uma função harmônica.

2.7 Extremos de uma Função de duas Variáveis

Seja f uma função de duas variáveis. Dizemos que f tem um máximo relativo no ponto (a,b) se existir um bola aberta de centro (a,b) e raio $\epsilon>0$ tal que, para todo (x,y) pertencente à bola, tem-se $f(x,y)\leq f(a,b)$. Por outro lado, se $f(x,y)\geq f(a,b)$ para todo (x,y) pertencente à bola, dizemos que f tem um ponto de mínimo relativo no ponto (a,b).

Os pontos de máximos e de mínimos de f são denominados pontos extremos de f. A imagem de um ponto de máximo é chamada de valor máximo de f, da mesma forma que a imagem de um ponto de mínimo é denominada valor mínimo de f.

2.7.1 Ponto Crítico

Definição 2.7.2 *Seja* (a,b) *um ponto pertencente ao domínio de* f. *Se* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ *são ambas nulas ou se uma delas não existir, então* (a,b) *é denominado ponto crítico de* f. *Os pontos críticos de* f *são os candidatos a pontos de máximo ou mínimo.*

2.7.3 Ponto de Máximo e Ponto de Mínimo

Teorema 2.7.4 *Seja* (a,b) *um ponto pertencente ao domínio de* f. *Suponhamos que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ *existem e são contínuas numa bola aberta de centro* (a,b). *Suponhamos que* (a,b) *seja um ponto crítico e sejam ainda:*

$$\Delta(a,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix} \qquad e \qquad \Theta(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b).$$

Então:
(i) se $\Delta > 0$ e $\Theta < 0$, a função f tem um máximo relativo em (a,b);
(ii) se $\Delta > 0$ e $\Theta > 0$, a função f tem um mínimo relativo em (a,b);
(iii) se $\Delta = 0$, nada podemos afirmar;
(iv) se $\Delta < 0$, a função f tem um ponto de sela em (a,b).

Exemplo 2.7.5 *Encontre os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os como pontos de máximo, mínimo ou de sela.*

(a) $f(x,y) = 4xy - x^4 - 2y^{2;}$

(b) $f(x,y) = 3x^4 + 2y^4$;

Solução (a): Vamos iniciar encontrando os pontos críticos. Como as derivadas parciais são

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4y - 4x \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4x - 4y$$

e estão sempre bem definidas, os pontos críticos de f são dados por

$$\begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 4y - 4x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x - x^3 = 0 \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = \pm 1$$

Assim os pontos críticos são $P(0,0)$, $Q(1,1)$ e $R(-1,-1)$. A seguir, vamos analisar o delta. Como

$$\triangle(x,y) = \begin{vmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 48x^2 - 16,$$

temos que

$$\triangle(0,0) = -16, \qquad \triangle(1,1) = 32 \qquad \triangle(-1,-1) = 32.$$

Na sequência, vamos analisar o valor de $\Theta(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12x^2$. Temos que

$$\Theta(0,0) = 0 \qquad \Theta(1,1) = -12 \qquad \Theta(-1,-1) = -12.$$

Portanto, de acordo com o Teorema 2.7.4, concluímos que

$$\triangle(0,0) < 0 \text{ e o ponto } P(0,0) \text{ é de sela,}$$
$$\triangle(1,1) > 0 \text{ e } \Theta < 0 \text{ e o ponto } Q(1,1) \text{ é ponto de máximo,}$$
$$\triangle(-1,-1) > 0 \text{ e } \Theta < 0 \text{ e o ponto } R(-1,-1) \text{ é ponto de máximo.}$$

Solução (b): Vamos iniciar encontrando os pontos críticos. Como as derivadas parciais são

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12x^3 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 8y^3$$

e estão sempre bem definidas, os pontos críticos de f são dados por

$$\begin{cases} 12x^3 = 0 \\ 8y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim, o único ponto crítico é $P(0,0)$. Logo,

$$\triangle(x,y) = \begin{vmatrix} -36x^2 & 0 \\ 0 & 24y^2 \end{vmatrix} = 864x^2y^2 \Rightarrow \triangle(0,0) = 0.$$

Portanto, de acordo com o Teorema 2.7.4, nada podemos concluir. Analisando os valores da função observamos que $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Portanto, $(0,0)$ é um ponto de mínimo da função $f(x,y) = 3x^4 + 2y^4$.

Exemplo 2.7.6 *Determine as dimensões de uma caixa retangular sem tampa destinada ao acondicionamento de* $108\ cm^3$ *de volume se queremos usar a mínima quantidade em material para sua confecção.*

Solução: Sejam x o comprimento da base, y a largura da base e z a altura da caixa, S a superfície e V o volume da caixa. Então podemos escrever o sistema

$$\begin{cases} S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \\ V(x,y,z) = xyz \end{cases}$$

A função $S(x,y,z)$ pode ser escrita como uma função de duas variáveis, se z for substituído por $\dfrac{V}{xy}$. Desse modo temos

$$S(x,y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

Aplicando o Teorema 2.7.4, vamos determinar os pontos críticos de S. Inicialmente, devemos resolver o sistema de equações definido pelas derivadas parciais. Como

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial x}(x,y) = y - \dfrac{2V}{x^2} \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial y}(x,y) = x - \dfrac{2V}{y^2} \end{cases}$$

temos que

$$\begin{cases} y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yx^2 = 2V \\ xy^2 = 2V \end{cases} \Rightarrow yx^2 = xy^2$$

como sabemos que $x, y \neq 0$, podemos dividir ambos os lados da última igualdade por xy e encontrar que $x = y$. Portanto, obtemos que $2V = x^3$ e como $V = 108$, segue que $x = \sqrt[3]{2\,(108)} = 6$ e $y = 6$. Logo, o ponto $(a,b) = (6,6)$ é único ponto crítico da função $S(x,y) = xy + \dfrac{2V}{y} + \dfrac{2V}{x}$.

Na sequência, vamos classificar este ponto crítico. Para isso, precisamos obter os valores de $\Delta(6,6)$ e $\Theta(6,6)$. Tomando as segundas derivadas, temos que

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x,y) = \frac{4V}{x^3} \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(6,6) = \frac{4\,(108)}{6^3} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(6,6) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(x,y) = 1 \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}(6,6) = 1,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x,y) = \frac{4V}{y^3} \quad \text{donde vem} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(6,6) = \frac{4\,(108)}{6^3} = 2.$$

Portanto,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{e} \quad \Theta = 2.$$

Como $\Delta = 3 > 0$ e $\Theta = 2 > 0$, pelo segundo item do Teorema 2.7.4, obtemos que f tem um mínimo relativo no ponto $(6,6)$. Logo, as dimensões da base da caixa são $x = 6cm$ e $y = 6cm$. Ainda, como $z = \dfrac{V}{xy}$ segue que $z = \dfrac{108}{6\,(6)} = 3$.

Portanto, as dimensões da caixa, para que o custo de fabricação seja mínimo, são $x = 6\ cm$, $y = 6\ cm$ e $z = 3\ cm$.

Exemplo 2.7.7 *Um fabricante faz 2 modelos de um item, padrão e de luxo. Custa R\$ 40,00 para fabricar um modelo padrão e R\$ 60,00 para o de luxo. Uma firma de pesquisa de mercado estima que se o modelo padrão for vendido por x reais e o de luxo por y reais, então o fabricante venderá $500(y-x)$ do item padrão e $45000 + 500(x-2y)$ do de luxo a cada ano. Com que preços os itens devem ser vendidos para maximizar o lucro?*

Solução: A função lucro é dada por:

$$L(x,y) = 500(y-x)(x-40) + (45000 + 500(x-2y))(y-60).$$

As derivadas parciais de L são dadas por

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = 1000y - 1000x - 10\,000$$

e

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = 1000x - 2000y + 85\,000$$

Como as derivadas estão sempre bem definidas, para encontrar os pontos críticos de L devemos fazer

$$\frac{\partial L(x,y)}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L(x,y)}{\partial y} = 0$$

Resolvendo este sistema, temos

$$\begin{cases} 1000y - 1000x - 10\,000 = 0 \\ 1000x - 2000y + 85000 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1000x + 1000y = 10000 \\ 1000x - 2000y = -85000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 65 \\ y = 75 \end{cases}.$$

Portanto, o único ponto crítico é $(65,75)$. Vamos analisar se este ponto crítico é um ponto de máximo. Como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1000, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2000,$$

e

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1000, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1000,$$

temos que

$$\triangle = \begin{vmatrix} -1000 & 1000 \\ 1000 & -2000 \end{vmatrix} = 10^6 > 0 \qquad \text{e} \qquad \Theta = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1000 < 0.$$

Portanto, o ponto $P(65, 75)$ é, de fato, um ponto de máximo. Logo, o item padrão será vendido por $R\$ \ 65,00$ e o de luxo por $R\$ \ 75,00$.

Exemplo 2.7.8 *Encontre as coordenadas do ponto que pertence a superfície $z = xy + 2$ e cujo quadrado da distância à origem do sistema de coordenadas cartesianas seja mínimo. Qual é esse valor mínimo?*

Solução: Queremos determinar o ponto $Q(x, y, z)$ de mínimo da função

$$f(x, y, z) = d(Q, O)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

com a condição que Q é um ponto da superfície $z = xy + 2$. Substituindo na função da distância obtemos a função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y^2 + 4xy + 4.$$

Para encontrar os pontos críticos de f, tomamos

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + 2xy^2 + 4y$$

e

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y + 2x^2y + 4x.$$

Como as derivadas parciais sempre estão definidas os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & = & 0 \\ \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2xy^2 + 4y & = & 0 \\ \\ 2y + 2x^2y + 4x & = & 0 \end{cases}$$

Temos que $P_1(0, 0)$ é uma solução do sistema. Para as demais soluções do sistema, multiplicando a primeira equação por x e a segunda por y obtemos

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x^2y^2 + 4xy & = & 0 \\ \\ -2y^2 - 2x^2y^2 - 4xy & = & 0 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x.$$

Se $y = x$ voltando na primeira equação temos,

$$2x + 2x^3 + 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ x^2 + 3 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \quad \Rightarrow P_1(0, 0).$$

Se $y = -x$ voltando na primeira equação temos,

$$2x + 2x^3 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2(1,-1) \\ P_3(-1,1) \end{cases}.$$

Portanto, temos três pontos críticos $P_1(0,0)$, $P_2(1,-1)$ e $P_3(-1,1)$. Usaremos o teste da segunda derivada para classificá-los. Temos que

$$\begin{aligned} \Delta(x,y) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} \\ \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2y^2 & 4xy+4 \\ \\ 4xy+4 & 2+2x^2 \end{vmatrix} \\ &= 4(1+y^2)(1+x^2) - 16(xy+1) = 4 + 4x^2 + 4y^2 + 4x^2y^2 - 16xy - 16 \end{aligned}$$

e

$$\Theta(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2 + 2y^2.$$

Aplicando nos pontos críticos, obtemos:

$\Delta(0,0) = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(0,0)$ é um ponto de sela de $f(x,y)$.

$\Delta(1,-1) = 16 > 0$ e $\Theta(1,-1) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad P_2(1,-1)$ é ponto de mínimo de $f(x,y)$.

$\Delta(-1,1) = 16 > 0$ e $\Theta(-1,1) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad P_3(-1,1)$ é ponto de mínimo de $f(x,y)$.

Assim os candidatos a para o ponto Q são: $P_2(1,-1,1)$, e $P_3(-1,1,1)$. Substituindo na expressão da distância ao quadrado obtemos:

$$d(P_2,O)^2 = 3 \qquad \text{e} \qquad d(P_3,O)^2 = 3.$$

Portanto, os dois pontos são pontos de mínimo para o quadrado da distância e o valor mínimo é 3.

2.8 Derivada de uma Função Composta

Antes de discutir a derivada de uma função composta, vamos falar sobre composição de funções de duas variáveis.

Consideremos as funções $u(x,y) = x^2y + y$ e $v(x,y) = x + y^2$. Podemos definir uma nova função F por $F(u,v) = 2u^2 + 3v$. Reescrevendo F em função de x e y temos:

$$\begin{aligned} F(u(x,y), v(x,y)) &= 2[u(x,y)]^2 + 3[v(x,y)] \\ &= 2(x^2y+y)^2 + 3(x+y^2) \\ &= 2(x^4y^2 + 2x^2y^2 + y^2) + 3x + 3y^2 \\ &= 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 2y^2 + 3x + 3y^2 \\ &= 2x^4y^2 + 4x^2y^2 + 5y^2 + 3x \end{aligned}$$

e assim,

$$F(u(1,2), v(1,2)) = 2(1)^4(2)^2 + 4(1)^2(2)^2 + 5(2)^2 + 3(1) = 47.$$

Ou, como

$$u(x,y) = x^2y + y \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = x + y^2$$

segue que

$$u(1,2) = (1)^2 2 + 2 = 4 \qquad \text{e} \qquad v(1,2) = 1 + 2^2 = 5,$$

e então

$$F\left(u(1,2),v\left(1,2\right)\right)=F\left(4,5\right)=2\left(4\right)^{2}+3\left(5\right)=47.$$

Nosso interesse é encontrar $\frac{\partial F}{\partial x}$ e $\frac{\partial F}{\partial y}$. A função

$$F\left(x,y\right)=2x^{4}y^{2}+4x^{2}y^{2}+5y^{2}+3x$$

pode ser escrita como uma função x e y. Isto é,

$$F\left(u(x,y),v\left(x,y\right)\right)=2x^{4}y^{2}+4x^{2}y^{2}+5y^{2}+3x$$

e, nesse caso, temos

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(x,y\right)=8x^{3}y^{2}+8xy^{2}+3$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(x,y\right)=4x^{4}y+8x^{2}y+10y.$$

Como podemos observar, obter as derivadas parciais através desse processo não é muito animador. Isso é motivação suficiente para estudar a **Regra da Cadeia**. Se tivermos uma função composta $f\left(g\left(x\right)\right)$ sabemos que $\left[f\left(g\left(x\right)\right)\right]'=f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right).$ A mesma teoria é aplicada para encontrar a derivada parcial de uma função composta de várias variáveis.

Definição 2.8.1 *Seja $z\left(x,y\right)=F\left(u(x,y),v\left(x,y\right)\right)$ então*

$$\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial x}=\frac{\partial F\left(u,v\right)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F\left(u,v\right)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{\partial F\left(u,v\right)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F\left(u,v\right)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Exemplo 2.8.2 *Consideremos as funções $u(x,y)=x^{2}y+y$ e $v\left(x,y\right)=x+y^{2}$. Definindo uma nova função z por $z\left(x,y\right)=F\left(u,v\right)=2u^{2}+3v$. Encontre as derivadas parciais de z em relação a x e y.*

Solução: Inicialmente, determinamos as derivadas parciais das funções $u(x,y)$, $v(x,y)$ e $F(u,v)$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}=4u,\qquad\frac{\partial u}{\partial x}=2xy,\qquad\frac{\partial v}{\partial x}=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}=3,\qquad\frac{\partial u}{\partial y}=x^{2}+1,\qquad\frac{\partial v}{\partial y}=2y.$$

e utilizando a regra da cadeia (Definição 2.8.1), obtemos as derivadas parciais

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial Fu}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= 4u\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= 4\left(x^2y+y\right)\left(2xy\right)+3\left(1\right)\\
&= 8x^3y^2+8xy^2+3
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z\left(x,y\right)}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\
&= 4u\frac{\partial u}{\partial y}+3\frac{\partial v}{\partial y}\\
&= 4\left(x^2y+y\right)\left(x^2+1\right)+3\left(2y\right)\\
&= 4x^4y+8x^2y+10y.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.8.3 *Determine* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ *para* $F(x,y)=\ln\sqrt[5]{(x^4+2xy+y^3)+(2xy+3x^2)}$.

Solução: Podemos reescrever a função F como $F(u,v)=\ln(u+v)^{\frac{1}{5}}$, onde

$$u(x,y)=x^4+2xy+y^3$$

e

$$v(x,y)=2xy+3x^2.$$

Usando a regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= \frac{1}{5}\frac{1}{u+v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{5}\frac{1}{u+v}\frac{\partial g}{\partial x}\\
&= \frac{1}{5}\frac{(4x^3+2y)+(2y+6x)}{x^4+y^3+4xy+3x^2}\\
&= \frac{6x+4y+4x^3}{20xy+15x^2+5x^4+5y^3}.
\end{aligned}$$

O cálculo da derivada em relação a y é deixado como exercício para o estudante.

Exemplo 2.8.4 Variação dos valores de uma função ao longo de uma hélice: *Encontre* $\dfrac{dw}{dt}$ *se* $w=xy+z$ *onde* $x=\cos t,\ \ y=\sin t$ *e* $z=t$. *Qual é o valor desta derivada em* $t=0$?

Solução: Pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= y(-\sin t) + x(\cos t) + 1(1) \\
&= \sin t(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t.
\end{aligned}$$

Logo, para $t = 0$, temos que $\dfrac{dw}{dt} = 1 + \cos 0 = 2.$

Exemplo 2.8.5 *Sendo α uma constante e $w = f(u, v)$, onde $u = x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha$ e $v = x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha$, sabendo que f é diferenciável mostre que*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

Solução: Usando a regra da cadeia para as derivadas parciais de primeira e segunda ordem obtemos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial v}\operatorname{sen}\alpha$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right) + \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right) \\
&= \cos\alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= \cos^2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \operatorname{sen}^2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}(-\operatorname{sen}\alpha) + \frac{\partial f}{\partial v}\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= -\operatorname{sen}\alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right) + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right) \\
&= -\operatorname{sen}\alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \cos\alpha\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \operatorname{sen}^2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \cos^2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Das Expressões (1) e (2), temos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}$$

e assim provamos que de fato a equação dada é verdadeira.

2.9 Derivada Parcial como Taxa de Variação

Suponhamos que f é uma função de duas variáveis. Então, a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ nos dá a razão instantânea de variação de f, no ponto $P(x_0, y_0)$, por unidade de variação de x. Isto é, a taxa de variação de f por unidade de x no ponto $P(x_0, y_0)$. Analogamente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ nos dá a taxa de variação de f por unidade de y.

Exemplo 2.9.1 *Sabendo que a pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal estão relacionados pela fórmula $PV = 8T$, encontre a taxa de variação instantânea de V por unidade de P, quando $T = 300k$ e $V = 100L$.*

Solução: Estamos interessados na taxa de variação instantânea de V por unidade de P, de modo que devemos escrever V em função de T e P, ou seja,

$$V(T,P) = \frac{8T}{P}.$$

A taxa de variação instantânea da pressão P por unidade de T é dada pela derivada parcial

$$\frac{\partial V(T,P)}{\partial P} = -\frac{8T}{P^2}.$$

Para determinar P usamos a relação

$$PV = 8T$$

e obtemos

$$P = \frac{8 \cdot 300}{100} = 24kPa.$$

Portanto,

$$\frac{\partial V(300,24)}{\partial P} = -\frac{8 \cdot 300}{(24)^2} = -4,17.$$

Exemplo 2.9.2 *A altura de um cone circular é 100 cm e decresce a uma razão de $10cm/s$. O raio da base é $50cm$ e cresce à razão de $5cm/s$. Determine a velocidade da variação do volume deste cone.*

Solução: Primeiro vamos escrever o volume do cone em função do tempo:

$$V(t) = \frac{\pi r^2(t)h(t)}{3},$$

logo, pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h}\frac{dh}{dt} = \frac{2\pi rh}{3}\frac{dr}{dt} + \frac{\pi r^2}{3}\frac{dh}{dt} \\
&= \frac{2\pi 50.100}{3}(5) + \frac{\pi(50)^2}{3}(-10) \\
&= \frac{50000\pi}{3} - \frac{25000\pi}{3} = \frac{25000\pi}{3}\ cm^3/s.
\end{aligned}$$

2.10 Diferencias Parciais e Totais

Os diferenciais de uma função nos dão uma **estimativa** da variação da função quando damos acréscimos às variáveis independentes.

Para entender o significado dos diferenciais parciais e total vamos, primeiramente, examinar alguns exemplos.

Exemplo 2.10.1 *Consideremos um retângulo de lados x e y. A área desse retângulo é dada por $A(x,y) = xy$. Veja a Figura 2.14.*

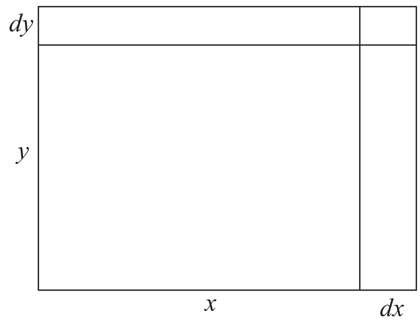


Figura 2.14: Acréscimos diferenciais nos lados de um retângulo

Se ao lado x for dado um acréscimo infinitesimal dx, a área do novo retângulo será dada por

$$A(x+dx,y) = (x+dx)\,y = xy + ydx$$

e assim obtemos

$$A\,(x+dx,y) - A\,(x,y) = ydx.$$

A variação infinitesimal desta área será $dA_x = ydx$.

Sendo $\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} = y$, podemos escrever $dA_x = \dfrac{\partial A\,(x,y)}{\partial x}dx$.

Analogamente, a diferencial parcial em relação a y é dada por $dA_y = \dfrac{\partial A\,(x,y)}{\partial y}dy$.

Agora, se aos lados x e y forem dados acréscimos infinitesimais dx e dy,a área do novo retângulo será

$$\begin{aligned} A\,(x+dx,y+dy) &= (x+dx)\,(y+dy) \\ &= xy + ydx + xdy + dxdy \\ &= A(x,y) + ydx + xdy + dxdy \end{aligned}$$

e assim,

$$A\,(x+dx,y+dy) - A\,(x,y) = ydx + xdy + dxdy.$$

e a variação total dA, da área é

$$\triangle A = ydx + xdy + dxdy.$$

Sendo $\frac{\partial A(x,y)}{\partial x} = y$, $\frac{\partial A(x,y)}{\partial y} = x$ e como o produto dos infinitesimais dx e dy é desprezível, isto é, $dxdy \approx 0$, então a estimativa da variação total é

$$dA = \frac{\partial A\,(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial A\,(x,y)}{\partial y}dy.$$

Exemplo 2.10.2 *Consideremos um paralelepípedo de lados x, y e z. Então, o volume deste paralelepípedo será dado por $V\,(x,y,z) = xyz$. Desenvolvendo um raciocínio análogo ao do exemplo anterior obtemos:*

$$V\,(x+dx,y,z) = (x+dx)\,yz = xyz + yzdx$$

ou seja,

$$V\,(x+dx,y,z) - V\,(x,y,z) = yzdx$$

e a variação infinitesimal do volume será $dV_x = yzdx$, que pode ser escrita como

$$dV_x = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} dx.$$

Analogamente, obtemos

$$dV_y = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} dy \qquad \text{e} \qquad dV_z = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} dz.$$

Se aos lados x e y forem dados acréscimos infinitesimais dx e dy o volume do novo paralelepípedo será

$$\begin{aligned} V(x+dx, y+dy, z) &= (x+dx)(y+dy)z \\ &= xyz + yzdx + xzdy + zdxdy \\ &= V(x,y,z) + yzdx + xzdy + zdxdy \end{aligned}$$

e então

$$dV_{xy} = yzdx + xzdy + zdxdy.$$

O produto $zdxdy$ tende a zero. Logo, é desprezível e, portanto, a estimativa da variação infinitesimal parcial do volume do paralelepípedo após dado um acréscimo aos lados x e y será dada por

$$dV_{xy} = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} dy.$$

Finalmente, se aos lados x, y, z forem dados acréscimos infinitesimais dx, dy e dz, o volume do novo paralelepipedo será

$$\begin{aligned} V(x+dx, y+dy, z+dz) &= (x+dx)(y+dy)(z+dz) \\ &= (xy + ydx + xdy + dxdy)(z+dz) \\ &= xyz + yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz \end{aligned}$$

e então

$$V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x,y,z) = yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz,$$

ou seja, o variação total do volume é

$$\triangle V = yzdx + xzdy + zdxdy + xydz + ydxdz + xdydz + dxdydz.$$

Na Figura 2.15, podemos ver o parelelepípedo resultante dos acréscimos atribuídos a cada uma das variáveis e, na Figura 2.16, vemos cada um dos volumes resultantes que compõe o diferencial de volume dV.

Os produtos $zdxdy$, $ydxdz$, $xdydz$ e $dxdydz$ tendem a zero. Logo, a soma destes termos é desprezível e, portanto, a estimativa da variação infinitesimal total do volume do paralelepípedo, após dado um acréscimo aos lados x, y e z será dada por

$$dV = yzdx + xzdy + xydz,$$

que, em virtude de suas derivadas parciais, pode ser reescrita como

$$dV = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} dz.$$

Geralmente, escreve-se

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

De forma geral,

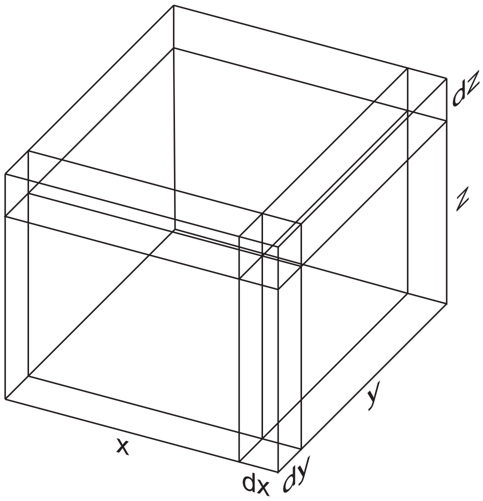


Figura 2.15: Papalelepípedo resultante dos acréscimos atribuídos a cada lado.

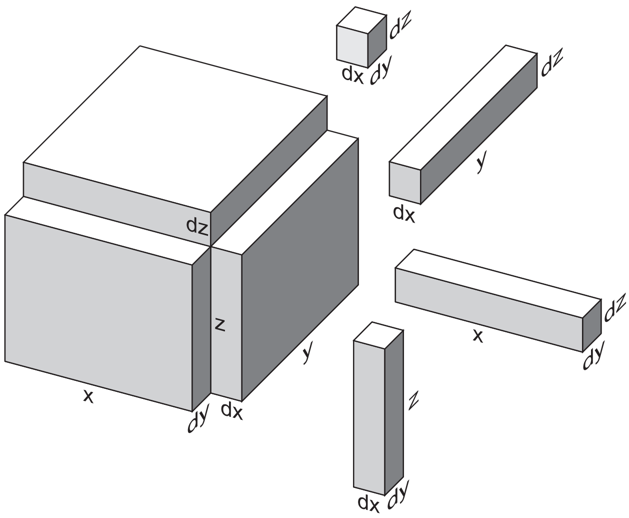


Figura 2.16: Volumes que compõe o diferencial de volume dV.

Definição 2.10.3 *Se $f\,(x, y, z)$ é uma função diferenciável, então a diferencial total de f é dada por*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz. \tag{2.10.1}$$

Exemplo 2.10.4 *Usando diferencial, determine a variação do volume do recipiente mostrado na Figura 2.17, quando sua altura aumenta em 3% e seu o raio decresce em 1%.*

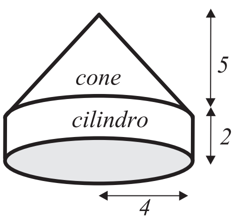


Figura 2.17: Recipiente do Exemplo 2.10.4

Solução: O volume desejado pode ser escrito como $V = V_1 + V_2$, onde V_1 é o volume do cilindro e V_2 é o volume do cone. No cilindro temos

$$V_1 = \pi R^2 h, \ \ R = 4, h = 2, \ \ dR = \frac{-4}{100} = -0.04; dh = 2\frac{3}{100} = 0.06$$

e no cone, temos

$$V_2 = \frac{\pi R^2 H}{3}, \quad R = 4, H = 5; \ \ dR = \frac{-4}{100} = -0.04; \ \ dH = 5\frac{3}{100} = 0.15.$$

Portanto a diferencial do volume total é igual a

$$\begin{aligned}
dV &= dV_1 + dV_2 \\
&= \left(\frac{\partial V_1}{\partial R}dR + \frac{\partial V_1}{\partial h}dh\right) + \left(\frac{\partial V_2}{\partial R}dR + \frac{\partial V_2}{\partial H}dH\right) \\
&= 2\pi RhdR + \pi R^2 dh + \frac{2\pi Rh}{3}dR + \frac{\pi R^2}{3}dh \\
&= 2\pi \cdot 4 \cdot 2 \cdot (-0,04) + \pi \cdot 16 \cdot (0,06) + \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 5}{3}(-0,04) + \frac{16\pi}{3}(0,15) \\
&= -0,64\pi + 0,96\pi - \frac{1,6\pi}{3} + \frac{2,4\pi}{3} = 0,32\pi + \frac{0,8}{3}\pi \cong 0,59\pi.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.10.5 *Vamos considerar uma lata cilíndrica fechada, com dimensões $r = 2cm$ e $h = 5$ cm. O custo do material usado em sua confecção é de R\$ 0,81 por cm^2. Se as dimensões sofrerem um acréscimo de 10% no raio e 2% na altura, qual será o valor aproximado do acréscimo no custo da caixa? E qual é o valor exato do acréscimo no custo da caixa?*

Solução: Podemos escrever a função custo como

$$C(r, h) = 0.81(2\pi rh + 2\pi r^2),$$

onde $2\pi rh$ representa a área lateral da caixa e πr^2 a área da base e da tampa. Quando o raio de base sofre um acréscimo de 10%, passa de 2 para $2,2 \ \ cm$, portanto $\Delta r = 0,2$. Quando a altura sofre um acréscimo de 2%, passa de $5cm$ para $5,1cm$, portanto, $\Delta h = 0,1$. Vamos usar a diferencial para encontrar o valor aproximado do acréscimo do custo

$$\begin{aligned}
dC &= \frac{\partial C}{\partial r}dr + \frac{\partial C}{\partial h}dh \\
&= 0,81(2\pi h + 4\pi r)dr + 0,81.(2\pi r)dh \\
&= 0,81(10\pi + 8\pi)0.2 + 0,81.(4\pi)0,1 \approxeq 10,17.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor aproximado do acréscimo no custo da caixa quando as dimensões são modificadas é de $R\$10,17$, ou um acréscimo de $14,28\%$.

Para saber o valor exato do acréscimo no custo da caixa, temos que calcular

$$\begin{aligned}
\Delta C &= C(2,2;5,1) - C(2,5) \\
&= 0,81\left(2\pi(2,2)\cdot(5,1) + 2\pi(2,2)^2\right) - 0,81(20\pi + 8\pi) \approxeq 10,47.
\end{aligned}$$

Assim, o valor exato é de $R\$10,47$, ou um acréscimo de $14,7\%$. Observamos, assim, que o erro do cálculo aproximado foi de $0,42\%$.

Exemplo 2.10.6 *Uma caixa em forma de paralelepípedo, tem dimensões internas iguais a 6cm, 8cm e 12cm. Sendo a espessura das paredes 0,2cm, do fundo 0,3cm e da tampa 0,1cm, fazer uma estimativa em cm^3 do volume de material necessário a ser usado na confecção da caixa.*

Solução: Vamos usar a diferencial total para fazer a estimativa solicitada. Sejam $x = 6$, $y = 8$ e $z = 12$. Como a espessura das paredes é 0,2cm temos

$$dx = dy = 2\,(0,2) = 0,4$$

e sendo a espessura do fundo 0,3 e da tampa 0,1 temos

$$dz = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

Como $V = xyz$, segue que a estimativa desejada é dada por

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \\ &= yzdx + xzdy + xydz \\ &= 8.12.0,4 + 6.12.0,4 + 6.8.0,4 = 86,4\ cm^3. \end{aligned}$$

Exemplo 2.10.7 *Use diferenciais para estimar o valor de* $\sqrt{(0,01)^2 + (3,02)^2 + (3,9)^2}$.

Solução: Considere a função $w = f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, temos que $f(0,3,4) = \sqrt{25} = 5$. Queremos determinar uma aproximação para $f(0.01, 3.02, 3.9)$ e pela teoria de diferencial temos que

$$f(0.01, 3.02, 3.9) \approx f(0,3,4) + dw,$$

onde $dw = \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz$, com $dx = 0,01$, $dy = 0,02$ e $dz = -0,1$. Assim,

$$(0.01, 3.02, 3.9) \approx f(0,3,4) + \frac{x}{w}\cdot(0,01) + \frac{y}{w}\cdot(0,02) + \frac{z}{w}\cdot(-0,1) = 5 + 0 + \frac{3}{5}\cdot(0,02) - \frac{4}{5}\cdot(0,1) = 4,932.$$

2.11 Derivadas de Funções Implícitas

Seja $y = y(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $F(x,y) = 0$. Por exemplo, $x^2 + y^2 - 9 = 0$ ou $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0$. A equação $x^2 + y^2 - 9 = 0$ pode ser facilmente explicitada em função de x ou de y. Porém, não podemos fazer o mesmo com a equação $x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0$. Também, fazendo $F(x,y) = x^2 + y^2 - 9$ facilmente encontramos $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dx}{dy}$, o mesmo não ocorre se fizermos $F(x,y) = x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9$. Nosso interesse está em encontrar uma forma de determinar com rapidez as derivadas $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dx}{dy}$.

Inicialmente, vamos resolver o problema usando o conhecimento adquirido em Cálculo I. Vamos derivar y implicitamente em relação a x, na equação

$$x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9 = 0,$$

obtendo

$$(2xy^3 + 3x^2y^2y') + (3x^2y^2 + 2x^3yy') + (y + xy') + 1 + y' = 0$$
$$(3x^2y^2y' + 2x^3yy' + xy' + y') + (2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1) = 0$$
$$(3x^2y^2 + 2x^3y + x + 1)\, y' = -\left(2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1\right).$$

Logo,

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1}{3x^2y^2 + 2x^3y + x + 1}\ . \quad \text{(I)}$$

Sendo $F(x, y) = x^2y^3 + x^3y^2 + xy + x + y - 9$, obtemos as derivadas parciais de F, dadas por

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2xy^3 + 3x^2y^2 + y + 1$$

e

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x^3y + x + 1.$$

Observando estes resultados e comparando com (I), podemos escrever a fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$$

sempre que $F(x, y)\,, \dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ forem contínuas em (x, y) e $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$.

Se $z = z(x, y)$ é definida implicitamente em função de x e y pela equação $F(x, y, z) = 0$, usando o mesmo procedimento anterior obtém-se suas derivadas parciais, que serão denotadas por $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Exemplo 2.11.1 *Dada a função implícita $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, encontrar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial x}{\partial z}$.*

Solução: Escrevendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, obtemos

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = 2z.$$

Agora, substituindo convenientemente na fórmula acima, encontramos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{9 - (x^2 + y^2)}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{9 - (x^2 + z^2)}},$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{2z}{2x} = -\frac{z}{x} = -\frac{z}{\sqrt{9-(y^2+z^2)}}.$$

Exemplo 2.11.2 *Uma função $z(x,y)$ é dada* **implicitamente** *por uma equação do tipo $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^2}\right) = 0$, onde $F(u,v)$ é uma função diferenciável tal que $\frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$. Mostre que z satisfaz a equação diferencial parcial $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.*

Resolução: Como z depende implicitamente de x e y, devemos utilizar a expressão para derivação implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

Agora, para obter as derivadas de F, definimos $u = \frac{x}{y}$ e $v = \frac{z}{x^2}$ e utilizamos a regra da cadeia para obter

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{-2z}{x^3}\right) = \frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{2z}{x^3}\frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}.0 + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{-x}{y^2}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}.0 = \frac{-x}{y^2}\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Portanto, substituindo nas derivadas implícitas de z, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{2z}{x^3}\dfrac{\partial F}{\partial v}}{\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v}} = -\frac{x^2}{y}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}} + \frac{2z}{x}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{-x}{y^2}\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial F}{\partial v}} = \frac{x^3}{y^2}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}.$$

Portanto, substituindo na equação dada, temos

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(-\frac{x^2}{y}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}} + \frac{2z}{x}\right) + y\left(\frac{x^3}{y^2}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}}\right) = \frac{-x^3}{y}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}} + 2z + \frac{x^3}{y}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial v}} = 2z.$$

2.12 Exercícios Gerais

1. Determine, descreva e represente geometricamente o domínio das funções abaixo:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$; (b) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$;

   (c) $f(x,y) = x\ln(y^2-x)$; (d) $f(x,y) = \sqrt{y-x} - \sqrt{1-y}$;

   (e) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2x^2-4}{4-x^2-y^2}}$; (f) $f(x,y,z) = \ln(16-x^2-y^2-4z^2)$.

2. Represente geometricamente as superfícies de equações:

   (a) $x^2+y^2+z^2=25$; (b) $x^2+y^2-z^2=25$;

   (c) $9x+4y+12z=36$; (d) $z^2-x^2-y^2=0$.

3. Dada a função $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, determine as curvas de nível $z=\frac{1}{4}, z=4$ e $z=9$. A seguir, faça um esboço do gráfico desta função.

4. Descreva e represente geometricamente as superfícies de nível de $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$.

5. Usando a definição mostre que:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} (3x+2y) = 8$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} (2x-4y) = -10$.

6. Em cada exercício abaixo verifique se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. Justifique a sua resposta.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$ (e) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$ (f) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

7. Calcule, se possível, o valor dos limites abaixo. Justifique a sua resposta.

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{2x(y-2)}{3x^2+y^2-4y+4}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,0)} \frac{(x-3)^5y^2+(x-3)^4y^4}{(x^2-6x+9+y^6)^3}$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,1,0)} \frac{(x+y+z-3)^5}{(x-2)(y-1)z^3}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^2z^2}{x^6+y^6+z^6}$

8. Calcule o valor dos seguintes limites usando as propriedades:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} e^{x-y}[\ln(x^2-y^2)-\ln(x-y)]$;

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2}$;

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\sqrt{2},1)} \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2y+x^2-2y-2}}$;

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$;

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$;

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} \frac{(x^2-5x+6)(y^4-16)}{(x-3)(y-2)}$;

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{\sin(x-y)+\sin(y)}{xy}$.

9. Use as propriedades de limite para determinar o valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,4)} g(x,y)$, sendo

$$\lim_{(x,y)\to(4,4)} \left[\frac{(x-y)g(x,y)}{x^2-y^2} + \cos(x-y)\right] = \frac{1}{2}.$$

10. Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \{xf(x,y) + e^{y-x}[\ln(x^2-y^2) - \ln(x-y)]\} = \ln 2$, determine o valor de $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

11. Em cada item verifique se a função f é contínua, justificando sua resposta.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x+y+z+1)^2}{(x-1)^2+y^4+(z+2)^2}, & \text{se } (x,y,z) \neq (1,0,-2) \\ 1, & \text{se } (x,y,z) = (1,0,-2) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5xy^2-3x^2y}{2x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2-6y}{x^2-4x+4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (2,0) \\ 1, & \text{se } (x,y) = (2,0) \end{cases}$

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^4(x+1)^4}{(y^4+x^2+2x+1)^3}, & \text{se } (x,y) \neq (-1,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (-1,0) \end{cases}$

12. Determine se a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2(y-2)}{x^2+y^2-4y+4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,2) \\ b, & \text{se } (x,y) = (0,2) \end{cases}$ é contínua em $(0,2)$ para algum valor de $b \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta com argumentos consistentes, explicitando o valor de b e uma relação entre ε e δ, se for o caso.

13. Determine se a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x^2y+y^2}{2x^2+2y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ b, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua na origem para algum valor de $b \in \mathbb{R}$. Justifique sua resposta com argumentos consistentes, explicitando o valor de b e uma relação entre ε e δ, se for o caso.

14. Determine se a função $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(y+2)(z-1)^2}{(2x+y-3z-1)^4}, & \text{se } (x,y,z) \neq (3,-2,1) \\ b, & \text{se } (x,y,z) = (3,-2,1) \end{cases}$ é contínua em $(3,-2,1)$ para algum valor de b. Justifique sua resposta com argumentos consistentes.

15. Utilize argumentos consistentes para calcular, se existir, o valor de $f(0,0)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua dada por

$$f(x,y) = 1 + xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0).$$

16. Escreva as funções abaixo na forma de funções composta e encontre as derivadas parciais em relação a x e y.

    (a) $z = \ln\sqrt{x^2e^{2y} + x^2e^{-2y}}$ $\qquad$ (b) $z = \ln\left((e^{x+y^2})^2 + x^2 + y\right)$

    (c) $z = x^2\cos^2 y + 2x^2\sin y\cos y + x^2\sin^2 y$ $\qquad$ (d) $z = \sqrt{x+y^2+(x^2e^{-2y})^3}$

17. Usando a regra da cadeia, encontre as derivadas parciais de

    (a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$ $\qquad$ (b) $f(x,y) = \ln\sqrt[3]{(x^2+y^2)+(2x+y^2x^2)}$

18. Mostre que $z = \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ é solução da equação diferencial $y\dfrac{\partial z}{\partial y} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

19. Verifique se a função $f(x,y,z) = x^2\sin\left(\dfrac{y}{z}\right) + y^2\ln\left(\dfrac{z}{x}\right) + z^2e^{x/y}$ é uma solução da equação diferencial parcial $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2f$.

20. Se $z = \ln(x^2+y^2)$ mostre que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

21. Verifique se a função $f(x,y) = e^{xy} + \ln\left(\dfrac{2y^2}{x^2}\right)$ é uma solução da equação diferencial parcial $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xye^{xy}$.

22. Se $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ mostre que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

23. Sejam $f(x,y,z) = x^3y^4z^5 + x\sin yz$ e $g(x,y) = e^x\ln y$. Encontre todas as derivadas parciais de f e g até a terceira ordem.

24. Determine uma equação para o plano que é tangente à superfície $-2x^2+y^2 = \dfrac{-z}{2}$, no ponto $P(-1,1,2)$.

25. Encontre a equação do plano tangente à superfície $-12x^2 + 3y^2 - z = 0$, no ponto $P(1, 4, 36)$.

26. Encontre um ponto da superfície $z = 3x^2 - y^2$ onde seu plano tangente é paralelo ao plano $6x + 4y - z = 5$.

27. Determine a equação do plano que é tangente a superfície definida implicitamente por $z^3 - (x^2 + y^2)z + 2 = 0$ no ponto $P(1, 2, 2)$.

28. Sabe-se que a equação $x^2 + z^3 - z - xy \sin z = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ cujo gráfico passa pelo ponto $P(1, 1, 0)$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto P.

29. Sabendo que o plano $2x + y + 3z - 6 = 0$ é paralelo ao plano tangente ao gráfico de $z = f(x, y)$, no ponto $P(1, 1, 1)$, calcule os valores de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$.

30. Mostre que todos os planos tangentes ao gráfico de $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ passam pela origem.

31. Determine a equação do plano π que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

32. Considere as funções $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ e $g(x, y) = -x^2 - y^2$. Determine:

    (a) a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x, y)$ no ponto $(1, 2, 7)$;

    (b) o ponto onde o plano obtido no item (a) tangencia o gráfico de $g(x, y)$.

33. Considere a função de duas variáveis $f(x, y) = \sqrt{100 + 4y^2 - 25x^2}$.

    (a) Determine o domínio de $f(x, y)$.

    (b) Determine o ponto sobre o gráfico de $z = f(x, y)$ tal que o plano tangente a $z = f(x, y)$ neste ponto seja ortogonal ao vetor $\vec{v} = (0,\ 1,\ 2)$.

34. Considere a função de duas variáveis $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$. E seja C a curva de interseção do gráfico de $z = f(x, y)$ com o plano $y = 2$.

    (a) Determine o domínio de $f(x, y)$.

    (b) Determine a equação da reta tangente à curva C no ponto $(1, 2, \sqrt{11})$.

35. Seja $w = (x^2 + y^2 + z^2)^k$. Determine para quais valores de k a igualdade $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$ é satisfeita.

36. Seja $z = f(u)$, com $u = x + ay^2$. Prove que $\dfrac{\partial z}{\partial y} - 2ay\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

37. Seja $f(x - y, y - z, z - x)$ uma função diferenciável. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

38. Dada uma função $f\left(\dfrac{y - x}{xy}, \dfrac{z - y}{yz}\right)$, calcule $x^2\dfrac{\partial f}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial f}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

39. Seja $w = xf\left(\frac{y}{x}\right) - g\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, onde f e g são funções diferenciáveis. Mostre que

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial y} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

40. Seja f uma função diferenciável qualquer e considere $w = x^3 f\left(\frac{y}{x},\ \frac{x}{z},\ \frac{z}{x}\right)$. Mostre que w satisfaz a equação diferencial parcial $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z} = 3w$.

41. Seja $w = f(x^2 - at) + g(x + at^2)$, onde f e g são funções diferenciáveis e $a \in \mathbb{R}$. Calcule $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

42. Seja $w = f(u) + g(v)$ uma função diferenciável, onde $u(x,t) = x^2 + t^2$ e $v(x,t) = x^2 - t^2$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4\frac{df}{du} + 4(x^2 + t^2)\left(\frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 g}{dv^2}\right).$$

43. Seja $w = f(x,y)$ uma função diferenciável, onde $x(r,\theta) = r\cos\theta$ e $y(r,\theta) = r\sin\theta$. Mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

44. Considere a função $g(t) = t \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(2t, t^3)$, em que $f(x,y)$ é uma função de duas variáveis com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas. Determine $g'(t)$.

45. Sejam $f(u,v)$ uma função de duas variáveis diferenciável e $F(x,y)$ uma função de duas variáveis definida por

$$F(x,y) = f(\sin x,\ \cos y).$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial u}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = 2$, calcule $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$.

46. Seja $y = y(x)$ uma função definida implicitamente por $x = F(u,v)$, onde F é diferenciável, $u = x^2 + y$ e $v = y^2$. Determine $\frac{dy}{dx}$ em função de x, y e das derivadas de F.

47. Seja $z = z(x,y)$ uma função definida implicitamente por $F(xy, z) = 0$, onde F é uma função diferenciável. Mostre que $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. A areia é derramada num monte cônico na velocidade de 4 m^3 por minuto. Num dado instante, o monte tem 6 m de diâmetro e 5 m de altura. Qual a taxa de aumento da altura nesse instante, se o diâmetro aumenta na velocidade de 2 *centímetros* por minuto?

49. A resistência R, em ohms, de um circuíto é dada por $R = \frac{E}{I}$, onde I é a corrente em amperes e E é a força eletromoriz em volts. Num instante, quando $E = 120V$ e $I = 15A$, E aumenta numa de velocidade $0,1V/s$ e I diminui à velocidade de $0,05A/s$. Encontre a taxa de variação instantânea de R.

50. Num determinado circuito elétrico, a corrente I é dada, em função da voltagem V, da resistência R e da indutância L por $I = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + 10L^2}}$. No instante em que V é 210 *volts*, R é igual a 3 *ohms* e está decaindo a uma taxa de $0,1$ *ohms* por segundo, enquanto que L é igual a 2 *henrys* e está crescendo a uma razão de $0,05$ *henrys* por segundo. Qual deve ser a variação de V, neste instante, para que a corrente permaneça constante?

51. Dois carros, um dirigindo-se para leste com velocidade de 80 km/h, o outro dirigindo-se para sul com velocidade de 50 km/h, estão viajando em direção ao encontro das duas rodovias. A que velocidade os carros se aproximam um do outro, no momento em que o primeiro carro está a 400 m e o segundo carro está a 300 m da interseção das rodovias?

52. Um reservatório de areia tem o formato de uma pirâmide invertida de base quadrada. A taxa de vazão da areia deste reservatório diminui a uma velocidade de $40\pi\ cm^3/min$. Esta areia forma no chão um monte cônico. O volume total de areia no reservatório era $243\pi\ cm^3$. Determine a velocidade com que aumenta a altura do cone quando um terço da areia já caiu do reservatório. Sabendo que neste instante a altura do monte é $3\ cm$ e o raio aumenta uma taxa de $0,3\ cm/min$.

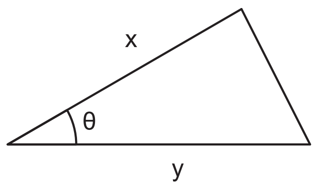
53. Use a lei do gás comprimido $PV = kT$, com $k = 10$, para encontrar a taxa de variação instantânea da temperatura no instante em que o volume do gás é $120 cm^3$ e está sob uma pressão de $8 din/cm^2$, a taxa de crescimento é 2 cm^3/s, a pressão decresce a taxa de 0,1 $\text{din}/\text{cm}^2 \cdot s$. Sugestão: escreva P, V e T em função do tempo.

54. A energia consumida num resistor elétrico, em função da voltagem V e da resistência R é dada por $P = \dfrac{V^2}{R}$. Deseja-se que um determinado resistor tenha uma voltagem de 200 *volts* e uma resistência de 20 ohms.

    (a) Qual deverá ser a variação na resistência para que a energia consumida nesse resistor fique praticamente inalterada quando a voltagem sofrer um decréscimo de $0,2$ *volts*?

    (b) Se esse resistor consumir 3 % a mais que a energia desejada quando sua resistência for 1 % menor que a desejada, qual será a variação percentual da sua voltagem?

55. Considere o triângulo da figura abaixo.



Num dado instante temos que $x = 40\text{cm}$, $y = 50\text{cm}$ e $\theta = \dfrac{\pi}{6}\text{rad}$.

(a) Se o comprimento x e o ângulo θ aumentam a uma taxa de 3cm/s e 0.05rad/s, respectivamente, e o comprimento y diminui a uma taxa de 2cm/s, determine a taxa de variação da área deste triângulo em relação ao tempo.

(b) Suponha que ao realizar a medida dos comprimentos dos lados, x e y, e do ângulo, θ, foi cometido um erro. Em relação a qual destas variáveis o valor da área é mais sensível? Justifique sua resposta usando diferenciais.

56. O ângulo central de um setor circular é $80°$ e o raio desse setor é $20\ cm$. Qual deverá ser o acréscimo a ser dado no raio para que a área deste setor circular fique aproximadamente inalterada quando o ângulo central sofrer um decréscimo de $1°$?

57. A pressão P (em quilopascals), o volume V (em litros) e a temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal estão relacionados por meio da fórmula $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300K e está aumentando a uma taxa de 0,1K/s e o volume é 100L e está aumentando com a taxa de 0,2L/s.

58. A fórmula do tamanho do lote de Wilson em economia diz que a quantidade mais econômica Q de produtos para uma loja pedir é dada pela fórmula $Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$, onde K é o custo do pedido, M é o número de itens vendidos por semana e h é o custo semanal de manutenção de cada item. Se $K = 2$, $M = 20$ e $h = 0,05$, determine:

    (a) para qual das variáveis K, M e h a sensibilidade de Q é maior? Justifique sua resposta usando diferenciais.

    (b) a variação do número de itens vendidos por semana se Q e K aumentam 10% e o custo semanal de manutenção de cada item permanece constante.

59. Uma lata de metal fechada, na forma de um cilindro circular reto, possui altura interna igual a 6cm, raio interno 2cm e espessura 0,1cm. Usando diferencial total faça uma estimativa da quantidade de material necessário para fabricação dessa lata em cm^3.

60. Um pintor cobra $R\$12,00$ por m^2 para pintar as 4 paredes e o teto de uma sala. Se as medidas do teto são $12m$ e $15m$ e altura $3m$, com um erro de até $0,05m$ em todas as dimensões. Aproxime o erro, usando a diferencial, na estimativa do custo do trabalho, a partir dessas medidas.

61. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $P = \frac{V^2}{R}$watts. Se $V = 120$ volts e $R = 12$ ohms, calcular através da diferencial um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de $0,001V$ e R aumenta de $0,02$ ohms.

62. Um material está sendo escoado de um recipiente, formando uma pilha cônica. Num dado instante, o raio da base é de 12 cm e a altura é 8 cm . Obtenha uma aproximação da variação do volume, se o raio varia para $12,5$ cm e a altura para $7,8$ cm. Compare o resultado da variação obtida com a variação exata do volume.

63. Um funil cônico (sem tampa) de dimensões $h = 4\ m$ e $r = 3\ m$ será construído para auxiliar o armazenamento de grãos. Sabendo que o material utilizado na construção desse funil custa R\$ $150,00$ por m^2. Usando diferencial, responda qual será o acréscimo de custo na construção desse funil se aumentarmos seu raio em 5% e sua altura 3%.

64. Uma caixa em forma de paralelepípedo tem dimensões internas iguais a 7cm, 8cm e 13cm. Sendo a espessura das paredes 0,2cm, do fundo 0,3cm e da tampa 0,1cm, fazer uma estimativa aproximada em cm^3 da quantidade de material necessário a ser usado na confecção da caixa.

65. A altura e o diâmetro de um cilindro circular reto são 10 e 6 centímetros, respectivamente. Se um pequeno acréscimo no diâmetro produzir um cilindro quatro por cento mais largo, qual será, aproximadamente, a porcentagem permitida na variação da altura para que não ocorra uma variação no cálculo do volume deste cilindro? Justifique sua resposta.

66. Uma empresa de cosméticos necessita de latas cilíndricas fechadas com raio de 4 cm e altura de 20 cm para embalar seus produtos. Porém, devido as variações na fabricação, estas embalagens apresentam pequenas oscilações em suas medidas. Diante disso:

    (a) Se um engenheiro de controle de qualidade precisa assegurar que essas embalagens tenham o volume correto, ele deverá se preocupar mais com variações no raio ou na altura? Justifique sua resposta com argumentos usando diferenciais.

    (b) Se o custo de fabricação destas embalagens for de 20 centavos por cm^2, obtenha uma estimativa para o acréscimo (ou decréscimo) no custo ao fabricar-se embalagens com altura 2% maior e raio 3% menor em relação ao original.

67. Sabe-se que a resistência R produzida por dois resistores de R_1 e R_2 ohms em paralelo é dada por $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Um estudante de engenharia projetou um circuito com dois resistores em paralelo com resistências de $R_1 = 100$ ohms e $R_2 = 400$ ohms. Porém, como existe uma variação na fabricação, os resistores adquiridos pelo estudante provavelmente não terão os valores exatos. Diante do exposto:

    (a) Determine se o valor de R será mais sensível a variações em R_1 ou em R_2. Justifique sua resposta, utilizando argumentos diferenciais.

    (b) Obtenha uma estimativa para a variação de R, se o estudante utilizar resistências de $100,2$ ohms e $399,7$ ohms respectivamente.

68. Usando diferencieis encontre uma aproximação para:

    (a) $(1,1)^{3,02}$;

    (b) $\dfrac{\cos(e^{0,2} - 1)}{\sqrt{9,4}}$;

    (c) $\sqrt{(3,02)^2 + (1,97)^2 + (5,99)^2}$.

69. Considere a função de duas variáveis dada por $f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + \dfrac{y^2}{9} - 1}$.

    (a) Determine e represente geometricamente o domínio de $f(x, y)$.

    (b) Usando diferenciais encontre uma aproximação para $f(1.98,\ 3.3)$.

70. Considere a função de duas variáveis dada por $f(x, y) = \dfrac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}}$.

    (a) Determine e represente geometricamente o domínio de $f(x, y)$.

    (b) Usando as propriedades de limite calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,-3)} f(x, y)$.

    (c) Usando diferenciais encontre uma aproximação para $f(9.06,\ -3.04)$.

    (d) Usando diferenciais encontre uma aproximação para $f(4.04,\ -3.04)$.

71. Dada a superfície $z = -x^2 - y^2 + 6x - 4y - 4$, determine:

    (a) a equação do plano tangente a esta superfície no ponto $P(3, -2, 9)$;

    (b) a classificação do ponto $P(3, -2, 9)$, se possível, como extremo da superfície.

72. Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = 2\ln(x^2y) + \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{5}{2}x^2 - y + 5$ e classifique-os, se possível, como pontos de máximo, mínimo ou de sela.

73. Precisa-se construir um tanque com a forma de um paralelepípedo para estocar $270\ m^3$ de combustível, gastando a menor quantidade de material em sua construção. Supondo que todas as paredes serão feitas com o mesmo material e terão a mesma espessura, determinar as dimensões do tanque.

74. Uma caixa retangular tem volume 20 m^3. O material usado nas laterais custa R\$ 1,00 por metro quadrado, o material usado o fundo custa R\$ 2,00 por metro quadrado e o material usado na tampa custa R\$ 3,00 por metro quadrado. Quais as dimensões da caixa para que o custo de confeção seja mínimo?

75. Sejam $A(0,0), B(4,0)$ e $C(3,3)$ os vértices de um triângulo. Encontre o ponto $P\ (x,y)$ tal que a soma dos quadrados das distâncias do ponto P aos vértices seja a menor possível.

76. Determine as dimensões relativas de uma caixa retangular sem tampa que possua uma área total de $300\ cm^2$ e que comporte o máximo possível de volume.

77. Uma empresa de embalagem necessita fabricar caixas retangulares de $128\ cm^3$ de volume. Se o material da parte lateral custa a metade do material a ser usado para a tampa e para o fundo da caixa, determinar as dimensões da caixa que minimizam o seu custo de produção.

78. Uma caixa retangular é colocada no primeiro octante, com um dos seus vértices na origem e três de suas faces coincidindo com os três planos coordenados. O vértice oposto à origem está situado no plano de equação $3x + 2y + z = 6$. Qual é o volume máximo possível de tal caixa? Quais serão as suas dimensões?

79. Um pequeno fabricante produz dois tipos de lâmpadas: fluorescentes e incandescentes. O fabricante sabe que, se produzir x lâmpadas fluorescentes e y lâmpadas incandescentes, terá um custo total de $12x + 11y + 4xy$ e poderá vender cada fluorescente por $100 - 2x$ reais e cada incandescente por $125 - 3y$ reais. Quantas lâmpadas devem ser produzidas para que o fabricante tenha lucro máximo? Qual é o lucro máximo?

80. Uma certa indústria produz dois tipos de ligas metálicas. O custo total da produção dessas ligas é expresso pela função $C(x,y) = x^2 + 100x + y^2 - xy$ e a receita total obtida com a vendas dessas ligas é dada pela função $R(x,y) = 100x - x^2 + 2000y + xy$, onde x e y representam a quantidade de toneladas de cada uma das ligas. Determine o nível de produção que maximiza o lucro dessa indústria.

81. Determinada empresa produz 2 produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda a produção seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro.

82. Uma loja vende dois tipos de casacos A e B. O casaco A custa R\$ 40,00 e o casaco B custa R\$ 50,00. Seja x o preço de venda do casaco A e y o preço de venda do casaco B. O total de vendas feito pela loja foi de $(3200 - 50x + 25y)$ unidades do casaco A

e $(25x - 25y)$ unidades do casaco B. Encontre os valores de x e y para que o lucro obtido pela loja seja o maior possível.

83. Encontre as coordenadas do ponto que pertence ao plano $x + y - z + 5 = 0$ e cujo quadrado da distância ao ponto $P(3, -2, 1)$ seja mínimo.

84. Alguns correios exigem que o perímetro da face superior de um pacote mais o comprimento da altura não exceda 84 cm, para que possa ser enviado. Determinar as dimensões do pacote retangular de maior volume que pode ser enviado.

85. Suponha que a temperatura em um ponto qualquer da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ seja dada, em graus, por $T(x, y, z) = xyz^2$. Em quais pontos desta esfera a temperatura é máxima? Em quais pontos da esfera a temperatura é mímima?

86. Determine o valor máximo para a soma dos cossenos dos ângulos internos de um triângulo.

2.13 Respostas

1. (a) Todos os pontos do plano xy acima (ou no interior) do gráfico de $y = x^2$.
   (b) Todos os pontos do plano xy à direita (ou acima) e sobre a reta $y = -1 - x$ excluindo a reta $x = 1$.
   (c) Todos os pontos do plano xy à esquerda (ou no exterior) do gráfico de $x = y^2$.
   (d) Todos os pontos do plano xy que estão abaixo da reta $y = 1$ e à esquerda (ou acima) da reta $y = x$.
   (e) Todos os pontos do plano xy que estão no interior da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e abaixo (ou no exterior) do gráfico de $y = 2x^2$.
   (f) Todos os pontos (x, y, z) que estão no interior do elipsóide $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.

2. .
   (a) *esfera de raio* 5 $\quad$ (b) *hiperbolóide de uma folha*
   (c) *plano* $\quad$ (d) *cone circular*

3. As curvas de nível são circunferências de raio 2, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente.

4. As superfícies de nível são ou cones, ou hiperbolóides de uma folha ou hiperbolóides de duas folhas, dependendo se o nível for $k = 0$, $k > 0$ ou $k < 0$, respectivamente.

5. $(a)\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ $\quad$ $(b)\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$

6. .
   (a) *não existe* $\quad$ $(b)\ L = 0,\ com\ \delta = \sqrt{\varepsilon}$ $\quad$ $(c)\ L = 0,\ com\ \delta = \frac{\varepsilon}{2}$
   (d) *não existe* $\quad$ (e) *não existe* $\quad$ (f) *não existe*

7. Todos os limites dados não existem.

8. .
   $(a)\ \ln 4$ $\quad$ $(b)\ 1$ $\quad$ $(c)\ 0$

   $(d)\ \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $(e)\ 0$ $\quad$ $(f)\ 0$

   $(g)\ 32$ $\quad$ $(h)\ -\frac{1}{\pi}$

9. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,4)} g(x, y) = -4$

10. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = 0$

11. .
    (a) *contínua*, *com* $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad$ (b) *descontínua*

    (c) *descontínua* $\quad$ (d) *descontínua*

    (e) *contínua*, *com* $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ $\quad$ (f) *descontínua* $\quad$ (g) *descontínua*

12. f é contínua para $b = 0$ e, neste caso, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$.

13. f é contínua para $b = \frac{1}{2}$ e, neste caso, $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{3}$

14. f é sempre descontínua, independente do valor de b.

15. $f(0,0) = 1$. Justifica-se pela definição, com $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

16. .

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x} \quad e \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y}}$

(b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2(e^{2(x+y^2)} + x)}{e^{2(x+y^2)} + x^2 + y} \quad e \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{4ye^{2(x+y^2)} + 1}{e^{2(x+y^2)} + x^2 + y}$

(c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x(1 + \sin(2y)) \quad e \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 \cos(2y)$

(d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + 6x^5 e^{-6y}}{2\sqrt{x + y^2 + (x^2 e^{-2y})^3}} \quad e \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2y - 6x^6 e^{-6y}}{2\sqrt{x + y^2 + (x^2 e^{-2y})^3}}$

17. .

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x^2 + y^2 - 2xy + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2 - y^2 - 2xy + 1}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x + 2 + 2xy^2}{3(x^2 + y^2 + 2x + x^2y^2)} \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y + 2x^2 y}{3(x^2 + y^2 + 2x + x^2y^2)}$

18. Basta derivar e substituir na equação diferencial dada.

19. Sim, f é solução da equação diferencial dada.

20. Basta tomar as derivadas parciais de segunda ordem de z e substituir na equação dada.

21. Sim, f é solução da equação diferencial dada.

22. Basta tomar as segundas derivadas parciais de u e substituir na equação dada.

23. .

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6y^4 z^5 \qquad \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24x^2 y z^5 - xz^3 \cos yz \qquad \dfrac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 60x^3 y^4 z^2 - xy^3 \cos yz$

$\dfrac{\partial^3 g}{\partial x^3} = e^x \ln y \qquad \dfrac{\partial^3 g}{\partial y^3} = \dfrac{2e^x}{y^3}$

24. $8x + 4y + z + 2 = 0$.

25. $-24x + 24y - z = 36$

26. $P(1, -2, -1)$

27. $-4x - 8y + 7z + 6 = 0$

28. $z = x - 1$

29. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{-2}{3}, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{-1}{3}$

30. Basta obter a equação do plano tangente num ponto $P(a, b, f(a,b))$ qualquer e mostrar que a origem satisfaz sua equação.

31. $x + 6y - 2z - 3 = 0$

32. (a) $2x + 4y - z - 3 = 0$ (b) $(-1, -2, -5)$

33. (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ -2 \leq x \text{ ou } x \geq 2, \ y^2 \geq \frac{25x^2}{4} - 25\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ -2 \leq x \leq 2, y \text{ qualquer}\}$; (b) $P\left(0, -\sqrt{\frac{5}{3}}, 8\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$.

34. (a) Os pontos do plano xy que estão no interior ou sobre a elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

(b) $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ z - \sqrt{11} & = & -\frac{9}{\sqrt{11}}(x-1) \end{array} \right.$

35. $k = 0$ e $k = -\frac{1}{2}$

36. Utilize a regra da cadeia.

37. Chame $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$,utilize a regra da cadeia e mostre que a soma desejada é zero.

38. Chame $u = \dfrac{y - x}{xy}$, $v = \dfrac{z - y}{yz}$ e utilize a regra da cadeia para mostrar que a soma desejada é zero.

39. Basta utilizar a regra da cadeia e a regra do produto.

40. Utilize a regra do produto juntamente com a regra da cadeia, com $u = \dfrac{y}{x}$, $v = \dfrac{x}{z}$ e $w = \dfrac{z}{x}$.

41. Se $u = x^2 - at$ e $v = x + at^2$ obtém-se, pela regra da cadeia e do produto:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 4x^2 \frac{d^2 f}{du^2} + 2\frac{df}{du} + \frac{d^2 g}{dv^2} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 4a^2 t^2 \frac{d^2 g}{dv^2} + 2a\frac{dg}{dv} + a^2 \frac{d^2 f}{du^2}.$$

42. Utilize regra da cadeia e regra do produto para obter as derivas segundas.

43. Basta utilizar a regra da cadeia.

44. $g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(2t, t^3) + 2t \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2t, t^3) + 3t^3 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2t, t^3)$.

45. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 2$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$.

46. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 2x\dfrac{\partial F}{\partial u}}{\dfrac{\partial F}{\partial u} + 2y\dfrac{\partial F}{\partial v}}$

47. Utilize derivação implícita e regra da cadeia.

48. $\dfrac{dh}{dt} \simeq 0,39 \text{m/min}$

49. $\dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1}{30}$ ohms por segundo

50. $\dfrac{dV}{dt} = 3$ volts por segundo

51. 94km/h

52. $1,28$cm/min

53. $0,4$

54. $(a)\ dR = -0,04$ $(b)\ 1\ \%$

55. (a) $\frac{dA}{dt} \approx 60,8\text{cm}^2/\text{s}$ (b) Em relação a θ.

56. $0,125$cm

57. $-0,042$kPa/s

58. (a) Q é mais sensível em relação à variação de h;
(b) $dM = 4$ que corresponde a uma variação de 10%

59. $3,2\pi\text{cm}^2$

60. $dC = 55,8$

61. $dP = -2,02$

62. $dV = 70,371\ cm^3$ $\Delta V = 69,9\ cm^3$

63. $dC = 616,38$

64. $dV = 100,4\text{cm}^3$

65. a altura deve decrescer em 8%, aproximadamente.

66. (a) O engenheiro deve dar maior atenção à variações no raio, pois o volume é 10 vezes mais sensível à variaões no raio do que à variações na altura.

    $(b)\ dC = -221,16\ centavos$

67. (a) R é dezesseis vezes mais sensível a variações em R_1 do que a varições em R_2.

    $(b)\ dR = 0,116\ \Omega$

68. (a) 1,3
    (b) $\dfrac{4}{135}$
    (c) $\dfrac{242}{35}$

69. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} \geq 1\}$, ou seja, os pontos no exterior e sobre a elipse de equação $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$
    (b) 4,06

70. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/\ x \geq 0,\ y \leq 1\ \text{ e }\ x+y \neq 1\}$, ou seja, os pontos abaixo e sobre a reta $y = 1$, à esquerda e sobre o eixo y (reta $x = 0$) e não pertencentes a reta $y = 1 - x$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,-3)} f(x,y) = 4$

(c) 5,02

(d) 4,02

71. (a) $z - 9 = 0$

    (b) P é ponto de máximo

72. $P_1(-2,2)$ e $P_2(2,2)$ são pontos de sela e $P_3(-1,2)$ e $P_4(1,2)$ são pontos de máximo.

73. $x = y = z = \sqrt[3]{270}$

74. $x = 2,\ y = 2,\ z = 5$

75. $x = \frac{7}{3}$ e $y = 1$

76. $x = y = 10,\ \ z = 5$

77. $x = y = 4,\ z = 8$

78. $x = \frac{2}{3},\ y = 1,\ \ z = 2,\ V = \frac{4}{3}$

79. $x = 9,\ \ y = 13$

80. $x = 1000,\ \ y = 2000$

81. $x = 10,\ y = 30$

82. $x = 84,\ y = 89$

83. $x = \frac{4}{3},\ \ y = -\frac{11}{3},\ \ z = \frac{22}{3}$

84. $x = y = 14,\ \ z = 28$

85. A temperatura é máxima em $(1, 1, \pm\sqrt{2})$ e $(-1, -1, \pm\sqrt{2})$. E mínima em $(-1, 1, \pm\sqrt{2})$ e $(1, -1, \pm\sqrt{2})$. Note, no entanto, que existem ainda outros 5 pontos de sela.

86. $\dfrac{3}{2}$

Capítulo 3

INTEGRAIS DUPLAS

Objetivos (ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de):

1. Encontrar o valor de uma integral dupla;
2. Interpretar geometricamente uma integral dupla;
3. Encontrar os limitantes que permitem calcular o valor de uma integral dupla;
4. Inverter a ordem de integração numa integral dupla;
5. Calcular integrais duplas em coordenadas polares;
6. Transformar uma integral dupla de coordenadas cartesianas para coordenadas polares;
7. Transformar uma integral dupla de coordenadas polares para coordenadas cartesianas;
8. Resolver exercícios usando uma ferramenta tecnológica.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e no desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

3.1 Introdução

No estudo das funções de várias variáveis, ao calcularmos derivadas parciais escolhíamos uma das variáveis independentes para derivar f em relação a ela e admitíamos que as demais eram constantes. O mesmo procedimento será adotado para integração múltipla. Antes de estudarmos a integração múltipla propriamente dita vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 3.1.1 *Encontre a primitiva da função* $f(x, y) = 12x^2y^3$ *em relação* x.

Solução: Como foi dito, vamos admitir y como constante e integrar em relação a x. Portanto,

$$\int 12x^2y^3dx = 4x^3y^3 + C.$$

Porém, nesse caso, a constante C é uma função de y. Pode ser por exemplo, $C(y) = ay^3 + by^2 + cy + 3$ e uma das primitivas de f será

$$F(x, y) = 4x^3y^3 + ay^3 + by^2 + cy + 3.$$

Note que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 12x^2y^3.$$

Exemplo 3.1.2 *Encontre a primitiva da função* $f(x, y) = 12x^2y^3$ *em relação a* y.

Solução: Agora vamos admitir x como constante e integrar em relação a y. Portanto,

$$\int 12x^2y^3dy = 3x^2y^4 + K.$$

Nesse caso, a constante K é uma função de x. Pode ser por exemplo, $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ e uma outra primitiva de $f(x, y) = 12x^2y^3$ será $F(x, y) = 3x^2y^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 3$. Note que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 12x^2y^3.$$

Exemplo 3.1.3 *Encontre o valor da expressão* $\displaystyle\int_x^{x+1} 24xydy$.

Solução: Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} 24xydy &= 12xy^2\Big|_x^{x+1} = 12x(x+1)^2 - 12x(x)^2 \\ &= 12x^3 + 24x^2 + 12x - 12x^3 = 24x^2 + 12x.\end{aligned}$$

Como podemos observar $\int_x^{x+1} 24xydy$ é uma função de x, ou seja, $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} 24xydy = 24x^2 + 12x$.

Exemplo 3.1.4 *Encontre o valor numérico de* $\displaystyle\int_1^2 F(x)\,dx$ *onde* $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} 24xydy$.

Solução: No exemplo anterior vimos que

$$F(x) = \int_x^{x+1} 24xydy = 24x^2 + 12x.$$

Portanto, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$\begin{aligned} \int_1^2 F(x)\,dx &= \int_1^2 \left(24x^2 + 12x\right) dx = \left(8x^3 + 6x^2\right)\Big|_1^2 \\ &= 8(2)^3 + 6(2)^2 - \left(8(1)^3 + 6(1)^2\right) = 74. \end{aligned}$$

Os Exemplos 3.1.3 e 3.1.4 podem ser reescritos como

$$\int_1^2 F(x)\,dx = \int_1^2 \left(\int_x^{x+1} 24xydy\right) dx$$

ou simplesmente

$$\int_1^2 F(x)\,dx = \int_1^2 \int_x^{x+1} 24xydydx.$$

Dessa forma, obtemos um exemplo de integral dupla. Note que a variável dependente é a primeira a ser integrada e a variável independente a última. O processo de solução é dado abaixo.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_x^{x+1} 24xydydx &= \int_1^2 \left(\int_{y=x}^{y=x+1} 24xydy\right) dx \\ &= \int_1^2 \left(12xy^2\Big|_{y=x}^{y=x+1}\right) dx \\ &= \int_1^2 \left(24x^2 + 12x\right) dx \\ &= \left(8x^3 + 6x^2\right)\Big|_1^2 = 74. \end{aligned}$$

Exemplo 3.1.5 *Encontre o valor da integral* $I = \int_0^4 \int_x^{3x} 3\sqrt{16 - x^2}dydx.$

Solução: Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo primeiro integrando em relação a y e depois em relação a x.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_x^{3x} 3\sqrt{16 - x^2}dydx &= \int_0^4 3\sqrt{16 - x^2}y\Big|_x^{3x} dx \\ &= \int_0^4 \left(3\sqrt{16 - x^2}\right)(3x - x)\,dx \\ &= \int_0^4 6x\sqrt{16 - x^2}dx = -2\sqrt{\left(16 - x^2\right)^3}\Big|_0^4 \\ &= -2\sqrt{\left(16 - 4^2\right)^3} + 2\sqrt{\left(16 - 0^2\right)^3} = 128. \end{aligned}$$

3.2 Interpretação Geométrica da Integral Dupla

A definição de integral dupla comporta uma interpretação geométrica semelhante à definição de integral definida simples, associando-a ao problema de cálculo de um volume (ver Figura 3.1) da mesma forma que a integral definida é associada ao cálculo de área. Assim, a definição formal da integral dupla envolve a soma de muitos volumes elementares, isto é, diferenciais de volume, com a finalidade de obter-se o volume total após estas somas.

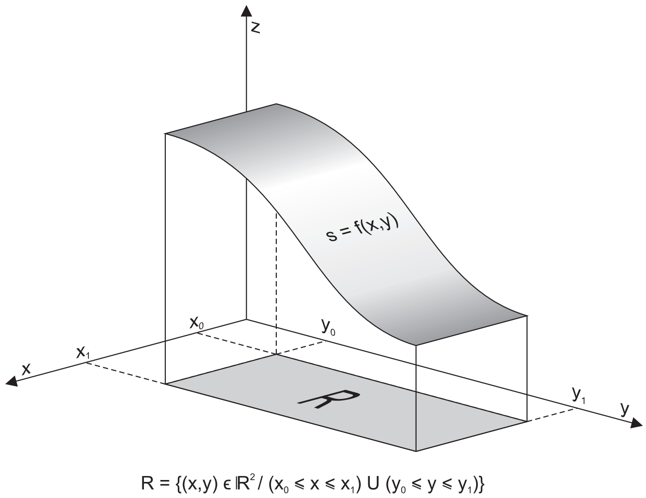


Figura 3.1: Interpretação Geométrica da Integral Dupla

Consideremos uma função $z = f(x, y) \geq 0$, definida numa região R do plano xy. Nossa intenção é estimar o volume aproximado do sólido delimitado superiormente por $z = f(x, y)$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelo cilindro definido pela curva fechada que delimita a região R. Para tanto, subdividimos R em $n-$subregiões traçando planos paralelos aos planos coordenados xz e yz, conforme as Figuras 3.2 e 3.3. Assim, a integral será o volume obtido pela soma de uma infinidade de volumes de colunas infinitesimais inscritas em forma de paralelepípedos, como mostra a Figura 3.3.

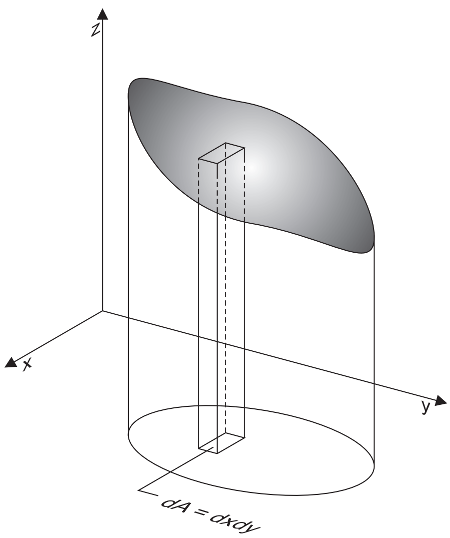


Figura 3.2: Volume elementar

Considere $\{R_1, R_2, \cdots, R_i, \cdots, R_n\}$ é uma partição de R formada por n retângulos. Seja $|P|$ o comprimento da maior de todas as diagonais dos R_i subretângulos. Seja A_i a área da

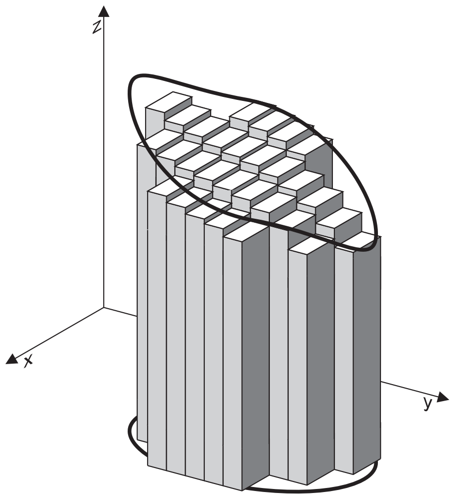


Figura 3.3: Volume aproximado

subregião R_i. Para cada i escolhemos um ponto $(x_i, y_i) \in R_i$. O produto $V_i = f(x_i, y_i)A_i$ é o volume do $i-$ésimo paralelepípedo de base A_i e altura $f(x_i, y_i)$. Como há n subdivisões, haverá n paralelepípedos. Assim, o volume aproximado do sólido delimitado superiormente por $f(x, y)$ e inferiormente pela região R é dado por

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) A_i.$$

Assim, a integral dupla de uma função f definida numa região R é dada por

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) A_i,$$

desde que este limite exista (note que a soma acima é uma soma de Riemann).

Observação 3.2.1 *Se $f(x, y) = 1$, então o sólido em questão é na verdade um cilindro cuja base é a região plana R e cuja altura é dada por $z = f(x, y) = 1$. Como o volume de um cilindro é dado pelo produto de sua base pela altura, temos neste caso, que $V = A_R$, ou seja, a área da região R é dada por*

$$A_R = \iint_R dxdy.$$

3.3 Cálculo da Integral Dupla

Saber reconhecer o domínio de integração (ou região de integração) é fundamental para o cálculo das integrais duplas. Outro ponto importante é o reconhecimento das curvas que delimitam a região de integração. Muitas vezes é conveniente ter essas curvas escritas em função de x, isto é, $y = f(x)$ e, outras vezes, é conveniente escrever x em função de y, isto é $x = f(y)$. Essa conveniência é devido ao maior ou menor trabalho exigido no processo do cálculo do valor numérico. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.3.1 *Calcule o valor da integral $\iint_R 24xydxdy$ sendo R a região delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.*

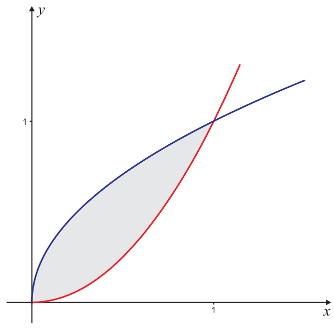


Figura 3.4: Região de Integração do Exemplo 3.3.1

Solução: A região de integração está esboçada na Figura 3.3.1.

A seguir, construímos a tabela de limitantes de integração:

Limitantes de Integração	
Curvas	Funções
curva à esquerda	$x = 0$
curva à direita	$x = 1$
curva inferior	$y = x^2$
curva superior	$y = \sqrt{x}$

As curvas à esquerda e à direita são os limitantes que compõe o primeiro símbolo de integração e as curvas inferior e superior o segundo. Assim,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R 24xydxdy &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 24xydydx = \int_0^1 12xy\Big|_{y=x^2}^{2y=\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 12x(x - x^4)dx = \int_0^1 \left(12x^2 - 12x^5\right) dx \\
&= \left(4x^3 - 2x^6\right)\Big|_0^1 = 2.
\end{aligned}$$

O cálculo da integral no Exemplo 3.3.1 foi desenvolvido tomando x como variável independente. Vamos recalcular esta integral tomando agora y como variável independente.

Primeiramente obteremos a tabela de limitantes da região da Figura 3.4, tomando y como variável independente.

Curvas	Funções
curva à esquerda	$y = 0$
curva à direita	$y = 1$
curva inferior	$x = y^2$
curva superior	$x = \sqrt{y}$

A curvas à esquerda e à direita são os limitantes do primeiro símbolo de integração e as curvas inferior e superior do segundo. Assim,

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R 24xydxdy &= \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} 24xydxdy = \int_0^1 12yx^2 \Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^1 12y(y-y^4)dy = \int_0^1 \left(12y^2 - 12y^5\right) dy \\
&= \left(4y^3 - 2y^6\right) \Big|_0^1 = 2.
\end{aligned}$$

Como podemos observar, o valor numérico é o mesmo nos dois casos.

Muitas vezes a região de integração não é delimitada apenas por quatro curvas. Nesse caso, a escolha da variável independente adequada pode diminuir o trabalho durante o processo de integração. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.3.2 *Encontrar o valor da integral* $\iint\limits_R dxdy$*, onde* R *é a região situada no interior da parábola* $y = x^2$ *e delimitada por* $y = 6 - x$ *e* $y = 1$*, tomando:*
(a) x **como variável independente;**
(b) y**como variável independente.**

Solução: A região R está sombreada na Figura 3.5

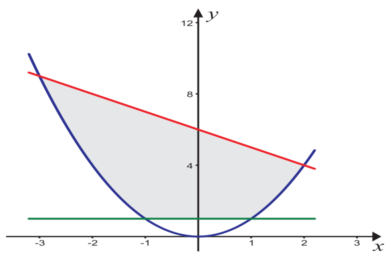


Figura 3.5: Região de Integração do Exemplo 3.3.2

Obteremos os pontos de interseção das curvas resolvendo os sistemas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} x = -3, & y = 9 \\ x = 2, & y = 4 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} x = -1, & y = 1 \\ x = 1, & y = 1. \end{array}$$

(a) Tomando x como variável independente, vemos que a região de integração deve ser subdividida em três regiões para que o cálculo possa ser efetivado. Portanto, temos a seguinte tabela:

Tabela de limitantes referente à região R

Curvas	R_1	R_2	R_3
curva à esquerda	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$
curva à direita	$x = -1$	$x = 1$	$x = 2$
curva inferior	$y = x^2$	$y = 1$	$y = x^2$
curva superior	$y = 6 - x$	$y = 6 - x$	$y = 6 - x$

e a integral dupla será dada por

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R dxdy &= \iint\limits_{R_1} dxdy + \iint\limits_{R_2} dxdy + \iint\limits_{R_3} dxdy \\
&= \int_{-3}^{-1}\int_{x^2}^{6-x} dydx + \int_{-1}^{1}\int_{1}^{6-x} dydx + dint_1^2 \int_{x^2}^{6-x} dydx \\
&= \int_{-3}^{-1} y\Big|_{x^2}^{6-x} dx + \int_{-1}^{1} y\Big|_{1}^{6-x} dx + \int_{1}^{2} y\Big|_{x^2}^{6-x} dx \\
&= \int_{-3}^{-1} (6-x-x^2)dx + \int_{-1}^{1} (6-x-1)\,dx + \int_{1}^{2} \left(6-x-x^2\right) dx \\
&= \frac{22}{3} + 10 + \frac{13}{6} = \frac{39}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Tomando y como variável independente, vemos que agora a região de integração pode ser subdividida em apenas duas sub-regiões para que o cálculo possa ser efetivado. Portanto, a tabela de limitantes é dada por

Tabela de limitantes referente à região R

Limitantes	R_1	R_2
curva à esquerda	$y = 1$	$y = 4$
curva à direita	$y = 4$	$y = 9$
curva inferior	$x = -\sqrt{y}$	$x = -\sqrt{y}$
curva superior	$x = \sqrt{y}$	$x = 6 - y$

Assim, a integral dupla será dada por

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R dxdy &= \iint\limits_{R_1} dxdy + \iint\limits_{R_2} dxdy \\
&= \int_{1}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy + \int_{4}^{9}\int_{-\sqrt{y}}^{6-y} dxdy \\
&= \int_{1}^{4} x\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy + \int_{4}^{9} x\Big|_{-\sqrt{y}}^{6-y} dy \\
&= \int_{1}^{4} (2\sqrt{y})dy + \int_{4}^{9} (6-y+\sqrt{y})dy = \frac{61}{6} + \frac{28}{3} = \frac{39}{2}.
\end{aligned}$$

Note que a mudança da variável independente diminuiu o trabalho dispensado ao cálculo da integral.

Exemplo 3.3.3 *Escreva a integral que representa a área da região delimitada pelas curvas* $x = y^2$, $y - x = 1$, $y = 1$ *e* $y = -1$, *tomando:*
(a) x *como variável independente;* *(b)* y *como variável independente.*

Solução: A área delimitada pelas curvas pode ser vista na Figura 3.6.
Inicialmente, vamos encontrar os pontos de interseção
$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow P(1,1)$, $\begin{cases} x = y^2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow Q(1,-1)$, $\begin{cases} y = 1 + x \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow R(-2,-1)$.
(a) Tomando x como variável independente, devemos dividir a região em duas:

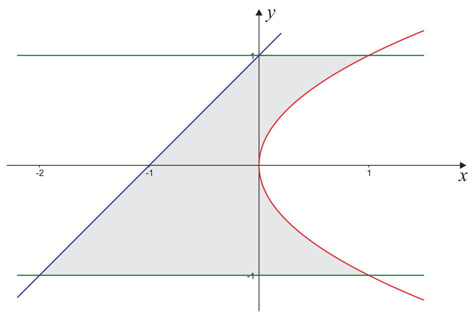


Figura 3.6: Região de Integração do Exemplo 3.3.3

Tabela de limitantes referente à região R

Limitantes	R_1	R_2
curva à esquerda	$x = -2$	$x = 0$
curva à direita	$x = 0$	$x = 1$
curva inferior	$y = -1$	$y = \sqrt{x}$
curva superior	$y = 1 + x$	$y = 1$

Usando a simetria da região R_2, obtemos

$$A = \int_{-2}^{0}\int_{-1}^{1+x} dydx + 2\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1} dydx = \frac{8}{3}.$$

(b) Tomando y como variável independente, basta considerar uma única região:

Tabela de limitantes referente à região R

Limitantes	R
curva à esquerda	$y = -1$
curva à direita	$y = 1$
curva inferior	$x = y - 1$
curva superior	$x = y^2$

Logo, a área é dada por

$$A = \int_{-1}^{1}\int_{y-1}^{y^2} dxdy = \frac{8}{3}.$$

Observação 3.3.4 *É preciso tomar cuidado com o uso de simetrias, não é suficiente que a região seja simétrica, é preciso que a função do integrando, tenha a mesma simetria da região.*

Exemplo 3.3.5 *Calcule o valor de* $I = \iint_R (x + 2y)dA$, *sendo* R *a região delimitada pelas curvas* $y = 2x^2$ *e* $y = x^2 + 1$.

Solução: Exercício. Observe que se for fazer o uso de simetria o resultado será diferente. Isso ocorre devido a observação acima.

Resposta: $I = \dfrac{32}{15}$.

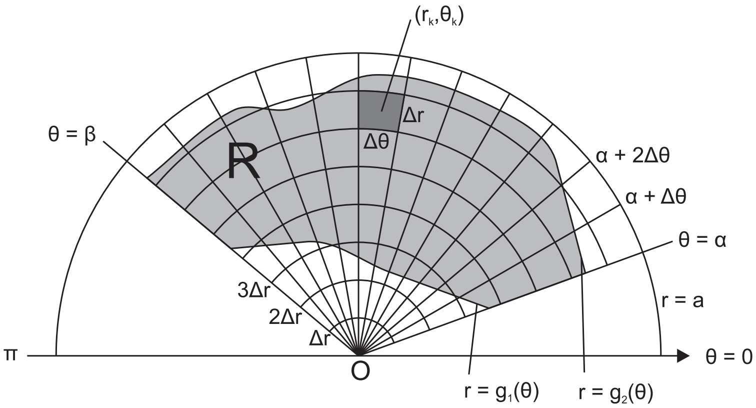


Figura 3.7: Partição em coordenadas polares

3.4 Integrais Duplas em Coordenada Polares

Frequentemente, a região R sobre a qual será calculada a integral dupla é mais facilmente descrita em coordenadas polares do que em coordenadas retangulares. Vamos descrever o processo para o cálculo de integrais duplas em coordenadas polares. Veja a Figura 3.7.

Seja $X = \{\alpha = \theta_0,\ \alpha + \Delta\theta,\ \alpha + 2\Delta\theta,\ \alpha + 3\Delta\theta,\ \cdots,\ \theta_n = \beta\}$ uma partição do arco $\beta - \alpha$. Consideremos as curvas de raio r_{i-1} e r_i e a sub-região R_i de R delimitada pelas curvas de raio r_{i-1}, r_i, θ_{i-1} e θ_i. A forma de R_i é aproximadamente um retângulo de lados Δr_i, $l_{i-1} = r_{i-1}\Delta\theta_i$ e $l_i = r_i\Delta\theta_i$. Podemos admitir que uma aproximação da área de R_i é dada por $A_i = \Delta r_i r_i \Delta\theta_i$. Tomando um ponto (r_{k_i}, θ_{k_i}) no interior de R_i podemos formar um sólido cuja área da base é A_i e altura $f(r_{k_i}, \theta_{k_i})$, de modo que o volume desse sólido será dada por

$$V_i = f(r_{k_i}, \theta_{k_i})\, \Delta r_i r_i \Delta\theta_i.$$

Assim, o volume sob a superfície $f(r, \theta)$ será aproximada pela soma

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(r_{k_i}, \theta_{k_i})\, \Delta r_i r_i \Delta\theta_i.$$

Seja $|P|$ a diagonal da maior região R_i da partição de R. Então, se $|P| \to 0$ segue que $\Delta r_i \to 0$, $\Delta\theta_i \to 0$, $r_{k_i} \to r$, $\theta_{k_i} \to \theta$ e $r_i \to r$. Portanto, podemos escrever

$$V = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(r_{k_i}, \theta_{k_i})\, \Delta r_i r_i \Delta\theta_i$$

ou seja,

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r}^{r_2} f(r, \theta)\, r dr d\theta.$$

Observação 3.4.1 *Vimos anteriormente que a partição de uma região R por retas paralelas aos eixos x e y geram sub-regiões retangulares cujos lados são Δx_i e Δy_i e área $A_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Então, é natural nos perguntarmos se as áreas $A_i = \Delta x_i \Delta y_i$ e $A_i = \Delta r_i r_i \Delta\theta_i$ são iguais. É claro que não são, porém pode-se mostrar que $\dfrac{\lim_{\Delta x \Delta y \to 0} \Delta x_i \Delta y_i}{\lim_{\Delta r \Delta\theta \to 0} \Delta r_i r_i \Delta\theta_i} = 1$ e isso implica que $dxdy = rdrd\theta$. Assim, a equivalência entre a integral dupla em coordenadas retangulares e a* *integral dupla em coordenadas polares é dada por*

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dxdy = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

Exemplo 3.4.2 *Escreva a integral, em coordenadas polares, que calcula a área sombreada na Figura 3.8.*

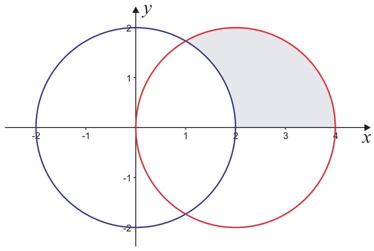


Figura 3.8: Região de Integração do Exemplo 3.4.2

Solução: Temos as seguintes equações para as circunferências

$x^2 + y^2 = 4$ e $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (em cartesianas)

$r = 2$ e $r = 4\cos\theta$ (em polares)

Na interseção das circunferências, temos $\cos\theta = \frac{1}{2}$, que no primeiro quadrante nos dá $\theta = \frac{\pi}{3}$. Portanto, a área em coordenadas polares é dada por

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_2^{4\cos\theta} rdrd\theta.$$

Exemplo 3.4.3 *Encontre a área da região que é simultaneamente exterior a $r = 2$ e interior a $r = 4\sin\theta$.*

Solução: A representação geométrica da região desejada está ilustrada na Figura 3.9. O próximo passo é encontrar os pontos de interseção das curvas.

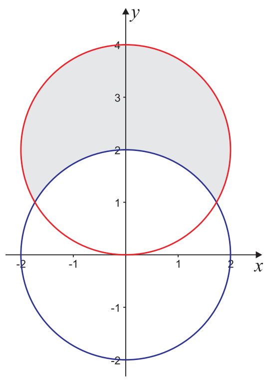


Figura 3.9: Região de Integração do Exemplo 3.4.3

Igualando as equações, obtemos

$$4\sin\theta = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

A tabela de limitantes é dada por

Limitantes	Equações
arco inferior	$\alpha = \frac{\pi}{6}$
arco superior	$\beta = \frac{5\pi}{6}$
raio inferior	$r = 2$
raio superior	$r = 4\sin\theta$

Assim, a área da região é dada por

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{2}^{4\sin\theta} r dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{2}^{4\sin\theta} d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(8\sin^2\theta - 2\right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2 - 4\cos(2\theta)) d\theta \\
&= (2\theta - 2\sin(2\theta))\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
&= \frac{10\pi}{6} - 2\sin\frac{10\pi}{6} - \left(\frac{2\pi}{6} - 2\sin\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4.4 *Transforme a integral dupla* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2}{\cos\theta + 2\sin\theta}}^{2} 5e^{r^2} dr d\theta$ *de coordenadas polares para coordenadas cartesianas, utilizando:*

(a) x *como variável independente;* *(b)* y *como variável independente.*

Solução: Dos limitantes de integração, temos que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, o que nos indica que a região de integração está situada no primeiro quadrante do plano xy. Temos também que $r \in [\frac{2}{\cos\theta + 2\sin\theta}, 2]$ o que nos diz que o raio polar varia desde a reta $x + 2y = 2$ até a circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Assim, obtemos a região de integração mostrada na Figura 3.10.

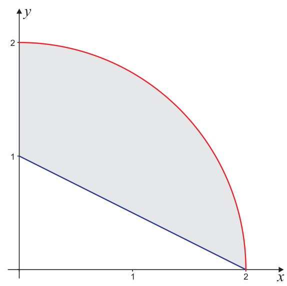


Figura 3.10: Região de Integração do Exemplo 3.4.4

Para transformar o integrando, note que

$$5e^{r^2} dr d\theta = \frac{5e^{r^2}}{r} r dr d\theta = \frac{5e^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx.$$

Portanto,

(a) Tomando x como variável independente temos

$$I = \int_0^2 \int_{\frac{2-x}{2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{5e^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy dx.$$

(b) Tomando y como variável independente, é necessário uma soma de integrais, já que ocorre uma troca de limitação para x, isto é

$$I = \int_0^1 \int_{2-2y}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{5e^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{5e^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$$

Exemplo 3.4.5 *Considere a expressão* $I = \int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 y^2 \cos(x^7) dxdy.$

(a) Inverta a ordem de integração de I, ou seja, reescreva esta expressão tomando x como variável independente.

(b) Reescreva esta expressão usando coordenadas polares.

(c) Calcule o valor numérico de I, utilizando uma das expressões anteriores.

Solução: Inicialmente, devemos esboçar a região de integração de I. Como $y \in [0, 9]$ e $x \in [\sqrt{y}, 3]$ obtemos a região representada na Figura 3.11.

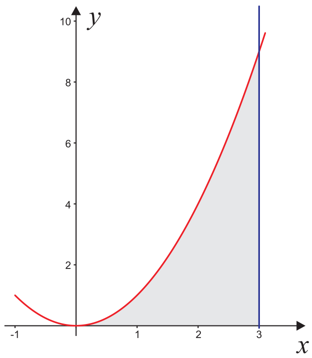


Figura 3.11: Região de Integração do Exemplo 3.4.5

(a) Para inverter a ordem de integração, é necessário tomar x como variável independente. A partir da Figura 3.10 podemos facilmente notar que $x \in [0, 3]$ e $y \in [0, x^2]$. Assim

$$I = \int_0^3 \int_0^{x^2} y^2 \cos(x^7) dydx.$$

(b) Para transformar I para coordenadas polares, começamos transformando as curvas que delimitam a região de integração

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad r \sin\theta = r^2 \cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} = \tan\theta \sec\theta$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad r\cos\theta = 3 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{\cos\theta} = 3\sec\theta.$$

Na interseção destas curvas ($x = 3$ e $y = 9$), temos que

$$\tan\theta = 3 \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan 3.$$

Como a região de integração está situada no primeiro quadrante do plano xy, temos que $\theta \in [0, \arctan 3]$. E como o raio polar varia desde a parábola até a reta, temos que $r \in [\tan\theta\sec\theta, \ \sec\theta]$. Lembrando que, em coordenadas polares, temos $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ e $dxdy = rdrd\theta$, obtemos que

$$I = \int_0^{\arctan 3} \int_{\tan\theta\sec\theta}^{3\sec\theta} r^3 \sin\theta \cos(r^7\cos^7\theta) drd\theta.$$

(c) Para calcular o valor numérico de I, devemos optar por sua melhor expressão. Analisando as três expressões disponíveis, percebemos que a integral do item (a) é a mais simples de ser resolvida. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \int_0^{x^2} y^2 \cos(x^7) dy dx = \int_0^3 \frac{y^3}{3} \cos(x^7) \bigg|_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^3 \frac{x^6}{3} \cos(x^7) dx = \frac{1}{21} \sin(x^7) \bigg|_0^3 = \frac{1}{21} \sin(2187). \end{aligned}$$

3.5 Exercícios Gerais

1. Calcule as integrais duplas dadas abaixo:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{3x+1} xydydx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{3y+1} xy^2dxdy$ (c) $\displaystyle\int_0^4\int_0^1 xe^{xy}dydx$

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta} \cos\theta\sin\theta\; re^{r^2}drd\theta$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{y^2} \cos\frac{x}{y}dxdy$ (f) $\displaystyle\int_0^{\ln 2}\int_0^{y} xy^5e^{x^2y^2}dxdy$

2. Escreva as integrais duplas que permitem calcular a área da região R delimitada simultaneamente pelas curvas dadas abaixo, tomando inicialmente x como variável independente e após tomando y como variável independente.

(a) $y = x^2 - 1,\;\; y = 1 - x,\;\; y = \frac{4x}{3} + 12$ e $y = 12 - \frac{9x}{2}$.

(b) $y = \frac{4x}{3} + \frac{8}{3},\; y = -2 - x,\;\; y = \frac{x}{2} - 2$ e $y = \frac{16}{3} - \frac{4x}{3}$.

3. Esboce a região de integração e calcule as integrais duplas dadas abaixo, trocando a ordem de integração, se necessário.

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_{x^2}^4 x\sin(y^2)dydx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dxdy.$

4. Nos problemas a seguir, esboce geometricamente a região de integração e utilize coordenadas polares para calcular as integrais.

(a) $\displaystyle\iint_R \sqrt{14 - x^2 - y^2}dxdy$ onde R é a região dada por $4 \le x^2 + y^2 \le 9$.

(b) $\displaystyle\iint_R \sqrt{14 - x^2 - y^2}dxdy$ onde R é a região dada por $x^2 + y^2 \le 4$ com $x \ge 0$ e $y \ge 0$.

(c) $\displaystyle\int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} e^{-x^2-y^2}dydx.$

(d) $\displaystyle\int_0^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 \frac{1}{4+\sqrt{x^2+y^2}}dydx.$

(e) $\displaystyle\int_{-2}^0\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx.$

(f) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{(x^2+y^2)^3}dxdy$ onde R é a região dada por $4 \le x^2 + y^2 \le 9$.

5. Escreva, em coordenadas cartesianas, a(s) integral(is) dupla(s) que permite(m) calcular a área da **menor** região delimitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 9$ e $y^2 + 1 = 3x$, tomando:

(a) x como variável independente; (b) y como variável independente.

6. Escreva a(s) integral(is) dupla(s) que permite(m) calcular a área da **menor** região delimitada pelas curvas $x^2 + y^2 = 20$ e $y = x^2$, usando:

   (a) x como variável independente; (b) y como variável independente; (c) coordenadas polares.

7. Considere a expressão $I = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y} dydx$.

   (a) Reescreva a expressão dada, invertendo sua ordem de integração.

   (b) Transforme a expressão dada para coordenadas polares.

8. Transforme para coordenadas cartesianas a seguinte integral

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{3\cos\theta}^{3} \sin\theta dr d\theta.$$

9. Considere a expressão $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$.

   (a) Reescreva a expressão dada, invertendo sua ordem de integração.

   (b) Transforme a expressão dada para coordenadas polares.

   (c) Utilize uma das expressões encontradas nos itens anteriores para calcular o valor numérico de I.

10. Transforme a integral $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 dr d\theta$ de coordenadas polares para coordenadas cartesianas, tomando:

    (a) x como variável independente; (b) y como variável independente.

11. Considere a seguinte expressão:

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} x\cos((1-y)^2) dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{2-x^2} x\cos((1-y)^2) dydx.$$

    (a) Represente geometricamente a região de integração da expressão acima.

    (b) Calcule o valor numérico de I, adotando a melhor expressão para isso.

12. Utilize coordenadas polares para reescrever a soma

$$I = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xydydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{x} xydydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

    em uma única integral dupla.

13. Considere a seguinte expressão:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy.$$

    (a) Reescreva esta expressão, invertendo a sua ordem de integração.

    (b) Transforme esta expressão para coordenadas polares.

    (c) Calcule o valor numérico de I, utilizando umas das expressões anteriores.

14. Calcule $\displaystyle\iint_D (x+3y)dA$, onde D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(2,0)$.

15. Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$, sendo D a região do semiplano $x \geqslant 0$ interna à cardióide $r = 1+\cos\theta$ e externa à circunferência $r = 1$.

3.6 Respostas

1. $(a)\ \dfrac{9}{4}$ $\quad (b)\ \dfrac{103}{60}$ $\quad (c)\ e^4-5$ $\quad (d)\ \dfrac{e^{12}+23}{64}$ $\quad (e)\ \pi$ $\quad (f)\ \frac{1}{8}(e^{\ln^4 2}-\ln^4 2-1)$

2. .

$$(a)\quad A=\int_{-3}^{-2}\int_{x^2-1}^{\frac{4x}{3}+12} dydx+\int_{-2}^{0}\int_{1-x}^{\frac{4x}{3}+12} dydx+\int_{0}^{1}\int_{1-x}^{12-\frac{9x}{2}} dydx+\int_{1}^{2} dint_{x^2-1}^{12-\frac{9x}{2}} dydx$$

$$A=\int_{0}^{3}\int_{1-y}^{\sqrt{y+1}} dxdy+\int_{3}^{8}\int_{-\sqrt{y+1}}^{\frac{24-2y}{9}} dxdy+\int_{8}^{12}\int_{\frac{3y}{4}-9}^{\frac{24-2y}{9}} dxdy$$

$$(b)\quad A=\int_{-2}^{0}\int_{-2-x}^{\frac{4x+8}{3}} dydx+\int_{0}^{1}\int_{\frac{x}{2}-2}^{\frac{4x+8}{3}} dydx+\int_{1}^{4}\int_{\frac{x}{2}-2}^{\frac{16}{3}-\frac{4x}{3}} dydx$$

$$A=\int_{-2}^{0}\int_{-2-y}^{2y+4} dxdy+\int_{0}^{4}\int_{\frac{3y-8}{4}}^{4-\frac{3y}{4}} dxdy$$

3. (a) $\dfrac{1-\cos 16}{4}$ $\quad$ (b) $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

4. .

$(a)\ \frac{10\pi}{3}(2\sqrt{10}-\sqrt{5})$ $\quad (b)\ \frac{\pi}{3}(7\sqrt{14}-5\sqrt{10})$ $\quad (c)\pi(1-e^{-9})$

$(d)\ \pi+4\pi\ln 2-2\pi\ln 6$ $\quad (e)\dfrac{-64}{15}$ $\quad (f)\ \dfrac{65\pi}{2592}$

5. (a) $A=\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{2}\int_{-\sqrt{3x-1}}^{\sqrt{3x-1}} dydx+\int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dydx$

(b) $A=\displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{\frac{y^2+1}{3}}^{\sqrt{9-y^2}} dxdy$

6. (a) $A=\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{\sqrt{20-x^2}} dydx$

(b) $A=\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy+\int_{4}^{\sqrt{20}}\int_{-\sqrt{20-y^2}}^{\sqrt{20-y^2}} dxdy$

(c) $A=2\displaystyle\int_{0}^{\arctan 2}\int_{0}^{\tan\theta\sec\theta} rdrd\theta+2\int_{\arctan 2}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\sqrt{20}} rdrd\theta$

7. (a) $I=\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{1}^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}dxdy$

(b) $I=\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\sec\theta}^{2\cos\theta} \frac{r}{\cos\theta+\sin\theta}drd\theta$

8. $I=\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{\sqrt{3x-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}dydx+\int_{0}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{3x-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2}dydx$

9. (a) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^x \frac{2x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2x+4y}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx$

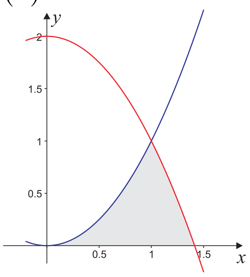
   (b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 (2r\cos\theta + 4r\sin\theta) drd\theta$

   (c) $2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

10. (a) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2) dydx$

    (b) $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_0^y (x^2+y^2) dxdy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2) dxdy$

11. (a)



    (b) $I = \dfrac{1}{2}\sin 1$

12. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 r^3 \cos\theta \sin\theta drd\theta$

13. (a) $I = \int_0^1 \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dydx$

    (b) $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2\cos\theta}^{2\sin\theta} drd\theta$

    (c) $I = 2\sqrt{2} - 2$

14. $I = 2$

15. $I = 2$

Capítulo 4

INTEGRAIS TRIPLAS

Objetivos (ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de):

1. Encontrar o valor de uma integral tripla;
2. Interpretar geométrica e fisicamente uma integral tripla;
3. Calcular integrais triplas em coordenadas retangulares;
4. Calcular integrais triplas em coordenadas cilíndricas;
5. Calcular integrais triplas em coordenadas esféricas;
6. Transformar uma integral tripla de coordenadas retangulares para cilíndricas e de cilíndricas para retangulares;
7. Transformar uma integral tripla de coordenadas retangulares para esféricas e de esféricas para retangulares;
8. Transformar uma integral tripla de coordenadas cilíndricas para esféricas e de esféricas para cilíndricas;
9. Montar uma integral tripla nos três sistemas de coordenadas e decidir qual o sistema mais adequado para resolvê-la;
10. Fazer a maquete de uma figura delimitada por superfícies e encontrar seu volume.
11. Resolver exercícios usando uma ferramenta tecnológica.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e no desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

4.1 Introdução

As integrais triplas, aplicadas sobre sólidos no espaço xyz, são definidas de forma análoga às integrais duplas aplicadas sobre uma região do plano xy. Não é nosso objetivo discutir os pormenores da definição, pois estes fazem parte do conteúdo de um texto de cálculo avançado. Vamos esboçar apenas as ideias principais.

Notação: 4.1.1 *Seja S um sólido no espaço tridimensional e $f : S \to \mathbb{R}$ uma função de três variáveis definida sobre cada ponto $(x, y, z) \in S$. Denotaremos a integral tripla de f sobre S como*

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dxdydz.$$

4.2 Interpretação Geométrica da Integral Tripla

Para fixar as ideias vamos supor que o sólido S é um paralelepípedo. Uma partição desse paralelepípedo é obtida seccionando-o com n planos paralelos aos eixos coordenados, conforme ilustra a Figura 4.1.

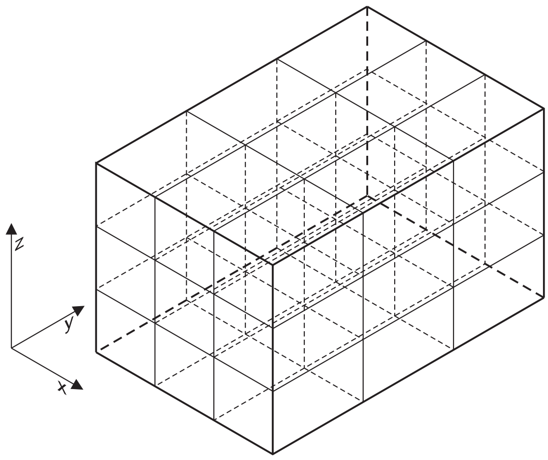


Figura 4.1: Partição de um sólido

O fracionamento de S obtido pela partição é um conjunto de sub-parelelepípedos chamados células da partição. Suponhamos que uma $i-$célula tenha dimensões $\Delta x_i, \Delta y_i$ e Δz_i. Então, o volume dessa $i-$célula é $V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$. Seja (x_i^*, y_i^*, z_i^*) um ponto qualquer da $i-$célula e seja $f : S \to \mathbb{R}$ a função densidade em cada ponto de S, então uma estimativa da massa da $i-$célula é $m_i = f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ e, desse modo uma estimativa da massa do sólido S será

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i.$$

Se $|N|$ é o comprimento da diagonal da maior célula da partição de S, então a massa m do sólido S será dada por

$$m = \lim_{|N| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

ou

$$m = \iiint_S f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Observação 4.2.1 *Se $f(x,y,z)=1$ então a massa m e o volume V do sólido tem o mesmo valor numérico. Portanto, o volume de um sólido, em termos de integrais triplas, é dado por*

$$V=\iiint\limits_S dxdydz.$$

4.3 Cálculo da Integral Tripla em Coordenadas Retangulares

Seja S um sólido delimitado pelas curvas $x=a$, $x=b$, $y=y_1(x)$ e $y=y_2(x)$ e pelas superfícies $z=f(x,y)$ e $z=g(x,y)$, com $f(x,y)\leq g(x,y)$ para todo (x,y), de acordo com a tabela abaixo:

Tabela de limitantes

Limitante	Equações
Curva à esquerda	$x=a$
Curva à direita	$x=b$
Curva inferior	$y=y_1(x)$
Curva superior	$y=y_2(x)$
Superfície inferior	$z=f(x,y)$
Superfície superior	$z=g(x,y)$

A integral tripa de uma função contínua $f(x,y,z)$ sobre o sólido S é dada por

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)\,dxdydz=\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\,dzdydx.$$

Exemplo 4.3.1 *Determine o volume do sólido delimitado pelos planos $z=0$, $y=0$, $x=0$ e $2x+4y+z=8$.*

Solução: Iniciamos representando geometricamente o sólido (Figura 4.2).

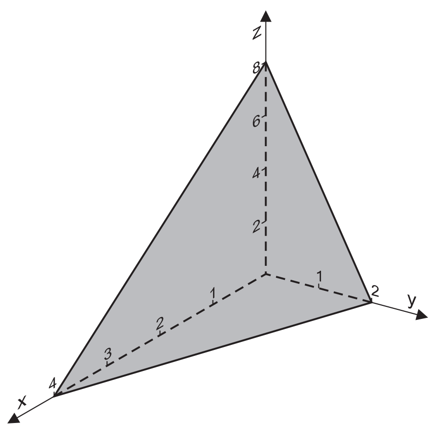


Figura 4.2: Sólido do Exemplo 4.3.1.

Em seguida, devemos projetar o sólido sobre um dos planos coordenados. A projeção sobre o plano xy pode ser vista na Figura 4.3. Note que poderíamos ter optado por projetar sobre outro plano coordenado.

A tabela de limitantes do sólido, tomando x como variável independente, é dada por

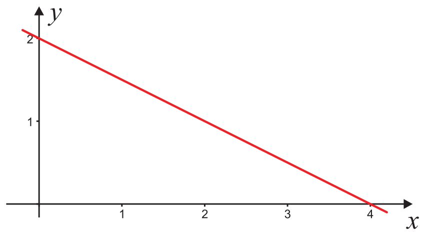


Figura 4.3: Projeção no plano xy.

Limitantes	Equações
Curva à esquerda	$x = 0$
Curva à direita	$x = 4$
Curva inferior	$y = 0$
Curva superior	$y = 2 - \frac{x}{2}$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 8 - 2x - 4y$

Assim, o volume desejado é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \int_0^{8-2x-4y} dzdydx = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} z\Big|_0^{8-2x-4y} dydx \\ &= \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} (8-2x-4y)dydx = \int_0^4 (8y - 2xy - 2y^2)\Big|_0^{2-\frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^4 16 - 4x - 2x\left(2 - \frac{1}{2}x\right) - 2\left(2 - \frac{1}{2}x\right)^2 dx = \int_0^4 (8 - 4x + \frac{1}{2}x^2)dx = \frac{32}{3}\ u.v. \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.2 *Calcule o volume do sólido delimitado pelos cilindros $z^2+x^2 = 9$ e $y^2+x^2 = 9$ situado no primeiro octante.*

Solução: A representação geometricamente do sólido pode ser vista na Figura 4.4.

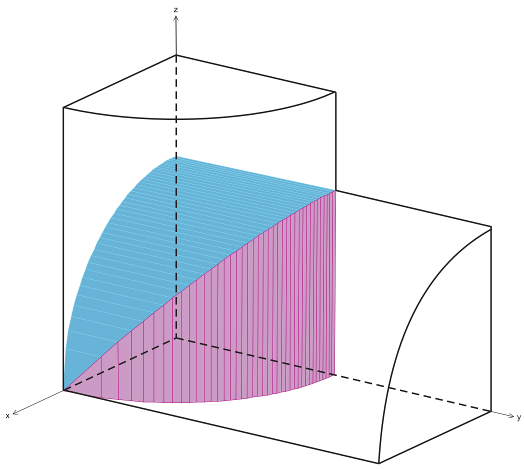


Figura 4.4: Sólido do Exemplo 4.3.2.

Como o sólido está situado no primeiro octante, os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ delimitam este sólido e a projeção sobre o plano xy é a parte da circunferência $x^2 + y^2 = 9$ que está no primeiro quadrante.

Vejamos a tabela de limitantes:

Limitantes	Equações
Curva à esquerda	$x = 0$
Curva à direita	$x = 3$
Curva inferior	$y = 0$
Curva superior	$y = \sqrt{9 - x^2}$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = \sqrt{9 - x^2}$

O volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dzdydx = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-x^2}dydx \\ &= \int_0^3 y\sqrt{9-x^2}\Big|_0^{\sqrt{9-x^2}} dx = \int_0^3 (9-x^2)dx = 9x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 18 \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exemplo 4.3.3 *Escreva o volume do sólido do Exemplo 4.3.2 de 6 formas distintas.*

Solução:
1 - Projetando no plano xy usamos z como variável espacial (ou variável totalmente dependente) e x ou y como variável independente. A projeção sobre o plano xy é a parte da circunferência $x^2 + y^2 = 9$ que está no primeiro quadrante, logo temos as limitações e as integrais:

$$\text{(i)} \;\; x \text{ como variável independente: } \begin{cases} z \in [0, \sqrt{9-x^2}] \\ y \in [0, \sqrt{9-x^2}] \\ x \in [0, 3] \end{cases} \Rightarrow V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dzdydx$$

$$\text{(ii)} \;\; y \text{ como variável independente: } \begin{cases} z \in [0, \sqrt{9-x^2}] \\ x \in [0, \sqrt{9-y^2}] \\ y \in [0, 3] \end{cases} \Rightarrow V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dzdxdy$$

2 - Projetando no plano xz usamos y como variável espacial (ou variável totalmente dependente) e x ou z como variável independente. A projeção sobre o plano xz é a parte da circunferência $x^2 + z^2 = 9$ que está no primeiro quadrante, logo temos as limitações e as integrais:

$$\text{(i)} \;\; x \text{ como variável independente: } \begin{cases} y \in [0, \sqrt{9-x^2}] \\ z \in [0, \sqrt{9-x^2}] \\ x \in [0, 3] \end{cases} \Rightarrow V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dydzdx$$

$$\text{(ii)} \;\; z \text{ como variável independente: } \begin{cases} y \in [0, \sqrt{9-x^2}] \\ x \in [0, \sqrt{9-z^2}] \\ z \in [0, 3] \end{cases} \Rightarrow V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dydxdz$$

3 - Projetando no plano yz usamos x como variável espacial (ou variável totalmente dependente) e y ou z como variável independente. A projeção sobre o plano yz é o quadrado limitado por $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$ e $z = 3$, porém com esta projeção não podemos usar apenas uma integral, pois há troca de limitação na variável x e esta troca ocorre no plano $y = z$ obtido pela interseção dos cilindros $x^2 + y^2 = 9$ e $x^2 + z^2 = 9$, logo temos as limitações e as integrais:

(i) y como variável independente: $\left\{\begin{array}{c} x \in [0,\ \sqrt{9-y^2}] \\ z \in [y,\ 3] \\ y \in [0,\ 3] \end{array}\right. \bigcup \left\{\begin{array}{c} x \in [0,\ \sqrt{9-z^2}] \\ z \in [0,\ y] \\ y \in [0,\ 3] \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \quad V = \int_0^3 \int_y^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} dxdzdy + \int_0^3 \int_0^y \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dxdzdy$$

(ii) z como variável independente: $\left\{\begin{array}{c} x \in [0,\ \sqrt{9-y^2}] \\ y \in [0,\ z] \\ z \in [0,\ 3] \end{array}\right. \bigcup \left\{\begin{array}{c} x \in [0,\ \sqrt{9-z^2}] \\ y \in [z,\ 3] \\ z \in [0,\ 3] \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \quad V = \int_0^3 \int_0^z \int_0^{\sqrt{9-y^2}} dxdydz + \int_0^3 \int_z^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dxdydz$$

Exemplo 4.3.4 *Encontre o volume do sólido delimitado pelas superfícies* $z = 9-x^2$, $z = 5-y$, $y = 0$ *e* $y = 5$.

Solução: Iniciamos com a construção do sólido de acordo com a Figura 4.5.

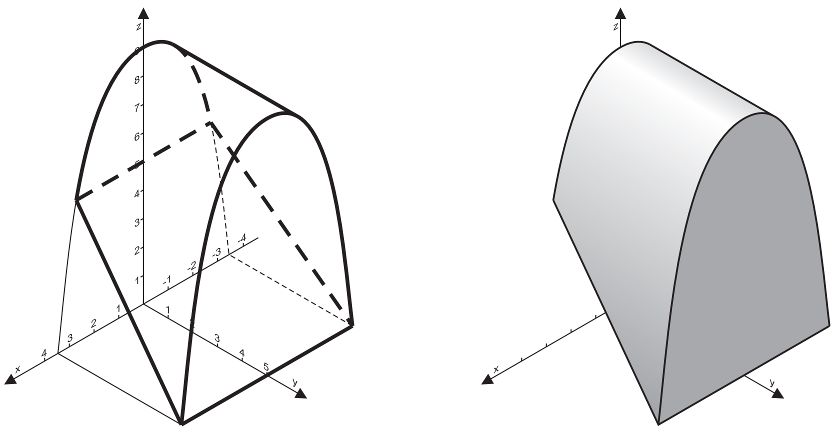


Figura 4.5: Sólido do Exemplo 4.3.4.

O próximo passo é determinar as curvas que limitam a região de integração sobre o plano xy. Para isso resolvemos o sistema de equações $\left\{\begin{array}{l} z = 9 - x^2 \\ z = 5 - y \end{array}\right.$ Igualando as duas equações obtemos a parábola $y = x^2 - 4$. Desse modo, no plano xy, a região de integração é delimitada pelas curvas $y = x^2 - 4$, $y = 0$ e $y = 5$ (Figura 4.6).

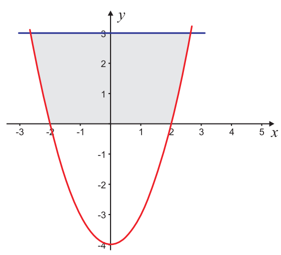


Figura 4.6: Projeção no plano xy.

Para diminuir o trabalho no processo de integração é conveniente tomar y como variável independente. Desse modo a tabela de limitantes é dada por

Limitantes	Equações
Curva inferior	$y = 0$
Curva superior	$y = 5$
Curva à esquerda	$x = -\sqrt{y+4}$
Curva à direita	$x = \sqrt{y+4}$
Superfície inferior	$z = 5 - y$
Superfície superior	$z = 9 - x^2$

Assim, o volume desejado é dado por

$$V = \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} \int_{5-y}^{9-x^2} dzdxdy = \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} z\Big|_{5-y}^{9-x^2} dxdy = \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} \left(4 - x^2 + y\right) dxdy,$$

como o sólido é simétrico em relação ao eixo y, podemos escrever

$$\begin{aligned}
V &= 2\int_0^5 \int_0^{\sqrt{y+4}} \left(4 - x^2 + y\right) dxdy = 2\int_0^5 \left(4x - \frac{x^3}{3} + yx\right)\Bigg|_0^{\sqrt{y+4}} dy \\
&= 2\int_0^5 \left(4\sqrt{y+4} - \frac{\sqrt{(y+4)^3}}{3} + y\sqrt{y+4}\right) dy = 2\int_0^5 \left(\frac{8}{3}\sqrt{y+4} + \frac{2}{3}y\sqrt{y+4}\right) dy \\
&= \frac{32}{9}\sqrt{(y+4)^3} + \frac{8}{15}\sqrt{(y+4)^5} - \frac{32}{9}\sqrt{(y+4)^3}\Bigg|_0^5 \\
&= \frac{8}{15}\sqrt{(y+4)^5}\Bigg|_0^5 = \frac{8}{15}(\sqrt{9^5} - \sqrt{4^5}) = \frac{8}{15}(3^5 - 2^5) = \frac{8}{15}(243 - 32) = \frac{1688}{15} \text{ u.v.}
\end{aligned}$$

Exemplo 4.3.5 *Calcule o valor numérico de* $I = \iiint\limits_S x \, dV$, *sendo* S *o sólido do Exemplo 4.3.4.*

Solução: Na resolução do exemplo acima temos a tabela de limitantes então basta escrevermos as integrais iteradas.

$$I = \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} \int_{5-y}^{9-x^2} xdzdxdy = \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} (9x - x^3 - 5x + xy)dxdy = \int_0^5 0dy = 0.$$

Observe que o resultado é zero, o que não faria sentido se estivéssemos calculando a massa do sólido, porém observe que a função de integração $f(x, y, z) = x$ assume valores negativos no domínio de integração (o sólido S), portanto ela não pode representar a densidade deste sólido. Então, neste caso apenas resolvemos uma integral tripla de uma função sobre um domínio. Além disso, observe que

$$I = \int_0^5 \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} \int_{5-y}^{9-x^2} xdzdxdy \neq 2\int_0^5 \int_0^{\sqrt{y+4}} \int_{5-y}^{9-x^2} xdzdxdy,$$

(a primeira dá zero e a segunda é diferente de zero), neste caso não podemos usar simetria, pois apesar do domínio de integração, o sólido S, ser simétrico em relação ao eixo y a função no integrando não é simétrica. Portanto, **cuidado com o uso de simetrias**.

Exemplo 4.3.6 *Faça a tabela de limitantes e escreva a integral que permite calcular a massa do sólido delimitado pelas superfícies* $x^2 + y - 16 = 0$, $x + y - 4 = 0$, $y = 2x + 13$, $z = 0$ *e* $z = 10$, *sendo a densidade dada por* $d(x, y, z) = x^2yz$.

Solução: O sólido desejado situa-se entre os planos $z = 0$ e $z = 10$. A base do sólido, que está situada no plano xy, está representada na Figura 4.7.

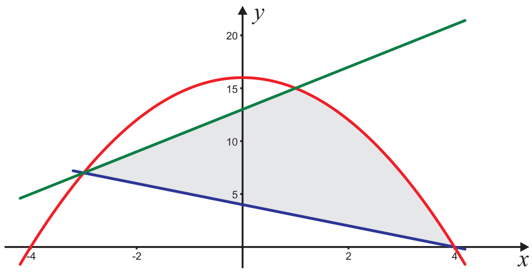


Figura 4.7: Projeção no plano xy.

Como ocorre troca na limitação superior, devemos dividir esta região em duas sub-regiões, R_1 e R_2. Assim, procedendo, obtemos a tabela

Limitantes	R_1	R_2
Curva à esquerda	$x = -3$	$x = 1$
Curva à direita	$x = 1$	$x = 4$
Curva inferior	$y = 4 - x$	$y = 4 - x$
Curva superior	$y = 2x + 13$	$y = 16 - x^2$
Superfície inferior	$z = 0$	$z = 0$
Superfície superior	$z = 10$	$z = 10$

Logo, a massa desejada é dada por

$$M = \int_{-3}^{1} \int_{4-x}^{2x+13} \int_{0}^{10} x^2yz \; dzdydx \; + \int_{1}^{4} \int_{4-x}^{16-x^2} \int_{0}^{10} x^2yz \; dzdydx.$$

Exemplo 4.3.7 *Reescreva a expressão*

$$I = \int_0^4 \int_0^{3-\frac{3}{4}\sqrt{16-y^2}} \int_0^{\frac{\sqrt{16-y^2}}{2}} dzdxdy + \int_0^4 \int_{3-\frac{3}{4}\sqrt{16-y^2}}^{3} \int_0^{\frac{6-2x}{3}} dzdxdy$$

como uma única integral tripla em coordenadas cartesianas de 4 formas distintas.

Solução: Projetando no plano xy há uma troca de limitantes, conforme a expressão dada por I. Interpretando a integral dada temos no plano xy a seguinte região representada na Figura 4.8, sendo $R1$ a região do plano xy da primeira integral e $R2$ a região do plano xy da segunda integral.

A limitação espacial é dada pelas superfícies $z = \dfrac{\sqrt{16 - y^2}}{2}$ que é um ramo de um cilindro elíptico que se prolonga no eixo x e $z = \dfrac{6 - 2x}{3}$ que é um plano paralelo ao eixo y, assim I representa o volume do sólido representado na Figura 4.9

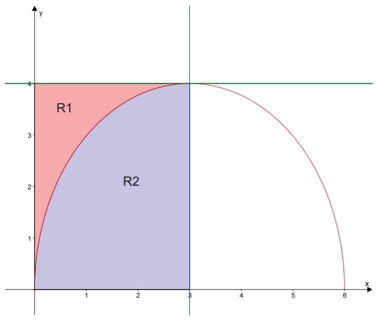


Figura 4.8: Projeção no plano xy.

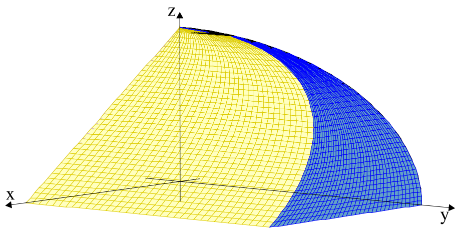


Figura 4.9: Sólido cujo volume é dado por I.

Projetando no plano xz, temos a região representada na Figura 4.10.

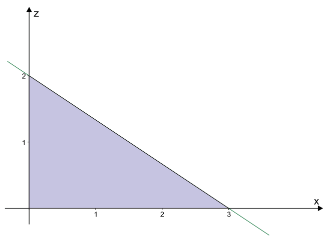


Figura 4.10: Projeção no plano xz.

Assim, a montagem das integrais é dada por

$$(1)\begin{cases} 0 & \leq y \leq \quad \sqrt{16-4z^2} \\ 0 & \leq x \leq \quad \frac{6-3z}{2} \\ 0 & \leq z \leq \quad 2 \end{cases} \Rightarrow \quad I = \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3z}{2}} \int_0^{\sqrt{16-4z^2}} dydxdz$$

$$(2)\begin{cases} 0 & \leq y \leq \quad \sqrt{16-4z^2} \\ 0 & \leq z \leq \quad \frac{6-2x}{3} \\ 0 & \leq x \leq \quad 3 \end{cases} \Rightarrow \quad I = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} \int_0^{\sqrt{16-4z^2}} dydzdx$$

Projetando no plano yz, temos a região representada na Figura 4.11.

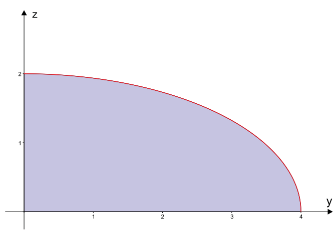


Figura 4.11: Projeção no plano yz.

Assim, a montagem das integrais é dada por

$$(3)\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{6-3z}{2} \\ 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{16-y^2}}{2} \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^4 \int_0^{\frac{\sqrt{16-y^2}}{2}} \int_0^{\frac{6-3z}{2}} dxdzdy$$

$$(4)\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{6-3z}{2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{16-4z^2} \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-4z^2}} \int_0^{\frac{6-3z}{2}} dxdydz$$

4.4 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Em alguns exemplos uma integral tripla pode ser resolvida de uma forma mais simples convertendo-a para coordenadas cilíndricas. Vejamos este processo de conversão.

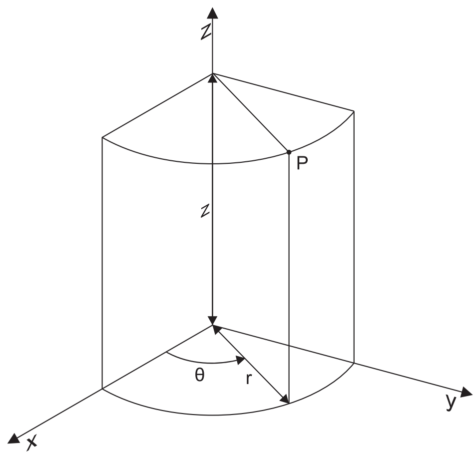


Figura 4.12: Coordenadas Cilíndricas

Sejam θ_0 e θ_1 dois arcos tais que $0 < \theta_1 - \theta_0 \leq 2\pi$ e suponhamos que os raios r_1 e r_2 são funções contínuas de θ tais que $0 \leq r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$ seja válido para todo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Sejam $f(r,\theta)$ e $g(r,\theta)$ funções contínuas tais que $f(r,\theta) \leq g(r,\theta)$ seja verdadeiro para todo $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ e todo $r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$. Seja S o sólido constituído por todos os pontos cujas coordenadas cilíndricas satisfaçam as condições $\theta_0 \leq \theta_1$, $r_1(\theta) \leq r_2(\theta)$ e $f(r,\theta) \leq g(r,\theta)$. Então temos a tabela de limitantes

Tabela de limitantes

Curvas	Equações
Arco inferior	$\theta = \theta_1$
Arco superior	$\theta = \theta_2$
Raio interno	$r = r_1(\theta)$
Raio externo	$r = r_2(\theta)$
Superfície inferior	$z = f(r,\theta)$
Superfície superior	$z = g(r,\theta)$.

Uma integral tripla, que em coordenadas cartesianas se escreve como

$$I = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} f(x,y,z)\, dzdydx$$

é transformada, em coordenadas cilíndricas, para

$$I = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{f(r,\theta)}^{g(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, rdzdrd\theta.$$

Exemplo 4.4.1 *Determinar o volume do sólido delimitado superiormente pelo parabolóide* $y^2+x^2+1-z=0$, *inferiormente pelo plano* $z=0$ *e lateralmente pelo cilindro* $x^2+y^2-2y=0$.

Solução: Geometricamente, temos o seguinte sólido representado na Figura 4.13.

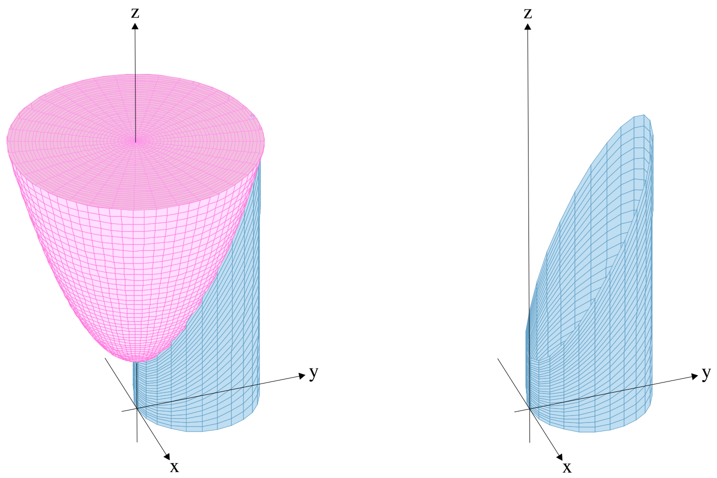


Figura 4.13: Sólido do Exemplo 4.4.1.

A projeção no plano xy é a circunferência $x^2+y^2-2y=0$ que, após completar quadrados, se torna $x^2+(y-1)^2=1$ (Figura 4.14).

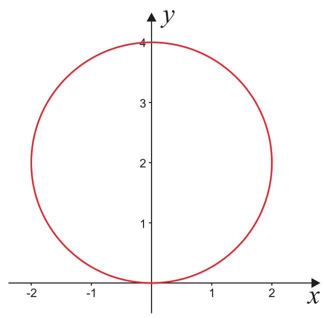


Figura 4.14: Projeção no plano xy.

O sólido está delimitado inferiormente pelo plano $z=0$ e superiormente pelo parabolóide $z=y^2+x^2+1$. Fazendo as tabelas, podemos observar que é muito mais fácil resolver esse problema usando coordenadas cilíndricas.

Limitantes em coord. retangulares

Curvas	Equações
Curva à esquerda	$x=-1$
Curva à direita	$x=1$
Curva inferior	$y=1-\sqrt{1-x^2}$
Curva superior	$y=1+\sqrt{1-x^2}$
Superfície inferior	$z=0$
Superfície superior	$z=y^2+x^2+1$

Limitantes em coord. cilíndricas

Curvas	Equações
Arco inferior	$\theta_1=0$
Arco superior	$\theta_2=\pi$
Raio interno	$r_1=0$
Raio externo	$r_2=2\sin\theta$
Superfície inferior	$z=0$
Superfície superior	$z=r^2+1$

Em coordenadas cilíndricas, o volume é dado por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{1+r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r(1+r^2)drd\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} (r+r^3)drd\theta = \int_0^{\pi} \frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\sin\theta} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} (2\sin^2\theta + 4\sin^4\theta)d\theta = \int_0^{\pi} 2\sin^2\theta(1+2\sin^2\theta)d\theta \\
&= \int_0^{\pi} 2\sin^2\theta(1+2\sin^2\theta)d\theta = \int_0^{\pi}(1-\cos(2\theta))(2-\cos(2\theta))d\theta \\
&= \int_0^{\pi}(2-3\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta))d\theta \\
&= 2\theta - \frac{3}{2}\sin(2\theta)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1+\cos(4\theta)}{2}d\theta = 2\pi + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8}\sin(4\theta)\Big|_0^{\pi} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}\ u.v.
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.4.2 *Represente graficamente o sólido cujo volume é dado pela integral*

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2\cos^2\theta} rdzdrd\theta.$$

Solução: A partir dos limitantes da integral podemos construir a tabela

Limitantes em coordenadas cilíndricas

Curvas	Equações
Arco inferior	$\theta_1 = 0$
Arco superior	$\theta_2 = 2\pi$
Raio interno	$r_1 = 0$
Raio externo	$r_2 = 2$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 4 - r^2\cos^2\theta$

Considerando os arcos inferior e superior, concluímos que a base do sólido está projetada sobre todos os quadrantes, pois temos $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como $0 \leq r \leq 2$, temos que o raio cilíndrico varia desde a origem do plano xy até a circunferência de raio 2. Portanto, lateralmente temos um cilindro centrado na origem, de equação $x^2+y^2=4$. Inferiormente temos o plano $z=0$ e superiormente temos o cilindro parabólico $z = 4-x^2$ (observe que $r^2\cos^2\theta = x^2$). Assim, encontramos o sólido ilustrado na Figura 4.15.

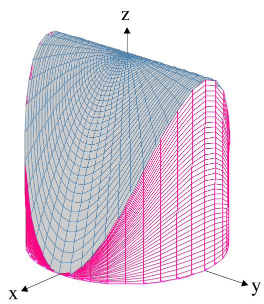


Figura 4.15: Sólido do Exemplo 4.4.2.

Exemplo 4.4.3 *Escreva em coordenadas retangulares a integral*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{9-r^2} r^2 dz dr d\theta.$$

Solução: Inicialmente, devemos interpretar geometricamente o sólido de integração. Vamos construir a tabela de limitantes.

Limitantes em coordenadas cilíndricas

Curvas	Equações
Arco inferior	$\theta_1 = 0$
Arco superior	$\theta_2 = \frac{\pi}{2}$
Raio interno	$r_1 = 0$
Raio externo	$r_2 = 2\cos\theta$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 9 - r^2$

Considerando os arcos inferior e superior concluímos que a base do sólido está projetada sobre o primeiro quadrante do plano xy, pois temos $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Agora vamos escrever a curva $r = 2\cos\theta$ em coordenadas retangulares. Sabemos que $x = r\cos\theta$, de modo que $\cos\theta = \frac{x}{r}$, e que $r^2 = x^2 + y^2$. Assim,

$$\begin{aligned} & r = 2\cos\theta = \frac{2x}{r} \quad \Rightarrow \quad r^2 = 2x \quad \Rightarrow \\ & x^2 + y^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Vemos que em coordenadas retangulares, a projeção do sólido sobre o plano xy é delimitada pela circunferência de equação $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Desse modo, a tabela de limitantes, em coordenadas retangulares, é dada por:

Limitantes em coordenadas retangulares

Curvas	Equações
Curva à esquerda	$x = 0$
Curva à direita	$x = 2$
Curva inferior	$y = 0$
Curva superior	$y = \sqrt{2x - x^2}$
Superfície inferior	$z = 0$
Superfície superior	$z = 9 - (x^2 + y^2)$

Também devemos escrever de forma adequada a expressão $r^2 dz dr d\theta$. Como $dxdydz = r dz dr d\theta$ temos que

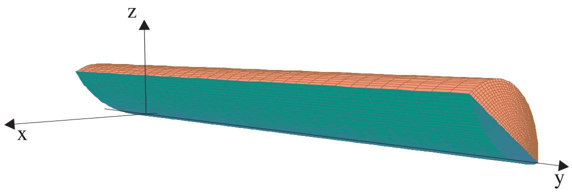
$$r^2 dz dr d\theta = r\,(r dz dr d\theta) = \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

Assim, a integral dada será escrita em coordenadas cartesianas por

$$I = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2 + y^2} dz dy dx.$$

Exemplo 4.4.4 *Construa e calcule o volume do menor sólido delimitado simultaneamente por* $y=0$, $y=4$, $x^2+z^2=x$ *e* $x^2+z^2=\sqrt{3}z$.

Solução: Esboço do sólido:



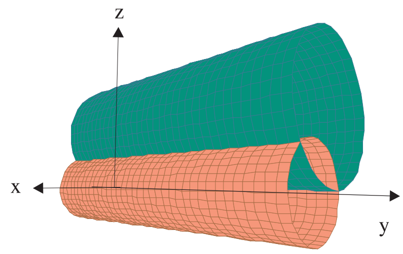


Figura 4.16: Sólido Exemplo 4.4.4

Projeção no plano xz :

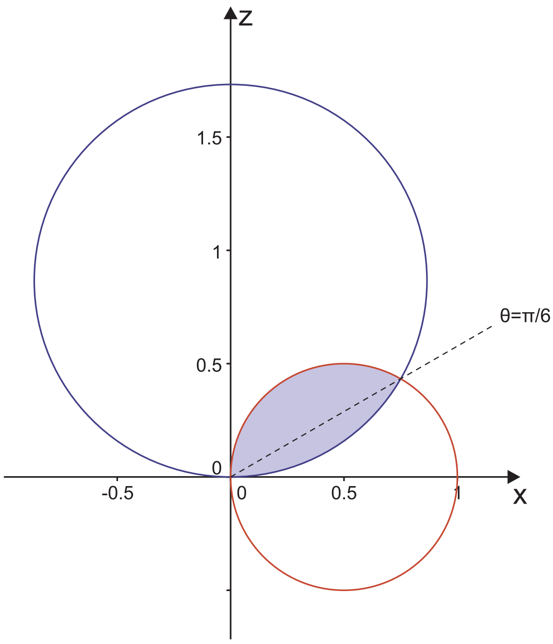


Figura 4.17: Projeção do no plano xz

Sendo a projeção uma região entre circunferências usaremos o sistema o sistema de coordenadas cilíndricas em relação ao plano xz para resolver a integral. Assim temos:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & r\cos\theta \\ z & = & r\sin\theta \\ y & = & y \\ x^2+z^2 & = & r^2 \\ tg\theta & = & \frac{z}{x} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x^2+z^2 & = & x \\ x^2+z^2 & = & \sqrt{3}z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccc} r & = & \cos\theta \\ r & = & \sqrt{3}\sin\theta \end{array}\right.$$

Interseção das circunferências é a solução do sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccc} r & = & \cos\theta \\ r & = & \sqrt{3}\sin\theta \end{array}\right. \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Montagem e resolução da integral em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\sqrt{3}\sin\theta}\int_0^4 r dy dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\int_0^4 r dy dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 6\sin^2\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\theta d\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos(2\theta))d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2\theta))d\theta \\ &= 3\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

4.5 Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Na seção anterior vimos que usar coordenadas cilíndricas pode facilitar muito o trabalho usando coordenadas cilíndricas, agora queremos explorar o sistema de coordenadas esféricas e em alguns casos é o mais recomendado.

Lembrando que o ponto $P(x, y, z)$, em coordenadas esféricas é dado por $P(\rho, \theta, \phi)$, onde $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$, $z = \rho\cos\phi$, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\tan\phi = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$ e $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

Sejam θ_0, θ_1, ϕ_0, ϕ_1, ρ_0 e ρ_1 tais que $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \phi_0 < \phi_1 \leq \pi$ e $0 \leq \rho_0 < \rho_1$.

Suponhamos que o sólido S seja constituído por todos os pontos cujas coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) são tais que

$$\rho_0 \leq \rho \leq \rho_1 \qquad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1 \qquad \phi_0 \leq \phi \leq \phi_1.$$

Seja $f(x, y, z)$ uma função definida em todos os pontos do sólido S e cada ponto $P(x, y, z)$ pode ser escrito em coordenadas esféricas $f(\rho, \theta, \phi)$. Então podemos escrever

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z)\, dV(x, y, z) = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho, \theta, \phi)\, dV(\rho, \phi, \theta),$$

onde $dV(x, y, z) = dxdydz$ e $dV(\rho, \phi, \theta)$ é o elemento de volume de coordenadas esféricas que precisamos determinar. Para determinar $dV(\rho, \phi, \theta)$ considere acréscimos $d\phi, d\rho$ e $d\theta$ atribuídos a cada variável, assim obtemos os pontos

$$\begin{gathered} P(\rho, \theta, \phi) \\ Q(\rho, \theta, \phi + d\phi) \\ R(\rho, \theta + d\theta, \phi) \\ T(\rho + d\rho, \theta + d\theta, \phi). \end{gathered}$$

Na Figura 4.18 podemos observar um paralelepípedo infinitesimal curvilíneo com dimensões $|\overline{PT}|$, $|\overline{QR}|$ e $|\overline{PQ}|$, cujo volume aproximado é

$$dV = |\overline{PT}|\,|\overline{QR}|\,|\overline{PQ}|.$$

Este paralelepípedo curvilíneo é o elemento de volume de coordenadas esféricas.

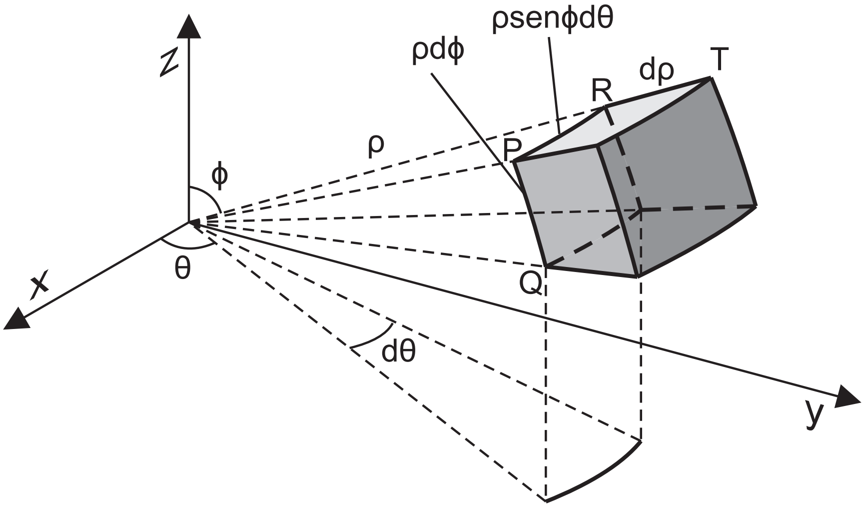


Figura 4.18: Coordenadas Esféricas

É fácil ver que $\left|\overline{PT}\right|$ é a variação do raio ρ entre os pontos P e T e, portanto, $\left|\overline{PT}\right| = d\rho$.

Como P e Q pertencem ao círculo de raio $\left|\overline{OP}\right| = \left|\overline{OQ}\right| = \rho$ e o arco $\widehat{PQ}$ subentende um ângulo correspondente a variação de ϕ, segue que

$$\left|\overline{PQ}\right| \cong \rho d\phi.$$

Como Q e R pertencem ao círculo de raio $\left|\overline{OU}\right|$ em que $\left|\overline{OU}\right|$ é lado oposto do triângulo $O\widehat{Q}U$ e $\widehat{Q} = \phi$ obtemos

$$\left|\overline{OU}\right| = \left|\overline{OQ}\right| \sin\phi = \rho \sin\phi$$

e, desse modo, obtemos

$$\left|\overline{QR}\right| \cong \rho \sin\phi d\theta.$$

Portanto,

$$dV = \left|\overline{PT}\right| \left|\overline{QR}\right| \left|\overline{PQ}\right| = d\rho\left(\rho d\phi\right)\left(\rho \sin\phi d\theta\right) = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$$

Lembrando que em coordenadas retangulares temos $dV = dxdydz$, a equivalência entre os diferenciais em coordenadas cartesianas e esféricas é

$$dxdydz = \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$$

Portanto,

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_{z_0}^{z_1} f\left(x,y,z\right) dzdydx = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f\left(\rho,\theta,\phi\right)\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$$

Exemplo 4.5.1 *Mostre, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.*

Solução: Vamos utilizar uma esfera centrada na origem, de equação $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Sua projeção no plano xy é a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$ e portanto temos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi$. Assim, o volume da esfera é calculado por

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Exemplo 4.5.2 *Escreva, em coordenadas retangulares e em coordenadas esféricas a(s) integral(is) que permite(m) calcular o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z^2 = x^2+y^2$, $z^2 = 3x^2+3y^2$ e $x^2+y^2+z^2 = 4$ nos pontos em que z é positivo. A seguir, utilize uma das expressões obtidas para calcular o volume deste sólido.*

Solução: Primeiro vamos interpretar cada superfície. Na Figura 4.19 a equação $z^2 = x^2+y^2$ representa o cone inferior, a equação $z^2 = 3x^2+3y^2$ representa o cone superior e a equação $x^2+y^2+z^2 = 4$ representa a esfera. O problema pede para determinar o volume do sólido situado no interior da esfera e entre os dois cones.

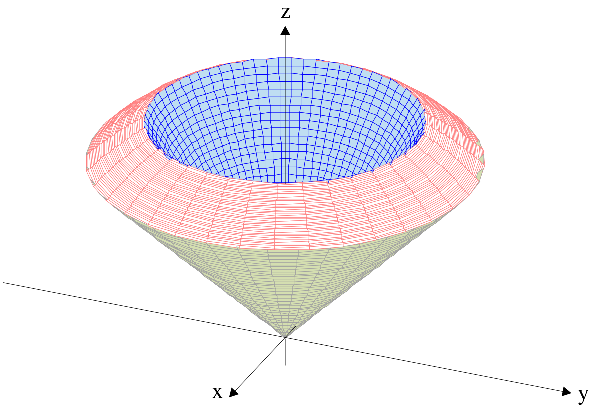


Figura 4.19: Sólido do Exemplo 4.5.2.

Vamos determinar as curvas de interseção e as projeções sobre o plano xy. Resolvendo os sistemas de equações

$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z^2 = 3x^2+3y^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 4 \end{cases},$$

em ambos os casos substituindo z^2 da primeira equação na segunda equação, obtemos

$$\begin{array}{ccc} x^2+y^2+x^2+y^2 = 4 & \text{e} & x^2+y^2+3x^2+3y^2 = 4 \\ 2x^2+2y^2 = 4 & & 4x^2+4y^2 = 4 \\ x^2+y^2 = 2 & & x^2+y^2 = 1. \end{array}$$

O volume do sólido será dado pela diferença entre o volume do sólido delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e o cone $z^2 = x^2+y^2$ e o volume do sólido delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ e o cone $z^2 = 3x^2+3y^2$. As tabelas de limitantes são:

Limitantes	Sólido 1	Sólido 2
Curva a esquerda	$x = -\sqrt{2}$	$x = -1$
Curva a direita	$x = \sqrt{2}$	$x = 1$
Curva a inferior	$y = -\sqrt{2-x^2}$	$y = -\sqrt{1-x^2}$
Curva a superior	$y = \sqrt{2-x^2}$	$y = \sqrt{1-x^2}$
Superfície inferior	$z = \sqrt{x^2+y^2}$	$z = \sqrt{3x^2+3y^2}$
Superfície superior	$z = \sqrt{4-x^2-y^2}$	$z = \sqrt{4-x^2-y^2}$

Portanto, o volume será dado por

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx - \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$$

Como podemos perceber, a resolução desta integral é trabalhosa. Vamos escrevê-la em coordenadas esféricas.

A variação do raio esférico vai da origem até a esfera de raio 2, isto é, $\rho = 2$. Como as projeções no plano xy são circunferências com centro na origem temos que o arco θ varia de zero a 2π. O ângulo ϕ varia entre os dois cones. O cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ equivale a $\phi = \frac{\pi}{4}$. Já o cone de equação $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ equivale ao ângulo $\phi = \frac{\pi}{6}$. Portanto, a tabela de limitantes do sólido em coordenadas esféricas é dada por

Limitantes em coordenadas esféricas

Curvas	Equações
Arco θ inferior	$\theta_1 = 0$
Arco θ superior	$\theta_2 = 2\pi$
Arco ϕ inferior	$\phi_1 = \frac{\pi}{6}$
Arco ϕ superior	$\phi_2 = \frac{\pi}{4}$
Superfície inferior	$\rho_1 = 0$
Superfície superior	$\rho_2 = 2$

Assim, o volume será dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^2 \sin\phi d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3}\sin\phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \left.\frac{-8}{3}\cos\phi\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-8}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) d\theta = \left.\frac{4}{3}(-\sqrt{2}+\sqrt{3})\theta\right|_0^{2\pi} = \frac{8\pi}{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \text{ u.v.} \end{aligned}$$

Exemplo 4.5.3 *Considere a expressão* $I = 2\int_0^{2\pi}\int_{arctg(\frac{3}{4})}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{3}{sen\phi}}^{5} d\rho d\phi d\theta$ *dada em coordenadas esféricas.*

1. *Descreva e represente graficamente o domínio de integração de I.*

2. *Reescreva I usando coordenadas cilíndricas.*

Solução: (a) Identificação do domínio de integração (o sólido S): como a expressão I está multiplicada por "2"existe simetria.

Limitantes em coordenadas esféricas: $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ arctg(\frac{3}{4}) \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{sen\phi} \leq \rho \leq 5 \end{cases}$

Convertendo para coordenadas cartesianas, temos:

$$\begin{cases} \rho = 5 & \Rightarrow & x^2+y^2+z^2 = 25 & \Rightarrow & \text{esfera} \\ \rho = \frac{3}{sen\phi} & \Rightarrow & x^2+y^2 = 9 & \Rightarrow & \text{cilindro} \\ \phi = arctg\left(\frac{3}{4}\right) & \Rightarrow & z = \frac{4}{3}\sqrt{x^2+y^2} & \Rightarrow & \text{semi-cone} \end{cases}$$

Observando que o cone só dá a variação do ângulo ϕ que começa no cone e vai até o plano xy. Na Figura 4.20 temos representado o cilindro e a esfera descritos acima, pela limitação do raio esférico e pela simetria temos que o sólido S é interior à esfera $x^2 + y^2 + z^4 = 25$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

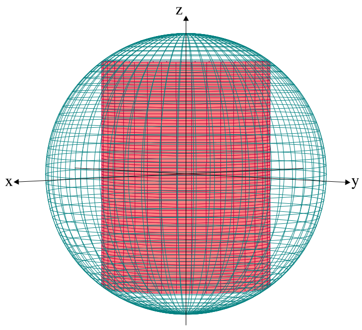


Figura 4.20: Sólido S.

(b) Para escrever I em coordenadas cilíndricas devemos descrever o sólido S com limitações cilíndricas, identificar a função de integração e converter-lá para coordenadas cilíndricas.

A projeção no plano xy está representada na Figura 4.21

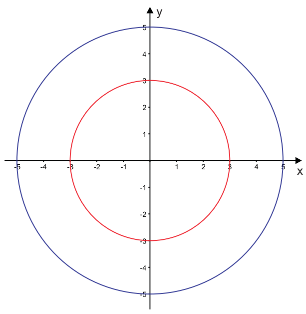


Figura 4.21: Projeção do sólido S no plano xy.

Limitantes de S usando simetria: $\begin{cases} 0 & \leq \theta \leq & 2\pi \\ 3 & \leq \rho \leq & 5 \\ 0 & \leq z \leq & \sqrt{25-\rho^2} \end{cases}$

Função de integração em coordenadas esféricas: $f(\rho, \theta, \phi) = \dfrac{1}{\rho^2 sen\phi}$

Função de integração em coordenadas cartesianas: $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}$

Função de integração em coordenadas cilíndricas: $f(\rho, \theta, z) = \dfrac{1}{\rho\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

Logo, $I = 2\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_3^5\int_0^{\sqrt{25-r^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}\, dz d\rho d\theta.$

Exemplo 4.5.4 *Escreva, nos sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, as expressões que permitem calcular o volume do sólido delimitado simultaneamente pelas superfícies* $x^2 + y^2 = 2y$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e* $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

Resolução: O cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ delimitada lateralmente o sólido desejado, enquanto o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ delimita-o inferiormente e o cone $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ superiormente. Veja o esboço do sólido na Figura 4.22.

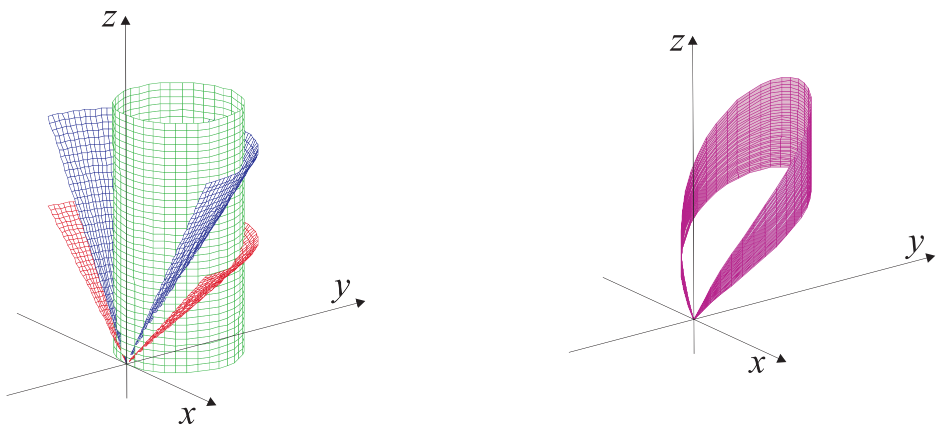


Figura 4.22: Sólido do Exemplo 4.5.4.

Para obter a integral em coordenadas cartesianas, basta observar que a altura do sólido varia entre os dois cones, isto é, $z \in [\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{3x^2+3y^2}]$, e a projeção do sólido no plano xy é dada pela Figura 4.23.

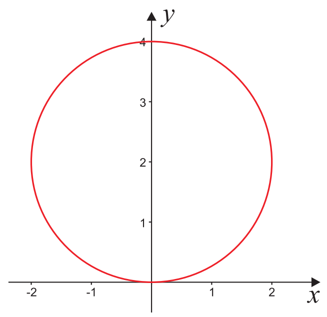


Figura 4.23: Projeção no plano xy.

Assim, tomando y como variável independente, temos que $y \in [0,2]$ e que $x \in [-\sqrt{2y-y^2}, \sqrt{2y-y^2}]$. Encontramos então a seguinte integral em coordenadas cartesianas

$$V = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{3x^2+3y^2}} dzdxdy.$$

Agora, reescrevendo as equações dos cones em coordenadas cilíndricas, obtemos que $z \in [r, \sqrt{3}r]$. Como a projeção no plano xy ocorre apenas no primeiro e segundo quadrantes, temos que $\theta \in [0, \pi]$, enquanto o raio cilíndrico varia da origem $(r = 0)$ até a circunferência $x^2 + y^2 = 2y$, que em cilíndricas se escreve como $r^2 = 2r\sin\theta$, ou seja, $r = 2\sin\theta$. Assim, encontramos a seguinte integral em coordenadas cilíndricas

$$V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} \int_r^{\sqrt{3}r} r dzdrd\theta.$$

Em coordenadas esféricas, temos que $\theta \in [0, \pi]$ e que o ângulo vertical varia entre os cones. Transformando para esféricas, obtemos

$$\begin{array}{r} z = \sqrt{3x^2+3y^2} \ \Rightarrow \ \rho\cos\phi = \sqrt{3}\rho\sin\phi \ \Rightarrow \ \tan\phi = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \Rightarrow \ \phi = \frac{\pi}{6} \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \ \Rightarrow \ \rho\cos\phi = \rho\sin\phi \ \Rightarrow \ \tan\phi = 1 \ \Rightarrow \ \phi = \frac{\pi}{4} \end{array}$$

portanto, encontramos que $\phi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$. Resta então obter a limitação para o raio esférico, que varia desde a origem ($\rho = 0$) até o cilindro circular, que devemos transformar para esféricas, como segue:

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow \rho^2 \sin^2\phi = 2\rho \sin\phi \sin\theta \Rightarrow \rho \sin\phi = 2\sin\theta \ \Rightarrow \rho = \frac{2\sin\theta}{\sin\phi}.$$

Então, temos que $\rho \in [0, \frac{2\sin\theta}{\sin\phi}]$ e o volume, em coordenadas esféricas, é calculado pelo integral

$$V = \int_0^{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2\sin\theta}{\sin\phi}} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$$

Note que, se desejássemos obter o valor numérico deste volume, devemos optar por resolver a integral escrita em coordenadas cilíndricas, devido a sua simplicidade em comparação às demais integrais.

4.6 Exercícios Gerais

1. Determinar o volume do sólido interior as superfícies $b^2(x^2+y^2)+a^2z^2 = a^2b^2$ e $x^2+y^2 = ax$.

2. Determinar o volume do sólido interior as superfícies $x^2+y^2+z^2 = 8$ e $x^2+y^2 = 2z$.

3. Calcular $I = \iiint\limits_T (x-1)dV$, sendo T a região do espaço delimitada pelos planos $y=0$, $z=0$, $y+z=5$ e pelo cilindro parabólico $z = 4-x^2$.

4. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $z=0$, $z^2 = x^2+y^2$ e $x^2+y^2 = 2ax$.

5. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$, $x=0$, $y=0$ e $z=0$.

6. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $x^2+y^2+2y = 0$, $z=0$ e $z = 4+y$.

7. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $x^2+y^2 = a^2$ e $x^2+z^2 = a^2$.

8. Determinar o volume do sólido delimitado pelas superfícies $r = 4\cos\theta$, $z=0$ e $r^2 = 16-z^2$.

9. Nos itens abaixo escreva em coordenadas retangulares as integrais dadas em coordenadas esféricas.

   (a) $I = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 \sqrt{9-\rho^2}\sin\phi d\rho d\phi d\theta.$

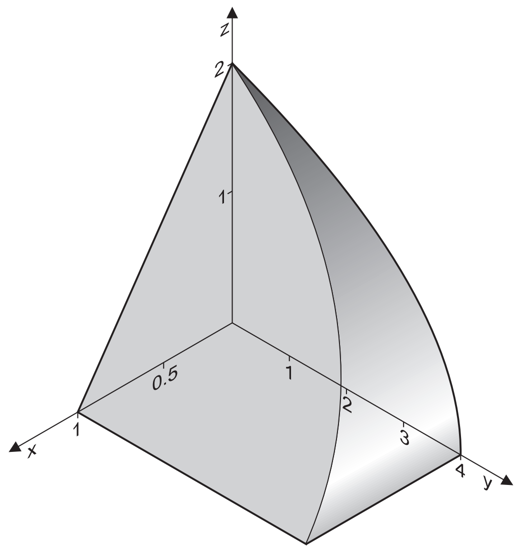
   (b) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^4 \sqrt{4-\rho^2}\rho\sin\phi d\rho d\phi d\theta.$

10. Considere o sólido delimitado inferiormente por $y+2z=6$, superiormente por $z=6$ e lateralmente pelo cilindro que contorna a região delimitada por $y=x^2$ e $y=4$. Calcule a massa deste sólido, sabendo que sua densidade é dada por $f(x,y,z) = 2y+z$.

11. Determine a massa do sólido delimitado no primeiro octante simultaneamente pelas superfícies $x^2+z^2 = 4$, $x+y=2$ e $x+2y=6$, sabendo que $f(x,y,z) = 12z$ é a sua função densidade.

12. A figura abaixo mostra o sólido cujo volume pode ser calculado pela expressão

$$V = \int_0^1\int_0^{2-2x}\int_0^{4-z^2} dydzdx.$$



Reescreva esta expressão como uma integral tripla equivalente, usando coordenadas cartesianas de cinco formas distintas.

13. Represente geometricamente o sólido cujo volume pode ser calculado pela expressão

$$V = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-z}} \int_0^{8-2z} dydxdz.$$

A seguir, reescreva esta expressão, como uma integral tripla equivalente, usando coordenadas cartesianas de cinco formas distintas.

14. Seja S o sólido delimitado pelas superfícies $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$ e $z = x^2 + y^2$. Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que a massa de S seja igual a $\pi\left(\sqrt{82} - 1\right)$, sabendo que a densidade em cada ponto de S é dada por $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (x^2 + y^2)^2}}$.

15. Represente geometricamente o sólido cuja massa é descrita, em coordenadas cilíndricas, pela expressão $M = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{4-r^2} \sqrt{4 + r^2 - z}\, dzdrd\theta$. A seguir, reescreva esta expressão utilizando um outro sistema de coordenadas.

16. Represente geometricamente o sólido cujo volume pode ser calculado pela expressão

$$V = \int_0^2 \int_0^{2+x^2} \int_0^{4-x^2} dzdydx + \int_0^2 \int_{2+x^2}^{6} \int_0^{6-y} dzdydx$$

e a seguir reescreva esta expressão utilizando uma única integral tripla em coordenadas cartesianas.

17. Reescreva a expressão

$$I = \int_{-1}^0 \int_0^{x+1} \int_0^{8-x^2-y^2} ydzdydx + \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{8-x^2-y^2} ydzdydx$$

como uma única integral tripla, em coordenadas cartesianas.

18. Reescreva a expressão

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{x^2+4} \int_{0}^{1-x^2} dzdydx + \int_{-1}^{1} \int_{x^2+4}^{5} \int_{0}^{5-y} dzdydx$$

como uma única integral tripla em coordenadas cartesianas, de três formas distintas.

19. Represente geometricamente o sólido cujo volume pode ser calculado pela expressão

$$V = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta.$$

A seguir, reescreva esta expressão em coordenadas cilíndricas.

20. Utilize coordenadas esféricas para calcular a massa do sólido situado acima do cone $z^2 = x^2 + y^2$ e interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, sabendo que sua densidade de massa é dada por $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

21. Utilize coordenadas esféricas para resolver a seguinte integral tripla

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{1}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)^2} dzdydx.$$

22. Represente geometricamente o sólido cuja massa é calculada, em coordenadas esféricas, pela expressão

$$M = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{\cos\phi}}^{\sqrt{\frac{5}{\cos^2\phi + 2\sin^2\phi}}} \rho d\rho d\phi d\theta.$$

A seguir, reescreva esta expressão em coordenadas cilíndricas.

23. Represente geometricamente o sólido cuja massa pode ser calculada, em coordenadas cilíndricas, pela expressão

$$M = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\sqrt{3}} \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{10-3r^2}} (r+z) dzdrd\theta.$$

A seguir, reescreva esta expressão em coordenadas esféricas.

24. Escreva, em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas, a integral que permite calcular o volume do **menor** sólido delimitado simultaneamente pelas superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$.

25. Calcule o volume do sólido que está situado acima de $z = 0$ e que é simultaneamente interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e ao hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

26. Considere o sólido delimitado inferiormente por $z = 2x^2 + 2y^2$ e superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Escreva a integral que permite calcular o volume deste sólido em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

27. Considere o sólido delimitado inferiormente por $2z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente por $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$. Escreva a integral que permite calcular o volume deste sólido em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas.

28. Escreva, em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas, as integrais que permitem calcular a massa do sólido situado simultaneamente no interior das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e $z = 1 + \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$, sabendo que sua função densidade é $f(x, y, z) = \dfrac{(x^2 + y^2)z^2}{\cos(x^2 + y^2 + z^2)}$.

29. Escreva $I = \displaystyle\iiint_S f(x, y, z)dV$, em três sistemas de coordenadas distintas, sendo S sólido situado simultaneamente no interior de $x^2+y^2+z^2 = 2z$ e de $z = 2-\sqrt{x^2 + y^2}$ e $f(x, y, z) = \dfrac{e^{x^2+y^2+z^2}}{x + y + z}$.

30. O volume de um sólido S é dado pela expressão

$$V = \int_0^{\frac{2}{a}} \int_{-\sqrt{\frac{4}{a^2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{4}{a^2}-x^2}} \int_{a\sqrt{x^2+y^2}}^{6-a^2x^2-a^2y^2} dzdydx,$$

sendo a um número real positivo.

   (a) Escreva o volume do sólido usando coordenadas cilíndricas.

   (b) Determine o valor de a para que o volume do sólido S seja igual a $\frac{16\pi}{3}$.

4.7 Respostas

1. $V = \frac{2a^2b(3\pi-4)}{9}$

2. $V = \frac{4\pi(8\sqrt{2}-7)}{3}$

3. $I = -\frac{544}{15}$

4. $V = \frac{32a^3}{9}$

5. $V = \frac{abc}{6}$

6. $V = 3\pi$

7. $V = \frac{16a^3}{3}$

8. $V = \frac{3\pi}{2}$

9. (a) $I = \displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}{x^2+y^2+z^2} dzdydx$

   (b) $I = \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{12}}\int_{0}^{\sqrt{12-x^2}}\int_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dzdydx -$

   $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \frac{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dzdydx$

10. $M = 400$

11. $M = 44$

12. $V = \displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\frac{2-z}{2}}\int_{0}^{4-z^2} dydxdz$

    $V = \displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{4-y}}\int_{0}^{\frac{2-z}{2}} dxdzdy$

    $V = \displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-z^2}\int_{0}^{\frac{2-z}{2}} dxdydz$

    $V = \displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{-4x^2+8x}\int_{0}^{2-2x} dzdydx + \int_{0}^{1}\int_{-4x^2+8x}^{4}\int_{0}^{\sqrt{4-y}} dzdydx$

    $V = \displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{1-\frac{1}{2}\sqrt{4-y}}\int_{0}^{\sqrt{4-y}} dzdxdy + \int_{0}^{4}\int_{1-\frac{1}{2}\sqrt{4-y}}^{1}\int_{0}^{2-2x} dzdxdy$

13. $V = \displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{0}^{8-2z} dydzdx$

    $V = \displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{8-2z}\int_{0}^{\sqrt{4-z}} dxdydz$

    $V = \displaystyle\int_{0}^{8}\int_{0}^{\frac{8-y}{2}}\int_{0}^{\sqrt{4-z}} dxdzdy$

$$V=\int_0^2\int_0^{2x^2}\int_0^{4-x^2} dzdydx+\int_0^2\int_{2x^2}^{8}\int_0^{\dfrac{8-y}{2}} dzdydx$$

$$V=\int_0^8\int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}}\int_0^{\dfrac{8-y}{2}} dzdxdy+\int_0^8\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{2}\int_0^{4-x^2} dzdxdy$$

14. $a=3$

15. $M=\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2}\frac{\sqrt{4+x^2+y^2-z}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dzdydx$

16. $V=\displaystyle\int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^{6-z} dydzdx$

17. $I=\displaystyle\int_0^1\int_{y-1}^{1-y}\int_0^{8-x^2-y^2} ydzdxdy$

18. $I=\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{5-z} dydzdx=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}\int_0^{5-z} dydxdz=\int_0^1\int_0^{5-z}\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} dxdydz$

19. $V=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta-\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}r}^{\sqrt{1-r^2}} rdzdd\theta$

ou $\quad V=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta.$

20. $M=\frac{16}{5}\pi\left(8-\sqrt{2}\right)$

21. $I=\frac{1}{3}\pi^2-\frac{1}{4}\sqrt{3}\pi$

22. $M=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{5-2r^2}} dzdrd\theta$

23. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\sqrt{\frac{10}{\cos^2\phi+3\sin^2\phi}}}(\sin\phi+\cos\phi)\rho^2 d\rho d\phi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{3\cos\phi}{\sin^2\phi}}(\sin\phi+\cos\phi)\rho^2 d\rho d\phi d\theta$

24. Cartesianas $V=\displaystyle\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\int_{-\sqrt{12-x^2}}^{\sqrt{12-x^2}}\int_{4-\sqrt{16-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dzdydx$

Esféricas: $V=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^4\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta+\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{8\cos\phi}\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta.$

25. $V=18\pi-\frac{32}{3}\pi$

26. Cartesianas $V=\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-y^2}}\int_{2x^2+2y^2}^{\sqrt{3-x^2-y^2}} dzdydx$

Cilíndricas $V=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{r^2}^{\sqrt{3-r^2}} rdzdrd\theta$

Esféricas: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{3} \rho^2 \sin\phi dz d\phi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\cot\phi\csc\phi} \rho^2 \sin\phi dz d\phi d\theta$

27. Cartesianas $V = \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}}\int_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}}^{6-\sqrt{x^2+y^2}} dzdydx$

Cilíndricas $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_{\frac{r}{2}}^{6-r} rdzdrd\theta$

Esféricas $V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan 2}\int_0^{\frac{6}{\cos\phi+\sin\phi}} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$

28. Cartesianas $M = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}}^{2+\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{(x^2+y^2)z^2}{\cos(x^2+y^2+z^2)} dzdydx$

Cilíndricas $M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{1+\frac{1}{2}r}^{2+\sqrt{4-r^2}} \frac{r^3z^2}{\cos(r^2+z^2)} dzdrd\theta$

Esféricas $M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{2}{2\cos\phi-\sin\phi}}^{4\cos\phi} \frac{\rho^6\sin^3\phi\cos^2\phi}{\cos(\rho^2)} d\rho d\phi d\theta$

29. Cartesianas $I = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-\sqrt{x^2-y^2}} \frac{e^{x^2+y^2+z^2}}{x+y+z} dzdydx$

Cilíndricas $I = \int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{2-r} \frac{e^{r^2+z^2}}{r\cos\theta+r\sin\theta+z} rdzdrd\theta$

Esféricas $I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} \frac{e^{\rho^2}}{\sin\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta+\cos\phi} \rho\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

$+ \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\phi} \frac{e^{\rho^2}}{\sin\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta+\cos\phi} \rho\sin\phi d\rho d\phi d\theta$

30. (a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}}\int_{ar}^{6-a^2r^2} rdzdrd\theta$ (b) $a = 1$

Capítulo 5

SEQUÊNCIAS E SÉRIES

Objetivos (ao final do capítulo espera-se que o aluno seja capaz de):

1. Reconhecer uma sequência e verificar:
   (a) se é convergente ou divergente;
   (b) se é crescente ou decrescente;
   (c) propriedades de uma sequência.
2. Definir séries numéricas de termos positivos;
3. Encontrar a soma de séries;
4. Identificar as séries especiais: geométrica, harmônica, série-p;
5. Verificar se a série é convergente ou divergente, aplicando os critérios de convergência;
6. Analisar a convergência de séries alternadas e de sinais quaisquer;
7. Reconhecer séries absolutamente e condicionalmente convergentes;
8. Reconhecer séries de funções;
9. Encontrar o raio e o intervalo de convergência das séries de potências;
10. Desenvolver funções em séries de Taylor e Maclaurin;
11. Utilizar séries de funções na resolução de limites e integrais;
12. Resolver exercícios usando uma ferramenta tecnológica.

A prova será composta por questões que possibilitam verificar se os objetivos foram atingidos. Portanto, esse é o roteiro para orientações de seus estudos. O modelo de formulação das questões é o modelo adotado na formulação dos exercícios e no desenvolvimento teórico desse capítulo, nessa apostila.

5.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos séries infinitas, as quais são somas que envolvem um número infinito de termos. As séries infinitas desempenham um papel fundamental tanto na matemática quanto na ciência. Elas são usadas, por exemplo, para aproximar funções trigonométricas e logarítmicas, para resolver equações diferenciais, para efetuar integrais complicadas, para criar novas funções e para construir modelos matemáticos de leis físicas (Anton, 1999).

5.2 Sequências

Na linguagem cotidiana, o termo sequência significa uma sucessão de coisas em uma ordem determinada ordem cronológica, de tamanho, ou lógica, por exemplo. Em matemática o termo sequência é usado comumente para denotar uma sucessão de números cuja ordem é determinada por uma lei ou função.

Estudaremos um tipo especial de função definida nos números naturais $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ com imagem em $\mathbb{R}$. Isto é, estudaremos a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ quanto ao limite e suas propriedades quando $n \to \infty$. A função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = \frac{n}{2n+1}$ é um exemplo de sequência. O conjunto composto pelos pares ordenados $(n, f(n))$, dado por

$$I = \{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), \cdots, (n, f(n)), \cdots\}$$

ou

$$I = \left\{(1, \frac{1}{3}), (2, \frac{2}{5}), (3, \frac{3}{7}), \cdots, (n, \frac{n}{2n+1}), \cdots\right\}$$

é denominado conjunto dos termos da sequência $f(n)$. Geralmente, o conjunto I é escrito de forma simplificada. Isto é, I é representado pelas imagens de $n \in \mathbb{N}^*$ de forma que a posição que determinada imagem de f ocupa no conjunto dos termos da sequência $f(n)$ é determinada pelo elemento $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja,

$$I = \{f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots\} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \cdots, \frac{n}{2n+1}, \cdots\right\}.$$

Podemos observar que o termo $\frac{5}{11}$ é imagem de $n = 5$, pois ocupa a quinta posição no conjunto dos termos. O termo $f(n) = \frac{n}{2n+1}$ é denominado termo geral da sequência. A forma usual de representar o termo geral de uma sequência é $u_n = \frac{n}{2n+1}$ ou $x_n = \frac{n}{2n+1}$ ou $y_n = \frac{n}{2n+1}$ etc. Passaremos agora à definição formal de sequência. Nesse caso, temos o conjunto $I = \{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots\}$.

Definição 5.2.1 *Sejam $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$ o conjunto dos naturais, $\mathbb{R}$ a reta real. Denominamos a aplicação $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ de uma sequência numérica.*

Exemplo 5.2.2 *Para melhor compreensão, vamos supor que o crescimento diário de uma linhagem de suínos é dada em função do crescimento total pela sequência $u_n = \frac{n}{n+13}$ onde n corresponde ao número de dias de vida do suíno e $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ o tamanho de um suíno adulto. Assim, o conjunto $\left\{\frac{1}{14}, \frac{2}{15}, \frac{3}{16}, \frac{4}{17}, \frac{5}{18}, \cdots, \frac{n}{n+13}, \cdots\right\}$ representa o tamanho diário do suíno em relação ao tamanho final.*

Graficamente podemos observar a curva de crescimento, cujo limite é representado pela assíntota $y = 1$ (Figura 5.1).

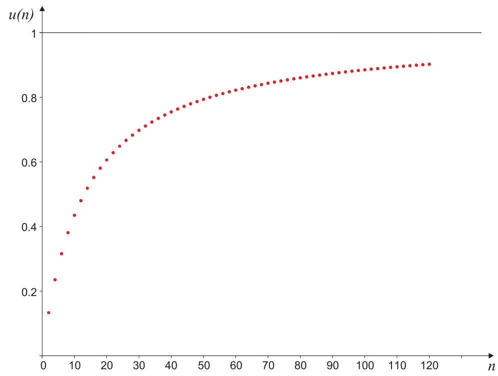


Figura 5.1: Crescimento da linhagem de suínos

Como podemos observar a assíntota $y = 1$ representa o limite de crescimento do suíno. Isso significa que podemos levantar questões como por exemplo, qual o número mínimo de dias que o suíno deve ficar em tratamento para atingir, pelo menos, 80% de seu tamanho final?

No Figura 5.2 podemos observar uma estimativa em torno de 50 dias.

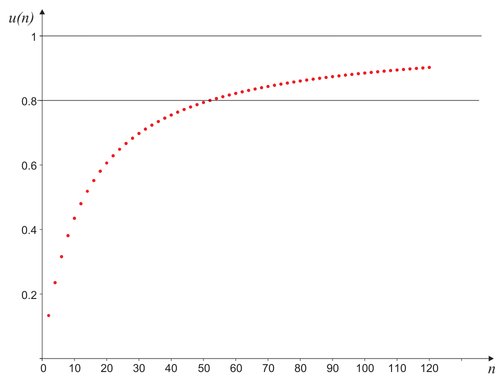


Figura 5.2: Estimativa para obter 80 por cento do tamanho final

A questão agora é: como fazer uma estimativa em termos matemáticos? A resposta será dada pela definição de limite de uma sequência.

5.2.3 Limite de uma Sequência

Definição 5.2.4 *Seja u_n uma sequência, dizemos que o número a é limite de u_n quando n tende para o infinito se, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|u_n - a| < \varepsilon$.*

Exemplo 5.2.5 *Dada a sequência $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida no Exemplo 5.2.2 por $u_n = \frac{n}{n+13}$, vamos mostrar que $\lim u_n = 1$.*

Solução: Devemos mostrar que, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que para todo $n > K$ vale a desigualdade $|u_n - a| < \varepsilon$. Agora,

$$|u_n - 1| = \left|\frac{n}{n+13} - 1\right| = \left|\frac{n - n - 13}{n+13}\right| = \left|\frac{13}{n+13}\right| < \varepsilon.$$

De modo que podemos escrever

$$\frac{13}{n+13} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 13 < n\varepsilon + 13\varepsilon \quad \Rightarrow \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} < n.$$

Consequentemente, podemos tomar $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon}$ e a Definição 5.2.4 estará satisfeita.

Comparando os dados do Exemplo 5.2.2 com a Definição 5.2.4 concluímos que $\varepsilon = 0,2$ representa a diferença entre o crescimento almejado e o crescimento total dos suínos. Por outro lado, K é o número mínimo de dias que os suínos devem permanecer em tratamento para atingir, pelo menos, 80% de seu crescimento total.

Exemplo 5.2.6 *Determine o número mínimo de dias que um lote de suínos, cujo crescimento é dado pela sequência $u_n = \frac{n}{n+13}$ deve permanecer em tratamento para atingir, respectivamente, 80%, 90% e 95% do seu tamanho final.*

Solução: No Exemplo 5.2.5 concluímos que dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon}$. Como para 80%, 90% e 95% do tamanho final os valores de ε são respectivamente 0.2, 0.1 e 0.05 temos, respectivamente, o número mínimo de dias é dado por

$$\begin{aligned}
(a) \quad & K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13\cdot 0,2}{0,2} = 52 \text{ dias}\\
(b) \quad & K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13\cdot 0,1}{0,1} = 117 \text{ dias}\\
(c) \quad & K = \frac{13-13\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{13-13\cdot 0,05}{0,05} = 247 \text{ dias}
\end{aligned}$$

Outra conclusão que podemos tirar é que, a partir de um determinado tempo, a variação do crescimento é muito pequena em relação à quantidade de ração que o suíno consome. Portanto, o produtor deve estimar o tempo mínimo de tratamento em dias para obter o máximo de lucro.

5.2.7 Sequências Convergentes

Definição 5.2.8 *Seja u_n uma sequência. Dizemos que u_n é convergente se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$.*

Se u_n não for convergente, diremos que u_n **é divergente**.

Exemplo 5.2.9 *A sequência $u_n = \frac{2n+3}{3n+5}$ é convergente, pois $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+5} = \frac{2}{3}$.*

Exemplo 5.2.10 *Determine se a sequência $u_n = \frac{1}{4}n^2 - 1$ converge ou diverge.*

Solução: A sequência dada é tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{4}n^2 - 1 = \infty$.

Como o limite de u_n não existe, a sequência diverge.

Teorema 5.2.11 *Seja $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe, então este limite é único.*

Demonstração: Suponhamos que $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ é uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ existe e suponhamos que a e b, com $a \neq b$, são limites dessa sequência. Então dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tal que para todo $n > K_1$ tenhamos $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e para todo $n > K_2$ tenhamos $|u_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Agora seja $K = \max\{K_1, K_2\}$. Então podemos escrever, para todo $n > K$

$$
\begin{aligned}
|a-b| &= |a-u_n+u_n-b| = |-(u_n-a)-(u_n-b)| \\
&\le |u_n-a|+|u_n-b| < \tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como a e b são constantes, teremos $|a-b| < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ se, e somente se $|a-b| = 0$, isto é, se $a = b$. Logo, o limite de u_n, se existe, é único. ∎

5.3 Subsequências

Definição 5.3.1 *Seja $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma sequência. Seja $N' = \{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots\}$ um subconjunto infinito de $\mathbb{N}^*$, então $u_{n_k} = u_n\big|_{N'} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ é dita uma subsequência de u_n.*

Exemplo 5.3.2 *Seja $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma sequência dada por $u_n = \frac{1}{n^2}$. Seja $N' = \{1, 3, 5, 7, \cdots\} \subset \mathbb{N}^*$. Então a sequência $u_{n_k} : N' \to \mathbb{R}$ é uma subsequência de u_n. Os termos da sequência são $\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \cdots\}$ e os termos da subsequência são $\{1, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \cdots\}$.*

Teorema 5.3.3 *Se uma sequência converge para L, então todas suas subsequências também convergem para L.*

Demonstração: Suponhamos que $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ é uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = L$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que para todo $n > K$ é válida a desigualdade $|u_n - L| < \varepsilon$. Agora, se $u_{n_k} : N' \to \mathbb{R}$ é uma subsequência de u_n, onde $N' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ é um conjunto infinito, temos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_{k_0} > K$ e então, para $k > k_0$ temos que $n_k > n_{k_0} > K$ e assim $|u_{n_k} - L| < \varepsilon$, o que prova que u_{n_k} também converge para L, como queríamos demonstrar. ∎

Exemplo 5.3.4 *A sequência $u_n = (-1)^n$ é divergente, pois admite subsequências que convergem para valores diferentes, contrariando o teorema anterior. De fato, a subsequência de índices pares, dada por $u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$ converge para $L_1 = 1$, enquanto que sua subsequência de índices ímpares, dada por $u_n = (-1)^{2n+1} = -1$ converge para $L_2 = -1$. Como os limites das subsequências são diferentes, a sequência diverge.*

5.4 Sequência Limitada

Definição 5.4.1 *Seja $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma sequência em $\mathbb{R}$. Dizemos que u_n é limitada se o conjunto $\{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n \cdots\}$ for limitado, ou seja, se existirem k_1 e $k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $k_1 \le u_n \le k_2$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

Teorema 5.4.2 *Seja $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ uma sequência convergente em $\mathbb{R}$, então u_n é limitada.*

Demonstração: Suponhamos que $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ é uma sequência convergente em $\mathbb{R}$ e suponhamos que a é limite dessa sequência. Então, dado $\varepsilon = 1$, podemos encontrar $K > 0$, tal que para todo $n > K$ tenhamos $|u_n - a| < 1$. Assim, para todo $n > K$, temos $u_n \in B(a, 1)$. Como o conjunto $\{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_K\}$ é finito, logo admite um valor máximo, seja $M = \max u_1, u_2, \cdots, u_K$, segue que $\{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{n-1}, u_n, \cdots\} \subset B(a, 1) \cup B(0, M)$. Logo, u_n é limitada. ∎

Observação 5.4.3 *A recíproca desse teorema não é verdadeira. Por exemplo, $u_n = (-1)^n$ é limitada, com $-1 \le u_n \le 1$, mas u_n não é convergente.*

5.5 Sequências Numéricas Monótonas

Neste parágrafo analisaremos algumas propriedades das sequências em $\mathbb{R}$.

Definição 5.5.1 *Seja u_n uma sequência de valores reais. Dizemos que u_n é*

- *não-decrescente se $u_{n+1} \geq u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$;*
- *crescente se $u_{n+1} > u_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$;*
- *não-crescente se $u_n \geq u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$;*
- *decrescente se $u_n > u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.*

Definição 5.5.2 *Seja u_n uma sequência de valores reais. Então u_n é denominada monótona se pertencer a um dos tipos descritos na Definição 5.5.1.*

Exemplo 5.5.3 *Mostre que a sequência $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ é monótona.*

Solução: Devemos mostrar que u_n pertence a um dos tipos descritos na Definição 5.5.1. Temos que $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ e $u_{n+1} = \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} = \frac{n+2}{n^2+2n+3}$. Verificaremos se $u_{n+1} \leq u_n$

$$
\begin{aligned}
\frac{n+2}{n^2+2n+3} &\leq \frac{n+1}{n^2+2} \\
\Leftrightarrow (n^2+2)(n+2) &\leq (n+1)(n^2+2n+3) \\
\Leftrightarrow n^3+2n^2+2n+4 &\leq n^3+3n^2+5n+3 \\
\Leftrightarrow 1 &\leq n^2+3n.
\end{aligned}
$$

A última desigualdade é verdadeira para todo n. Logo, $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ é decrescente e, assim, monótona.

Definição 5.5.4 *Sejam u_n uma sequência numérica, C e K dois números reais. Dizemos que C é limitante inferior de u_n se $C \leq u_n$ para todo n e que K é limitante superior de u_n se $K \geq u_n$ para todo n.*

Exemplo 5.5.5 *Consideremos a sequência monótona decrescente $u_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ cujos termos são $\frac{2}{3}, \frac{3}{6}, \frac{4}{11}, \frac{5}{18}, \cdots$ e cujo limite é $L = 0$. Então, todo número real $C \leq 0$ é limitante inferior de u_n e todo $K \geq \frac{2}{3}$ é limitante superior de u_n, pois $u_n < u_1 = \frac{2}{3}$.*

Definição 5.5.6 *Seja u_n uma sequência numérica que possui limitantes inferiores e superiores, então u_n é dita sequência limitada.*

Observação 5.5.7 *Note que uma sequência, para ser limitada, não precisa ter limite. Por exemplo, $u_n = (-1)^n$ não tem limite, mas é limitada.*

Teorema 5.5.8 *Toda sequência monótona limitada em $\mathbb{R}$ é convergente.*

Teorema 5.5.9 *Sejam u_n e y_n sequências numéricas em $\mathbb{R}$ tais que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Então são válidas as afirmações:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} cu_n = ca$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n \pm y_n) = a \pm b$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n y_n = ab$;

(v) *Se* $b \neq 0$ *e* $y_n \neq 0$ *então* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{y_n} = \frac{a}{b}$;

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^k} = 0$, *se* k *é uma constante positiva.*

5.6 Séries Numéricas

Definição 5.6.1 *Seja* $u_n : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ *uma sequência numérica. Denominamos* **série** *infinita à soma de todos os infinitos termos dessa sequência, ou seja, uma série é uma expressão da forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + \ u_k + \cdots .$$

A sequência u_n*, cujos infinitos termos são somados, é chamada de termo geral ou* $n-$*ésimo termo da série.*

Questões pertinentes no estudo de séries são: Como se determina o resultado de uma soma infinita? Toda série possui uma soma finita?

Passaremos a responder tais questões no desenvolvimento do restante deste capítulo. No entanto, estaremos muito mais preocupados com o fato de determinar se uma série infinita possui ou não uma soma finita do que propriamente encontrar o valor desta soma.

Começaremos com o conceito de **somas parciais** de uma série.

Definição 5.6.2 *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série. A soma dos primeiros* k *termos desta série, dada por*

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$$

é denominada soma parcial da série dada.

Note que as somas

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & u_1 \\ S_2 & = & u_1 + u_2 = S_1 + u_2 \\ S_3 & = & u_1 + u_2 + u_3 = S_2 + u_3 \\ & \cdots & \\ S_k & = & S_{k-1} + u_k \end{array}$$

formam uma sequência, chamada de **sequência de somas parciais**. Se esta sequência convergir, ou seja, se existir S tal que $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$, dizemos que a série dada **converge** para S e denotaremos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$.

Se não existir tal S, diremos que a série **diverge**, significando que não podemos obter um valor finito para a soma das infinitas parcelas da série.

Para melhor entendimento, vamos considerar e analisar um exemplo.

Exemplo 5.6.3 *Durante o tempo que permanecer na universidade, um estudante da Udesc deverá receber uma mesada de seu pai, em unidades monetárias, que obdedece à sequência* $u_n = \dfrac{20000}{n(n+1)}$, *onde* n *corresponde ao número da parcela a ser recebida. Pergunta-se*
(i) Qual o montante que o estudante deverá receber até o final da faculdade, supondo que ele conclua o curso em 60 meses?
(ii) No caso do estudante permanecer na universidade indefinidamente, como ficará o montante recebido?

Solução: As parcelas mensais recebidas pelo estudante são dadas pela sequência que descreve o valor da mesada, que são

$$10000, \quad \frac{10000}{3}, \quad \frac{5000}{3}, \quad 1000, \quad \frac{2000}{3}, \quad \frac{10000}{21}, \quad \frac{2500}{7}, \quad \cdots$$

Para responder a primeira pergunta, vamos escrever o problema no formato de uma série infinita, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)} = 10000 + \frac{10000}{3} + \frac{5000}{3} + 1000 + \frac{2000}{3} + \frac{10000}{21} + \frac{2500}{7} + \cdots$$

Os primeiros termos das somas parciais desta série são dadas por

$$\begin{aligned} S_1 &= u_1 = 10000, \\ S_2 &= S_1 + u_2 = \frac{40000}{3}, \\ S_3 &= S_2 + u_3 = 15000, \\ S_4 &= S_3 + u_4 = 16000 \end{aligned}$$

Agora, precisamos determinar uma expressão para o termo geral desta soma. Para isso, reescrevemos o termo geral da série usando decomposição em frações parciais, tomando

$$\frac{20000}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A\,(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{A + (A+B)n}{n(n+1)}$$

e obtendo que

$$\begin{cases} A = 20000 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 20000 \quad \text{e} \quad B = -20000.$$

Desse modo a série dada pode ser reescrita como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20000}{n} - \frac{20000}{n+1} \right)$$

e a soma dos seus $k-$primeiros termos é dada por

$$S_k = \left(20000 - \frac{20000}{2} \right) + \left(\frac{20000}{2} - \frac{20000}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{20000}{k} - \frac{20000}{k+1} \right)$$

e como podemos simplificar alguns termos intermediários, obtemos que

$$S_k = 20000 - \frac{20000}{k+1},$$

ou seja,

$$S_k = \frac{20000k}{k+1}.$$

O leitor poderá verificar que as somas parciais determinadas anteriormente correspondem às fornecidas por esta expressão.

Como a solução para a questão (i) do exemplo corresponde à sexagésima soma, temos que

$$S_{60} = \frac{20000 \cdot 60}{61} = 19672.$$

Desse modo, após 60 meses, o estudante terá recebido um montante de 19672 unidades monetárias.

Passaremos agora a responder a segunda questão. Na Figura 5.3 podemos ver o comportamento para o crescimento da soma da série.

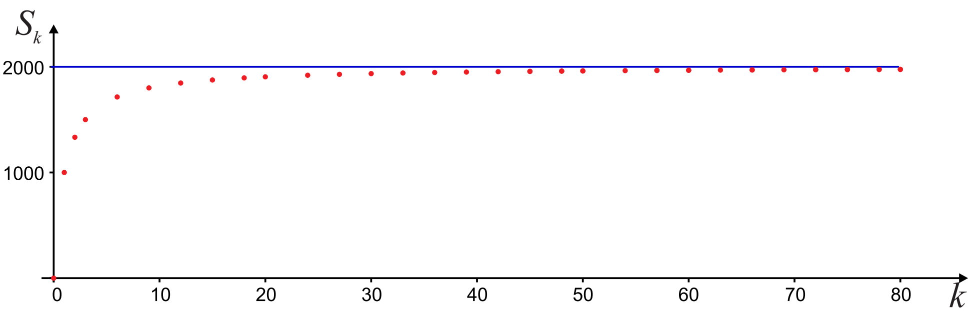


Figura 5.3: Estimativa para o crescimento da série

Portanto, se o estudante ficar indefinidamente na universidade, observando o gráfico, podemos afirmar que não receberia mais do que 20000 unidades monetárias. Isso significa que a soma da série tem limite 20000 quando a quantidade de parcelas tende para infinito, ou seja,

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{20000k}{k+1} = 20000.$$

Em outras palavras, a série converge para 20000 e podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)} = 20000.$$

Como vimos acima, a soma de uma série infinita é obtida pelo limite da sua sequência de somas parciais. Assim, definimos o limite de uma série do mesmo modo com que foi definido o limite de uma sequência.

5.6.4 Soma de uma Série

Definição 5.6.5 *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série cuja sequência de somas parciais é* S_k*. Dizemos que o número* S *é a soma da série, denotando* $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$*, se* S *for o limite de* S_k *quando* k *tender para o infinito, ou seja, se dado* $\varepsilon > 0$ *pudermos encontrar* $N_0 > 0$ *tal que, para todo* $k > N_0$ *vale a desigualdade* $|S_k - S| < \varepsilon$.

Exemplo 5.6.6 *Considere a série obtida no Exemplo 5.6.3, dada por* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{20000}{n(n+1)}$. *Mostre que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{20000}{n(n+1)} = 20000$.

Solução: Como vimos acima, a sequência de somas parciais da série dada é $S_k = \frac{20000k}{k+1}$. Devemos então mostrar que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{20000k}{k+1} = 20000$, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N_0 > 0$ tal que para, se $k > N_0$ então $|S_k - 20000| < \varepsilon$. Como

$$|S_k - 20000| = \left|\frac{20000k}{k+1} - 20000\right| = \left|\frac{20000k - 20000k - 20000}{k+1}\right| = \left|\frac{-20000}{k+1}\right|$$

temos que a desigualdade desejada será válida se

$$\frac{20000}{k+1} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 20000 < k\varepsilon + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{20000 - \varepsilon}{\varepsilon} < k.$$

Consequentemente, podemos tomar $N_0 = \dfrac{20000 - \varepsilon}{\varepsilon}$ e a Definição 5.6.1 estará satisfeita.

Suponhamos que se deseja saber a partir de qual parcela a diferença entre o montante e o total a receber será menor do que 300 u.m.. Para obter a resposta tomamos $\varepsilon = 300$ e obteremos $N_0 = \dfrac{20000 - 300}{300} = 65,667$. Isso significa que em todas as parcelas, a partir da sexagésima sexta, a diferença entre o montante e o limite é menor do que 300 u.m..

Suponhamos que se deseja saber a partir de qual parcela a diferença entre o montante e o limite é menor do que 200 u.m.. Para obter a resposta tomamos $\varepsilon = 200$ e obteremos $N_0 = \dfrac{20000 - 200}{200} = 99$. Isso significa que em todas as parcelas, a partir da parcela de número 99, a diferença entre o montante e o limite é menor do que 100 u.m..

5.6.7 Séries Convergentes

Definição 5.6.8 *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série e seja* S_k *a soma parcial dos termos dessa série. Dizemos que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *é* **convergente** *se* $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$ *existe. Caso contrário, dizemos que a série é* **divergente**.

Exemplo 5.6.9 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{20000}{n(n+1)}$ *do Exemplo 5.6.3 é convergente pois*

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{n\to\infty} \frac{20000k}{k+1} = 20000.$$

Exemplo 5.6.10 *Determine se a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{5^{n-1}}$ *é convergente ou divergente.*

Solução: Devemos verificar se a sequência de somas parciais desta série tem limite. Todas as séries que apresentam esse modelo (séries geométricas) podem ser resolvidas conforme o modelo que segue.

(i) Escrevemos a soma dos k primeiros termos:

$$S_k = 2 + \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \frac{2^4}{5^3} + \cdots + \frac{2^k}{5^{k-1}}$$

(ii) Multiplicamos S_k por $\frac{2}{5}$

$$\frac{2}{5}S_k = \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \frac{2^4}{5^3} + \cdots + \frac{2^k}{5^{k-1}} + \frac{2^{k+1}}{5^k}$$

(iii) Tomamos a diferença entre os resultados de (i) e (ii), obtendo

$$S_k - \frac{2}{5}S_k = \left(2 + \frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \cdots + \frac{2^k}{5^{k-1}}\right) - \left(\frac{2^2}{5} + \frac{2^3}{5^2} + \cdots + \frac{2^k}{5^{k-1}} + \frac{2^{k+1}}{5^k}\right)$$

ou seja,

$$\frac{3}{5}S_k = 2 - \frac{2^{k+1}}{5^k}$$

ou ainda,

$$S_k = \frac{10}{3} - \frac{5}{3}\frac{2^{k+1}}{5^k} = \frac{10}{3} - \frac{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^k$$

e como $\dfrac{2}{5} < 1$, temos que a

$$S = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{10}{3} - \frac{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{10}{3}.$$

Consequentemente, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{5^{n-1}}$ converge para $\dfrac{10}{3}$.

Exemplo 5.6.11 *Encontre o termo geral da sequência de somas parciais da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-4}{(2n+3)(2n-1)}$. *A seguir, determine se a série converge ou diverge, obtendo o valor de sua soma, se possível.*

Solução: Note que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-4}{(2n+3)(2n-1)} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n-1}$, assim temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{(2n+3)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n-1}\right).$$

Logo, a sequência das somas parciais é:

$$\begin{aligned}
S_k &= \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n-1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{5} - 1\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{7}\right) + \cdots +\\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-5}\right) + \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-3}\right) + \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k-1}\right)\\
&= -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+3}
\end{aligned}$$

Portanto, o termo geral da sequência de somas parciais da série dada é $S_k = -\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2k+1} + \dfrac{1}{2k+3}$.

Por definição a série converge se $\lim_{k\to\infty} S_k$ existe e a soma da série é o valor do limite. Como

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+3}\right) = -\frac{4}{3}.$$

A série dada converge e sua soma é $S = -\frac{4}{3}$.

Observações:

1. Uma das propriedades das séries infinitas é que a convergência ou divergência não é afetada se subtrairmos ou adicionarmos um número finito de termos a elas. Por exemplo, se no Exemplo 5.6.3 o estudante só começasse a receber a primeira parcela após 5 meses, a série seria escrita com $n = 6$ no primeiro termo, ou seja, $\displaystyle\sum_{n=6}^{\infty}\frac{20000}{n(n+1)}$, e a soma seria $S = 20000 - S_5$. Se por outro lado, o seu pai decidisse nos primeiros 10 meses dar uma mesada fixa de 2000u.m. por mês e iniciar o pagamento com $n = 1$ no décimo primeiro mês, a soma seria $S = 2000(10) + \displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{20000k}{k+1}$. Em ambos os casos a série continuará convergente.

2. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente e a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + y_n)$ é divergente. No entanto, se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ são divergentes, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + y_n)$ pode ser convergente ou divergente.

3. Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série convergente de termos positivos, seus termos podem ser reagrupados de qualquer modo e a série resultante também será convergente e terá a mesma soma que a série dada.

Teorema 5.6.12 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série e* $\alpha \in \mathbb{N}^*$. *Se a série*

$$\sum_{n=\alpha}^{\infty} u_n = u_\alpha + u_{\alpha+1} + u_{\alpha+2} + \cdots$$

for convergente, então a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

também será convergente.

Demonstração: Supondo que a série $\sum_{n=\alpha}^{\infty} u_n$ é convergente, temos que ela possui uma soma. Seja $S_{k-\alpha}$ o termo geral da sequência de suas somas parciais, tal que $S = \lim_{k\to\infty} S_{k-\alpha}$ e seja $S_\alpha = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_\alpha$. Desse modo, o termo geral da soma parcial da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ será $S_k = S_\alpha + S_{k-\alpha}$ e, portanto, $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} S_\alpha + \lim_{k\to\infty} S_{k-\alpha}$, donde segue que $\lim_{k\to\infty} S_k = S_\alpha + S$. Consequentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente. ■

Propriedades

Sejam

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k + \cdots$$

duas séries que convergem para S e S', respectivamente, então são válidas as seguintes propriedades.

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n = k \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ para todo $k \in \mathbb{R}$, ou seja, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ converge para kS.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm y_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$, ou seja, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm y_n)$ converge para $S + S'$.

5.7 Condição necessária para Convergência

Não existe uma regra geral para verificar se uma série é convergente ou não. Como veremos nos próximos itens, há critérios que dão respostas a tipos particulares de séries. Porém, verificando se uma série não possui a condição necessária para convergência, saberemos que ela não é convergente. Essa condição, é dada pelo teorema abaixo.

Teorema 5.7.1 *Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série convergente, então $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.*

Demonstração: Suponhamos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para S, então podemos afirmar que $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$, de modo que, pela Definição 5.6.8, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N_0 > 0$ tal que para todo $k > N_0$ vale a desigualdade $|S_k - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|S_{k-1} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $S_k = S_{k-1} + u_k$, temos que $u_k = S_k - S_{k-1}$ e assim,

$$\begin{aligned}
|u_k - 0| &= |S_k - S_{k-1} - 0| \\
&= |S_k - S + S - S_{k-1}| \\
&= |(S_k - S) + (S - S_{k-1})| \\
&= |S_k - S| + |S - S_{k-1}| \\
&\le |S_k - S| + |S_{k-1} - S| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, pela Definição 5.2.4, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$. ■

Uma consequência muito importante desse teorema é o corolário a seguir.

Corolário 5.7.2 *Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é divergente.*

Exemplo 5.7.3 *A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{3n+5}$ é divergente já que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{3n+5} = \frac{2}{3} \neq 0$.*

Exemplo 5.7.4 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *é tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, *isto é, possui a condição necessária para convergência. No entanto, não podemos, sem aplicar outros testes de convergência, afirmar se ela é convergente ou divergente.*

Observação 5.7.5 *Portanto fiquem atentos, se o* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *prova-se que a série é divergente. Mas, se* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *a série pode convergir ou divergir, para isso necessitamos estudar critérios para fazer tal verificação.*

Veremos, na sequência, alguns resultados que permitem verificar se uma série é convergente ou divergente

5.8 Séries Especiais

5.8.1 Série harmônica

Definição 5.8.2 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *é denominada série harmônica.*

A série harmônica é uma das séries mais importantes da matemática. Seu nome surge em conexão com os sons harmônicos produzidos pela vibração de uma corda musical.

A série harmônica, embora possua a condição necessária para convergência, é uma série divergente. A divergência da série harmônica não é trivial. Sua lenta divergência se tornará evidente quando examinarmos suas somas parciais com maior detalhe. Na verdade, vamos mostrar que a sequência de somas parciais S_n da série harmônica não converge, pois admite subsequências divergentes. Para isso, vamos considerar as somas $S_2, S_4, S_8, S_{16}, S_{32}, \cdots$ cujos índices são sempre potências de 2, formando a subsequência S_{2^n} de S_n. Temos que

$$
\begin{aligned}
S_{2^1} = S_2 &= 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} \\
S_{2^2} = S_4 &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = S_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \\
S_{2^3} = S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = S_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2} \\
S_{2^4} = S_{16} &= S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \\
&> S_8 + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = S_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

e assim sucessivamente, de forma que podemos intuir que $S_{2^n} > \dfrac{n+1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Desta forma, temos que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty,$$

o que nos diz que S_{2^n} é uma subsequência divergente de S_n. Com isso, temos que S_n também diverge, pois do contrário iríamos contrariar o Teorema 5.3.3. Como a sequência de somas parciais da série harmônica diverge, concluímos que a própria **série harmônica diverge**.

Vejamos algumas somas parciais da série harmônica, obtidas com auxílio do MAPLE 6, que nos mostra a forma lenta com a qual a soma da série tende ao infinito.

$$
\begin{array}{ccc}
S_{10} = 2,9289 & S_{100} = 5,1873 & S_{1000} = 7,485 \\
S_{um\ milhão} = 14,392 & S_{um\ bilhão} = 21,300 & S_{um\ trlhão} = 28,208.
\end{array}
$$

5.8.3 Série geométrica

DEFINIÇÃO 5.8.4 *Denominamos série geométrica à toda série da forma* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1}$, *onde* q *é denominada razão.*

EXEMPLO 5.8.5 *Encontre a soma da série geométrica e estude sua convergência.*

Solução: Consideremos a série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1} = a_1 + a_1q + aq^2 + \cdots + a_1q^{n-1} + \cdots$$

e a soma dos seus $n-$primeiros termos, dada por

$$S_n = a_1 + a_1q + aq^2 + \cdots + a_1q^{n-1}.$$

Multiplicando ambos os lados dessa igualdade pela razão q obtemos

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^n$$

e tomando a diferença entre as duas últimas expressões, obtemos

$$qS_n - S_n = (a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^n) - (a_1 + a_1q + aq^2 + \cdots + a_1q^{n-1}),$$

$$(q-1)S_n = a_1q^n - a_1 = a_1(q^n - 1),$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}.$$

Para estudar a convergência dessa série devemos considerar três casos:

(I) Se $q = 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1(q^n-1)}{(q-1)} = \infty$ e a série é divergente. Se $q = -1$ então S_n tem dois valores para o limite e, portanto, a série é divergente.

(II) Se $|q| > 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1(q^n-1)}{(q-1)} = \infty$ e a série é divergente.

(III) Se $|q| < 1$ então $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1(q^n-1)}{(q-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1q^n}{q-1} + \lim \dfrac{-a_1}{(q-1)} = \dfrac{-a_1}{(q-1)}$ e a série é convergente.

Conclusão: **Uma série geométrica é divergente se** $|q| \geq 1$ e é **convergente se** $|q| < 1$. Quando $|q| < 1$ ainda temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1q^{n-1} = \dfrac{a_1}{1-q}$.

EXEMPLO 5.8.6 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ *é convergente, pois sua razão é* $q = \frac{2}{3} < 1$. *Já a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ *é divergente pois sua razão é* $q = \frac{3}{2} > 1$.

5.9 Critérios de Convergência de Séries

Quando conhecemos o termo geral da soma de uma série, é fácil fazer a verificação da convergência. Podemos verificar se uma série converge usando critérios para convergência que passaremos a estudar a seguir.

5.9.1 Critério da integral

Teorema 5.9.2 *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série tal que* $u_{n+1} \leq u_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$. *Seja* $f(x)$ *uma função positiva, contínua e decrescente no intervalo* $[1, \infty)$ *tal que* $f(n) = u_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$. *Então, se a integral* $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ *convergir, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *também será convergente. Se a integral divergir, a série também será divergente.*

A demonstração deste teorema poderá ser estudada em qualquer um dos livros constantes na bibliografia.

Exemplo 5.9.3 *Verifique as hipóteses do teste da integral e utilize-o, se possível, para analisar a convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

Solução: Considere a função $f(x) = xe^{-x}$, obviamente $f(x)$ é contínua e positiva para $x \geq 1$. Falta verificar que é decrescente. Usando o teste da primeira derivada temos que $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > 1$, em $x = 1$ função apresenta um máximo local, então $f(x)$ é decrescente para todo $x \geq 1$. Como as hipóteses do teste da integral estão verificadas podemos utilizá-lo para estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

O teste da integral afirma que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ converge se, a integral $I = \displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x}dx$ converge e a série diverge se a integral divergir.

Assim,

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} xe^{-x}dx \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-xe^{-x}\Big|_1^b + \int_1^b e^{-x}dx \right) \\
&= \lim_{b\to+\infty} \left(-be^{-b} + e^{-1} - e^{-b} + e^{-1}\right) = \frac{2}{e} + \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{e^b} - \frac{1}{e^b}\right) = \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

Como a integral imprópria converge, pelo teste da integral a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ também converge.

5.9.4 Série p ou Série Hiper-harmônica

Definição 5.9.5 *Denominamos série p todas as séries escritas na forma* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, *onde p é uma constante positiva.*

Vamos utilizar o Teorema 5.9.2 para estudar a convergência da série p.

Exemplo 5.9.6 *Estude a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$.

Solução: Considerando $f(x) = \frac{1}{x^p}$, temos que f é positiva, contínua e decrescente, satisfazendo todas as condições do Teorema 5.9.2, de modo que podemos tomar a integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx.$$

Temos três casos a considerar:

(i) Se $p = 1$ teremos que

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \to \infty} \ln x \Big|_1^n = \lim_{n \to \infty} (\ln n - \ln 1) = \infty.$$

Consequentemente, quando **p=1**, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é **divergente**. Note que neste caso, temos a série harmônica.

(ii) Se $p < 1$ teremos que $1 - p > 0$ e assim

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \infty.$$

Consequentemente, se **p<1**, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é **divergente**.

(iii) Se $p > 1$ teremos que $1 - p < 0$ e assim

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \to \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \frac{-1}{1-p}.$$

Consequentemente, se **p>1** a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é **convergente**.

Exemplo 5.9.7 *As séries abaixo são exemplos de séries p.*

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9}$ *convergente, pois é uma série-p com* $p = 9 > 1$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *divergente, pois é uma série-p com* $p = \frac{1}{2} < 1$.

5.9.8 Critério da comparação

Teorema 5.9.9 *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série e seja $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ uma série cuja convergência queremos estudar, então:*

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ for uma série convergente e $0 \leq y_n \leq u_n$ para todo n, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é convergente.

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ for uma série divergente e $y_n \geq u_n \geq 0$ para todo n, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente.

Demonstração: (i) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ uma série tal que $0 \leq y_n \leq u_n$ para todo n. Como $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série convergente, a sequência de suas somas parciais S_n tem limite L, de modo que $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots < L$. Como $0 \leq y_n \leq u_n$ para todo n, segue que

$$0 \leq y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k + \cdots \leq u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots < L.$$

Consequentemente, a sequência de somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é limitada e, além disso, monótona. Logo, pelo Teorema 5.5.8 é convergente e, assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é convergente.

(ii) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série divergente e $y_n \geq u_n \geq 0$ para todo n. Como $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é uma série divergente a sua sequência de somas parciais S_n não tem limite, de modo que dado um número $L > 0$, existe $K > 0$ tal que $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots > L$ para todo $n > K$. Como $y_n \geq u_n$ para todo n, segue que

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k + \cdots \geq u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + \cdots > L.$$

Consequentemente, a sequência de somas parciais $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_k + \cdots$ não é limitada e, assim, a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é divergente. ■

Exemplo 5.9.10 *Usando o Teorema 5.9.9 estude a convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2 + n + 1}.$$

Solução: Conforme o Teorema 5.9.9, devemos encontrar uma série que sabemos ser convergente ou divergente e fazer a comparação do termo geral dessa série com a série em estudo. Um procedimento usado para encontrar um termo geral adequado é majorar o termo geral da série proposta. Vamos descrever o processo.

(i) Temos duas formas de majorar um quociente: aumentando o denominador ou diminuindo o denominador. No termo geral da série em estudo, vamos diminuir o denominador passo a passo

$$\frac{n}{n^3 + n^2 + n + 1} < \frac{n}{n^3 + n^2 + n} < \frac{n}{n^3 + n^2} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

No Exemplo 5.6.3, vimos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{20000}{n(n+1)}$ é convergente. Como podemos escrever $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{20000}{n(n+1)} = 20000\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$, segue (pela propriedade i), que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ também é convergente.

(ii) Vamos verificar que, de fato, $\dfrac{n}{n^3+n^2+n+1} \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rccc} & \dfrac{n}{n^3+n^2+n+1} & \leq & \dfrac{1}{n(n+1)} \\ \Leftrightarrow & n^2(n+1) & \leq & n^3+n^2+n+1 \\ \Leftrightarrow & n^3+n^2 & \leq & n^3+n^2+n+1 \\ \Leftrightarrow & 0 & \leq & n+1 \end{array}$$

que é válido para todo n. Logo, pelo Teorema 5.9.9, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+n^2+n+1}$ é convergente.

5.9.11 Critério de D'Alambert ou Critério da Razão

Teorema 5.9.12 *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série tal que* $u_n > 0$ *para todo* n *e* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$. *Então*

(i) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge se* $L < 1$;

(ii) A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge se* $L > 1$;

(iii) Nada podemos afirmar se $L = 1$.

Demonstração: Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ uma série tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L$. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K > 0$ tal que, para todo $n > K$ vale a desigualdade $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| < \varepsilon$.

Suponhamos que $L < 1$. Então existe q tal que $L < q < 1$ e isso implica que $q - L < 1$. Tomando $\varepsilon = q - L$ podemos escrever $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| < q - L$ donde vem

$$-(q-L) < \frac{u_{n+1}}{u_n} - L < q - L \quad \text{ou} \quad -(q-L) + L < \frac{u_{n+1}}{u_n} < q.$$

Da última relação concluímos que $u_{n+1} < u_n q$. Dessa relação temos que

$$\begin{array}{l} u_{n+1} < u_n q \\ u_{n+2} < u_{n+1} q < u_n q q < u_n q^2 \\ u_{n+3} < u_{n+2} q < u_n q^2 q < u_n q^3 \\ \cdots \\ u_{n+k} < u_{n+(k-1)} q < u_n q^{k-1} q < u_n q^k \end{array}$$

e assim sucessivamente, de forma que

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots < u_n q + u_n q^2 + u_n q^3 + \cdots .$$

Note que $u_n q + u_n q^2 + u_n q^3 + \cdots$ é uma série geométrica, com razão $|q| < 1$ e, portanto, convergente. Assim, pelo Teorema 5.9.9, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge se $L < 1$.

Por outro lado, suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = L > 1$, então obteremos $u_{n+1} > u_n$ para todo n e, desse modo, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$. Consequentemente, a série não possui a condição necessária para convergência. Logo, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge se $L > 1$.

A parte (iii) do Critério de D'Alambert diz que, se $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, então este critério é inconclusivo. Observe isso considerando os exemplos: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Para ambas $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, porém a primeira é uma série p, com $p = 2$, convergente e a segunda é a série harmônica que sabemos ser divergente. ■

Exemplo 5.9.13 *Usando o critério de D 'Alambert, estude a convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}.$$

Solução: Temos que $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ e $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}$. Logo,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n2^{n+1}}{2^n(n+1)} = \frac{n2^n2}{2^n(n+1)} = \frac{2n}{(n+1)}$$

e assim, pelo critério de D'Alembert, temos que

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(n+1)} = 2 > 1.$$

Consequentemente, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n}$ é divergente.

Exemplo 5.9.14 *Estude a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$.

Solução: Temos que $u_n = \dfrac{1}{n!}$ e $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$ e então

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

portanto a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ converge, pela critério de D'Alembert.

5.9.15 Critério de Cauchy ou Critério da Raíz

Teorema 5.9.16 *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série tal que* $u_n > 0$ *para todo* n *e* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$. *Então* *(i) A série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge se* $L < 1$;

(ii) A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *diverge se* $L > 1$;

(iii) Nada podemos afirmar se $L = 1$.

Exemplo 5.9.17 *Usando o critério de Cauchy, estude a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$.

Solução: Temos que $\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+5}\right)^n} = \frac{n}{2n+5}$ e aplicando o critério de Cauchy, obtemos que

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} = \frac{1}{2} < 1,$$

e concluímos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5}\right)^n$ é convergente.

Exemplo 5.9.18 *Estude a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{2^{3n+1}}$.

Solução: Temos que

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{5^{2n}}{2^{3n+1}}} = \frac{5^2}{2^{3+\frac{1}{n}}} = \frac{25}{8.2^{\frac{1}{n}}}.$$

Assim,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{25}{8.2^{\frac{1}{n}}} = \frac{25}{8} > 1$$

e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{2^{3n+1}}$ diverge, pelo critério de Cauchy.

5.10 Séries de Termos Positivos e Negativos

Definição 5.10.1 *Seja* $u_n > 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$. *Denominamos* **série alternada** *à série da forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

ou

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^{n} u_n + \cdots$$

Exemplo 5.10.2 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} + \cdots$ *é um exemplo de série alternada.*

5.10.3 Convergência de uma série alternada

Infelizmente todos os critérios de convegência vistos até o momento não são válidos para séries alternadas, pois eles exigiam que os termos da série fossem todos positivos. A seguir, passaremos a ver alguns resultados que são válidos para séries de termos positivos e negativos.

Teorema 5.10.4 (Teorema de Leibnitz) *Considere uma série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

tal que

(i) $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \cdots$ *(ii)* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Então são válidas as seguintes conclusões:

(a) A série alternada é convergente.

(b) A soma parcial S_n *da série alternada é tal que* $0 < S_n < u_1$.

Demonstração: (a) Consideremos a soma dos $2n$ primeiros termos da série alternada. Suponhamos que os termos de ordem ímpar da série são positivos e os de ordem par são negativos. Se, por acaso o primeiro termo for negativo, iniciaremos a contagem em u_2, pois a retirada de um número finito de termos não afeta a convergência da série. Desse modo, o termo u_{2n-1} é positivo e o termo u_{2n} é negativo. Assim, pela condição (i) temos que

$$(u_1 - u_2) > 0,\ (u_3 - u_4) > 0,\ \cdots\ (u_n - u_{n+1}) > 0,\ \cdots\ (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0$$

de modo que

$$S_2 = u_1 - u_2 > 0 \qquad S_4 = S_2 + (u_3 - u_4) > S_2 \qquad S_6 = S_4 + (u_5 - u_6) > S_4$$

e assim sucessivamente. Portanto, obtemos que

$$0 < S_2 < S_4 < .... < S_{2n}.$$

Ainda, associando os termos de outra forma, obtemos que

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + ... + (u_{2n-1} - u_{2n}) \\ &= u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \end{aligned}$$

e, pela condição (i), cada termo entre parênteses é positiva. Portanto, estamos subtraindo uma quantidade positiva de u_1, obtendo um resultado inferior a u_1, de modo que $0 < S_{2n} < u_1$.

Com isso, segue que S_{2n} é limitada e como $0 < S_2 < S_4 < \cdots < S_{2n}$, também é monótona. Assim, concluímos que a sequência de somas $S_2, S_4, \cdots, S_{2n}$ converge, pelo Teorema 5.5.8.

Seja $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$. Como $S_{2n} < u_1$, segue que $S < u_1$. Sendo $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ e aplicando a condição (ii), temos que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Consequentemente as somas de ordem ímpar tem a mesma soma dos termos de ordem par. Finalmente, mostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_1 > 0$ tal que $|S_{2n} - S| < \varepsilon$ sempre que $2n > K_1$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $K_2 > 0$ tal que $|S_{2n} - S| < \varepsilon$ sempre que $2n + 1 > K_2$.

Tomando $K = \max\{K_1, K_2\}$, para todo $n > K$ vale a desigualdade $|S_n - S| < \varepsilon$. Logo, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ é convergente. ■

Exemplo 5.10.5 *Usando o teorema de Leibnitz, estude a convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

Solução: Vamos verificar se u_n satisfaz todas condições do Teorema 5.10.4. O termo geral da série é $u_n = \dfrac{n+2}{n(n+1)} > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Agora, vamos verificar se $u_n > u_{n+1}$ para todo n natural. Temos que

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{n+2}{n(n+1)} & > & \dfrac{n+3}{(n+1)(n+2)} \\
\Leftrightarrow \quad (n+2)(n+1)(n+2) & > & n(n+1)(n+3) \\
\Leftrightarrow \quad n^3 + 5n^2 + 8n + 4 & > & n^3 + 4n^2 + 3n \\
\Leftrightarrow \quad 4n^2 + 8n & > & -1,
\end{array}$$

que é verdadeiro para todo n natural. Assim, a primeira condição do Teorema 5.10.4 está satisfeita. Ainda,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0.$$

e então todas as exigências do Teorema 5.10.4 estão satisfeitas. Podemos concluir então que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{n(n+1)}$$

é convergente.

5.11 Série de Termos de Sinais Quaisquer

Definição 5.11.1 *Denominamos série de termos de sinais quaisquer à toda série formada por termos positivos e negativos.*

As séries alternadas são casos particulares das séries de termos de sinais quaisquer.

Exemplo 5.11.2 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{6}) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + 0 + \cdots$ *é um exemplo de série de termos de sinais quaisquer.*

Veremos na sequência um teorema que permite verificar se uma série de termos de sinais quaisquer é convergente.

Teorema 5.11.3 *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série de termos de sinais quaisquer. Se a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *for uma série convergente então a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *também será convergente.*

No entanto, se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ for divergente, nada poderemos afirmar sobre a convergência da série de sinais quaisquer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exemplo 5.11.4 *Vimos no Exemplo 5.10.5 que a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} n+2}{n(n+1)}$ *é convergente. Porém, a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n-1} n+2}{n(n+1)}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+2}{n(n+1)}$ *não é convergente. O leitor pode verificar essa afirmação usando o critério da comparação.*

Exemplo 5.11.5 *Usando o Teorema 5.11.3, estude a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^3}$.

Solução: Temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Como podemos observar, esta é uma série p com $p = 3 > 1$ e, portanto, convergente. Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$ é convergente. A convergência desta série também pode ser estudada pelo teorema de Leibnitz.

Exemplo 5.11.6 *Usando o Teorema 5.11.3 estude a convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx) + 3\cos^2(n)}{n^2}$.

Solução: Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(nx) + 3\cos^2(n)}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx) + 3\cos^2(n)|}{n^2}$$

e como $|\sin(nx)| \leq 1$ e $|\cos^2(n)| \leq 1$, usando propriedades de módulo, segue que

$$\left|\sin(nx) + 3\cos^2(n)\right| \leq |\sin(nx)| + \left|3\cos^2(n)\right| \leq 1 + 3\left|\cos^2(n)\right| \leq 1 + 3 = 4,$$

e então podemos concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(nx) + 3\cos^2(n)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

para todo n natural. Como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ é uma série p convergente ($p = 2 > 1$), temos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin(nx) + 3\cos^2(n)}{n^2}\right|$$

converge, pelo critério da comparação.

Assim, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx) + 3\cos^2(n)}{n^2}$ também converge, pelo Teorema 5.11.3.

5.12 Séries absolutamente convergente e condicionalmente convergentes

Antes de definir séries absolutamente convergente e condicionalmente convergentes vamos considerar os exemplos abaixo.

Exemplo 5.12.1 *Consideremos a série harmônica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

já mostramos que esta série é divergente. Porém, a série harmônica alternada, dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

é convergente, pelo teorema de Leibnitz. Vamos mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ *converge sob condições, isto é, podemos interferir na sua forma de convergir.*

Solução: Para modificar o valor de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ basta reagrupar os termos desta série, separando a soma dos termos de ordem ímpar da soma dos termos de ordem par, conforme segue:

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots\right).$$

Como o leitor pode observar, podemos escrever

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

e, cada uma destas sub-somas é divergente. Logo, temos que $S_n = \infty - \infty$, isto é, a soma é indeterminada, significando que, se escrevermos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

na forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots\right)$$

nada podemos afirmar sobre a sua convergência. Isso ocorre porque a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

não converge.

Com base no exemplo anterior, vamos definir séries absolutamente convergente e condicionalmente convergente.

Definição 5.12.2 *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série de termos de sinais quaisquer, então:*

(i) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *converge, a série é denominada absolutamente convergente.*

(ii) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *converge e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *diverge, então a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *é denominada condicionalmente convergente.*

Exemplo 5.12.3 *A série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$*, estudada no Exemplo 5.12.1, é condicionalmente convergente enquanto que a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(nx) + 3\cos^2(n)}{n^2}$*, estudada no Exemplo 5.11.6, é absolutamente convergente.*

Exemplo 5.12.4 *Classifique a série numérica* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\, n^2}{n^3+4}$ *como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.*

Solução: Temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^{n-1}\, n^2}{n^3+4}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+4}$, e esta é uma série divergente, pois a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+4}$ é contínua para todo $x \neq \sqrt[3]{-4}$, em particular para todo $x \geq 1$, é positiva para todo $x \geq \sqrt[3]{-2}$, em particular para $x \geq 1$, e como $f'(x) = \dfrac{x(8-x^3)}{(x^3+4)^2} > 0$ para todo $x > 2$, ou seja, logo a função $f(x)$ é decrescente para todo $x \geq 2$, e assim podemos aplicar o critério da integral, e deste segue que

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+4}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_2^{b} \frac{x^2}{x^3+4}dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}\ln(x^3+4)\bigg|_2^b = +\infty,$$

ou seja, a integral imprópria, e consequentemente a série, diverge.

Porém, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\, n^2}{n^3+4}$ é uma série alternada convergente, pois satisfaz as condições do teorema de Leibniz, visto que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+4} = 0 \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3+4} \leq \frac{n^2}{n^3+4} = u_n, \text{ para todo } n \geq 2$$

pois acima verificamos que a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+4}$ é decrescente para todo $x \geq 2$.

Portanto a série dada é condicionalmente convergente.

Exemplo 5.12.5 *Classifique as séries numéricas abaixo como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente, justificando sua resposta.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(\ln n)^n + 2\sqrt{n} + 1}$ *(b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$

Solução: (a) Analisando a convergência absoluta temos

$$\left|\frac{(-2)^n}{(\ln n)^n + 2\sqrt{n} + 1}\right| = \frac{2^n}{(\ln n)^n + 2\sqrt{n} + 1} \leq \frac{2^n}{(\ln n)^n}$$

Aplicando o teste da raiz, temos

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\ln n} = 0.$$

Como $L < 1$ a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln n)^n}$ converge. Logo, pelo teste da comparação, a série dada converge absolutamente.

(b) Analisando a convergência absoluta temos

$$\left|\frac{(-1)^n 2}{\sqrt[4]{n^3+2n}}\right| = \frac{2}{\sqrt[4]{n^3+2n}} \le \frac{2}{\sqrt[4]{n^3}},$$

com isso nada podemos concluir, pois a série dada é menor que uma série p divergente. Porém, observe que

$$\frac{2}{\sqrt[4]{n^3+2n}} = \frac{2}{[n^3(1+\frac{2}{n^2})]^{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{n^{\frac{3}{4}}(1+\frac{2}{n^2})^{\frac{1}{4}}}$$

e $1 \le (1+\dfrac{2}{n^2})^{\frac{1}{4}} \le 3^{\frac{1}{4}}$. Logo,

$$\frac{2}{\sqrt[4]{n^3+2n}} \ge \frac{2}{\sqrt[4]{3}n^{\frac{3}{4}}},$$

e, por comparação, a série dada não converge absolutamente.

Analisando a convergência condicional, usando o Teorema de Leibnitz, pois a série dada é alternada, temos $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[4]{n^3+2n}} = 0$ e $a_n = \dfrac{2}{\sqrt[4]{n^3+2n}}$ é decrescente.

Portanto, a série dada é condicionalmente convergente.

5.13 Séries de Funções

Considerando as funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = x^4$, $\cdots$, $f_n(x) = x^n, \cdots$, podemos escrever a soma

$$\begin{aligned} S(x) &= f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \end{aligned}$$

Essa soma infinita é um exemplo de série de funções, pois o seu termo geral depende de uma variável real x. Mais geralmente, definimos série de funções como segue.

Definição 5.13.1 *Denominamos série de funções a toda série na qual o termo geral é uma função da variável real x e a denotaremos por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

5.13.2 Convergência de séries de funções

Como no estudo das séries numéricas, estamos interessados na convergência das séries de funções. Uma série de funções, se for convergente, convergirá para uma função. A imagem de cada valor de x numa série de funções é uma série numérica que pode ser convergente ou divergente. Por exemplo, para cada valor de x, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$$

é uma série geométrica e, portanto, converge se $|x| < 1$ e diverge caso contrário. Já sua soma será a função $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, se $|x| < 1$. Isso significa que uma série de funções convergente, converge para um determinado conjunto de valores de x, denominado domínio ou intervalo de convergência.

Definição 5.13.3 *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ *uma série de funções. Denominamos domínio ou intervalo de convergência da série ao conjunto de todos os valores de* x *para os quais a série é convergente e denominamos raio de convergência à distância entre o centro e as extremidades do intervalo convergência.*

Exemplo 5.13.4 *O raio de convergência da série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *é* $R = 1$ *e o seu intervalo de convergência é* $I = (-1, 1)$. *Para todo* $x \in (-1, 1)$ *tem-se que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$.

Exemplo 5.13.5 *Determine o intervalo e o raio de convergência da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(x) + \sin(x)}{n^4 + n}$.

Solução: Analisando a convergência absoluta da série, temos que

$$\left|\frac{\cos(x) + \sin(x)}{n^4 + n}\right| = \frac{|\cos(x) + \sin(x)|}{n^4 + n} \leq \frac{|\cos(x)| + |\sin(x)|}{n^4 + n} \leq \frac{2}{n^4 + n} \leq \frac{2}{n^4}$$

e como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^4}$ é uma p-série convergente, concluímos, por comparação, que a série dada é absolutamente convergente. Ou seja, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(x) + \sin(x)}{n^4 + n}$ converge para todo valor real de x. Assim, o intervalo de convergência desta série é $\mathbb{R}$ e seu raio de convergência é infinito.

5.14 Séries de Potências

As séries de potências são as séries de funções que aparecem com mais frequência nos problemas de matemática e engenharia, pois são úteis na integração de funções que não possuem antiderivadas elementares, na resolução de equações diferenciais e também para aproximar funções por polinômios (cientistas fazem isso para simplificar expresões complexas, programadores fazem isso para representar funções em calculadoras e computadores). Em vista disso, vamos dar atenção especial ao estudo das Séries de Potências.

Definição 5.14.1 *Uma série de potências é uma série cujos termos envolvem apenas potências de* x *multiplicadas por coeficientes constantes* c_n, *ou seja, uma série de potências é escrita na forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n + \cdots .$$

Exemplo 5.14.2 *A série* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *do Exemplo 5.13.4 é uma série de potências onde todos os coeficientes* c_n *são iguais a* 1. *Já a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x)+\sin(x)}{n^4+n}$ *do Exemplo 5.13.5 não é uma série de potências, pois seus termos não envolvem apenas potências de* x.

Observação 5.14.3 *Para que os resultados anteriores possam ser usados sem mudanças nas notações, vamos admitir que* $u_n(x) = c_n x^n$ *para o caso das séries de potências.*

5.14.4 Processo para determinar o intervalo e o raio de convergência de uma série de potências

Utilizam-se os critérios de D 'Alambert ou de Cauchy para a convergência absoluta, tomando $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ ou $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|u_n|}\right)$ onde $u_n = c_n x^n$. Caso o limite exista vale a condição dos critério usado. Em qualquer caso teremos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = |x|\, L$$

onde

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|.$$

Desse modo, o raio e o intervalo de convergência serão obtidos resolvendo a inequação $|x|\, L < 1$, que nos dá $|x| < \frac{1}{L}$, ou seja, o raio de convergência é

$$R = \frac{1}{L}.$$

Observação 5.14.5 *Como o critério de D 'Alambert é inconclusivo quando o limite da razão é igual a 1, nada podemos afirmar se* $|x|\, L = 1$. *Assim, devemos verificar se a série converge para* $x = \frac{1}{L}$ *e* $x = -\frac{1}{L}$. *Feita esta verificação, pode-se estabelecer o intervalo de convergência.*

Exemplo 5.14.6 *Determine o intervalo e o raio de convergência da série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{5^n (1+n^2)}$.

Solução: Aplicando o critério de D'Alambert para a convergência absoluta, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{3^{n+1}x^{n+1}}{5^{n+1}\left(1+(n+1)^2\right)}}{\dfrac{3^n x^n}{5^n(1+n^2)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{5^n 3^n 3 x^n x (1+n^2)}{5^n 5 (n^2+2n+2) 3 x^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3x(1+n^2)}{5(n^2+2n+2)}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3(1+n^2)}{5(n^2+2n+2)}\right| = \frac{3}{5}|x|
\end{aligned}$$

Assim, a série convergirá se $\frac{3}{5}|x| < 1$, ou seja, se $|x| < \frac{5}{3}$. Portanto, o raio de convergência é $R = \frac{5}{3}$.

Na sequência devemos verificar se a série converge para $x = -\frac{5}{3}$ e $x = \frac{5}{3}$.

- Se $x = -\dfrac{5}{3}$, temos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(-\frac{5}{3}\right)^n}{5^n\left(1+n^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n 5^n}{5^n\left(1+n^2\right) 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\left(1+n^2\right)}.$$

que converge, pelo critério de Leibnitz.

- Se $x = \dfrac{5}{3}$ temos a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \left(\frac{5}{3}\right)^n}{5^n\left(1+n^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n 5^n}{5^n\left(1+n^2\right) 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1+n^2\right)}.$$

que converge por comparação, pois

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1+n^2\right)} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Conclusão: O raio de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3^n x^n}{5^n\left(1+n^2\right)}$ é $R = \dfrac{5}{3}$ e o seu intervalo de convergência é $-\dfrac{5}{3} \leq x \leq \dfrac{5}{3}$.

Exemplo 5.14.7 *Determinar o intervalo e o raio de convergência da série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Solução: Aplicando novamente o critério de D 'Alambert, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\,|x| = \begin{cases} 0, & \text{se } x = 0 \\ \infty, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}.$$

Assim, a série dada converge apenas quando $x = 0$. Portanto, o seu intervalo de convergência é $I = \{0\}$ e $R = 0$ é o seu raio de convergência.

5.14.8 Série de potências centrada em $x = a$

Definição 5.14.9 *Denominamos série de potências centrada em $x = a$ à toda série da forma* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$.

Para obter o raio e o intervalo de convergência das séries em $(x-a)$, basta fazer $z = (x-a)$ e encontrar o intervalo de convergência para a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Após esta etapa, substitui-se z por $(x-a)$ na inequação $-R < z < R$.

Exemplo 5.14.10 *Determinar o raio e o intervalo de convergência da série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2(x-5)^n}{n^2+3}$.

Solução: Seja $z = (x-5)$. Então podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(x-5)^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{n^2+3}.$$

Usando o teorema de D'Alambert temos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{2z^{n+1}}{(n+1)^2+3}}{\dfrac{2z^n}{n^2+3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n^2+3)\,2z^{n+1}}{\left((n+1)^2+3\right)2z^n}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3)\,|z|}{(n^2+2n+4)} = |z|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2+2n+4} = |z|
\end{aligned}
$$

e assim a série converge se $|z| < 1$. Portanto, o seu raio de convergência é $R = 1$. Na sequência, devemos verificar se a série converge para $z = -1$ e $z = 1$.

- Se $z = -1$ temos a série

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,(-1)^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(n^2+3)}
$$

que converge, pelo teorema de Leibnitz.

- Se $z = 1$ temos a série

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2z^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(1)^n}{n^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n^2+3)}.
$$

que converge por comparação com uma $p-$série, pois

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n^2+3)} \le \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}.
$$

Conclusão: O raio de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2z^n}{n^2+3}$ é $R = 1$ e o seu intervalo de convergência é $-1 \le z \le 1$. Substituindo z por $x - 5$, obtemos

$$
4 \le x \le 6,
$$

que é o intervalo de convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2\,(x-5)^n}{n^2+3}$.

5.14.11 Continuidade da soma de uma Série de Funções.

Sabemos do Cálculo 1 que a soma de um número finito de funções contínuas é contínua. Porém, se a soma envolver infinitos termos, seu resultado pode não ser contínuo. Vejamos um exemplo onde isso ocorre.

Exemplo 5.14.12 *Mostre que a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)$ *converge para uma função descontínua.*

Solução: Escrevendo a soma dos $n-$primeiros termos desta s'erie

$$
S_n(x) = \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + \cdots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right)
$$

e eliminando os parênteses, obtemos que $S_n(x) = -x + x^{\frac{1}{2n+1}}$. Assim,

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(-x + x^{\frac{1}{2n+1}}\right) = \begin{cases} 1-x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$ e a série de funções dada é convergente. Note que a soma desta série é uma função descontínua em $x = 0$, enquanto que cada um de seus termos era contínuo. Observe ainda que a série em questão **não é uma série de potências**.

5.14.13 Derivação de uma série de funções contínuas

No Cálculo 1, vimos que a derivada de uma soma finita de funções é igual à soma das derivadas. No entanto, se tivermos uma quantidade infinita de funções, essa propriedade pode deixar de ser válida. Da mesma forma, a derivada de uma série de funções convergente pode ser divergente. Vejamos um exemplo:

Exemplo 5.14.14 *Considere a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4 x)}{n^2}$. *Mostre que esta é uma série convergente e que a série de suas derivadas é divergente.*

Solução: Como $|\sin(n^4x)| \leq 1$ para todo n natural e todo x real, segue que

$$\left|\frac{\sin(n^4x)}{n^2}\right| = \frac{|\sin(n^4x)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

e por comparação com uma p-série convergente $(p = 2)$, podemos concluir que a série dada é absolutamente convergente. Ainda, esta série converge para todo valor real de x. Seja $S(x)$ a soma desta série, ou seja,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4x)}{n^2} = \frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin(2^4x)}{2^2} + \frac{\sin(3^4x)}{3^2} + \frac{\sin(4^4x)}{4^2} + \cdots + \frac{\sin(n^4x)}{n^2} + \cdots$$

derivando termo a termo esta soma, temos que

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{\cos x}{1^2} + \frac{2^4\cos(2^4x)}{2^2} + \frac{3^4\cos(3^4x)}{3^2} + \frac{4^4\cos(4^4x)}{4^2} + \cdots + \frac{n^4\cos(n^4x)}{n^2} + \cdots \\ &= \cos x + 2^2\cos(2^4x) + 3^2\cos(3^4x) + 4^2\cos(4^4x) + \cdots + n^2\cos(n^4x) + \cdots \end{aligned}$$

e aplicando em $x = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} S'(0) &= \cos 0 + 2^2\cos 0 + 3^2\cos 0 + 4^2\cos 0 + \cdots + n^2\cos 0 + \cdots \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 + \cdots \end{aligned}$$

que é uma sequência de somas divergente. Assim, a série de funções converge para $x = 0$, enquanto que a derivada desta série diverge em $x = 0$. Observe que a série em questão **não é uma série de potências**.

Da mesma forma que na derivada, a integração de uma série de funções também exige cuidados. Enquanto que a integral de uma soma finita de funções é igual a soma das integrais, o mesmo pode não ser válido para uma quantidade infinita de funções.

No entanto isto não ocorrerá quando se tratar de séries de potências, ou seja, quando uma série de potências for convergente pode-se efetuar a derivação e a integração termo a termo que as novas séries obtidas por estes processos também serão convergentes, com o mesmo raio de convegência, conforme veremos a seguir.

5.15 Diferenciação e Integração de Séries de Potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n$, cujo domínio é o intervalo de convergência da série. Dentro deste intervalo, a derivação e a integração de f ocorre termo a termo, ou seja, pode-se derivar e integrar cada termo individual da série, de acordo com o resultado abaixo.

Teorema 5.15.1 *Seja* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $R > 0$. *Então a função* f *definida por*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ *e*

(i) $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n \, (x-a)^{n-1}$

(ii) $f"(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + \cdots = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n \, (x-a)^{n-2}$

e assim por diante. Além disso, tomando $C = K + ac_0$, *tem-se que*

(iii) $\displaystyle\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$

Os raios de convergência das séries das equações (i), (ii) e (iii) são todos iguais a R.

Observação 5.15.2 *Embora o teorema anterior diga que o raio de convergência permanece o mesmo quando uma série de potências é diferenciada ou integrada,* **isso não significa que o intervalo de convergência permaneça o mesmo**. *Pode ocorrer de a série inicial convergir em um extremo enquanto que a série diferenciada diverge nesse ponto.*

Exemplo 5.15.3 *Expresse* $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ *como uma série de potências e determine seu raio de convergência.*

Solução: No Exemplo 5.13.4 vimos que, se $x \in (-1, 1)$ então

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Diferenciando cada lado dessa equação, obtemos que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Podemos deslocar o índice do contador trocando n por $n+1$, escrevendo a resposta como

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

De acordo com o Teorema 5.15.1, o raio de convergência da série diferenciada é o mesmo que o raio de convergência da série original, a saber, $R = 1$. O leitor poderá verificar que o intervalo de convergência da série obtida é aberto nos extremos, ou seja, é o intervalo $(-1, 1)$.

Exemplo 5.15.4 *Expresse* $\dfrac{x^5}{(1-3x)^2}$ *como uma série de potências e determine seu intervalo de convergência.*

Solução: No Exemplo 5.15.3 vimos que, para $x \in (-1, 1)$ é válido que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Trocando x por $3x$ em ambos os lados dessa igualdade, obtemos

$$\frac{1}{(1-3x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}3^n(n+1)x^n$$

e essa série converge se $3x \in (-1, 1)$, ou seja, se $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Agora, para obter a série desejada basta multiplicar a série acima por x^5, obtendo

$$\frac{x^5}{(1-3x)^2} = x^5\sum_{n=0}^{\infty}3^n(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}3^n(n+1)x^{n+5}.$$

Outra forma de escrever esta série é

$$\frac{x^5}{(1-3x)^2} = \sum_{n=5}^{\infty}3^{n-5}(n-4)x^n$$

e seu intervalo de convergência é $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Exemplo 5.15.5 *Encontre a representação em séries de potências para* $f(x) = \ln(1-x)$.

Solução: Notemos inicialmente que, pelo Exemplo 5.15.3 obtemos que

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}-x^n$$

e integrando ambos os lados dessa equação, com o auxílio do Teorema 5.15.1, obtemos que

$$f(x) = \int\frac{-1}{1-x}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-x^{n+1}}{n+1} = C - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Para determinar o valor de C, colocamos $x = 0$ nessa equação e encontramos $C - 0 = f(0) = \ln 1 = 0$. Assim

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots .$$

O raio de convergência dessa série é o mesmo que o da série original, $R = 1$, porém o intervalo de convergência é $I = [-1, 1)$. Verifique!

Note o que acontece quando colocamos $x = \frac{1}{2}$ no resultado do Exemplo 5.15.5. Como $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, vemos que

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}.$$

Ou seja, usando esta série de funções obtivemos a soma da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

5.16 Séries de Taylor

Considere uma função $f(x)$ e seja a um real qualquer. Pretende-se encontrar uma série de potências da forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ que convirja para f, ou seja, tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

Em outras palavras, queremos que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \qquad (5.16.1)$$

Assim, precisamos determinar os coeficientes $c_0,\ c_1,\ c_2, \cdots$

- Primeiro determinamos c_0, tomando $x = a$ na função 5.16.1. Obtemos

$$f(a) = c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + c_3(a-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

donde vem

$$f(a) = c_0.$$

- Determinamos a derivada da função 5.16.1 e na sequência aplicamos em $x = a$ para obter c_1, ou seja,

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f'(a) = c_1 + 2c_2(a-a) + 3c_3(a-a)^2 + \cdots + nc_n(a-a)^{n-1} + \cdots$$

donde vem

$$f'(a) = c_1.$$

- Determinamos a segunda derivada da função 5.16.1 e na sequência aplicamos em $x = a$ para obter c_2, isto é,

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

$$f''(a) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(a-a) + 4\cdot 3c_4(a-a)^2 + \cdots + n(n-1)c_n(a-a)^{n-2} + \cdots$$

donde vem

$$f''(a) = 2c_2 \quad \text{ou} \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!}.$$

- Determinamos a terceira derivada da função 5.16.1 e, na sequência $f^{(3)}(a)$ para obter c_3. Temos

$$f^{(3)}(x) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(x-a) + 5\cdot 4\cdot 3c_5(x-a)^2 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \cdots$$

$$f^{(3)}(a) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(a-a) + 5\cdot 4\cdot 3c_5(a-a)^2 + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n(a-a)^{n-3} + \cdots$$

donde vem

$$f^{(3)}(a) = 3\cdot 2c_3 \quad \text{ou} \quad c_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}.$$

- Prosseguindo dessa forma, encontraremos $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, de modo que podemos reescrever a série como segue

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

ou seja, encontramos a série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n .$$

Exemplo 5.16.1 *Desenvolver em série de Taylor a função* $f(x) = \sin x$.

Solução: Primeiro vamos determinar as derivadas de todas as ordens de $f(x) = \sin x$ no ponto a. Temos que

$$\begin{array}{ccc} f(a) = \sin a & f'(a) = \cos a & f''(a) = -\sin a \\ f^{(3)}(a) = -\cos a & f^{(4)}(a) = \sin a & f^{(5)}(a) = \cos a \end{array}$$

A seguir, substituímos na expressão da série de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

e obtemos

$$\sin x = \sin a + \cos a\,(x-a) - \frac{\sin a}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + \frac{\sin a}{4!}(x-a)^4 + \cdots .$$

Esta série pode ser reescrita separando os termos em seno dos termos em cosseno, conforme segue

$$\sin x = \left(\sin a - \frac{\sin a}{2!}(x-a)^2 + \frac{\sin a}{4!}(x-a)^4 + \cdots\right) + \left(\cos a\,(x-a) - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + \cdots\right),$$

e escrevendo em forma de somatório vem que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin a}{2n!}(x-a)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos a}{(2n+1)!}(x-a)^{2n+1} .$$

5.17 Série de Maclaurin

Colin Maclaurin (1698 - 1746) foi um matemático escocês. Para obter o desenvolvimento de uma função em série de Maclaurin basta tomar $a = 0$ na série de Taylor. Desse modo, a série de MacLaurin de uma função f é dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots .$$

Exemplo 5.17.1 *Desenvolver em série de Maclaurin a função* $f(x) = \sin x$.

Solução: No Exemplo 5.16.1 desenvolvemos $f(x) = \sin x$ em série de Taylor. Fazendo $a = 0$ nesse desenvolvimento, obtemos

$$\sin x = \left(\sin 0 - \frac{\sin 0}{2!}(x-0)^2 + \frac{\sin 0}{4!}(x-0)^4 + \cdots\right) + \left(\cos 0\,(x-0) - \frac{\cos 0}{3!}(x-0)^3 + \cdots\right)$$

ou seja,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

ou ainda,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

O leitor poderá verificar, sem grandes dificuldades, que o intervalo de convergência desta série é toda a reta real, ou seja, esta série converge para todo valor real de x.

Ainda, esta série pode ser aplicada para determinar o valor de convergência de séries numéricas. Por exemplo, substituindo $x = \frac{\pi}{6}$ na série acima, temos que

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^7}{7!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^9}{9!} + \cdots = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 5.17.2 *Desenvolver em série de MacLaurin a função* $f(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx$.

Solução: Primeiro dividimos cada termo obtido no Exemplo 5.17.1 por x, encontrando

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} + \cdots$$

A seguir, integramos a série termo a termo e obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{x} dx &= \int dx - \int \frac{x^2}{3!} dx + \int \frac{x^4}{5!} dx - \int \frac{x^6}{7!} dx + \int \frac{x^8}{9!} dx + \cdots \\
&= x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} - 5\frac{x^7}{7!7} + \frac{x^9}{9!9} + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)},
\end{aligned}$$

que converge para todo valor real de x.

Exemplo 5.17.3 *Utilize séries de funções para calcular* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Solução: A partir da série encontrada no Exemplo 5.17.1, temos que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

e então

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Dividindo ambos os lados por x^3, encontramos

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

Portanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \frac{x^6}{9!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} + \cdots\right) = -\frac{1}{6}.$$

Exemplo 5.17.4 *Desenvolver em série de Maclaurin a função $f(x) = \sin(2x)$.*

Solução: Anteriormente, vimos que a série de MacLaurin de $\sin x$ é

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

trocando x por $2x$ nesta série, obtemos

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \\ &= 2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}(x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

Uma das principais aplicações das séries de Taylor e de MacLaurin ocorre na integração de funções. Newton frequentemente integrava funções expressando-as primeiro como uma série de potências e depois integrando a série termo a termo.

Por exemplo, a função $g(x) = e^{-x^2}$ não pode ser integrada pelas técnicas do Cálculo 1, pois sua antiderivada não é uma função elementar. No exemplo a seguir usaremos a ideia de Newton para integrar essa função.

Exemplo 5.17.5 *Expresse $\int e^{-x^2}dx$ como uma série de potências.*

Solução: Primeiro encontraremos a série de MacLaurin para $g(x) = e^{-x^2}$. Embora seja possível usar o método direto, vamos encontrá-la a partir da série de MacLaurin para $f(x) = e^x$. Como $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo n natural, temos que

$$f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

e assim, a série de MacLaurin da função exponencial é

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Pode-se mostrar facilmente que esta série converge para todo x real e que seu intervalo de convergência é infinito. Trocando x por $-x^2$ neste desenvolvimento, obtemos que

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

que também converge para todo x. Agora podemos integrar esta série termo a termo, de acordo com o Teorema 5.15.1 e obter $\forall n \in \mathbb{R}$

$$\int e^{-x^2}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!} = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} - \frac{x^7}{7.3!} + \cdots$$

Exemplo 5.17.6 *Calcule* $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ *com uma precisão de três casas decimais.*

Solução: Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo à expressão obtida no exemplo anterior, temos que

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Bigg|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.$$

Expandindo alguns termos desta série numérica, temos que

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} = 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} + \cdots$$

e observamos que a partir do sexto termo desta expansão, todos os demais possuem módulo menor que $\frac{1}{1320} < 0,001$ e assim, ao somarmos os cinco primeiros termos da expansão teremos uma aproximação com precisão de até 3 casa decimais

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0,7475.$$

Exemplo 5.17.7 *Utilize desenvolvimento em séries de MacLaurin para calcular*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) - \sin x}{x^3 \cos x}.$$

Solução: Começamos com o desenvolvimento em série de potências de $f(x) = \arctan x$. Como

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

é mais simples iniciar pelo desenvolvimento de f'. No Exemplo 5.18.1 obtemos que

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

trocando x por x^2, segue que

$$f'(x) = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

então, integrando termo a termo, temos que

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad (I)$$

(a constante na expansão da função arco tangente é zero).

Ainda, sabemos que o desenvolvimento em série para o seno é

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (II)$$

Tomando a diferença entre as equações *(I)* e *(II)* obtemos

$$\arctan x - \sin x = x^3\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{3!}\right)+x^5\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots+x^{2n+1}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\right)+\cdots$$

Podemos obter a série de MacLaurin para $\cos x$ facilmente, basta derivar termo a termo a série de $\sin x$ desenvolvida acima, obtendo

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$

Agora podemos tomar o quociente desejado e simplificar, para obter que

$$\begin{aligned}\frac{\arctan(x)-\sin x}{x^3\cos x} &= \frac{x^3\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{3!}\right)+x^5\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots+x^{2n+1}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\right)+\cdots}{x^3\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)}\\ &= \frac{\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{3!}\right)+x^2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots+x^{2n-2}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}\right)+\cdots}{\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\right)}\end{aligned}$$

Finalmente, podemos aplicar o limite em ambos os lados dessa igualdade e encontrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-\sin x}{x^3\cos x}=\frac{\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{3!}\right)+0}{1+0}=\frac{-1}{3}+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}.$$

5.18 Fórmula geral do binômio de Newton

Suponhamos que o interesse é o desenvolvimento do binômio $(a+b)^n$, para n inteiro positivo. Do desenvolvimento geral do binômino de Newton vem que

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^k a^{n-k}b^k+\cdots+C_n^n b^n.$$

Como

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-(k-1))\,(n-k)!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!},$$

podemos escrever

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n\,(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n.$$

Tomando $a=1$ e $b=x$ vem que

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n\,(n-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}x^k+\cdots+x^n,$$

que é um desenvolvimento finito. Porém, se n não for um inteiro positivo ou zero, é conveniente desenvolver o binômio $(1+x)^n$ em série de Maclaurin. Desse modo teremos o desenvolvimento infinito

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1+nx+\frac{n\,(n-1)}{2!}x^2+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}x^3+\cdots+\\ &\quad+\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k+\cdots \qquad (5.18.1)\end{aligned}$$

Esta série, chamada de série binomial, é um caso particular da Série de MacLaurin. Como o leitor poderá verificar, através do Critério de D'Alembert, a série binomial é absolutamente convergente para todo x real tal que $|x| < 1$. Pode ser provado que esse desenvolvimento é verdadeiro para todo n. A prova pode ser encontrada nos livros citados na bibliografia. Escrevendo em forma de somatório, temos que

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k \qquad \text{se} \qquad |x| < 1.$$

Exemplo 5.18.1 *Desenvolver em série de funções a função* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Solução: Temos que

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}.$$

Portanto, basta substituir $n = -1$ na fórmula da série binomial. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 + (-1)x + \frac{-1(-1-1)}{2!}x^2 + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 + \cdots \\
&\quad + \frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-k+1)}{k!}x^k + \cdots \\
&= 1 - x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{-6}{3!}x^3 + \cdots + \frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-k+1)}{k!}x^k + \cdots \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.
\end{aligned}$$

Exemplo 5.18.2 *Expresse como uma série de potências a função* $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Solução: Vamos analisar inicialmente a função $\ln(x+1)$. A sua derivada é igual a $\dfrac{1}{x+1}$, e no exemplo anterior mostramos que

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

portanto, devemos integrar ambos os membros da igualdade, obtendo

$$\ln(x+1) = \int \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Como queremos $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x}$, devemos dividir todos os membros por x, donde,

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}.$$

Exemplo 5.18.3 *Desenvolver em série de funções a função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Solução: Temos que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Portanto, basta substituir $n = -\frac{1}{2}$ na fórmula da série binomial. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \cdots \\
&+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + \cdots \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \cdots \\
&+ \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots(\frac{1-2k}{2})}{k!}x^k + \cdots \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}x^3 + \cdots + (-1)^k\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2k-1)}{2^k k!}x^k + \cdots
\end{aligned}$$

Exemplo 5.18.4 *Desenvolver em série de funções a função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solução: Podemos aproveitar o resultado do Exemplo 5.18.3 substituindo x por $(-x^2)$. Teremos então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+(-x^2)}} &= 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}(-x^2)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}(-x^2)^3 + \cdots \\
&+ (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}(-x^2)^n + \cdots \\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!}x^{2n} + \cdots
\end{aligned}$$

Exemplo 5.18.5 *Desenvolver em séries de funções a função* $f(x) = \arcsin x$.

Solução: Como a derivada da função $f(x) = \arcsin x$ é $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ podemos aproveitar o resultado do Exemplo 5.18.4 e integrá-lo termo a termo, obtendo

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int dx + \frac{1}{2}\int x^2 dx + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!}\int x^4 dx + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}\int x^6 dx + \cdots \\
&+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!}\int x^{2n}dx + \cdots
\end{aligned}$$

que resulta em

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2 2!5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!7}x^7 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots + C$$

ou seja

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1} + \frac{\pi}{2}.$$

Observação 5.18.6 *Vale ressaltar que o desenvolvimento obtido em todos os exemplos anteriores é válido apenas para* $|x| < 1$.

5.19 Exercícios Gerais

1. Determine os quatro primeiros termos de cada uma das sequências dadas abaixo. Calcule também $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, caso exista.

   $(a)\ u_n = \frac{n}{4n+2}$ $\quad (b)\ u_n = \frac{(-1)^n}{5-n}$ $\quad (c)\ u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ $\quad (d)\ u_n = \frac{100n}{n^{\frac{3}{2}}+4}$

   $(e)\ u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$ $\quad (f)\ u_n = \frac{\ln n}{n}$ $\quad (g)\ u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ $\quad (h)\ u_n = \frac{n^2}{5n+3}$

   $(i)\ u_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ $\quad (j)\ u_n = \arctan n$ $\quad (k)\ u_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$ $\quad (l)\ u_n = \frac{n^2}{2^n}$

   $(m)\ u_n = \frac{3n}{e^{2n}}$ $\quad (n)\ u_n = 1+(-1)^n$ $\quad (o)\ u_n = \sqrt[n]{n}$ $\quad (p)\ u_n = 7^{-n}3^{n-1}$

2. Dados os termos abaixo, determine uma expressão para as sequências.

   $(a)\ \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \cdots\right\}$ $\quad (b)\ \left\{\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{-8}{81}, \cdots\right\}$ $\quad (c)\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \cdots\right\}$ $\quad (d)\ \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \cdots\right\}$

3. Classifique, se possível, as sequências abaixo quanto à sua monotonicidade.

   $(a)\ u_n = \frac{n}{2n-1}$ $\quad (b)\ u_n = n-2^n$ $\quad (c)\ u_n = ne^{-n}$ $\quad (d)\ u_n = \frac{5^n}{2^{n^2}}$

   $(e)\ u_n = \frac{10^n}{(2n)!}$ $\quad (f)\ u_n = \frac{n^n}{n!}$ $\quad (g)\ u_n = \frac{1}{n+\ln n}$ $\quad (h)\ u_n = \frac{n!}{3^n}$

4. Suponha que u_n seja uma sequência monótona tal que $1 \leq u_n \leq 5$. Esta sequência deve convergir? O que mais pode ser dito sobre o seu limite?

5. Suponha que u_n seja uma sequência monótona tal que $u_n \leq 5$. Esta sequência deve convergir? O que mais pode ser dito sobre o seu limite?

6. Pode-se obter aproximações de $\sqrt{k}$ utilizando a sequência recursiva $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{k}{u_n}\right)$, onde $u_1 = \frac{1}{2}$.

   (a) Encontre as aproximações u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 para $\sqrt{10}$.

   (b) Mostre que, se $L = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, então $L = \sqrt{k}$.

7. Uma das mais famosas sequências é a sequência de Fibonacci (1710-1250), definida pela recorrência $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, onde $u_1 = u_2 = 1$.

   (a) Determine os dez primeiros termos desta sequência.

   (b) Os termos da nova sequência $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ dão uma aproximação para o igualmente famoso número de ouro (ou razão áurea), denotado por τ. Determine uma aproximação dos cinco primeiros termos dessa nova sequência.

   (c) Supondo que $\tau = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, mostre que $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

8. Encontre o termo geral da sequência de somas parciais de cada uma das séries abaixo. A seguir, determine se a série converge ou diverge, obtendo o valor de sua soma, se possível.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(4n-3)(4n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1.2.3.4.5.\cdots.n.(n+2)}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n^3+3n^2+2n}$

9. Analise se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique seus argumentos, exibindo contra-exemplos para as afirmações falsas ou provando as afirmações verdadeiras.

(a) Toda sequência limitada é convergente.

(b) Toda sequência limitada é monótona.

(c) Toda sequência convergente é necessariamente monótona.

(d) Toda sequência monótona decrescente converge para zero.

(e) Se u_n for decrescente e $u_n > 0$ para todo $n \in N$, então u_n é convergente.

(f) Se $-1 < q < 1$, então $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(g) Se a sequência u_n converge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ também converge.

(h) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ também converge.

(i) Toda série alternada convergente é condicionalmente convergente.

(j) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^3+1)^2}{(n^4+5)(n^2+1)}$ é uma série numérica convergente.

(k) Desenvolvendo a função $g(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ em série de potências obtém-se $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{n!(2n+3)}$.

(l) A série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)3^n x^n$ é convergente no intervalo $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e sua soma é igual a $S = \frac{-3x}{1+3x}$.

(m) Se a sequência u_n converge então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ também converge.

(n) O raio de convergência da série da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3x-5)^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$ é infinito.

(o) A série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 9^{1-n}$ é convergente e sua soma é igual a $\frac{36}{5}$.

(p) O critério da integral garante que $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ converge.

10. Encontre o termo geral da soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2-1}$ e verifique se ela é convergente.

11. Encontre a soma das séries abaixo, se possível.

$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ $(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{(5n+2)(5n+7)}$ $(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+8}$ $(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

12. Usando o teste de comparação verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ $(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ $(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ $(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3+1}$

$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}$ $(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sen(n)|}{2^n}$ $(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2+n)!}$ $(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5}}$

$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+5}}$ $(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n+5}}$ $(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^3+n+1}$ $(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$

$(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$ $(n) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n4^{2n}}{n5^n}$ $(o) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n^2}$ $(p) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$

$(q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1+3^n}$ $(r) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ln n}{n^3+1}$

13. Usando o teste de D 'Alambert verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 2^n}$ $(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$ $(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$ $(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(n^2+2)}$ $(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n\,(2+n)!}$

$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5}$ $(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n4^n}$ $(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2+n+1}$

$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$ $(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+2}$ $(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)^3}$ $(m) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$

14. Usando o teste de Cauchy, verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^{\frac{n}{2}}}$ $(b) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$ $(c) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2 2^n}\right)^n$ $(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4n}-n}{\sqrt{n^{10n}+1}}$

15. Usando o teste da integral verifique se as séries abaixo são convergentes ou divergentes.

$(a) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ $(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ $(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ $(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ $(f) \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ $(g) \sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}$ $(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan n}}{n^2+1}$

$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+7}$ $(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}$ $(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$

16. Verifique se as séries abaixo são absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n!}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{n!}$

$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n+1}}$ $(f)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+2n}$

$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n!}$ $(h)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+1}{n^3}$ $(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^n}{n!}$

$(j)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}+n}$ $(k)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^n2^n}{(2n-5)^n}$ $(l)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^4}{e^n}$

$(m)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ $(n)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^3+3}$ $(o)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n^2-n}}$

17. Classifique as séries numéricas abaixo como absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente, justificando sua resposta.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2^{3n+4}-n)}{e^nn^{3n}}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+n+1}$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$

$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)!}{2.4.6\cdots.(2n)}$ $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 5^{4n+1}}{n^{3n}}$ $(f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 7^{3n+1}}{(\ln n)^n}$

$(g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin(n\pi)+n}{n^2+5}$ $(h)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n)+\sin(n)}{n^3+\sqrt{n}}$ $(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{2n}}{n^2e^n-1}$

18. Determine o raio e o intervalo de convergência das séries de potências abaixo.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}$ $(c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x-2)^n}{n!}$

$(d)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nn4^nx^n$ $(e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^nx^n}{\sqrt[4]{n}}$ $(f)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{4^n\ln n}$

$(g)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$ $(h)\ \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}(x-4)^n$ $(i)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+2)^n}{n2^n}$

$(j)\ \sum_{n=1}^{\infty}n!(2x-1)^n$ $(k)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$ $(l)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$

$(m)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x-5)^n}{n^2+1}$ $(n)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n(x+2)^n}{(2n-5)^n}$ $(o)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^4(x-1)^n}{e^n}$

$(p)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{n^2+1}$ $(q)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(x-1)^{2n}}{n^3+3}$ $(r)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5.7.\cdots.(2n-1)x^n}{3.6.9.\cdots.3n}$

19. Seja $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$. Determine os intervalos de convergência para f, f' e f”.

20. A partir da soma da série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$, para $|x|<1$, encontre as somas das séries

abaixo.

$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ $(b)\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ $(d)\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n}$

$(e)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-n}{2^n}$ $(f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $(g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ $(h)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$

21. Encontre uma representação em série de potências para as funções abaixo.

$(a)\ f(x)=\frac{1}{1+x^3}$ $(b)\ f(x)=\frac{1}{4+x^3}$ $(c)\ f(x)=\frac{x}{9+4x^2}$

$(d)\ f(x)=\frac{x^2}{(1-2x)^2}$ $(e)\ f(x)=\frac{x^3}{(x-2)^2}$ $(f)\ f(x)=\ln(5-x)$ $(g)\ f(x)=x\ln(x^2+1)$

22. Expresse a integral indefinida como uma série de potências

$(a)\ \int \frac{x}{1-x^8}dx$ $(b)\ \int \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ $(c)\ \int \frac{x-\arctan x}{x^3}dx$ $(d)\ \int \arctan x^2 dx$

23. Utilize a representação em série de potências de $f(x)=\arctan x$ para provar a seguinte expressão para π como soma de uma série numérica: $\pi = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$.

24. Mostre que a função $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ é solução da equação diferencial $f'(x)=f(x)$.

25. Mostre que as funções $f_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ e $f_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ são soluções da equação diferencial $f"(x)+f(x)=0$.

26. Encontre a soma das seguintes séries

$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$ $(b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$ $(c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ $(d)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n n!}$

27. Encontre o raio e o domínio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(x-2)^n}{5^n(1+n^2)}$.

28. Determine o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-5)^n}{7^n n}$.

29. Mostre que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{3^{2n}}$ é convergente no intervalo $(-3,3)$ e que sua soma é igual a $S=\frac{9}{9+x^2}$.

30. Determine o intervalo de convergência da série de potências que representa a função $f(x)=\frac{4}{x^2}$ expandida em torno de $a=1$.

31. Desenvolva a função $f(x)=\cosh(x^3)$ em série de MacLaurin, determinando o termo geral de sua expansão e o seu intervalo de convergência.

32. Determine o intervalo e o raio de convergência da série de funções que representa a função $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x}$.

33. Usando séries de Maclaurin, mostre que $\int \cos x dx = \sin x + k$.

34. Desenvolva a função $f(x) = \displaystyle\int_0^x t^2 \ln(1+4t^2)dt$ em séries de MacLaurin e determine o seu intervalo de convergência.

35. Desenvolver em série de Taylor e Maclaurin as funções:
(a) $f(x) = \sin^2 x$ (b) $f(x) = x^2 \sin 2x$ (c) $f(x) = e^{3x}$ (d) $f(x) = e^{-x^2}$
(e) $f(x) = \cos 2x$ (f) $f(x) = \dfrac{\sin(x^5)}{x^3}$ (g) $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ (h) $f(x) = x^3 e^{x^2}$

36. Utilize desenvolvimento em séries de MacLaurin para calcular os seguintes limites.
(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x + 2x^2 - 1}{x^4}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) + \cos(x^3) - x^2 - 1}{x^6}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - 3\sin(2x^2)}{x^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^3) - e^{x^3} + 1}{x^6}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(x^2) + e^{x^4} - 1}{\ln(1+x^4)}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x^2) - e^{x^4}}{x\sin(x^3)}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^8) + \cos(3x^4) - 1}{e^{x^8} - 1}$

37. Utilize séries numéricas e/ou séries de potências para encontrar os valores reais de k que tornam válidas cada uma das igualdades abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{nk} = 9$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^4} - \cos(x^2)}{x^4} = k$

38. Desenvolver em série de Maclaurin as seguintes funções:
(a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $f(x) = \displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx$ (f) $f(x) = \displaystyle\int e^{-x^2} dx$
(g) $f(x) = \displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ (h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (i) $f(x) = \arcsin x$
(j) $f(x) = \arccos x$ (k) $f(x) = \arctan x$ (l) $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

39. Calcule a integral $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$ utilizando expansão em série de potências. Determine o termo geral desta expansão ou faça o seu desenvolvimento com pelo menos 5 termos não nulos.

5.20 Respostas

1. .
   $(a)\ \frac{1}{4}$ $(b)\ 0$ $(c)\ 0$ $(d)\ 0$ $(e)\ \nexists$ $(f)\ 0$ $(g)\ \nexists$ $(h)\ \nexists$

   $(i)\ \nexists$ $(j)\ \frac{\pi}{2}$ $(k)\ e^{-2}$ $(l)\ 0$ $(m)\ 0$ $(n)\ \nexists$ $(o)\ 1$ $(p)\ 0$

2. $(a)\ u_n = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ $(b)\ u_n = \frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{3^n}$ $(c)\ u_n = \frac{2n-1}{2n}$ $(d)\ u_n = \frac{n-1}{n^2}$

3. .
   (a) *decrescente* (b) *decrescente* (c) *decrescente* (d) *decrescente*
   (e) *decrescente* (f) *crescente* (g) *decrescente* (h) *não-decrescente*

4. A sequência converge, pois é uma sequência monótona limitada. Seu limite L é tal que $1 \leq L \leq 5$.

5. Se a sequência for monótona crescente, será convergente, com limite $L \leq 5$. Porém, se a sequência for monótona decrescente nada podemos afirmar.

6. Dica para o item (b): Note que se $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$. Com isso, aplica-se limites em ambos lados da relação de recorrência dada e obtém-se que $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{k}{L}\right)$. Agora basta isolar L.

7. Dica para o item (c): Note que se $\tau = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n-1}}{u_n} = \dfrac{1}{\tau}$. Com isso, aplica-se limites em ambos lados da relação de recorrência dada e obtém-se que $\tau = 1 + \dfrac{1}{\tau}$. Agora basta isolar τ.

8. .
   $(a)\ S_n = \frac{n}{2n+1}$. A série converge para $\frac{1}{2}$ $(b)\ S_n = \frac{8n}{4n+1}$. A série converge para 2

   $(c)\ S_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. A série converge para 1 $(d)\ S_n = -\ln(n+1)$. A série diverge

   $(e)\ S_n = \frac{1}{3} - \frac{2^n}{3.5^n}$. A série converge para $\frac{1}{3}$ $(f)\ S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. A série converge para 1

   $(g)\ S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$. A série converge para $\frac{1}{2}$ $(h)\ S_n = \frac{5}{2} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Converge para $\frac{5}{2}$

9. .
   $(a)\ F$ $(b)\ F$ $(c)\ F$ $(d)\ F$ $(e)\ V$ $(f)\ V$ $(g)\ F$ $(h)\ F$
   $(i)\ F$ $(j)\ F$ $(k)\ V$ $(l)\ V$ $(m)\ V$ $(n)\ V$ $(o)\ V$ $(p)\ F$

10. $S_n = 2 - \dfrac{2}{2n+1}$. A série converge para 2.

11. $(a)\ S = \dfrac{1}{4}$ $(b)\ S = \dfrac{1}{7}$ $(c)\ S = \dfrac{7}{24}$ (d) A série diverge

12. Legenda: C (convergente), D (divergente), I (inconclusivo):
    $(a)\ C$ $(b)\ C$ $(c)\ C$ $(d)\ D$ $(e)\ D$ $(f)\ C$ $(g)\ C$ $(h)\ C$ $(i)\ C$
    $(j)\ D$ $(k)\ C$ $(l)\ C$ $(m)\ D$ $(n)\ D$ $(o)\ C$ $(p)\ D$ $(q)\ C$ $(r)\ C$

13. Legenda: C (convergente), D (divergente), I (inconclusivo):
    $(a)\ C$ $(b)\ D$ $(c)\ C$ $(d)\ I$ $(e)\ D$ $(f)\ C$ $(g)\ I$ $(h)\ C$ $(i)\ I$ $(j)\ C$ $(k)\ D$ $(l)\ D$ $(m)\ C$

14. Legenda: C (convergente), D (divergente), I (inconclusivo):
$(a)\ C \quad (b)\ C \quad (c)\ C \quad (d)\ C$

15. Legenda: C (convergente), D (divergente), I (inconclusivo):
$(a)\ C \quad (b)\ D \quad (c)\ D \quad (d)\ D \quad (e)\ C \quad (f)\ C \quad (g)\ C \quad (h)\ C \quad (i)\ D \quad (j)\ C \quad (k)\ C$

16. .

(a) absolutamente	(b) absolutamente	(c) absolutamente
(d) absolutamente	(e) divergente	(f) absolutamente
(g) absolutamente	(h) condicionalmente	(i) divergente
(j) condicionalmente	(k) divergente	(l) absolutamente
(m) condicionalmente	(n) absolutamente	(o) condicionalmente

17. .

(a) absolutamente	(b) condicionalmente	(c) condicionalmente
(d) absolutamente	(e) absolutamente	(f) absolutamente
(g) divergente	(h) absolutamente	(i) divergente

18. I é o intervalo de convergência e R é o raio de convergência

$(a)\ R=1,\ I=[-1,1)$	$(b)\ R=1,\ I=[-1,1]$	$(c)\ R=\infty,\ I=(-\infty,\infty)$
$(d)\ R=\frac{1}{4},\ I=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$	$(e)\ R=\frac{1}{2},\ I=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$	$(f)\ R=4,\ I=(-4,4]$
$(g)\ R=3,\ I=(-5,1)$	$(h)\ R=1,\ I=(3,5)$	$(i)\ R=2,\ I=(-4,0]$
$(j)\ R=0,\ I=\{\frac{1}{2}\}$	$(k)\ R=3,\ I=[-3,3]$	$(l)\ R=\frac{1}{4},\ I=[1,\frac{3}{2}]$
$(m)\ I=[4,6),\quad R=1$	$(n)\ I=(-4,0),\quad R=2$	$(o)\ I=(1-e,1+e),\quad R=e$
$(p)\ I=[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}],\quad R=\frac{1}{2}$	$(q)\ I=[0,2],\quad R=1$	$(r)\ I=(\frac{-3}{2},\frac{3}{2}),\quad R=\frac{3}{2}$

19. $[-1,1]$, $[-1,1]$ e $(-1,1)$, respectivamente.

20. .

$(a)\ \dfrac{1}{(1-x)^2} \quad (b)\ \dfrac{x}{(1-x)^2} \quad (c)\ 2 \quad (d)\ \dfrac{2x^2}{(1-x)^3}$

$(e)\ 4 \quad (f)\ 6 \quad (g)\ -\ln(1+x) \quad (h)\ 2\ln\frac{3}{2}$

21. .

$(a)\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} \qquad (b)\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{3n}}{4^{n+1}}$

$(c) f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{9^{n+1}} \qquad (d)\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}nx^{n+1}$

$(e)\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n+2}}{2^{n+1}} \qquad (f)\ f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}$

$(g)\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+3}}{n+1}$

22. .

$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{8n+2}}{8n+2}+K \qquad (b)\ -\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{n(2n-1)}+K \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{4n^2-1}+K$

$(d)\ \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)}+K$

23. Dica: Mostre que $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ e depois faça $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

24. Dica: derive termo a termo, desloque o índice do somatório e substitua na equação dada.

25. Dica: derive termo a termo, desloque o índice do somatório e substitua na equação dada.

26. $(a)\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad (b)\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \qquad (c)\ e^3 - 1 \qquad (d)\ e^{\frac{3}{5}}$

27. Intervalo de convergência: $\dfrac{-1}{2} \leq x \leq \dfrac{9}{2}$ e raio de convergência $R = \dfrac{5}{2}$.

28. Intervalo de convergência: $\dfrac{-2}{3} \leq x < 4$.

29. Dica: Note que a série dada é geométrica!

30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4n+4)(x-1)^n$, intervalo de convergência: $0 < x < 2$.

31. $\cosh(x^3) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{6n}}{(2n)!}$, que converge para todo $x \in \mathbb{R}$

32. Desenvolvimento em séries de MacLaurin : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{n!}$ que converge para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, o raio de convergência é infinito.

33. Basta integrar termo a termo.

34. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 4^{n+1} x^{2n+5}}{(n+1)(2n+5)}$ converge para $\dfrac{-1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$.

35. Desenvolvimento em séries de Maclaurin

$(a)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \qquad (b)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n+1} x^{2n+3}}{(2n+1)!} \qquad (c)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^n x^n}{n!}$

$(d)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \qquad (e)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \qquad (f)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{10n+2}}{(2n+1)!}$

$(g)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n-2}}{(2n)!} \qquad (h)\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+3}}{n!}$

36. $(a)\ \dfrac{2}{3} \quad (b)\ -\dfrac{2}{3} \quad (c)\ 2 \quad (d)\ -5 \quad (e)\ -1 \quad (f)\ 2 \quad (g)\ -3 \quad (h)\ -\dfrac{7}{2}$

37. $(a)\ k = \ln\dfrac{8}{9} \qquad (b)\ k = -\dfrac{1}{2}$

38. Desenvolvimento em Séries de MacLaurin

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$

(b) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 1.3.5.\cdots.(2n-1)x^n}{2^n n!}$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

(d) $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3.5.\cdots.(2n-1)x^{2n}}{2^n n!}$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + C$

(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + C$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$

(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2x^{2n+1}}{2n+1}$

(i) $x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3.5.\cdots.(2n-1)x^{2n+1}}{(2n+1)2^n n!}$

(j) $-x - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3.5.\cdots.(2n-1)x^{2n+1}}{(2n+1)2^n n!}$

(k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

(l) $1 + \dfrac{1}{3}x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2.5.8.\cdots.(3n-4)x^n}{3^n n!}$

39. $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1.4.7.10.\cdots.(3n-2)t^{4n+1}}{(4n+1).3^n n!}$