Série
Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo

**Volume 1**

Tecnologias educativas
[recurso eletrônico]

# cálculo diferencial e integral 1

Gilmar Bornatto
Nadia Sanzovo
(Organizadores)

Pato Branco
UTFPR Câmpus Pato Branco
2017

**Reitor:** Luiz Alberto Pilatti.

**Vice-Reitora:** Vanessa Ishikawa Rasoto.

**Diretor do Câmpus Pato Branco:** Idemir Citadin.

**Editor Científico da Editora UTFPR Câmpus Pato Branco:** Jorge Jamhour.

Série “Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo”
Volume 1

# Tecnologias educativas [recurso eletrônico]:

# cálculo diferencial e integral 1

Gilmar Bornatto
Nadia Sanzovo
(Organizadores)

Pato Branco
UTFPR Câmpus Pato Branco
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

T255

Tecnologias educativas [recurso eletrônico]: cálculo diferencial e integral 1. / Gilmar Bornatto, Nadia Sanzovo (orgs.). – Curitiba: PUCPR : 2017; Pato Branco: UTFPR Câmpus Pato Branco, 2017.

v. 1; 151 p.: Il. – (Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo)

ISBN: 978-85-99584-08-8

1. Tecnologia educacional. 2. Educação – Metodologia. 3. Inovações educacionais. 4. TIC 5. Ensino – Meios auxiliares. I. Bornatto, Gilmar, org. II. Sanzovo, Nadia, org. III. Título. IV. Série.

CDD (23. ed.) 372.3

Ficha Catalográfica elaborada por
Maria Juçara Vieira da Silveira CRB9/1359
Biblioteca da UTFPR Câmpus Pato Branco

**Organizadores**
Gilmar Bornatto
PUCPR/ Curitiba – Brasil

Nadia Sanzovo
UTFPR/ Pato Branco – Brasil

**Colaboração Científica**
Joaquim José Jacinto Escola
UTAD/ Vila Real – Portugal

**Colaboração Técnica**
Anderson Mendes
Bacharelado em Engenharia da Computação
Felix Penna
Licenciatura em Matemática

**Composição e diagramação final**
Jorge Jamhour
LabEditor – UTFPR Câmpus Pato Branco

**UTFPR Câmpus Pato Branco**
Via do Conhecimento, km 01
Pato Branco – PR 85503-390

## Série

LABORATÓRIO VIRTUAL E MODELO MULTIPLICADOR POR GRUPO

Perspectivas para o desenvolvimento de competências formativas, utilizando as Tecnologias da Informação e da Comunicação – TIC.

*Organização:*

Gilmar Bonatto

Nadia Sanzovo – UTFPR/ Pato Branco – Brasil

*Colaboração Científica:*

Joaquim José Jacinto Escola – UTAD/ Vila Real – Portugal

*Colaboração Técnica (Pesquisa, seleção e lincagem de material Web):*

Anderson Mendes – Bacharelado em Engenharia da Computação

Felix Penna – Licenciatura em Matemática

*Como citar (NBR-6023):*

BORNATTO, Gilmar; SANZOVO, Nadia. (org.). **Tecnologias educativas [recurso eletrônico]** : cálculo diferencial e integral 1. Série Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo, v. 1. Pato Branco: UTFPR. 2017. 151 p. ISBN: 978-85-99584-08-8 Disponível em: <http://pb.utfpr.edu.br/labvirtual/inicio.html>. Acesso em: dd mmm AAAA.

# Apresentação

Pensar a educação em todos os níveis na Sociedade Digital significa fazer mudanças, reestruturações curriculares, de espaços e tempos da aprendizagem, de modo a aproveitar o potencial humano de quem ensina, aprende e investiga, utilizando para tal as melhores pedagogias e tecnologias disponíveis.

A emergência de uma nova cultura digital, aliada à evolução tecnológica permite à educação, nesta proposta, educação regular, aliar as possibilidades tanto da educação a distância –EAD – quanto da presencial, em regime colaborativo e em rede.

Apresentamos a Série LABORATÓRIO VIRTUAL E MODELO MULTIPLICADOR POR GRUPO, que engloba as perspectivas para o desenvolvimento de competências formativas, utilizando as Tecnologias da Informação e da Comunicação – TIC, como Organizadora Nadia Sanzovo (UTFPR/Brasil, Câmpus Pato Branco) e Colaborador Joaquim José Jacinto Escola (UTAD/Portugal), como produto do doutoramento em Ciências da Educação do Programa de Pós-Graduação da UTAD (Universidade Trás-os-Montes e Alto Douro/Portugal), da primeira e Orientação do segundo.

Apresentamos também o Volume 1, organizado por Gilmar BORNATTO e Nadia SANZOVO, com o título "Tecnologias Educativas [recurso eletrônico]: Cálculo Diferencial e Integral 1", disponível em:

<http://moodle.pb.utfpr.edu.br/moodle/course/index.php?categoryid=108>

A proposta desta Série é no sentido de propor uma alternativa didático-metodológica para trabalhar as disciplinas ditas "hard" no contexto curricular em nível superior, num rearranjo "Conteúdo – Flipped classroom (Sala Invertida) – Metodologia colaborativa (Frageli, 2015)".

Este primeiro volume conta, além do trabalho dos organizadores, com a colaboração técnica (pesquisa, seleção e lincagem na Web) dos Acadêmicos da UTFPR: Anderson Mendes (Bacharelado em Engenharia da Computação) e Felix Penna (Licenciatura em Matemática).

É uma proposta a ser posta em prática, para, numa perspectiva de ação-reflexão-ação (SCHÖN, 1980) possibilitar a crítica no sentido de receber sugestões de melhoria e, dessa forma, contribuir para a melhoria da qualidade da aprendizagem dos estudantes e dos índices quali-quanti dos cursos.

Pato Branco, inverno de 2016.

Nadia Sanzovo

# *AULA 01*

# 1 - FUNÇÕES

## 1.1 - Conceito matemático de função

***Definição 1:*** Domínio da função é o conjunto de todos os valores dados para a variável independente.

***Definição 2:*** Imagem da função é o conjunto de todos os valores correspondentes da variável dependente.

Como, em geral, trabalhamos com funções numéricas, o domínio e a imagem são conjuntos numéricos, e podemos definir com mais rigor o que é uma função matemática utilizando a linguagem da teoria dos conjuntos.

Para isso, temos que definir antes o que é um produto cartesiano e uma relação entre dois conjuntos.

***Definição 3:*** *Produto cartesiano:* Dados dois conjuntos não vazios $A$ e $B$, denomina-se produto cartesiano (indica-se: $A \times B$) de $A$ por $B$ o conjunto formado pelos pares ordenados nos quais o primeiro elemento pertence a $A$ e o segundo pertence a $B$.

**(Eq.1)** $A \times B = \{(x, y) / \ x \in A \text{ e } y \in B\}$.

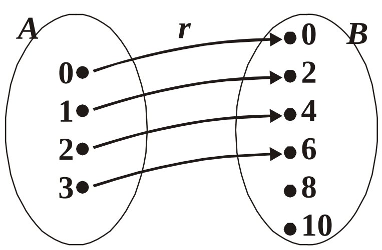
***Definição 4:*** *Relação:* Dados dois conjuntos $A$ e $B$, dá-se o nome de relação $r$ de $A$ em $B$ a qualquer subconjunto de $A \times B$.

**(Eq.2)** $r$ é relação de $A$ em $B \Leftrightarrow r \subset A \times B$.

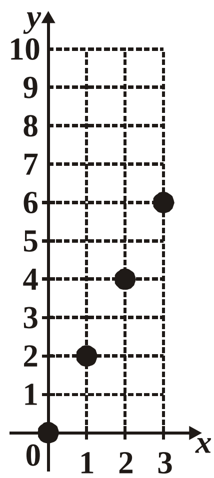
*Exemplo:*

Sejam os conjuntos $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,2,4,6,8,10\}$ e a relação $r$ de $A$ em $B$, tal que $y = 2x$, $x \in A$ e $y \in B$. Escrever os elementos dessa relação $r$.

Como $x \in A$:
$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0) \in A \times B$;
$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1,2) \in A \times B$;
$x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (2,4) \in A \times B$;
$x = 3 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (3,6) \in A \times B$.
Então, $r = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6)\}$.




[Fig.1]: Representação da relação por diagrama.




[Fig.2]: Representação da relação por sistema cartesiano.

**Obs.:** Podemos observar que, numa relação $r$ de $A$ em $B$, o conjunto $r$ é formado pelos pares $(x, y)$ em que o elemento $x \in A$ é associado ao elemento $y \in B$ mediante uma lei de associação (no caso, $y = 2x$).

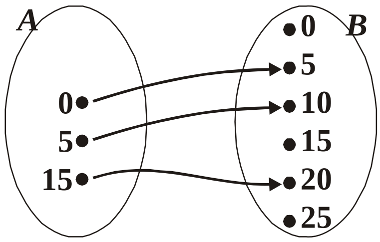
## 1.2 - Definição de função

***Definição 5:*** Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos não vazios e $f$ uma relação de $A$ em $B$. Essa relação $f$ é uma função de $A$ em $B$ quando a cada elemento $x$ do conjunto $A$ está associado um e apenas um elemento $y$ do conjunto $B$.

Nos exercícios a seguir, verifique se as relações representam função de $A$ em $B$. Juntifique sua resposta e apresente o diagrama da relação.

*Exemplos:*

**1)** Dados os conjuntos $A = \{0,5,15\}$ e $B = \{0,5,10,15,20,25\}$, seja a relação de $A$ em $B$ expressa pela fórmula $y = x + 5$, com $x \in A$ e $y \in B$.




$x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (0,5) \in A \times B$;

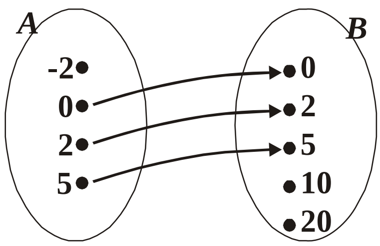
$x = 5 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow (5,10) \in A \times B$;

$x = 15 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow (15,20) \in A \times B$.

- Todos os elementos de $A$ estão associados a elementos de $B$.
- A cada elemento de $A$ está associado um único elemento de $B$.

Neste caso, a relação de $A$ em $B$ expressa pela fórmula $y = x + 5$ é uma função de $A$ em $B$.

**2)** Dados os conjuntos $A = \{-2,0,2,5\}$ e $B = \{0,2,5,10,20\}$, seja a relação de $A$ em $B$ expressa pela fórmula $y = x$, com $x \in A$ e $y \in B$.




$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0) \in A \times B$;

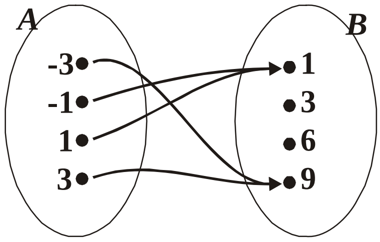
$x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (2,2) \in A \times B$;

$x = 5 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (5,5) \in A \times B$.

- O elemento $-2$ de $A$ não está associado a nenhum elemento de $B$.

Neste caso, a relação de $A$ em $B$ não é uma função de $A$ em $B$.

**3)** Dados os conjuntos $A$={–3,–1,1,3} e $B$={1,3,6,9}, seja a relação de $A$ em $B$ expressa pela fórmula $y = x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

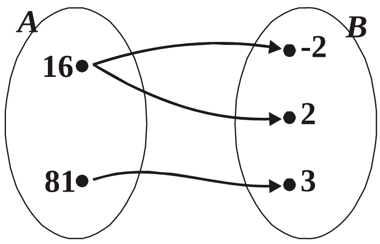



$x$=–3 ⇒ $y$=9 ⇒ (–3,9)∈ $A \times B$;
$x$=–1 ⇒ $y$=1 ⇒ (–1,1)∈ $A \times B$;
$x$=1 ⇒ $y$=1 ⇒ (1,1)∈ $A \times B$;
$x$=3 ⇒ $y$=9 ⇒ (3,9)∈ $A \times B$.

- Todos os elementos de $A$ estão associados a elementos de $B$.
- A cada elemento de $A$ está associado um único elemento de $B$.

Neste caso, a relação de $A$ em $B$ expressa pela fórmula $y = x^2$ é uma função de $A$ em $B$.

**4)** Dados os conjuntos $A$={16,81} e $B$={–2,2,3}, seja a relação de $A$ em $B$ expressa pela fórmula $y^4 = x$, com $x \in A$ e $y \in B$.




$x$=16 ⇒ $y$=–2 ou $y$=2 ⇒ (16,–2) e (16,2)∈ $A \times B$;
$x$=81 ⇒ $y$=3 ⇒ (81,3)∈ $A \times B$.

- Todos os elementos de $A$ estão associados a elementos de $B$.
- O elemento 16 do conjunto $A$ está associado a dois elementos do conjunto $B$.

  Neste caso, a relação de $A$ em $B$ não é uma função de $A$ em $B$.

## 1.3 – Notação de Função

Quando temos uma função de $A$ em $B$, podemos representá-la da seguinte forma:

$f : A \to B$ (lê-se: função de $A$ em $B$)

$x \mapsto y$ (lê-se: a cada valor de $x \in A$ associa-se um só valor $y \in B$)

A letra $f$, em geral, dá o nome às funções, mas podemos ter também a função $g$, $h$, etc.

Numa função $g : R \to R$, dada pela fórmula $y = x^2 - 8$, podemos também escrever $g(x) = x^2 - 8$. Neste caso, $g(\sqrt{2})$ significa o valor de $y$ quando $x = \sqrt{2}$, ou $g(\sqrt{2}) = -6$.

## 1.4 - Domínio, contradomínio e imagem de uma função

Uma função $f$ com domínio $A$ e imagens em $B$ será denotada por:

$f : A \to B$ (função que associa valores do conjunto $A$ a valores do conjunto $B$)
$x \mapsto y = f(x)$ (a cada elemento $x \in A$ corresponde um único $y \in B$)

O conjunto $A$ é denominado domínio da função, que indicaremos por $D$. O domínio da função também chamado campo de definição ou campo de existência da função, serve para definir em que conjunto estamos trabalhando, isto é, os valores possíveis para a variável $x$.

O conjunto $B$ é denominado contradomínio da função, que indicaremos por $CD$. É no contradomínio que estão os elementos que podem corresponder aos elementos do domínio.

Cada elemento $x$ do domínio tem um correspondente $y$ no contradomínio. A esse valor de $y$ damos o nome de imagem de $x$ pela função $f$. O conjunto de todos os valores de $y$ que são imagens de valores de $x$ forma o conjunto imagem da função, que indicaremos por $\mathbf{Im}$. Note que o conjunto imagem da função é um subconjunto do contradomínio da mesma.

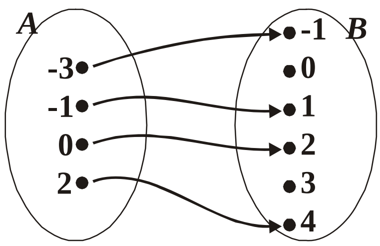
$f : A \to B$
$x \mapsto y = f(x)$

$D = A$, $CD = B$, $\mathbf{Im} = \{ y \in CD /\ y$ é correspondente de algum valor de $x \}$.

*Exemplos:*

***1)*** Dados os conjuntos $A = \{-3, -1, 0, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, determinar o conjunto imagem da função $f : A \to B$ definida por $f(x) = x + 2$.

$f(-3) = (-3) + 2 = -1$
$f(-1) = (-1) + 2 = 1$
$f(0) = (0) + 2 = 2$
$f(2) = (2) + 2 = 4$




$\mathbf{Im} = \{-1, 1, 2, 4\}$

**2)** Dada a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = a\,x + b$, com $a, b \in R$, calcular $a$ e $b$, sabendo que $f(1) = 4$ e $f(-1) = -2$.

A lei de formação da função é $f(x) = a\,x + b$ ou $y = a\,x + b$.
$f(1) = 4 \Rightarrow x = 1$ e $y = 4 \Rightarrow 4 = a \cdot 1 + b$ (i)
$f(-1) = -2 \Rightarrow x = -1$ e $y = -2 \Rightarrow -2 = a \cdot (-1) + b$ (ii)
De (i) e (ii), temos:

$$\begin{array}{rcrcr} a & + & b & = & 4 \\ -a & + & b & = & -2 \\ \hline & & 2b & = & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow b = 1$ e $a = 3$
$a = 3$ e $b = 1 \Rightarrow f(x) = 3x + 1$.

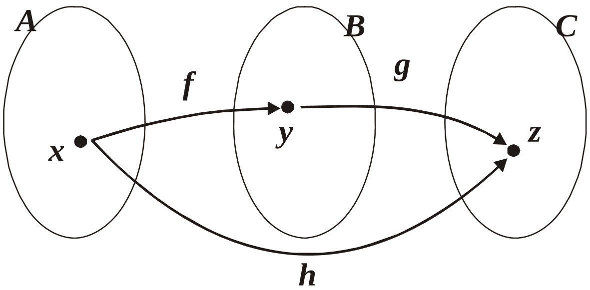
## 1.5 – Função Composta

Tome as funções $f: A \to B$, definida por $f(x) = 2x$, e $g: B \to C$, definida por $g(x) = x^2$. Note que o contradomínio $B$ da função $f$ é o mesmo domínio da função $g$.

$f: A \to B$: a cada $x \in A$ associa-se um único $y \in B$, tal que $y = 2x$.

$g: B \to C$: a cada $y \in B$ associa-se um único $z \in C$, tal que $z = y^2$.

Neste caso, podemos considerar uma terceira função, $h: A \to C$, que faz a composição entre as funções $f$ e $g$:




[Fig. 1]: Função composta

$h: A \to C$: a cada $x \in A$ associa-se um único $z \in C$, tal que $z = y^2 = (2x)^2 = 4x^2$.

Essa função $h$ de $A$ em $C$, dada por $h(x) = 4x^2$, é denominada função composta de $g$ e $f$.

De um modo geral, para indicar como o elemento $z \in C$ é determinado de modo único pelo elemento $x \in A$, escrevemos:

$$z = g(y) = g(f(x))$$

Notação:
A função composta de $g$ e $f$ será indicada por $g \circ f$ (lê-se: $g$ círculo $f$)

**(Eq.3)** $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

*Exemplos:*

***1)*** Sejam as funções reais $f$ e $g$ definidas respectivamente por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3$. Determine:

a) $f(g(x))$.

$f(g(x)) = f(2x^2 - 3) = 2x^2 - 3 + 1 = 2x^2 - 2$

$f(g(x)) = 2x^2 - 2.$

b) $g(f(x))$.

$g(f(x)) = g(x+1) = 2(x+1)^2 - 3 = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 = 2x^2 + 4x + 2 - 3 = 2x^2 + 4x - 1$

$g(f(x)) = 2x^2 + 4x - 1.$

c) Os valores de $x$ para que se tenha $f(g(x)) = g(f(x))$.

$f(g(x)) = g(f(x))$

$2x^2 - 2 = 2x^2 + 4x - 1$

$-2 = 4x - 1$

$4x = 1 - 2$

$x = -\frac{1}{4}.$

**2)** Sendo $f(x)=3x-1$ e $f(g(x))=6x+8$, determine $g(x)$.

Como $f(x)=3x-1$, então $f(g(x))=3\cdot g(x)-1$.
Como $f(g(x))=6x+8$, então $3\cdot g(x)-1=6x+8$.
$3\cdot g(x)-1=6x+8$
$3\cdot g(x)=6x+8+1$
$g(x)=\dfrac{6x+9}{3}$
$g(x)=2x+3$.

## 1.6 – Função Inversa

***Definição 6:*** Função bijetora: A função $f$ é denominada BIJETORA, se satisfaz as duas condições abaixo:

- 1. O contradomínio de $f$ coincide com sua imagem, ou seja, todo elemento do contradomínio é correspondente de algum elemento do domínio.
- 2. Cada elemento do contradomínio de $f$ é imagem de um único elemento do domínio.

***Definição 7:*** Diz-se que uma função $f$ possui inversa $f^{-1}$ se for bijetora.

### 1.6.1 – Determinação da Função Inversa

Caso a função seja bijetora, possuindo portanto inversa, é possível determinar a sua inversa. Para isso "trocamos" a variável $x$ por $y$ na lei que define a função e em seguida "isolamos" o $y$, obtendo a lei que define a função inversa.

É preciso apenas tomar certo cuidado com o domínio da nova função obtida.

*Exemplo:*

**1)** Obter a lei da função inversa $f^{-1}$ da função $f$ dada por $y=x+2$.

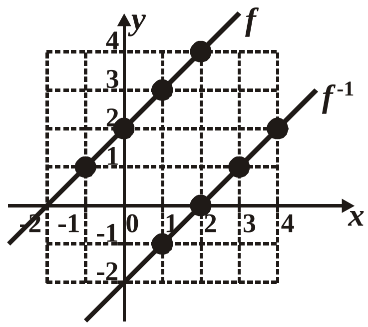
$y=x+2 \Rightarrow$ função $f$.
$x=y+2 \Rightarrow$ trocando a variável $x$ por $y$ e $y$ por $x$.
$y=x-2 \Rightarrow$ isolando $y$.

Então, $y=x-2$ é a lei da função inversa da função dada por $y=x+2$.

Logo:
$f(x)=x+2$ e $f^{-1}(x)=x-2$

**2)** Construir os gráficos das funções $f$ e $f^{-1}$ do exercício anterior, num mesmo sistema de coordenadas.

| $x$ | $f(x)$ | | $x$ | $f^{-1}(x)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | | 1 | $-1$ | | Note que os gráficos das funções $f$ e $f^{-1}$ são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes. |
| 0 | 2 | | 2 | 0 | | |
| 1 | 3 | | 3 | 1 | | |
| 2 | 4 | | 4 | 2 | | |



**3)** Determinar a função inversa $g^{-1}$ da função $g(x)=\dfrac{x+5}{2x-3}$, cujo domínio é $D=R-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

$y=\dfrac{x+5}{2x-3}$ $\Rightarrow$ função $g$.

$x=\dfrac{y+5}{2y-3}$ $\Rightarrow$ trocando a variável $x$ por $y$ e $y$ por $x$.

$(2y-3)x=y+5$ $\Rightarrow$ isolando $y$.

$2xy-3x-y=5$

$y(2x-1)=3x+5$

$y=\dfrac{3x+5}{2x-1}$ $\Rightarrow$ $2x-1\neq 0$ $\Rightarrow$ $x\neq\dfrac{1}{2}$.

Logo, $g^{-1}: R-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\to R-\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ dada por $y=\dfrac{3x+5}{2x-1}$ é a função inversa procurada.

## ***AULA 01*** *– EXERCÍCIOS*

**1)** Seja a relação de A = {0, 1, 3} em B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} definida por g(x) = $x^2$ – 4x + 3. Faça o diagrama de g e verifique se g é uma função de A em B. Em caso afirmativo escreva o conjunto imagem.

**2)** Seja a função f de D = {1, 2, 3, 4, 5} em *R* definida por f(x) = (x – 2)(x – 4). Determine o seu conjunto imagem.

**3)** Sejam *f* e *g* funções reais definidas, para todo o número real não nulo, por:

$f(x)=\left(3x-8+\dfrac{5}{x}\right)(x-2)$ e

$g(x)=\dfrac{5}{3}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)(x^2-3x+2)$

Se *a* e *b* são números reais distintos tais que f(a) = g(a) e f(b) = g(b), calcule a + b

**4)** Considere a função f(x) real, definida por f(1) = 43 e f(x + 1) = 2f(x) – 15. Determine o valor de f(0)

**5)** Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x)=4x-5$

b) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$

c) $y=\sqrt{1-2x}$

d) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}-\dfrac{7x}{x-2}$

**6)** Sendo $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $x\neq 1$ e $g(x)=2x-4$, ache o valor de $f(g(2))+g\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

**7)** Se $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, qual o valor de x para que f(f(x)) = 1?

**8)** Dada a função $f(x)=\dfrac{2x+6}{x-5}$ com x ≠ 5. calcule:

a) $f^{-1}(x)$
b) $f^{-1}(4)$

***Respostas:***

**1)** sim, Im{0, 3}
**2)** Im = {-1, 0, 3}
**3)** 3
**4)** 29
**5)** a) D = R
b) D = R – {-1, 1}
c) $D=\left\{x\in R \mid x\leq\dfrac{1}{2}\right\}$
d) $D=\{x\in R \mid -3<x<4, e, x\neq 2\}$
**6)** – 9
**7)** $x=\dfrac{3}{2}$
**8)** a) $\dfrac{5x+6}{x-2}$ b) 13

# *AULA 02*

# 2- FUNÇÃO POLINOMIAL

***Definição 8:*** Função polinomial com uma variável ou simplesmente função polinomial é aquela cuja formulação matemática é expressa por um polinômio.

## 2.1 - Função polinomial do 1º grau

A função polinomial do 1º grau é a que tem sua representação matemática por um polinômio de grau 1.

Representação da função polinomial do 1º grau:

$f(x) = ax + b$, com $a, b \in R$ ($a \neq 0$). $a$ e $b$ são os coeficientes e $x$ a variável independente.

*Exemplo:*

Em uma função polinomial do 1º grau, $y = f(x)$, sabe-se que $f(1) = 4$ e $f(-2) = 10$. Escreva a função $f$ e calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Se $f$ é polinomial do 1º grau, então podemos escrever: $y = ax + b$. Usando os dados do problema:

$f(1) = 4 \Rightarrow x = 1$ e $y = 4$. Então, $a \cdot 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 4$ (i).

$f(-2) = 10 \Rightarrow x = -2$ e $y = 10$. Então, $a \cdot (-2) + b = 10 \Rightarrow -2a + b = 10$ (ii).

Resolvendo o sistema formado por (i) e (ii):

$$\begin{array}{llllll} \text{(i)} & a & + & b & = & 4 \\ \text{(ii)} & -2a & + & b & = & 10 \quad \cdot(-1) \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} a & + & b & = & 4 \\ 2a & - & b & = & -10 \\ 3a & & & = & -6 \quad \Rightarrow a = -2 \end{array}$$

Se $a = -2$, então $-2 + b = 4 \Rightarrow b = 6$.

A função $f$ é dada por $f(x) = -2x + 6$.

Cálculo de $f\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 6 = 1 + 6 = 7$$

A função é $f(x) = -2x + 6$ e $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$.

### 2.1.1 - *Função linear*

Seja a função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$. No caso de $b = 0$, temos $f(x) = ax$, e ela recebe o nome especial de função linear.

**Obs.:** Se, em uma função linear tivermos $a = 1$, teremos $f(x) = x$ ou $y = x$, que se dá o nome de função identidade.

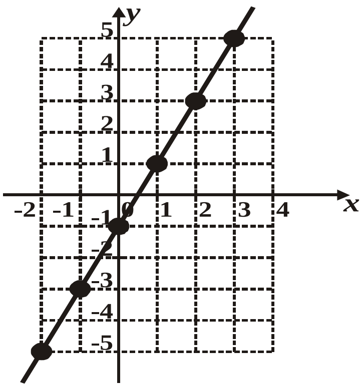
### 2.1.2 – Gráfico de uma função polinomial do 1º grau

Para construir o gráfico de uma função polinomial do 1º grau, atribuímos valores do domínio à variável $x$ e calculamos as respectivas imagens.

*Exemplo:*

Construir o gráfico da função real $f$ dada por $y=2x-1$.

| $x$ | $y$ | Par ordenado |
|---|---|---|
| –2 | –5 | (–2,–5) |
| –1 | –3 | (–1,–3) |
| 0 | –1 | (0,–1) |
| 1 | 1 | (1,1) |
| 2 | 3 | (2,3) |
| 3 | 5 | (3,5) |




***Definição 9:*** O gráfico da função linear $y=ax$ $(a\neq 0)$ é sempre uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.

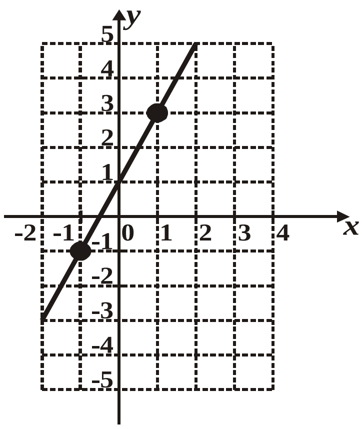
***Definição 10:*** O gráfico da função polinomial do 1º grau $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0,b)$.

### 2.1.3 – Determinação de uma função a partir do gráfico

Nos exercícios abaixo, determine a lei de formação da função $f(x)=ax+b$.

*Exemplo:*

**1)** Determine a lei de formação da função $f$, cujo gráfico cartesiano é:



Sabendo-se que $y = a\,x + b$, do gráfico, temos que:

$x = -1$ e $y = -1 \Rightarrow -1 = a\cdot(-1) + b \Rightarrow -a + b = -1$ (i).

$x = 1$ e $y = 3 \Rightarrow 3 = a\cdot(1) + b \Rightarrow a + b = 3$ (ii).

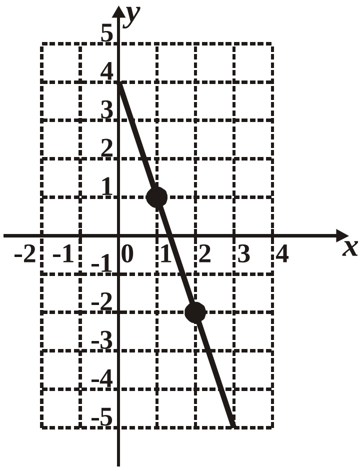
$$\begin{array}{lcccccc} \text{(i)} & -a & + & b & = & -1 & \\ \text{(ii)} & a & + & b & = & 3 & \\ & & & 2b & = & 2 & \Rightarrow b = 1 \end{array}$$

Se $b = 1$, então $a + b = 3 \Rightarrow a + 1 = 3 \Rightarrow a = 2$

Logo:

A função é $f(x) = 2x + 1$.

**2)** Determine a lei de formação da função $f$, cujo gráfico cartesiano é:




Sabendo-se que $y = a\,x + b$, do gráfico, temos que:

$x = 1$ e $y = 1 \Rightarrow 1 = a\cdot(1) + b \Rightarrow a + b = 1$ (i).

$x = 2$ e $y = -2 \Rightarrow -2 = a\cdot(2) + b \Rightarrow 2a + b = -2$ (ii).

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \text{(i)} & a & + & b & = & 1 & \cdot(-1) & -a & - & b & = & -1 & \\ \text{(ii)} & 2a & + & b & = & -2 & & 2a & + & b & = & -2 & \\ & & & & & & & a & & & = & -3 & \Rightarrow a = -3 \end{array}$$

Se $a = -3$, então $-3 + b = 1 \Rightarrow \Rightarrow b = 4$

Logo:

A função é $f(x) = -3x + 4$.

### 2.1.4 - Crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 1º grau

Seja $f$ a função polinomial do 1º grau definida por $f(x) = a\,x + b$.

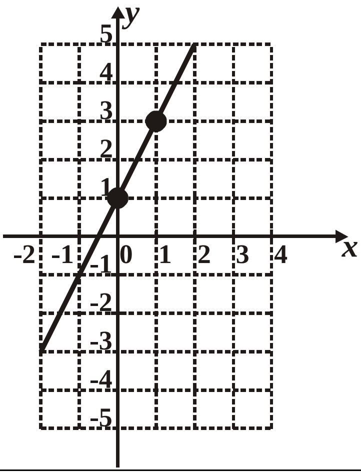
Podemos determinar que:

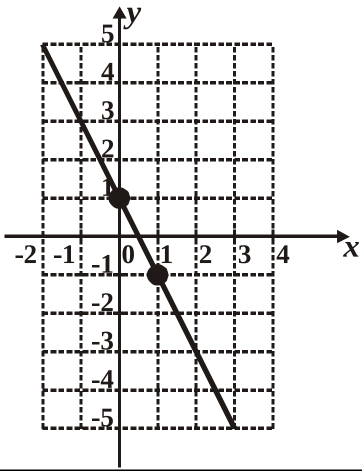
- i) A função $f$ é crescente se o coeficiente $a > 0$;
- ii) A função $f$ é decrescente se o coeficiente $a < 0$.

*Exemplo:*

Construir os gráficos das funções $f$ e $g$ do 1º grau a seguir:

i) $f(x) = 2x + 1$ ii) $g(x) = -2x + 1$





| i) Aumentando os valores atribuídos a $x$, aumentam também os valores correspondentes da imagem $f(x)$. | ii) Aumentando os valores atribuídos a $x$, diminuem os valores correspondentes da imagem $g(x)$. |
|---|---|

## 2.1.5 - Estudo do sinal da função polinomial do 1º grau

***Definição 11:*** Estudar o sinal de uma função $f$ significa determinar para que valores de $x$ temos $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$.

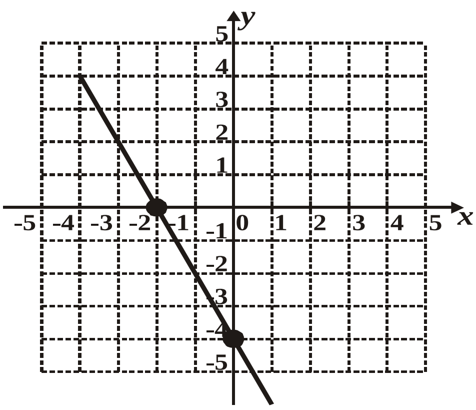
### 2.1.5.1 - Zero de uma função polinomial do 1º grau

***Definição 12:*** Denomina-se zero ou raiz da função $f(x) = ax + b$ o valor de $x$ que anula a função, isto é, torna $f(x) = 0$.

***Definição 13:*** Geometricamente, o zero da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo $x$.

*Exemplo:*

Dada a lei de formação da função $y = -2x - 4$, construir o gráfico e determinar os valores reais de $x$ para os quais: a) $y = 0$; b) $y > 0$ e c) $y < 0$.



Podemos notar que a função é decrescente, pois $a < 0$.

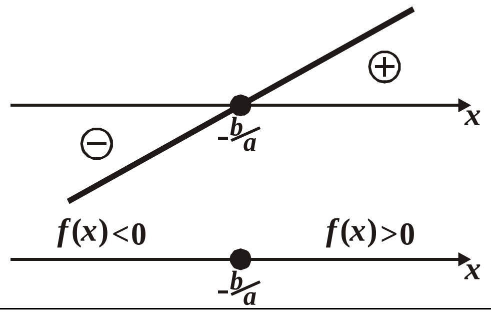
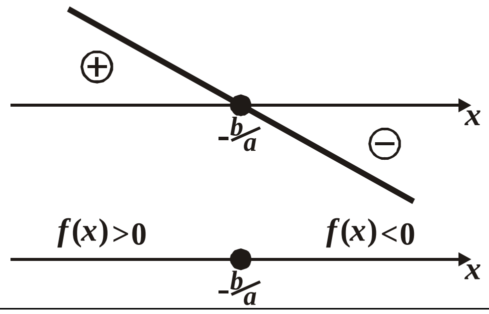
O zero da função é: $-2x - 4 = 0 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Logo, a reta intercepta o eixo $x$ no ponto de abscissa $x = -2$.

A solução do problema é:

- a) $f(x) = 0 \Rightarrow \{x \in R;\ x = -2\}$;
- b) $f(x) > 0 \Rightarrow \{x \in R;\ x < -2\}$;
- c) $f(x) < 0 \Rightarrow \{x \in R;\ x > -2\}$.

### 2.1.5.2 – Quadro de sinais da função polinomial do 1º grau

| $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$ | |
|---|---|
| Zero da função: $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$ | |
| $a > 0$ | $a < 0$ |
|   |   |
| $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$<br>$f(x) > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{b}{a}$<br>$f(x) < 0 \Rightarrow x < -\dfrac{b}{a}$ | $f(x) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$<br>$f(x) > 0 \Rightarrow x < -\dfrac{b}{a}$<br>$f(x) < 0 \Rightarrow x > -\dfrac{b}{a}$ |

## 2.2 – Inequações do 1º grau

***Definição 14:*** Denomina-se inequação do 1º grau na variável $x$ toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas:

- $ax + b \geq 0$;
- $ax + b > 0$;
- $ax + b \leq 0$;
- $ax + b < 0$.

  com $a, b \in R$ e $a \neq 0$.

*Exemplo:*

Verificar se $4(x-1) - x^2 \geq 3x - x(x+1)$ é uma inequação do 1º grau.

$4(x-1) - x^2 \geq 3x - x(x+1)$
$4x - 4 - x^2 \geq 3x - x^2 - x$
$4x - 3x + x - 4 \geq 0$
$2x - 4 \geq 0$

Logo, $2x - 4$ é um polinômio do 1º grau, então $4(x+1) - x^2 \geq 3x - x(x+1)$ é uma inequação do 1º grau.

### 2.2.1 - Resolução de inequações do 1º grau

***Definição 15:*** Para se resolver uma inequação do 1º grau, são utilizadas as propriedades das desigualdades, apresentando-se o conjunto verdade da inequação (conjunto solução S).

Exemplos:

**1)** Resolver a inequação seguinte: $4(x-1)-x^2 \geq 3x - x(x+1)$. Represente a solução na reta real.

$4(x-1)-x^2 \geq 3x - x(x+1)$

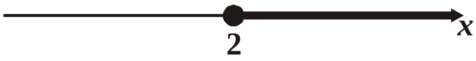
$4x-4-x^2 \geq 3x - x^2 - x$

$4x-3x+x-4 \geq 0$

$2x \geq 4$

$x \geq 2$

S=$\{x \in R;\ x \geq 2\}$




**2)** Resolver a inequação seguinte: $\frac{x-1}{3}+\frac{4(1-x)}{2} > \frac{x}{4}+\frac{2-x}{6}$. Represente a solução na reta real.

$$\frac{x-1}{3}+\frac{4(1-x)}{2} > \frac{x}{4}+\frac{2-x}{6}$$

Reduzindo os dois membros ao menor denominador comum:

$$\frac{4x-4+24-24x}{12} > \frac{3x+4-2x}{12}$$

Simplificando:

$-20x+20 > x+4$

$-20x-x > -20+4$

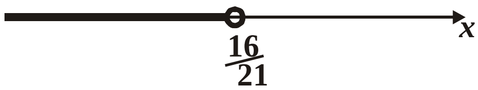
$-21x > -16$

Multiplicando por $(-1)$:

$21x < 16$

$x < \frac{16}{21}$

S=$\{x \in R;\ x < \frac{16}{21}\}$




## 2.2.2 - Sistemas de inequações do 1º grau

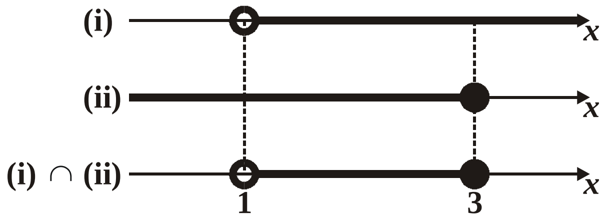
***Definição 16:*** O conjunto solução S de um sistema de inequações é determinado pela intersecção dos conjuntos soluções de cada inequação do sistema.

*Exemplo:*

Resolver a inequação $-1 < 2x-3 \leq x$. Apresente o conjunto solução S e represente na reta real.

Na verdade, resolver essa inequação simultânea é equivalente a resolver o sistema:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (i) | $-1$ | $<$ | $2x-3$ | | | (i) | $x$ | $>$ | $1$ |
| (ii) | | | $2x-3$ | $\leq$ | $x$ | (ii) | $x$ | $\leq$ | $3$ |




S=$\{x \in R;\ 1 < x \leq 3\}$

### 2.2.3 - Inequação-produto e inequação-quociente

Uma inequação do 2º grau do tipo $x^2+2x-8\geq 0$ pode ser expressa por um produto de inequações do 1º grau, fatorando o 1º membro da desigualdade:

$$x^2+2x-8\geq 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x+4)\geq 0.$$

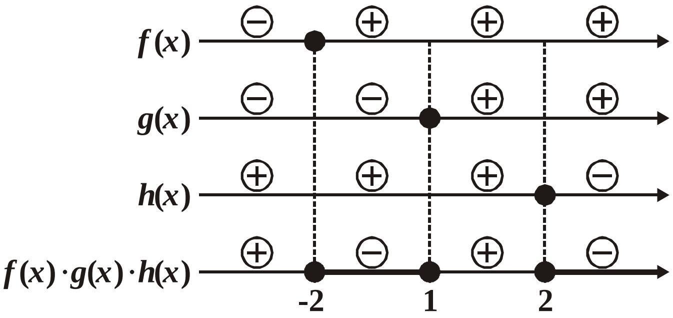
***Definição 17:*** RESOLUÇÃO: Para resolver uma inequação-produto ou uma inequação-quociente, fazemos o estudo dos sinais das funções polinomiais do 1º grau envolvidas. A seguir, determinamos o sinal do produto ou quociente dessas funções, lembrando as regras de sinais do produto e do quociente de números reais.

*Exemplos:*

**1)** Resolver a inequação $(x^2+x-2)\cdot(-x+2)\leq 0$.

$$(x^2+x-2)\cdot(-x+2)\leq 0 \Rightarrow (x+2)\cdot(x-1)\cdot(-x+2)\leq 0$$

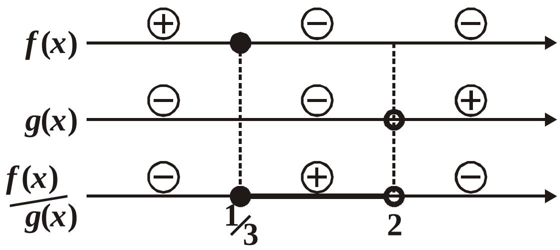
| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $=$ | $x+2$ | $\Rightarrow$ | $f(x)$ | $=$ | $0$ | $\Rightarrow$ | $x$ | $=$ | $-2$ | $a$ | $>$ | $0$ |
| $g(x)$ | $=$ | $x-1$ | $\Rightarrow$ | $g(x)$ | $=$ | $0$ | $\Rightarrow$ | $x$ | $=$ | $1$ | $a$ | $>$ | $0$ |
| $h(x)$ | $=$ | $-x+2$ | $\Rightarrow$ | $h(x)$ | $=$ | $0$ | $\Rightarrow$ | $x$ | $=$ | $2$ | $a$ | $<$ | $0$ |




S$=\{x\in R;\ -2\leq x\leq 1$ ou $x\geq 2\}$

**2)** Resolver a inequação $\dfrac{-3x+1}{x-2}\geq 0$.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $=$ | $-3x+1$ | $\Rightarrow$ | $f(x)$ | $=$ | $0$ | $\Rightarrow$ | $x$ | $=$ | $1/3$ | *a < 0* |
| $g(x)$ | $=$ | $x-2$ | $\Rightarrow$ | $g(x)$ | $=$ | $0$ | $\Rightarrow$ | $x$ | $=$ | $2$ | *a < 0* |

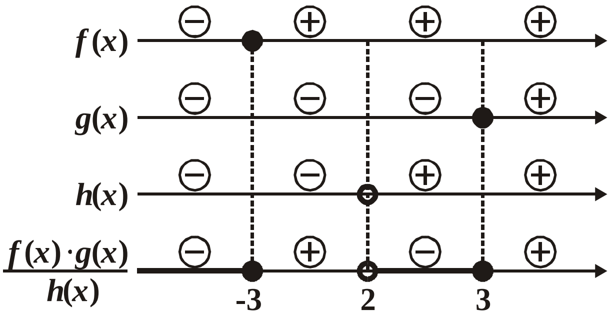



S$=\{x\in R;\ \dfrac{1}{3}\leq x<2\}$

**3)** Resolver a inequação $\frac{x^2-9}{x-2} \leq 0$.

$$\frac{x^2-9}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)\cdot(x-3)}{x-2} \leq 0$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | = | $x+3$ | $\Rightarrow$ | $f(x)$ | = | 0 | $\Rightarrow$ | $x$ | = | $-3$ | $a$ | > | 0 |
| $g(x)$ | = | $x-3$ | $\Rightarrow$ | $g(x)$ | = | 0 | $\Rightarrow$ | $x$ | = | 3 | $a$ | > | 0 |
| $h(x)$ | = | $x-2$ | $\Rightarrow$ | $h(x)$ | = | 0 | $\Rightarrow$ | $x$ | = | 2 | $a$ | > | 0 |

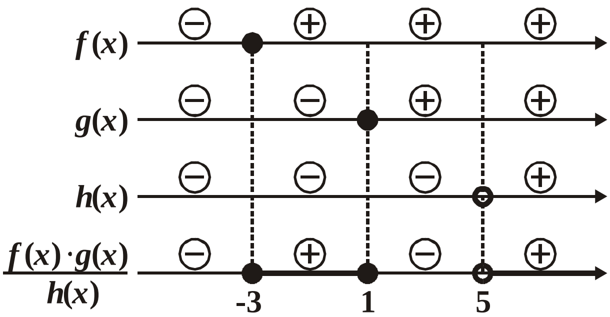



S={ $x \in R$ ; $x \leq -3$ ou $2 < x \leq 3$}

**4)** Determine o domínio da função $y = \sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-5}}$ .

$$\frac{x^2+2x-3}{x-5} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{x-5} \geq 0$$

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | = | $x+3$ | $\Rightarrow$ | $f(x)$ | = | 0 | $\Rightarrow$ | $x$ | = | $-3$ | $a$ | > | 0 |
| $g(x)$ | = | $x-1$ | $\Rightarrow$ | $g(x)$ | = | 0 | $\Rightarrow$ | $x$ | = | 1 | $a$ | > | 0 |
| $h(x)$ | = | $x-5$ | $\Rightarrow$ | $h(x)$ | = | 0 | $\Rightarrow$ | $x$ | = | 5 | $a$ | > | 0 |




D={ $x \in R$ ; $-3 \leq x \leq 1$ ou $x > 5$}

## *AULA 02* – EXERCÍCIOS

**1)** Dada a função f(x) = 5x – 2, determine:
a) f(2)
b) o valor de x para que f(x) = 0

**2)** Em uma função polinomial do 1º grau, y = f(x), sabe-se que f(1) = 4 e f(-2) = 10. Escreva a função f e calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

**3)** Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$900,00 e uma variável, que corresponde a uma comissão de 8% do total de vendas que ele fez durante o mês.
a) Expressar a lei da função que representa seu salário mensal
b) Calcular o salário do vendedor que durante um mês ele vendeu R$ 50.000,00 em produtos

**4)** Num determinado país, o gasto governamental com educação, por aluno em escola pública, foi de 3.000 dólares no ano de 1985, e de 3.600 dólares em 1993. Admitindo que o gráfico do gasto por aluno em função do tempo seja constituído de pontos de uma reta:
a) Obtenha a lei que descreve o gasto por aluno (y) em função do tempo (x), considerando x = 0 para o ano de 1985, x = 1 para o ano de 1986, x = 2 para o ano de 1987 e assim por diante.
b) Em que ano o gasto por aluno será o dobro do que era em 1985?

**5)** Considere as funções *f* e *g* definidas em *R* por f(x) = 8 – x e g(x) = 3x
a) Ache as raízes das funções *f* e *g*
b) Sabendo que os gráficos de *f* e *g* são retas concorrentes, calcule as coordenadas do ponto de intersecção.

**6)** Resolver a inequação 4x – 1 + 2(1 – 3x) ≤ 0

**7)** Determinar o conjunto verdade da inequação: $\frac{x-1}{3}+\frac{4(1-x)}{2}>\frac{x}{4}+\frac{2-x}{6}$

**8)** Resolver o sistema $\begin{cases} 2x-1\geq 5 \\ -x-3<0 \end{cases}$

**9)** João possui um terreno de 1000m², no qual pretende construir uma casa. Ao engenheiro responsável pela planta, ele impõe as seguintes condições: a área destinada ao lazer (piscina, churrasqueira, etc) deve ter 200m², e a área interna da casa mais a área de lazer devem ultrapassar 50% da área total do terreno; além disso, o custo para construir a casa deverá ser de, no máximo, R$ 200.000,00. Sabendo que o metro quadrado construído nessa região custa R$ 500,00, qual é a área interna da casa que o engenheiro poderá projetar?

**10)** Determinar o domínio da função $y=\sqrt{\frac{x-1}{-x+3}}$

### *Respostas:*

**1)** a) 8
b) 2/5
**2)** f(x) = - 2x + 6 e f(-1/2) = 7
**3)** a) y = 900 + 0,08x
b) R$ 4900,00
**4)** a) y = 75x + 3000
b) 2025
**5)** a) 8 e 0
b) (2, 6)
**6)** $S=\left\{x\in R \mid x\geq \frac{1}{2}\right\}$
**7)** $S=\left\{x\in R \mid x< \frac{16}{21}\right\}$
**8)** $S=\{x\in R \mid x\geq 3\}$

**9)** entre 300m² e 400m²

**10)** $D=\{x\in R \mid 1\leq x<3\}$

# AULA 03

## 2.3 - Função polinomial do 2º grau

***Definição 18:*** A função $f:R\to R$ dada por $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a$, $b$ e $c$ reais e $a\neq 0$, denomina-se função polinomial do 2º grau ou função quadrática. Os números representados por $a$, $b$ e $c$ são os coeficientes da função. Note que se $a=0$ temos uma função do 1º grau ou uma função constante.

*Exemplo:*

Considere a função $f$ do 2º grau, em que $f(0)=5$, $f(1)=3$ e $f(-1)=1$. Escreva a lei de formação dessa função e calcule $f(5)$.

***Resolução***

Tome $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a\neq 0$.

$$\begin{array}{llllllllll} f(0) & = & 5 & \Rightarrow & a(0)^2+b(0)+c & = & 5 & \Rightarrow & c = 5 & c = 5 \\ f(1) & = & 3 & \Rightarrow & a(1)^2+b(1)+c & = & 3 & \Rightarrow & a+b = -2 & \text{i)} \\ f(-1) & = & 1 & \Rightarrow & a(-1)^2+b(-1)+c & = & 1 & \Rightarrow & a-b = -4 & \text{ii)} \end{array}$$

Resolvendo o sistema formado por (i) e (ii):

$$\begin{array}{lllllllll} \text{(i)} & a & + & b & = & -2 \\ \text{(ii)} & a & - & b & = & -4 \\ \text{(i)+(ii)} & 2a & & & = & -6 & \Rightarrow a = -3 & \Rightarrow b = 1 \end{array}$$

A lei de formação da função será $f(x)=-3x^2+x+5$

$f(5)=-3(5)^2+(5)+5$

$f(5)=-65$.

### 2.3.1 - Gráfico de uma função quadrática

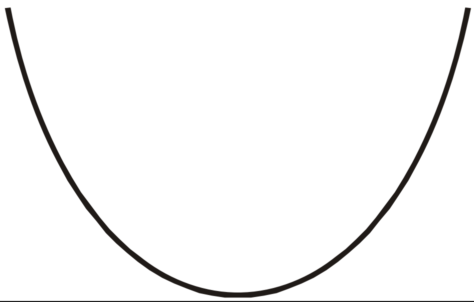
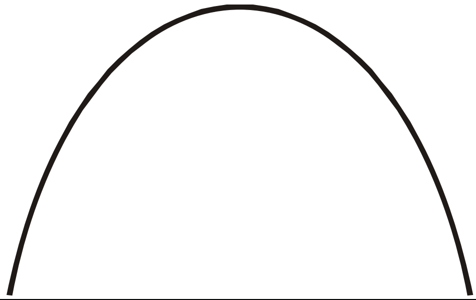
O gráfico de uma função polinomial do 2º grau ou quadrática é uma curva aberta chamada parábola.

Para evitar a determinação de um número muito grande de pontos e obter uma boa representação gráfica, vamos destacar três importantes características do gráfico da função quadrática:

| (i) | (ii) | (iii) |
|---|---|---|
| Concavidade | Zeros ou raízes | Vértice |

### 2.3.2 - Concavidade

A concavidade de uma parábola que representa uma função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ do 2º grau depende do sinal do coeficiente $a$:

| $a>0$: concavidade para CIMA | $a<0$: concavidade para BAIXO |
|---|---|
|  |  |

[Fig.4]: Concavidade de uma função quadrática.

### 2.3.3 - Zeros de uma função quadrática

***Definição 19:*** Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x)=a\,x^2+b\,x+c$ são as raízes da equação do 2º grau $a\,x^2+b\,x+c=0$, ou seja:

Raízes: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Considerando $\Delta=b^2-4\,a\,c$, pode-se ocorrer três situações:

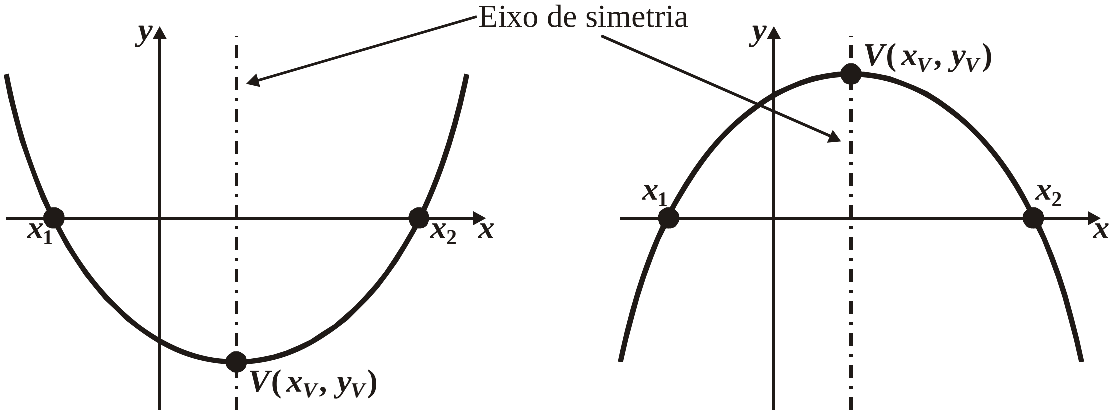
- i) $\Delta>0 \Rightarrow$ as duas raízes são reais e diferentes: $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- ii) $\Delta=0 \Rightarrow$ as duas raízes são reais e iguais (raiz dupla): $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.
- iii) $\Delta<0 \Rightarrow$ não há raízes reais.

**Obs.:** Em uma equação do 2º grau $a\,x^2+b\,x+c=0$, a soma das raízes é S e o produto é P tal que: S= $\boxed{x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}}$ e P= $\boxed{x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}}$.

***Definição 20:*** Geometricamente, os zeros ou raízes de uma função polinomial do 2º grau são as abscissa dos pontos em que a parábola intercepta o eixo $x$.

### 2.3.4 - Vértice da parábola

Considere as parábolas abaixo e observe o vértice $V(x_V, y_V)$ em cada uma:




[Fig.5]: Vértice de parábolas ($\Delta>0$ para as duas).

Uma forma de se obter o vértice $V(x_V, y_V)$ é:

- $x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, já que o vértice encontra-se no eixo de simetria da parábola;
- $y_V = a\,x_V^2 + b\,x_V + c$, já que o $x_V$ foi obtido acima.

Outra forma de se obter o vértice $V(x_V, y_V)$ é aplicando as fórmulas:

- $x_V = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

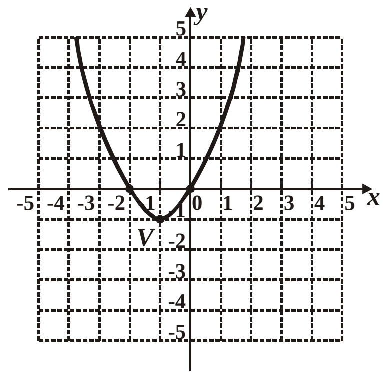
### 2.3.5 - Gráfico de uma parábola

Com o conhecimento das principais características de uma parábola, podemos esboçar com mais facilidade o gráfico de uma função quadrática.

*Exemplos:*

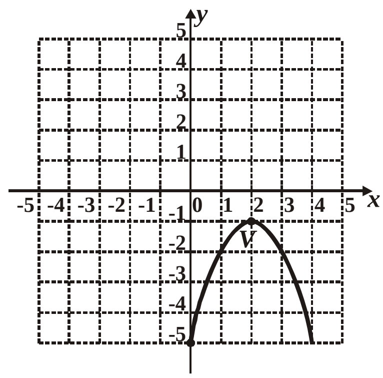
**1)** Construir o gráfico da função $y = x^2 + 2x$, determinando sua imagem.

| | | |
|---|---|---|
| $a = 1 > 0 \Rightarrow$ | concavidade voltada para cima. | |
| Zeros da função: | $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ e $x_2 = -2$. | |
| Ponto onde a parábola corta o eixo $y$: | $x = 0 \Rightarrow y = 0$ | $\Rightarrow (0,0)$ |
| Vértice da parábola: | $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1$ | $\Rightarrow V(-1,-1)$ |
| | $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{4}{4} = -1$ | |
| Imagem: $y \geq -1$ para todo $x$ Real | $\mathbf{Im} = \{ y \in R;\ y \geq -1 \}$ | |



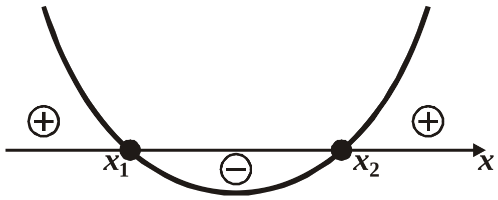
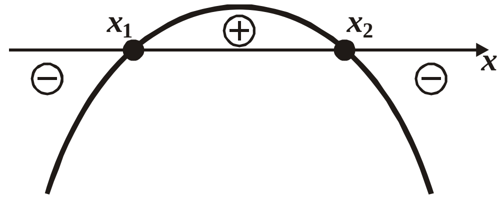

**2)** Construir o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 5$, determinando sua imagem.

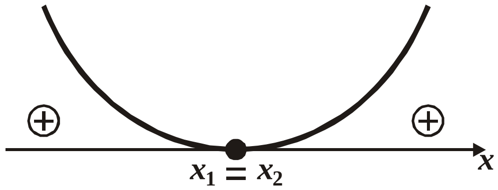
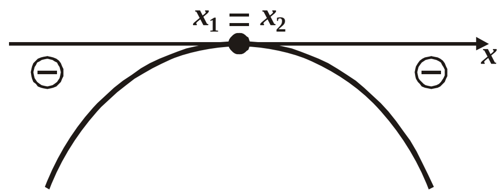
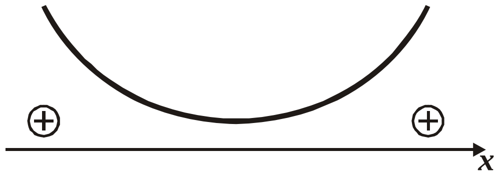
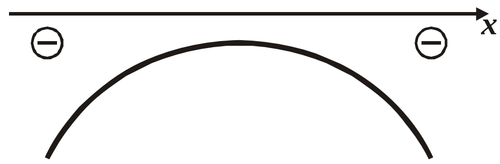
| | | |
|---|---|---|
| $a = -1 < 0 \Rightarrow$ | concavidade voltada para baixo. | |
| Zeros da função: | $-x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4.\ \nexists$ zeros reais. | |
| Ponto onde a parábola corta o eixo $y$: | $x = 0 \Rightarrow y = -5$ | $\Rightarrow (0,-5)$ |
| Vértice da parábola: | $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{-2} = 2$ | $\Rightarrow V(2,-1)$ |
| | $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{-4}{-4} = -1$ | |
| Imagem: $y \leq -1$ para todo $x$ Real | $\mathbf{Im} = \{ y \in R;\ y \leq -1 \}$ | |



### 2.3.6 - Estudo do sinal da função quadrática

Os valores reais de $x$ que tornam a função quadrática positiva, negativa ou nula, podem ser dados considerando-se os casos, relacionados na tabela abaixo.

| $f(x)=ax^2+bx+c$ com ($a$, $b$ e $c \in R$ e $a \neq 0$) | |
|---|---|
| $a>0$ | $a<0$ |
|   |   |
| $f(x)>0$ para $x<x_1$ ou $x>x_2$<br>$f(x)<0$ para $x_1<x<x_2$ | $f(x)<0$ para $x<x_1$ ou $x>x_2$<br>$f(x)>0$ para $x_1<x<x_2$ |

| $f(x)=0$ para $x=x_1$ ou $x=x_2$ | $f(x)=0$ para $x=x_1$ ou $x=x_2$ |
|---|---|
|   |   |
| $f(x)>0$ para $x \neq x_1$<br>$f(x)<0$ $\nexists x$ real<br>$f(x)=0$ para $x=x_1=x_2$ | $f(x)<0$ para $x \neq x_1$<br>$f(x)>0$ $\nexists x$ real<br>$f(x)=0$ para $x=x_1=x_2$ |
|   |   |
| $f(x)>0$ $\forall x$ real<br>$f(x)<0$ $\nexists x$ real<br>$f(x)=0$ $\nexists x$ real | $f(x)<0$ $\forall x$ real<br>$f(x)>0$ $\nexists x$ real<br>$f(x)=0$ $\nexists x$ real |

## 2.4 - Inequações do 2º grau

***Definição 21:*** Denomina-se inequação do 2º grau na variável $x$ toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas:

- $ax^2+bx+c \geq 0$;
- $ax^2+bx+c > 0$;
- $ax^2+bx+c \leq 0$;
- $ax^2+bx+c < 0$.
  com $a, b, c \in R$ e $a \neq 0$.

### 2.4.1 - Resolução de inequações do 2º grau

***Definição 22:*** Para se resolver uma inequação do 2º grau, são utilizadas as propriedades das desigualdades, apresentando-se o conjunto verdade da inequação (conjunto solução S).

*Exemplo:*

**1)** Resolver a inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$.

**Resolução**

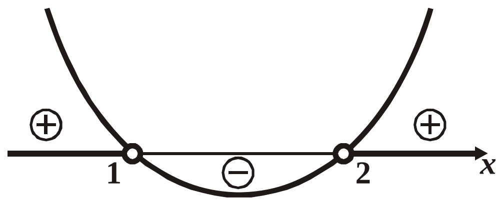
Estudar a variação do sinal da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ Concavidade para cima.

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1 > 0 \Rightarrow$ Duas raízes reais diferentes.

$x = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ $\quad x_1 = 1$ $\quad x_2 = 2$

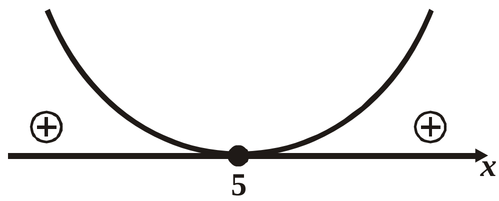



S={ $x \in R$ ; $x < 1$ ou $x > 2$}. Obs: somente valores positivos.

**2)** Resolver a inequação $x^2 - 10x + 25 \geq 0$.

**Resolução**

Estudar a variação do sinal da função $f(x) = x^2 - 10x + 25$.

| | | |
|---|---|---|
| $a = 1 > 0 \Rightarrow$ | Concavidade para cima. |  |
| $x^2 - 10x + 25 = 0$ | | |
| $\Delta = 0 \Rightarrow$ | Raiz dupla (única). | |
| $x_1 = x_2 = \dfrac{10}{2}$ | $x = 5$ | |



S= $R$ . Obs: Todos os valores são positivos ou iguais a zero.

**3)** Resolver a inequação $-2x^2 + 5x - 6 \geq 0$.

**Resolução**

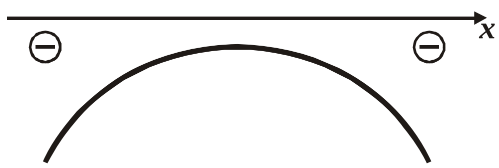
Estudar a variação do sinal da função $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$.

$a = -2 < 0 \Rightarrow$ Concavidade para baixo.

$-2x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Delta = -23 < 0 \Rightarrow$ Não possui zeros reais.

$\nexists\, x$ real




S=$\varnothing$. Obs: Nunca se tem valores positivos ou iguais a zero.

### 2.4.2 - Sistemas de inequações do 2º grau

***Definição 23:*** O conjunto solução S de um sistema de inequações é determinado pela intersecção dos conjuntos soluções de cada inequação do sistema.

*Exemplo:*

**1)** Resolver o sistema de inequações $\begin{cases} 2x^2+8 \geq x^2-6x \\ x+5<0 \end{cases}$.

***Resolução***

(i) $\Rightarrow 2x^2+8 \geq x^2-6x \Rightarrow 2x^2+8-x^2+6x \geq 0 \Rightarrow \boxed{x^2+6x+8 \geq 0}$.

(ii) $\Rightarrow \boxed{x+5<0}$.

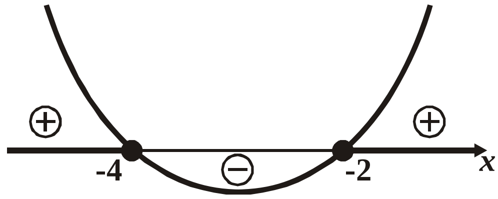
Resolução de (i): Estudar a variação do sinal da função $f(x)=x^2+6x+8$.

$a=1>0 \Rightarrow$ Concavidade para cima.

$x^2+6x+8=0$

$\Delta=4>0 \Rightarrow$ Duas raízes reais diferentes.

$x=\dfrac{-6\pm 2}{2}$ $\quad x_1=-4$ $\quad x_2=-2$

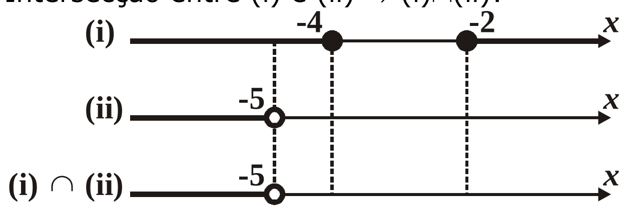



S(i)={ $x \in R$ ; $x \leq -4$ ou $x \geq -2$}. Reta real:


Resolução de (ii): $x+5<0 \Rightarrow x<-5$.

S(ii)={ $x \in R$ ; $x \leq -5$}. Reta real:


Intersecção entre (i) e (ii) $\Rightarrow$ (i)$\cap$(ii):




S={ $x \in R$ ; $x \leq -5$}.

**2)** Resolver a inequação $x-4<x^2-4 \leq x+2$.

***Resolução***

(i) $\Rightarrow x-4<x^2-4 \Rightarrow x-4-x^2+4<0 \cdot(-1) \Rightarrow x^2-x>0$.

(ii) $\Rightarrow x^2-4 \leq x+2 \Rightarrow x^2-4-x-2 \leq 0 \Rightarrow x^2-x-6 \leq 0$.

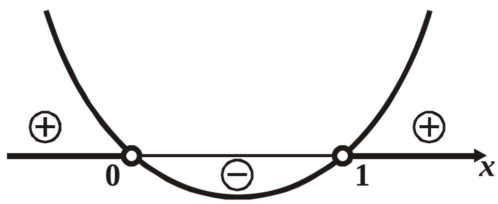
Resolução de (i): Estudar a variação do sinal da função $f(x)=x^2-x$.

$a=1>0 \Rightarrow$ Concavidade para cima.

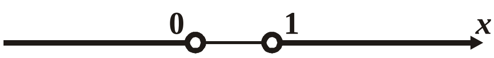
$x^2-x=0$ $\quad x(x-1)=0 \Rightarrow$ Zeros={0,1}.

$\Delta=1>0 \Rightarrow$ Duas raízes reais diferentes.

$x=\dfrac{1\pm 1}{2}$ $\quad x_1=0$ $\quad x_2=1$




S(i)={ $x \in R$ ; $x<0$ ou $x>1$}. Reta real:



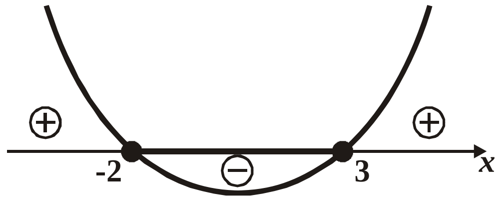
Resolução de (ii): Estudar a variação do sinal da função $g(x) = x^2 - x - 6$.

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ Concavidade para cima.

$x^2 - x - 6 = 0$

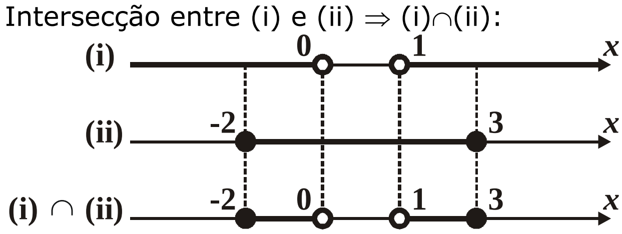
$\Delta = 25 > 0 \Rightarrow$ Duas raízes reais diferentes.

$x = \dfrac{1 \pm 5}{2}$ $\quad x_1 = -2$ $\quad x_2 = 3$




S(ii)={ $x \in R$ ; $-2 \le x \le 3$}. Reta real:


Intersecção entre (i) e (ii) $\Rightarrow$ (i)$\cap$(ii):




S={ $x \in R$ ; $-2 \le x < 0$ ou $1 < x \le 3$}.

## 2.4.3 - Inequação-produto e inequação-quociente

***Definição 24:*** RESOLUÇÃO: Para resolver uma inequação-produto ou uma inequação-quociente, fazemos o estudo dos sinais das funções polinomiais envolvidas. A seguir, determinamos o sinal do produto ou quociente dessas funções, lembrando as regras de sinais do produto e do quociente de números reais.

*Exemplos:*

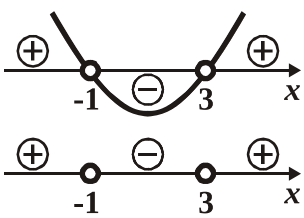
**1)** Resolver a inequação $(x^2 - 2x - 3)\cdot(-x^2 - 3x + 4) > 0$.

***Resolução***

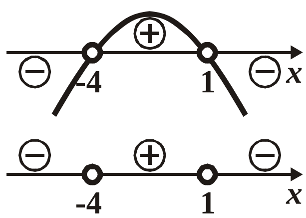
$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \Delta = 16 > 0 \Rightarrow x_1 = -1$ **e** $x_2 = 3$

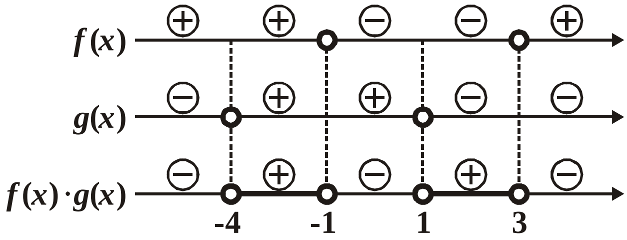
$g(x) = -x^2 - 3x + 4 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \Delta = 25 > 0 \Rightarrow x_1 = -4$ **e** $x_2 = 1$

*f*(*x*)




*g*(*x*)






S={ $x \in R$ ; $-4< x <-1$ ou $1< x <3$}.

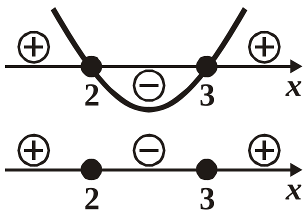
**2)** Resolver a inequação $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-16} \geq 0$.

***Resolução***

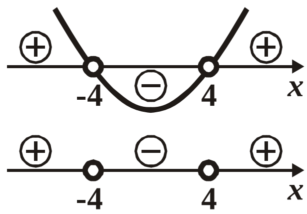
$f(x) = x^2-5x+6 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \Delta=1 > 0 \Rightarrow x_1 = 2$ **e** $x_2 = 3$

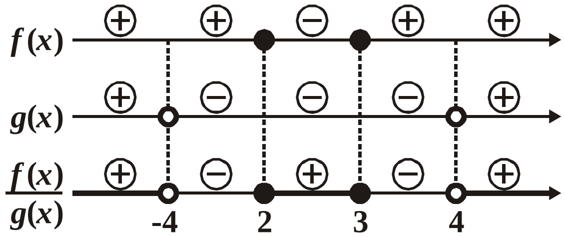
$g(x) = x^2-16 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \Delta=64 > 0 \Rightarrow x_1 = -4$ **e** $x_2 = 4$

$f(x)$




$g(x)$




S={ $x \in R$ ; $x <-4$ ou $2\leq x \leq 3$ ou $x >4$}.

**3)** Determine o domínio da função $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-3x-10}{x-6}}$ .

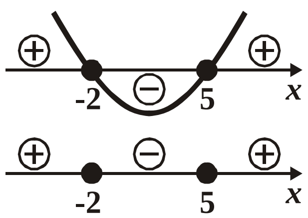
***Resolução***

$f$ só representa um número real se $\dfrac{x^2-3x-10}{x-6} \geq 0$.

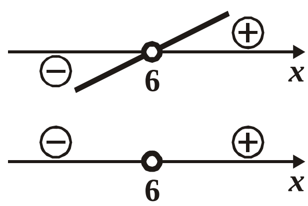
$f(x) = x^2-3x-10 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \Delta=49 > 0 \Rightarrow x_1 = -2$ e $x_2 = 5$

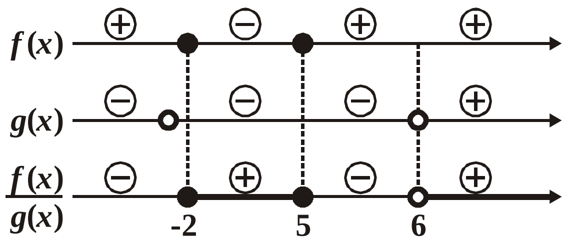
$g(x) = x-6 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x = 6$

$f(x)$




$g(x)$






$D = \{ x \in R \; ; \; -2 \le x \le 5$ ou $x > 6 \}$.

## ***AULA 03*** *– EXERCÍCIOS*

**1)** Considere a função f do $2^{\underline{0}}$ grau, onde f(0) = 5, f(1) = 3 e f(-1) = 1. Escreva a lei de formação dessa função e calcule f(5).

**2)** Determine o valor de m para que a parábola que representa graficamente a função y = $3x^2$ – x + m passe pelo ponto (1, 6)

**3)** Determinar os zeros da função y = $x^2$ – 4x – 5

**4)** Seja a função f(x) = $x^2$ – 2x + 3k. Sabendo que essa função possui dois zeros reais iguais, determine o valor real de k.

**5)** A função f(x) = $x^2$ + kx + 36 possui duas raízes reais, m e n, de modo que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{12}$. Determine o valor de f(-1) nessa função

**6)** Determinar as coordenadas do vértice V da parábola que representa a função f(x) = -$5x^2$ + 3x – 1.

**7)** Determinar a e b de modo que o gráfico da função definida por y = $ax^2$ + bx – 9 tenha o vértice no ponto (4, - 25)

**8)** Determinar o conjunto imagem da função f(x) = $x^2$ – 3x + 2

**9)** A função f(x) = $x^2$ – x – 6 admite valor máximo ou valor mínimo? Qual é esse valor?

**10)** Considerar todos os possíveis retângulos que possuem perímetro igual a 80 cm. Dentre esses retângulos, determinar aquele que terá área máxima. Qual será essa área?

**11)** Determinar p de modo que a função f(x)= $px^2$ + (2p – 1)x + p assuma valores positivos para todo x real.

**12)** Resolver a inequação $-x^2 + 1 \le 0$

**13)** Determinar o conjunto solução da inequação $x^2 - 10x + 25 \ge 0$

**14)** Resolver a inequação $x - 4 < x^2 - 4 \le x + 2$

**15)** Resolver a inequação $\dfrac{x^2+1}{x+3} < 1$

***Respostas***

**1)** f(x) = - $3x^2$ + x + 5

f(5) = - 65

**2)** 4

**3)** 5 e -1

**4)** 1/3

**5)** 52

**6)** $V\left(\frac{3}{10}, -\frac{11}{20}\right)$

**7)** a = 1 e b = - 8

**8)** $\mathrm{Im} = \left\{ y \in R \,/\, y \ge -\frac{1}{4} \right\}$

**9)** O valor mínimo da função é y = - 25/4

**10)** O retângulo que terá a maior área será o de lados 20 cm e 20cm, e a área máxima será de 400 $cm^2$.

**11)** $\left\{ p \in R \,/\, p > \frac{1}{4} \right\}$

**12)** $S = \{ x \in R \mid x \le -1, ou, x \ge 1 \}$

**13)** S = R

**14)** $S = \{ x \in R \mid -2 \le x < 0$ ou $1 < x \le 3 \}$

**15)** S = {x ∈ R| x < - 3 ou -1< x <2}

# AULA 04

## 3 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

### 3.1 – Revisão de Potenciação

#### 3.1.1 - Potências com expoente natural

Sendo $a$ um número real e $n$ um número natural, com $n \geq 2$, definimos:

**(Eq.4)** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$.

Para $n=1$ e $n=0$ são definidos:

**(Eq.5)** $a^1 = a$.

**(Eq.6)** $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).

#### 3.1.2 - Potências com expoente inteiro

Se $a$ é um número real não-nulo ($a \neq 0$) e $n$ um número inteiro e positivo, definimos:

**(Eq.7)** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

#### 3.1.3 - Potências com expoente racional

Se $a$ é um número real positivo e $\dfrac{m}{n}$ um número racional, com $n$ inteiro positivo, definimos:

**(Eq.8)** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

#### 3.1.4 -Potências com expoente real

Podemos considerar que as potências com expoente real têm significado no conjunto dos números reais. Temos, por exemplo: $10^{\sqrt{2}} = 25{,}954553519470080977981828375983$.

##### 3.1.4.1 - Propriedades

Para as potências com expoente real são válidas as seguintes propriedades operatórias:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$).
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$).

*Exemplos*

**1)** Dê o resultado mais simples de $(5^3 \cdot 5^6):5^{10}$.

***Resolução***

Usando as propriedades, temos:

$$(5^3 \cdot 5^6):5^{10}=(5^{3+6}):5^{10}=5^9:5^{10}=5^{9-10}=5^{-1}=\frac{1}{5}.$$

**2)** Calcule o valor da expressão $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-6^0$.

***Resolução***

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-6^0=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-1=\frac{9}{4}+\frac{1}{8}-1=\frac{18+1-8}{8}=\frac{11}{8}.$$

**3)** Simplifique $\dfrac{2^{x+5}-2^{x+2}}{2^x}$.

***Resolução***

$$\frac{2^{x+5}-2^{x+2}}{2^x}=\frac{2^x\cdot 2^5-2^x\cdot 2^2}{2^x}=\frac{2^x\cdot(2^5-2^2)}{2^x}=2^5-2^2=28.$$

**4)** Calcule $8^{\frac{4}{3}}$.

***Resolução***

- Primeira resolução: $8^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{8^4}=\sqrt[3]{4096}=16$.
- Segunda resolução: $8^{\frac{4}{3}}=(2^3)^{\frac{4}{3}}=2^{3\cdot\frac{4}{3}}=2^4=16$.

**5)** Determine o valor de $81^{0,7}:81^{0,2}$.

***Resolução***

$$81^{0,7}:81^{0,2}=81^{0,7-0,2}=81^{0,5}=(3^4)^{0,5}=3^2=9.$$

**10)** Qual o valor de $(10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}:(0,1)^5$?

***Resolução***

$$(10^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}:(0,1)^5=10^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}:(10^{-1})^5=10^2:10^{-5}=10^{2-(-5)}=10^7=10000000.$$

## 3.2 - Equações exponenciais

***Definição 25:*** Chama-se equação exponencial toda equação que contém incógnita no expoente.
Exemplo:

- $2^x=16$.
- $3^{x+1}+3^{x-2}=9$.

- $3^{x-1}=27$.
- $10\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^{2x}-1=0$.

### 3.2.1 -Resolução de equações exponenciais

Para resolver uma equação exponencial, devemos transformá-la de modo a obter potências de mesma base no primeiro e no segundo membros da equação utilizando as definições e propriedades da potenciação. Além disso, usaremos o seguinte fato:

***Definição 26:*** Se $a>0$, $a\neq 1$ e $x$ é a incógnita, a solução da equação $a^x=a^p$ é $x=p$.

*Exemplos:*

**1)** Resolver a equação $4^x=512$.

***Resolução***

Usando as propriedades das potências, vamos transformar o 1º e 2º membros da equação em potências de mesma base:

$$4^x=512 \Rightarrow (2^2)^x=2^9 \Rightarrow 2^{2x}=2^9 \Rightarrow 2x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{2}.$$

$$S=\left\{\frac{9}{2}\right\}.$$

**2)** Uma empresa produziu, num certo ano, 8000 unidades de determinado produto. Projetando um aumento anual de produção de 50%, pergunta-se:

- a) Qual a produção P dessa empresa $t$ anos depois?
- b) Após quantos anos a produção anual da empresa será de 40500 unidades?

***Resolução***

- a) Obs: $50\%=\frac{50}{100}=0,5$

  Um ano depois: $8000+0,5\cdot 8000=8000\cdot(1+0,5)=8000\cdot 1,5$

  Dois anos depois: $(8000\cdot 1,5)\cdot 1,5=8000\cdot(1,5)^2$

  Três anos depois: $(8000\cdot(1,5)^2)\cdot 1,5=8000\cdot(1,5)^3$

  Produção P, $t$ anos depois: $P=8000\cdot(1,5)^t$

- b) Fazendo $P=40500$, na fórmula anterior, obtemos a equação:

  $40500=8000\cdot(1,5)^t$

  Resolvendo a equação:

  $40500=8000\cdot(1,5)^t$

  $\Rightarrow (1,5)^t=\frac{40500}{8000}$. Obs: $1,5=\frac{3}{2}$.

  $\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{81}{16}$

  $\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{3^4}{2^4}$

  $\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t=\left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow t=4$.

  Desse modo, a produção anual da empresa será de 40500 unidades após 4 anos.

**3)** Determine o conjunto solução da equação $81^{x+2}=1$ no universo dos números reais.

***Resolução***

Sabendo que $81^0=1$, temos:

$81^{x+2}=1 \Rightarrow 81^{x+2}=81^0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$.

S={–2}.

### 3.2.2 - Resolução de equações exponenciais com o uso de artifícios

Para se resolver determinadas equações exponenciais, são necessárias algumas transformações e artifícios.

*Exemplos:*

**1)** Resolver a equação $4^x-5\cdot 2^x+4=0$.

***Resolução***

Usando as propriedades da potenciação, vamos fazer uma transformação na equação dada:

$4^x-5\cdot 2^x+4=0 \Rightarrow (2^2)^x-5\cdot 2^x+4=0 \Rightarrow (2^x)^2-5\cdot 2^x+4=0$.

Fazendo $2^x=y$, temos a equação do 2º grau em $y$:

$$y^2-5y+4=0 \Rightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} \Rightarrow y_1=4 \text{ e } y_2=1.$$

Voltando à igualdade $2^x=y$:

$y_1=4$:

$2^x=y \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow 2^x=2^2 \Rightarrow x=2$.

$y_2=1$:

$2^x=y \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow 2^x=2^0 \Rightarrow x=0$.

S={0,2}.

**2)** Determine o conjunto solução da equação $5^x-5^{2-x}=24$.

***Resolução***

Preparando a equação, temos:

$$5^x-5^{2-x}=24 \Rightarrow 5^x-5^2\cdot 5^{-x}=24 \Rightarrow 5^x-25\cdot\frac{1}{5^x}=24 \Rightarrow 5^x-\frac{25}{5^x}=24.$$

Fazendo $5^x=y$, temos:

$$y-\frac{25}{y}=24 \Rightarrow y^2-25=24y \Rightarrow y^2-24y-25=0 \Rightarrow \begin{cases} y_1=25 \\ y_2=-1 \end{cases}$$

Voltando à igualdade $5^x=y$:

$y_1=25$:

$5^x=y \Rightarrow 5^x=25 \Rightarrow 5^x=5^2 \Rightarrow x=2$.

$y_2=-1$:

$5^x=y \Rightarrow 5^x=-1 \Rightarrow$ Esta equação não tem raiz em $R$, pois $5^x>0$, para todo $x$ real.

S={2}.

## 3.3 - Função exponencial

***Definição 27:*** A função $f: R \to R$ dada por $f(x)=a^x$ (com $a>0$ e $a\neq 1$) é denominada função exponencial de base $a$.

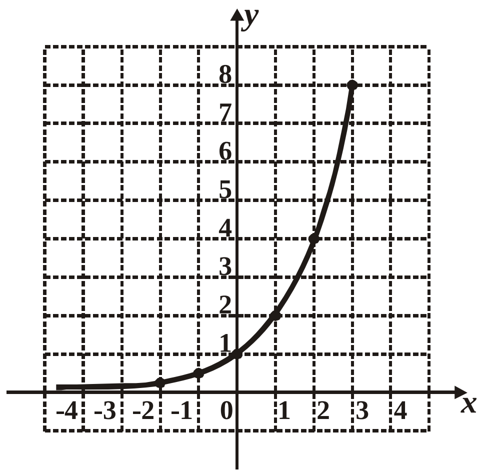
### 3.3.1 - Gráfico da função exponencial no plano cartesiano

Dada a função $f : R \rightarrow R$, definida por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), temos dois casos para traçar seu gráfico: (i) $a > 1$ e (ii) $0 < a < 1$.

- (i) $a > 1$.

**1)** Traçar o gráfico de $f(x) = 2^x$.

| $x$ | $f(x) = 2^x$ |
|---|---|
| $-2$ | $\frac{1}{4}$ |
| $-1$ | $\frac{1}{2}$ |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 8 |
| | |
| | |
| | |

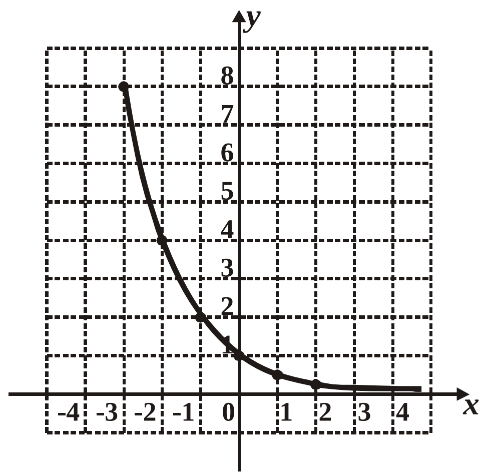



**OBS.1:** Quanto maior o expoente $x$, maior é a potência $a^x$, ou seja, se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ é crescente.

- (ii) $0 < a < 1$.

**2)** Traçar o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

| $x$ | $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ |
|---|---|
| $-3$ | 8 |
| $-2$ | 4 |
| $-1$ | 2 |
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{4}$ |
| | |
| | |



**Obs.2:** Quanto maior o expoente $x$, menor é a potência $a^x$, ou seja, se $0<a<1$ a função $f(x)=a^x$ é decrescente.
Com base no gráfico, podem-se tirar algumas considerações:

### 3.3.2 - Características da função exponencial

Seja $f: R \to R$, definida por $f(x)=a^x$ (com $a>0$ e $a \neq 1$).

- Domínio da função $f$ são todos os números reais $\Rightarrow D=R$.
- Imagem da função $f$ são os números reais positivos $\Rightarrow \mathbf{Im}=R_+^*$.
- A curva da função passa pelo ponto (0,1).
- A função é crescente para a base $a>1$.
- A função é decrescente para a base $0<a<1$.

## 3.4 - Inequações exponenciais

***Definição 28:*** São inequações exponenciais aquelas que aparecem incógnitas no expoente.

### 3.4.1 - Resolução de inequações exponenciais

Para resolver inequações exponenciais, devemos observar dois passos importantes:

- 1) Redução dos dois membros da inequação a potências de mesma base;
- 2) Verificar a base da exponencial, $a>1$ ou $0<a<1$, aplicando as propriedades abaixo.

| Caso (i): $a>1$ | Caso (ii): $0<a<1$ |
|---|---|
| $a^m>a^n \Rightarrow m>n$<br>As desigualdades têm mesmo sentido | $a^m>a^n \Rightarrow m<n$<br>As desigualdades têm sentidos diferentes |

*Exemplos:*

**1)** Resolva a inequação $2^x>32$.

***Resolução***

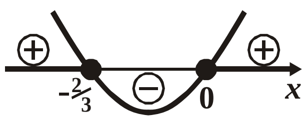
Como $2^5=32$, a inequação pode ser escrita:
$2^x>2^5 \Rightarrow$ Caso (i): $a>1$.
$\Rightarrow x>5$.
S={$x \in R$; $x>5$}.

**2)** Resolva a inequação $(\sqrt{3})^{3x^2+2x} \geq 1$.

***Resolução***

$(\sqrt{3})^{3x^2+2x} \geq 1 \Rightarrow (\sqrt{3})^{3x^2+2x} \geq (\sqrt{3})^0 \Rightarrow$ Caso (i): $a>1$.
$\Rightarrow 3x^2+2x \geq 0$
Tome $f(x)=3x^2+2x$

$$f(x)=0 \Rightarrow 3x^2+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{2}{3} \\ x_2=0 \end{cases}$$




S={$x \in R$; $x \leq -2/3$ ou $x \geq 0$}.

**3)** Resolva a inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-7}$.

***Resolução***

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-7}$ $\Rightarrow$ Caso (ii): $0 < a < 1$.

$x+3 > 2x-7 \Rightarrow -x > -10 \cdot (-1) \Rightarrow x < 10$.

S=$\{x \in R \,;\; x < 10\}$.

## <u>AULA 04</u> – EXERCÍCIOS

**1)** Uma cultura inicial de 100 bactérias, reproduz-se em condições ideais. Supondo que, por divisão celular, cada bactéria dessa cultura dê origem a duas outras bactérias idênticas por hora.

**a)** Qual a população dessa cultura após 3 horas do instante inicial?

**b)** Depois de quantas horas a população dessa cultura será de 51.200 bactérias?

**2)** Resolva as equações:

**a)** $2^{1+x} + \sqrt{8} = \sqrt{72}$

**b)** $4^{x-4} - \frac{3^x}{81} = 0$

**3)** Determine o conjunto solução das seguintes equações:

**a)** $3^{2x} - 28.3^x + 27 = 0$

**b)** $2^{2x} + 32 = 12.2^x$

**c)** $\frac{16^x + 64}{5} = 4^{x+1}$

**4)** Se f(x) = $x^2$ + x e g(x) = $3^x$, determine x para que f(g(x)) = 2.

**5)** Cada golpe de uma bomba extrai 10% de óleo de um tanque. A capacidade do tanque é de 1 $m^3$ e, inicialmente, esta cheio.

**a)** Após o 5º golpe, qual o valor mais próximo para o volume de óleo que permanece no tanque?

**b)** Qual é a lei da função que representa o volume de óleo que permanece no tanque após n golpes?

**6)** Resolva as inequações:

**a)** $\left(\sqrt{5}\right)^{x^2-3x} \geq \left(\sqrt{5}\right)^4$

**b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$

**C)** $2^{2X+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} < 1$

**7)** Determine o domínio da função

$y = \sqrt{2^{x-2} - 1}$

***Respostas:***

**1)** a) 800 bactérias
b) 9 horas

**2)** a) 3/2
b) 4

**3)** a) {0, 3}
b) {2, 3}
c) {1, 2}

**4)** x = 0

**5)** a) 0,59$m^3$
b) f(n) = 1 . $(0,9)^n$

**6)** a) $\{x \in R / x \leq -1, ou, x \geq 4\}$
b) $\{x \in R / x > 3\}$
c) $\{x \in R / x < 0\}$

**7)** $\{x \in R / x \geq 2\}$

# AULA 05

## 4 – FUNÇÃO LOGARÍTMICA

### 4.1 – Definição de Logaritmo

***Definição 29:*** Dados dois números reais positivos, $a$ e $b$, com $a \neq 1$, existe um único número real $x$ de modo que $a^x = b$. Este número $x$ é chamado de logaritmo de $b$ na base $a$ e indica-se $\log_a b$.

Podemos então, escrever:

**(Eq.9)** $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ ($1 \neq a > 0$ e $b > 0$).

Na igualdade $x = \log_a b$, temos:

- $a$ é a base do logaritmo;
- $b$ é o logaritmando ou antilogaritmo;
- $x$ é o logaritmo.

*Exemplos:*

Calcular o valor de $x$ nos exercícios seguintes:

**1)** $\log_2 32 = x$.

$2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$.

**2)** $\log_4 16 = x$.

$4^x = 16 \Rightarrow 4^x = 4^2 \Rightarrow x = 2$.

**3)** $\log_8 x = 1$.

$8^1 = x \Rightarrow x = 8$.

**4)** $\log_3 81 = x$.

$3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$.

**5)** $\log_5 1 = x$.

$5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$.

**OBS. 1:** $\boxed{\log b \Rightarrow \text{significa } \log_{10} b}$. Quando não se indica a base, fica subentendido que a base é 10.

### 4.2 - Conseqüências da definição

Tome $1 \neq a > 0$, $b > 0$ e $m$ um número real qualquer. Da definição de logaritmos, pode-se verificar que:

- 1) O logaritmo de 1 em qualquer base é igual a zero.
  $\log_a 1=0$, pois $a^0=1$.
- 2) O logaritmo da própria base é igual a 1.
  $\log_a a=1$, pois $a^1=a$.
- 3) O logaritmo de uma potência da base é igual ao expoente.
  $\log_a a^m=m$, pois $a^m=a^m$.
- 4) O logaritmo de $b$ na base $a$ é o expoente ao qual devemos elevar $a$ para obter $b$.
  $a^{\log_a b}=b$, pois $a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$.

## 4.3 - Propriedades dos logaritmos

- 1) Logaritmo de produto
  $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$ ($1\neq a>0$, $x>0$ e $y>0$).
- 2) Logaritmo de quociente
  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$ ($1\neq a>0$, $x>0$ e $y>0$).
- 3) Logaritmo de potência
  $\log_a x^m=m\cdot\log_a x$ ($1\neq a>0$, $x>0$ e $m\in R$).

## 4.4 - Cologaritmo

Cologaritmo de um número positivo $b$ numa base $a$ ($1\neq a>0$) é o logaritmo do inverso desse número $b$ na base $a$.

**(Eq.10)** $$co\log_a b=\log_a\left(\frac{1}{b}\right) \Rightarrow \boxed{co\log_a b=-\log_a b} \quad (1\neq a>0 \text{ e } b>0).$$

*Exemplo:*

Sabendo que $\log 3=a$ e $\log 5=b$, calcule os logaritmos abaixo, em função de $a$ e $b$.

- a) $\log 15$

$\log 15=\log(3\cdot 5)=\log 3+\log 5=a+b$.

- b) $\log 675$

$\log 675=\log(3^3\cdot 5^2)=\log 3^3+\log 5^2=3\log 3+2\log 5=3a+2b$.

- c) $\log 2$

$\log 2=\log\frac{10}{5}=\log 10-\log 5=1-b$.

## 4.5 - Mudança de base

As propriedades logarítmicas são válidas para logaritmos numa mesma base, por isso, em muitos casos, é conveniente fazer a conversão de logaritmos de bases diferentes para uma única base.

A seguir, será apresentada a fórmula de mudança de base.

Seja: $\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$.

Aplicando o logaritmo na base $c$ em ambos os membros, obtemos:

$\log_c a^x = \log_c b \Rightarrow x \cdot \log_c a = \log_c b \Rightarrow x = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, mas $x = \log_a b$.

Então:

**(Eq.11)** $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ ($1 \neq a > 0$, $1 \neq c > 0$ e $b > 0$).

*Exemplos:*

**1)** Sendo $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}4$, calcule $\log_2 6$.

$$\log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{\log(2 \cdot 3)}{\log 2} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{0{,}3 + 0{,}4}{0{,}3} = \frac{0{,}7}{0{,}3} = \frac{7}{3}.$$

**2)** Resolva a equação $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$.

A condição de existência é $\boxed{x > 0}$.
Transformando para a base 2:

$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 16} = 7$

$\log_2 x + \dfrac{\log_2 x}{2} + \dfrac{\log_2 x}{4} = 7$

$\dfrac{4\log_2 x + 2\log_2 x + \log_2 x}{4} = \dfrac{28}{4}$

$7\log_2 x = 28$

$\log_2 x = 4$

$2^4 = x$

$x = 16 \Rightarrow$ 16 satisfaz a condição de existência.
Logo, o conjunto solução é:
S={16}.

**3)** Resolva a equação $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$.

Condições de existência são: $x+2>0$ e $x-2>0 \Rightarrow x>-2$ e $x>2$. Então: $\boxed{x>2}$.

$\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$

$\log_2[(x+2)\cdot(x-2)] = 5$

$(x+2)\cdot(x-2) = 2^5$

$x^2 - 4 = 32$

$x^2 = 36$

$x^2 = \pm 6 \Rightarrow -6$ não satisfaz a condição de existência mas, 6 satisfaz.

Logo, o conjunto solução é: S={6}.

## 4.6 - Função logarítmica

A função exponencial $g : R \to R_+^*$ definida por $g(x) = a^x$ (com $1 \neq a > 0$) é bijetora. Nesse caso, podemos determinar a sua função inversa. É a função logarítmica definida abaixo.

***Definição 30:*** A função $f : R_+^* \to R$ definida por $f(x) = \log_a x$ (com $1 \neq a > 0$) é chamada função logarítmica de base $a$.

### 4.6.1 - Gráfico da função logarítmica no plano cartesiano

Como os gráficos de funções inversas são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, o gráfico da função logarítmica é de imediata construção, uma vez que já vimos o gráfico da função exponencial.

Seja $f : R_+^* \to R$, tal que $y = \log_a x$ e $f^{-1} : R \to R_+^*$, tal que $y = a^x$. Os gráficos de $f$ e $f^{-1}$ serão plotados no mesmo plano cartesiano ortogonal.

- (i) $a > 1$.

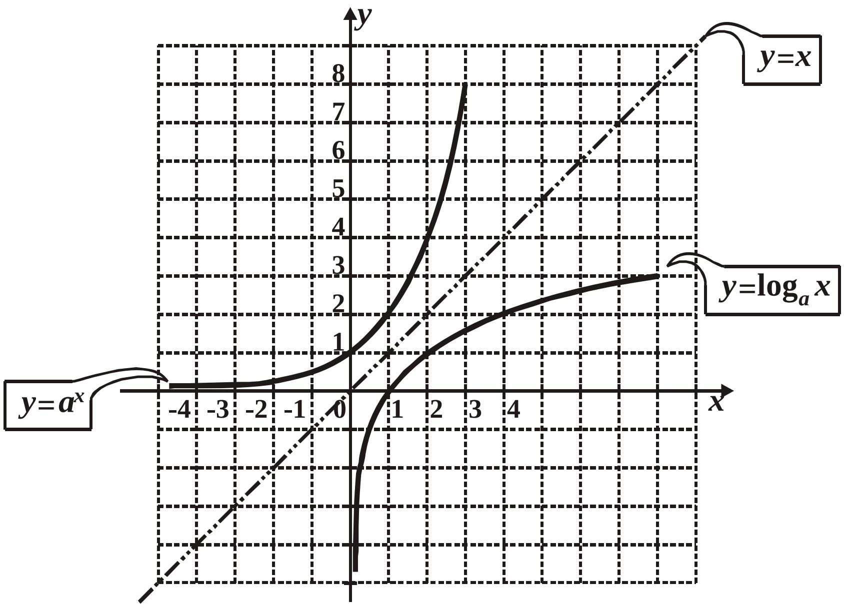



**Gráfico da função logarítmica e exponencial ($a > 1$).**

- (ii) $0 < a < 1$.

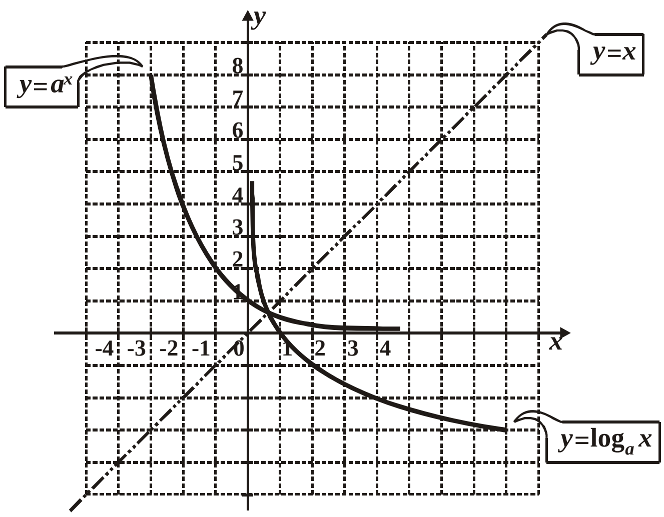



**Gráfico da função logarítmica e exponencial ($0 < a < 1$).**

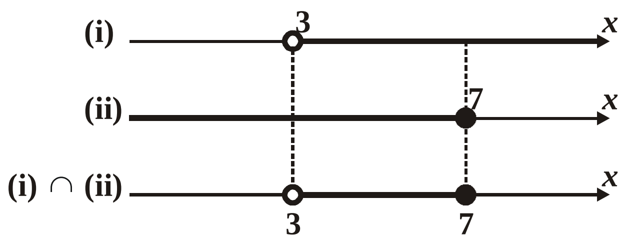
## 4.7 - Inequações logarítmicas

Chamamos de inequação logarítmica toda inequação que envolve logaritmos com a incógnita aparecendo no logaritmando, na base ou em ambos.

*Exemplos:* **Exercício Resolvido**

**1)** Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

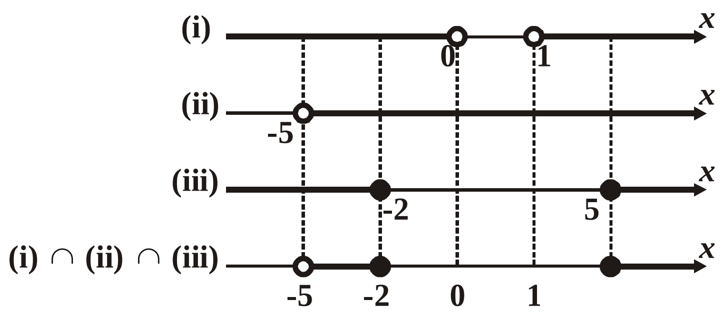
Condição de existência:
$x-3>0 \Rightarrow x>3$ (i).
Base: $(0<a<1)$. Como a base é um número entre 0 e 1, a função logarítmica é decrescente e o sentido da desigualdade se inverte para os logaritmandos.
$x-3\leq 4 \Rightarrow x\leq 3$ (ii).
A solução da inequação deve satisfazer as duas condições:




S={ $x \in R$ ; $3<x\leq 7$}.

**2)** Resolva a inequação $\log_4(x^2-x) \geq \log_4(2x+10)$.

1ª Condição de existência:
$x^2-x>0 \Rightarrow x<0$ ou $x>1$ (i).
2ª Condição de existência:
$2x+10>0 \Rightarrow x>-5$ (ii).
Base: $(a>1)$.
$x^2-x \geq 2x+10 \Rightarrow x^2-x-2x-10\geq 0 \Rightarrow x^2-3x-10\geq 0 \Rightarrow x\leq -2$ ou $x\geq 5$ (iii).
A solução da inequação deve satisfazer as três condições:




S={ $x \in R$ ; $-5<x\leq -2$ ou $x\geq 5$}.

**3)** Suponha que o preço de um carro sofra uma desvalorização de 20% ao ano. Depois de quanto tempo, aproximadamente, seu preço cairá para cerca da metade do preço de um carro novo? (Use $\mathbf{log}_{10}\,2=0{,}3$)

$$p = p_0\,(1-0{,}2)^t \Rightarrow p = p_0\,(0{,}8)^t \Rightarrow p = p_0\left(\frac{8}{10}\right)^t \Rightarrow$$

Procura-se $p = \dfrac{p_0}{2}$, logo:

$$\frac{p_0}{2} = p_0\left(\frac{8}{10}\right)^t \Rightarrow (p_0 \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{2^3}{10}\right)^t \Rightarrow 2^{-1} = 2^{3t}\cdot 10^{-t}$$

Aplicando $\mathbf{log}_{10}$ em ambos os membros, temos:

$$\mathbf{log}_{10}\,2^{-1} = \mathbf{log}_{10}\,(2^{3t}\cdot 10^{-t})$$
$$\mathbf{log}_{10}\,2^{-1} = \mathbf{log}_{10}\,(2^{3t}\cdot 10^{-t})$$
$$\mathbf{log}_{10}\,2^{-1} = \mathbf{log}_{10}\,2^{3t} + \mathbf{log}_{10}\,10^{-t}$$
$$-\mathbf{log}_{10}\,2 = 3t\,\mathbf{log}_{10}\,2 - t\,\mathbf{log}_{10}\,10$$
$$-0{,}3 = 3t\cdot 0{,}3 - t$$
$$-0{,}3 = 0{,}9t - t$$
$$-0{,}3 = -0{,}1t$$
$$t = 3$$

O preço do carro cairá para a metade do preço do carro novo depois de 3 anos

## ***<u>AULA 05</u> – EXERCÍCIOS***

**1)** Resolva as seguintes equações:
- **a)** $\log_2 (x - 4) = 3$
- **b)** $\log_x (3x^2 - x) = 2$
- **c)** $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 = 0$
- **d)** $\log_5(\log_3 x) = 1$

**2)** Sabendo que log 2 = 0,301 e log 3 = 0,477, calcule:
- **a)** log 6 **b)** log 5
- **c)** log 2,5 **d)** $\log\sqrt{3}$

**3)** Qual o conjunto solução da equação
- **a)** $\log_2(3x-1) - \log_4(x+1) = 1/2$
- **b)** $\log_{10}\sqrt{x} + \log_{100} x = 2$

**4)** Determine o campo de existência da função
$f(x) = \log_3(x^2 - x - 12) - \log_3(x^2 - 10x + 25)$

**5)** Resolva as inequações:
- **a)** $\log_3(5x - 1) > \log_3 4$
- **b)** $\log_2(x - 4) > 1$
- **c)** $\log_{12}(x - 1) + \log_{12}(x - 2) \leq 1$

***Respostas:***

**1)** a) 12 b) ½
c) {1/9, 27} d) 243

**2)** a) 0,778 b) 0,699
c) 0,398 d) 0,2385

**3)** a) 1 b) 100

**4)** $\{x \in R / x < -3, ou, x > 4, e, x \neq 5\}$

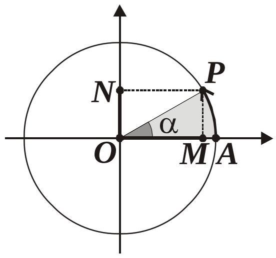
**5)** a) $S = \{x \in R / x > 1\}$
b) $S = \{x \in R / x > 6\}$
c) $S = \{x \in R / 2 < x \leq 5\}$

# AULA 06

# 5 - FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

## 5.1 - Seno e cosseno de um arco:

Tome o arco $\alpha$ dado na figura abaixo:




[Fig.5] Arco $\alpha$ para o conceito de seno e cosseno.

Seno de um arco é a ordenada do ponto P.

**(Eq.12)** $\mathbf{sen}\,\alpha = \overline{ON} = \overline{MP}$ .

Cosseno de um arco é a abscissa do ponto P.

**(Eq.13)** $\mathbf{cos}\,\alpha = \overline{OM} = \overline{NP}$ .

### 5.1.1 – Conseqüências:

Para qualquer ponto da circunferência, a ordenada e a abscissa nunca são menores que $-1$ nem maiores que $+1$. Por isso dizemos que seno e cosseno são números compreendidos entre $-1$ e $+1$, o que nos permite concluir:

**(Eq.14)** $-1 \le \mathbf{sen}\,\alpha \le 1$ e $-1 \le \mathbf{cos}\,\alpha \le 1$

### 5.1.2 - Função seno e função cosseno

Função seno é a função que associa a cada arco $x \in R$ o número $\mathbf{sen}\, x \in R$, ou $y = \mathbf{sen}\, x$ .

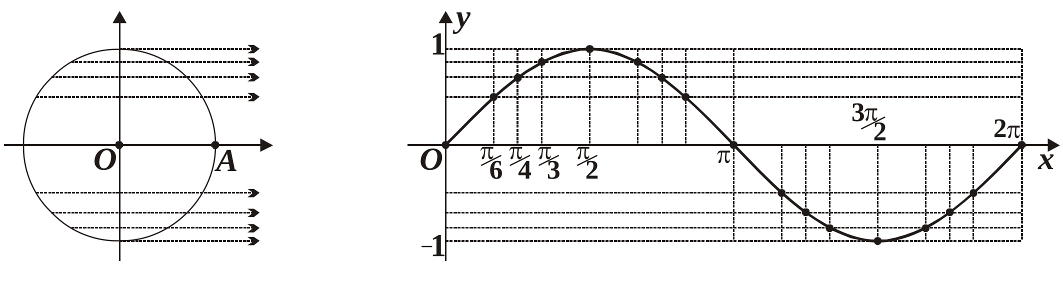
Função cosseno é a função que associa a cada arco $x \in R$ o número $\mathbf{cos}\, x \in R$, ou $y = \mathbf{cos}\, x$ .

### 5.1.3 - Gráfico das funções seno e cosseno

Para estudar a função seno ( $y = \mathbf{sen}\, x$ ) e a função cosseno ( $y = \mathbf{cos}\, x$ ) vamos variar $x$ no intervalo $[0,2\pi]$.

#### 5.1.3.1 - Função seno:

$y = \mathbf{sen}\, x$




[Fig.6]Gráfico da função seno.

#### 5.1.3.2 - Conclusões

- O domínio da função $y = \textbf{sen } x$ é o conjunto dos números reais, isto é, $D = R$.
- A imagem da função $y = \textbf{sen } x$ é o intervalo $[-1,+1]$, isto é, $-1 \leq \textbf{sen } x \leq +1$.
- Toda vez que somamos $2\pi$ a um determinado valor de $x$, a função seno assume o mesmo valor. Como $2\pi$ é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \textbf{sen } x$ é $p = 2\pi$.

Essa conclusão pode ser obtida, também, a partir do ciclo trigonométrico onde marcamos o arco $x$.

Quando adicionamos $2k\pi$ ao arco $x$, obtemos sempre o mesmo valor para o seno, pois a função seno é periódica de período $2\pi$.

**(Eq.15)** $\textbf{sen } x = \textbf{sen}(x + 2k\pi)$, $k \in Z$ (Inteiros).

#### 5.1.3.3 - Seno é função ímpar

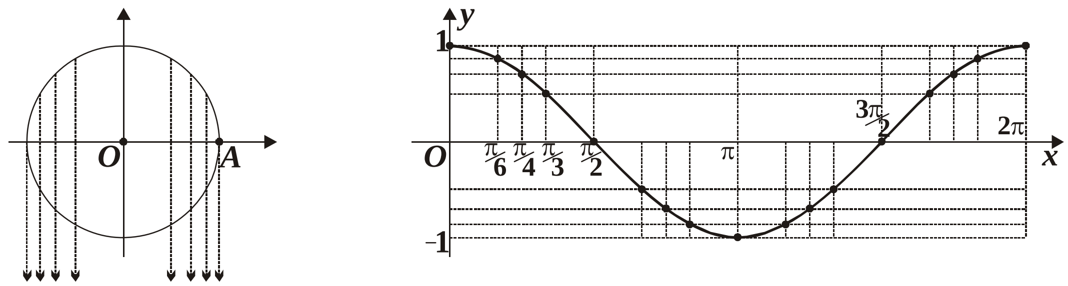
No ciclo trigonométrico, os pontos correspondentes aos números $x$ e $-x$ têm imagens simétricas em relação ao eixo das abscissas. Daí resulta que as ordenadas desses pontos têm o mesmo valor absoluto, porém, sinais opostos. Então, $\textbf{sen}(-x) = -\textbf{sen } x$.

Quando uma função $f$ é tal que $f(-x) = -f(x)$, para todo $x$ do seu domínio, dizemos que $f$ é uma função ímpar.

Como $\textbf{sen}(-x) = -\textbf{sen } x$, para todo $x$ real, podemos afirmar que a função seno é ímpar.

#### 5.1.3.4 - Função cosseno

$y = \textbf{cos } x$




[Fig. 2]: Gráfico da função cosseno.

#### 5.1.3.5 - Conclusões

- O domínio da função $y = \textbf{cos } x$ é o conjunto dos números reais, isto é, $D = R$.
- A imagem da função $y = \textbf{cos } x$ é o intervalo $[-1,+1]$, isto é, $-1 \leq \textbf{cos } x \leq +1$.
- O período da função $y = \textbf{cos } x$ é $p = 2\pi$.

Essa conclusão pode ser obtida, também, a partir do ciclo trigonométrico onde marcamos o arco $x$.

Quando adicionamos $2k\pi$ ao arco $x$, obtemos sempre o mesmo valor para o cosseno, pois a função cosseno é periódica de período $2\pi$.

**(Eq.16)** $\textbf{cos } x = \textbf{cos }(x + 2k\pi)$, $k \in Z$ (Inteiros).

#### 5.1.3.6 - Cosseno é função par

No ciclo trigonométrico, os pontos correspondentes aos números $x$ e $-x$ têm imagens simétricas em relação ao eixo das abscissas. Daí resulta que esses pontos têm a mesma abscissa. Então, $\textbf{cos }(-x) = \textbf{cos } x$.

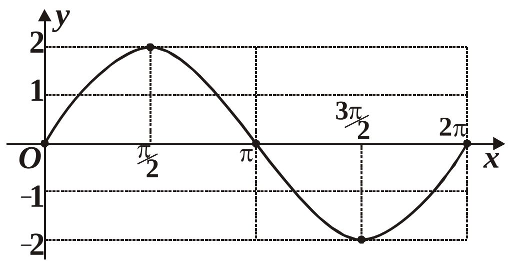
Quando uma função $f$ é tal que $f(-x)=f(x)$, para todo $x$ do seu domínio, dizemos que $f$ é uma função par.

Como $\mathbf{cos}\,(-x)=\mathbf{cos}\,x$, para todo $x$ real, podemos afirmar que a função cosseno é par.

*Exemplos:*

**1)** Construa o gráfico da função $y=2\,\mathbf{sen}\,x$, dando o domínio, a imagem e o período.

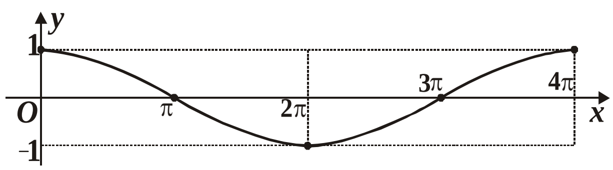
| $x$ | $\mathbf{sen}\,x$ | $2\,\mathbf{sen}\,x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $2\cdot 0$ | 0 |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | $2\cdot 1$ | 2 |
| $\pi$ | 0 | $2\cdot 0$ | 0 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | –1 | $2\cdot(-1)$ | –2 |
| $2\pi$ | 0 | $2\cdot 0$ | 0 |




Observando o gráfico, temos:
$D=R$, $\mathbf{Im}=[-2,2]$, e $p=2\pi$.

**2)** Construa o gráfico da função $y=\mathbf{cos}\,\frac{x}{2}$, dando o domínio, a imagem e o período.

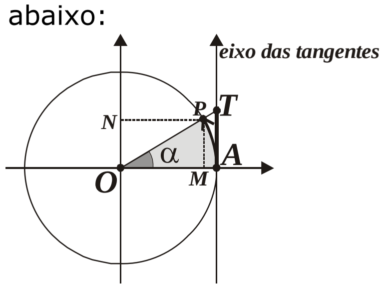
| $\frac{x}{2}$ | $x$ | $\mathbf{cos}\,\frac{x}{2}$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | 0 | 0 |
| $\pi$ | $2\pi$ | –1 | –1 |
| $\frac{3\pi}{2}$ | $3\pi$ | 0 | 0 |
| $2\pi$ | $4\pi$ | 1 | 1 |




Observando o gráfico, temos:
$D=R$, $\mathbf{Im}=[-1,1]$, e $p=4\pi$.

## 5.2 - Tangente de um arco

Tome o arco $\alpha$ dado na figura abaixo:




[Fig. 3]: Arco $\alpha$ para o conceito de tangente.

Tangente de um arco é a ordenada do ponto T (segmento AT).

**(Eq.17)** $\mathbf{tan}\,\alpha = \overline{AT}$.

### 5.2.1 - Conseqüências

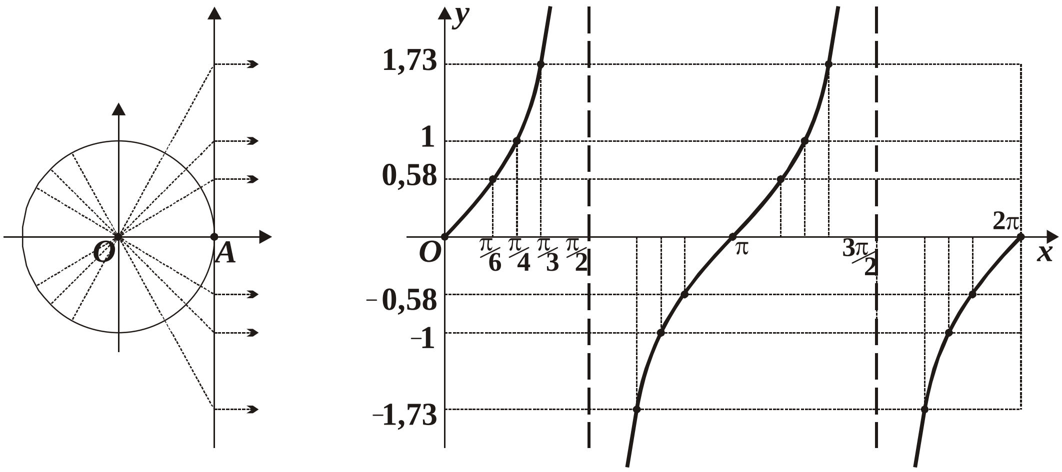
- O eixo vertical, suporte de $\overline{AT}$, é chamado eixo das tangentes.
- Podemos dizer que $\mathbf{tan}\,\alpha$ só é definida se $\alpha \in R$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$).

### 5.2.2 - Função tangente

Função tangente é a função que associa a cada arco $x \in R$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$), o número $\mathbf{tan}\,x \in R$, ou $y = \mathbf{tan}\,x$.

### 5.2.3 - Gráfico da função tangente

Para estudar a função tangente ($y = \mathbf{tan}\,x$) vamos variar $x$ no intervalo $[0,2\pi]$.




[Fig. 4]: Gráfico da função tangente.

### 5.2.4 - Conclusões

- O domínio da função $y = \mathbf{tan}\,x$ é o conjunto dos números reais $x \in R$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$), isto é, $D = \{x \in R \,/\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\}$.
- A imagem da função $y = \mathbf{tan}\,x$ é o conjunto dos números reais.
- Toda vez que somamos $k\pi$ a um determinado valor de $x$, a função tangente assume o mesmo valor. Como $\pi$ é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \mathbf{tan}\,x$ é $p = \pi$.

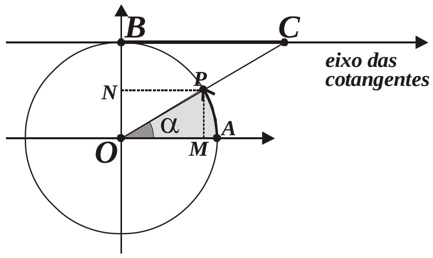
**(Eq.18)** $\mathbf{tan}(x + k\pi) = \mathbf{tan}\,x$, $k \in Z$.

### 5.2.5 - Tangente é uma função ímpar

Como $\mathbf{tan}(-x) = -\mathbf{tan}\,x$, para todo $x$ real, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$), podemos afirmar que a função tangente é ímpar.

## 5.3 - Cotangente de um arco

Tome o arco $\alpha$ dado na figura abaixo:




[Fig. 5]: Arco $\alpha$ para o conceito de cotangente.

Cotangente de um arco é a abscissa do ponto C (segmento BC).

**(Eq.19)** $\mathbf{cot}\,\alpha = \overline{BC}$ .

### 5.3.1 - Conseqüências

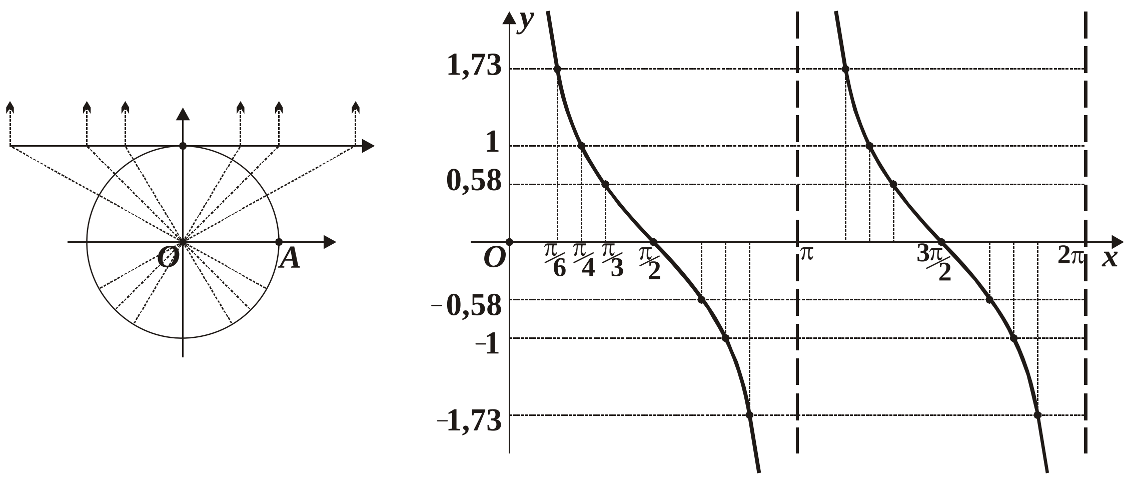
- O eixo horizontal, suporte de $\overline{BC}$, é chamado eixo das cotangentes.
- Podemos dizer que $\mathbf{cot}\,\alpha$ só é definida se $\alpha \in R$ e $\alpha \neq k\,\pi$ ( $k \in Z$ ).

### 5.3.2 - Função cotangente

Função cotangente é a função que associa a cada arco $x \in R$, com $x \neq k\,\pi$ ($k \in Z$), o número $\mathbf{cot}\ x \in R$, ou $y = \mathbf{cot}\ x$.

### 5.3.3 - Gráfico da função cotangente

Para estudar a função cotangente ( $y = \mathbf{cot}\ x$ ) vamos variar $x$ no intervalo $[0,2\pi]$.




[Fig. 6]: Gráfico da função cotangente.

### 5.3.4 - Conclusões

- O domínio da função $y = \mathbf{cot}\ x$ é o conjunto dos números reais $x \in R$, com $x \neq k\,\pi$ ($k \in Z$), isto é, $D = \{ x \in R /\ x \neq k\,\pi,\ k \in Z \}$.
- A imagem da função $y = \mathbf{cot}\ x$ é o conjunto dos números reais.
- Toda vez que somamos $k\,\pi$ a um determinado valor de $x$, a função cotangente assume o mesmo valor. Como $\pi$ é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \mathbf{cot}\ x$ é $p = \pi$.

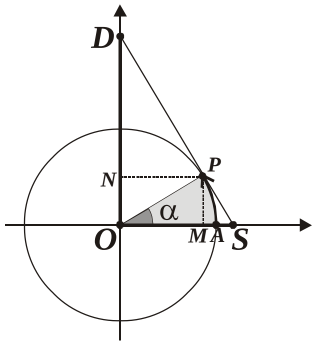
$\mathbf{cot}\,(x + k\,\pi) = \mathbf{cot}\ x,\ k \in Z$ .

### 5.3.5 - Cotangente é uma função ímpar

Como $\mathbf{cot}(-x) = -\mathbf{cot}\ x$, para todo $x$ real, com $x \neq k\pi$ ($k \in Z$), podemos afirmar que a função cotangente é ímpar.

## 5.4 - Secante e cossecante de um arco

Tome o arco $\alpha$ dado na figura abaixo:




[Fig. 7]: Arco $\alpha$ para o conceito de secante e cossecante.

Traçando uma reta tangente à circunferência pelo ponto P, interceptamos o eixo das abscissas no ponto S e o eixo das ordenadas no ponto D.

**(Eq.20)** $\mathbf{sec}\ \alpha = \overline{OS}$ .

**(Eq.21)** $\mathbf{cossec}\ \alpha = \overline{OD}$ .

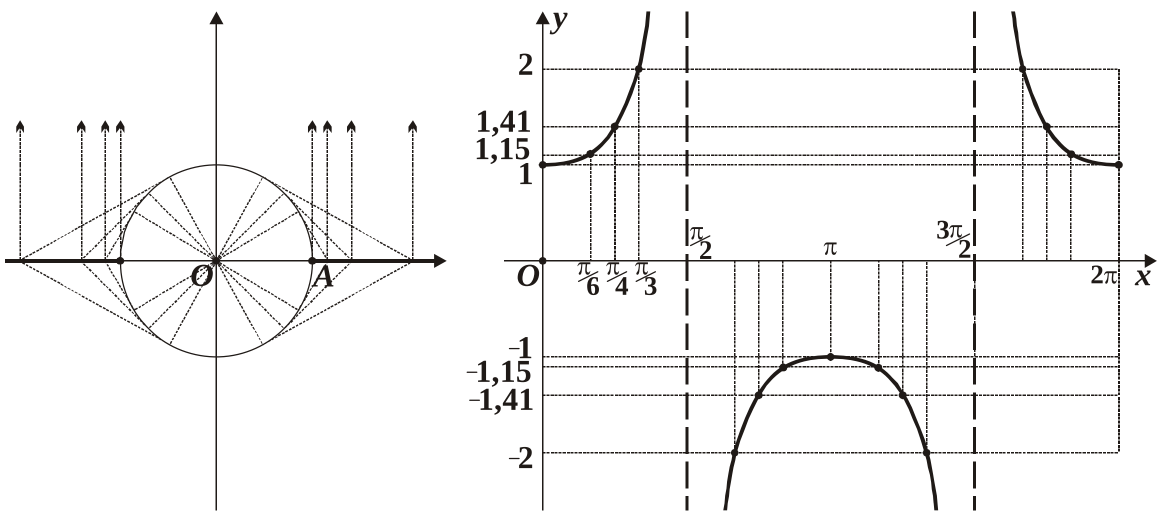
### 5.4.1 - Função secante e cossecante

Função secante é a função que associa a cada arco $x \in R$, com $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$), o número $\mathbf{sec}\ x \in R$, ou $y = \mathbf{sec}\ x$

Função cossecante é a função que associa a cada arco $x \in R$, com $x \neq k\pi$ ($k \in Z$), o número $\mathbf{cossec}\ x \in R$, ou $y = \mathbf{cossec}\ x$ .

### 5.4.2 - Gráfico da função secante

Para estudar a função secante ( $y = \mathbf{sec}\ x$ ) vamos variar $x$ no intervalo [0,2π].




[Fig. 8]: Gráfico da função secante.

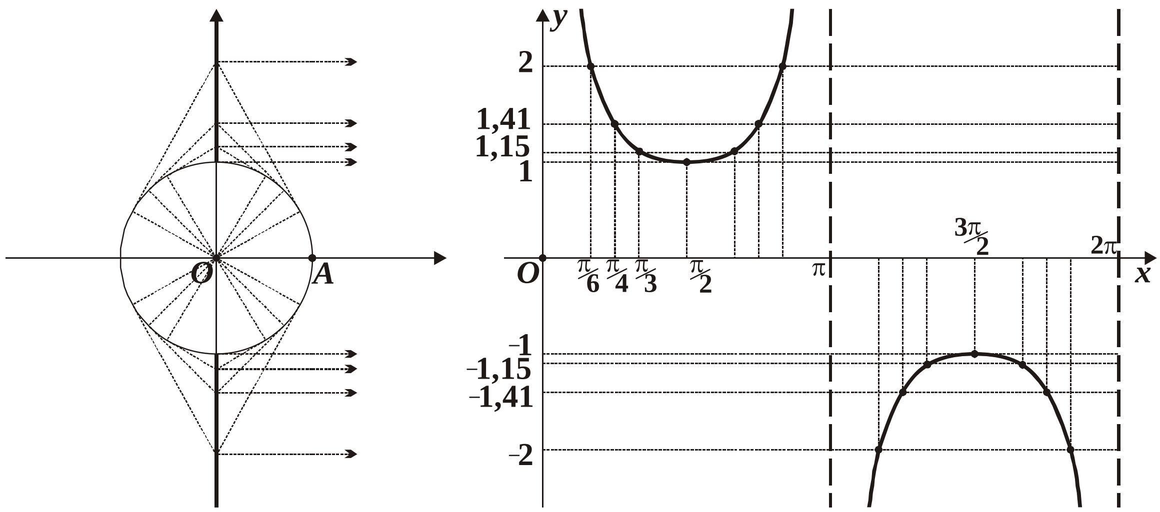
### 5.4.3 - Conclusões

- O domínio da função $y = \mathbf{sec}\ x$ é o conjunto dos números reais $x \in R$, com $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in Z$), isto é, $D = \{x \in R /\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\}$.
- A imagem da função $y = \mathbf{sec}\ x$ é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 1 ou menores ou iguais a –1, isto é, $\mathbf{Im} = \{y \in R /\ y \geq 1$ ou $y \leq -1\}$.
- Toda vez que somamos $2k\pi$ a um determinado valor de $x$, a função secante assume o mesmo valor. Como $2\pi$ é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \mathbf{sec}\ x$ é $p = 2\pi$.

**(Eq.22)** $\mathbf{sec}(x + 2k\pi) = \mathbf{sec}\ x,\ k \in Z$.

### 5.4.4 - Gráfico da função cossecante

Para estudar a função cossecante ($y = \mathbf{cossec}\ x$) vamos variar $x$ no intervalo $[0, 2\pi]$.




[Fig. 9]: Gráfico da função cossecante.

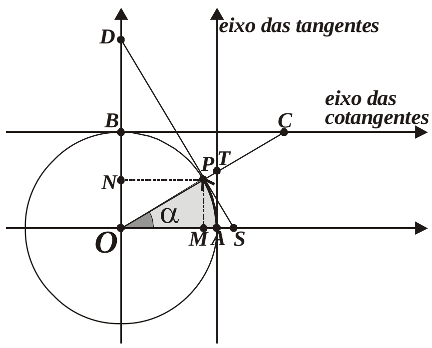
### 5.4.5 - Conclusões

- O domínio da função $y = \mathbf{cossec}\ x$ é o conjunto dos números reais $x \in R$, com $x \neq k\pi$ ($k \in Z$), isto é, $D = \{x \in R /\ x \neq k\pi,\ k \in Z\}$.
- A imagem da função $y = \mathbf{cossec}\ x$ é o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 1 ou menores ou iguais a –1, isto é, $\mathbf{Im} = \{y \in R /\ y \geq 1$ ou $y \leq -1\}$.
- Toda vez que somamos $2k\pi$ a um determinado valor de $x$, a função cossecante assume o mesmo valor. Como $\pi$ é o menor número positivo para o qual isso acontece, o período da função $y = \mathbf{cossec}\ x$ é $p = 2\pi$.

**(Eq.23)** $\mathbf{cossec}(x + 2k\pi) = \mathbf{cossec}\ x,\ k \in Z$.

## 5.5 - Relações trigonométricas

Será feito o estudo das relações que existem entre as funções trigonométricas, pois elas têm muitas aplicações na trigonometria e fora dela. Para as deduções das relações, tomaremos como base o ciclo trigonométrico e um ângulo $\alpha$ dado.

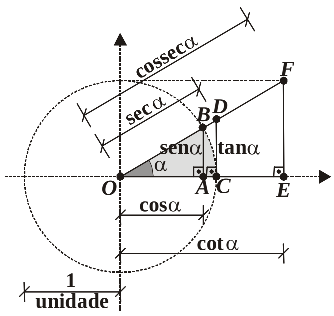



[Fig. 10]: Funções trigonométricas no ciclo.

Podemos identificar as funções trigonométricas no ciclo, em relação ao ângulo $\alpha$:

$\mathbf{sen}\,\alpha=\overline{ON}$ ; $\mathbf{cos}\,\alpha=\overline{OM}$ ; $\mathbf{tan}\,\alpha=\overline{AT}$ ; $\mathbf{cot}\,\alpha=\overline{BC}$ ; $\mathbf{sec}\,\alpha=\overline{OS}$ e $\mathbf{cossec}\,\alpha=\overline{OD}$ .

Analisando as funções no ciclo e fixando inicialmente o ângulo $\alpha$, podemos fazer as seguintes mudanças, para facilitar o entendimento das relações trigonométricas:



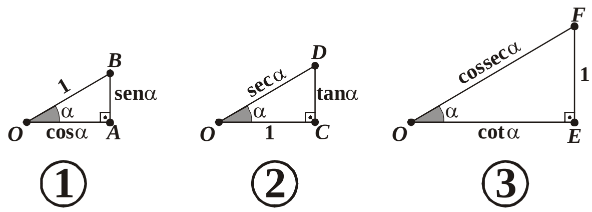

[Fig. 11]: Funções adaptadas no ciclo.

Com as novas adaptações, temos as seguintes funções:

$\mathbf{sen}\,\alpha=\overline{AB}$ ; $\mathbf{cos}\,\alpha=\overline{OA}$ ; $\mathbf{tan}\,\alpha=\overline{CD}$ ; $\mathbf{cot}\,\alpha=\overline{OE}$ ; $\mathbf{sec}\,\alpha=\overline{OD}$ e $\mathbf{cossec}\,\alpha=\overline{OF}$ .

Daí tiram-se três triângulos semelhantes:

$\Delta OAB \equiv \Delta OCD \equiv \Delta OEF$ .




[Fig. 12]: Triângulos semelhantes.

### 5.5.1 - Usando o teorema de Pitágoras

- $\mathbf{sen}^2\alpha+\mathbf{cos}^2\alpha=1$;
- $\mathbf{tan}^2\alpha+1=\mathbf{sec}^2\alpha$;
- $\mathbf{cot}^2\alpha+1=\mathbf{cossec}^2\alpha$.

### 5.5.2 - Usando semelhança entre triângulos

Com base na figura acima, tome as seguintes proporções, dadas as razões entre os triângulos:

Razões do triângulo ② para ①: $\frac{\sec\alpha}{1}=\frac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow$ $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$;

$\frac{\tan\alpha}{1}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow$ $\tan\alpha=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$.

Razões do triângulo ③ para ①: $\frac{\operatorname{cossec}\alpha}{1}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow$ $\operatorname{cossec}\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$;

$\frac{\cot\alpha}{1}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \Rightarrow$ $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

Razões do triângulo ③ para ②: $\frac{\operatorname{cossec}\alpha}{1}=\frac{\sec\alpha}{\tan\alpha} \Rightarrow$ $\operatorname{cossec}\alpha=\frac{\sec\alpha}{\tan\alpha}$;

$\frac{\cot\alpha}{1}=\frac{1}{\tan\alpha} \Rightarrow$ $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$.

*Exemplos:*

Com base nos três triângulos semelhantes da figura anterior, resolva os exercícios que seguem abaixo:

**1)** Determine as razões que se pede abaixo, do triângulo ① para ②.

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sec\alpha}$;

$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}$.

**2)** Determine as razões que se pede abaixo, do triângulo ① para ③.

$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\operatorname{cossec}\alpha}$;

$\cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\operatorname{cossec}\alpha}$.

**3)** Determine as razões que se pede abaixo, do triângulo ② para ③.

$\sec\alpha=\frac{\operatorname{cossec}\alpha}{\cot\alpha}$;

$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$.

### 5.5.3 - Identidades trigonométricas

A igualdade $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ é verdadeira para qualquer $\alpha$ pertencente aos domínios das funções seno e cosseno. Logo, ela é uma identidade trigonométrica.

Quando temos uma igualdade, só podemos aceitá-la como identidade após uma prova, ou seja, após uma demonstração.

Para fazer uma demonstração desse tipo, podemos nos valer de qualquer das relações dadas acima, que são identidades.

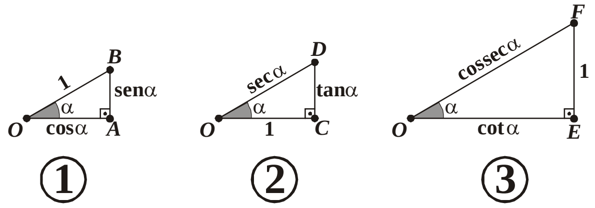
### 5.5.3.1 - Processo para demonstrar identidades

Considerando a igualdade, levaremos todas as funções envolvidas para uma razão equivalente em um dos três triângulos. Depois é só operar ambos os membros e chegar a uma mesma expressão.

*Exemplos:*

Nos exercícios seguintes, demonstre que as igualdades são identidades:

**1)** $\tan^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$




Levar do triângulo ② para ①:

$$\tan^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$

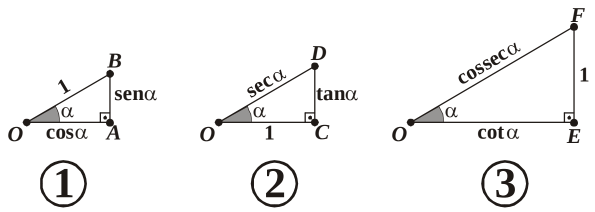
$$\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \text{sen}^2\alpha = \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \text{sen}^2\alpha$$

$$\frac{\text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}^2\alpha(\text{sen}^2\alpha)}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$$ $\Rightarrow$ C.Q.D. (como queríamos demonstrar).

**2)** $(1+\cot\alpha)^2 + (1-\cot\alpha)^2 = 2\cdot \text{cossec}^2\alpha$




Todas as funções já se encontram no triângulo ③, basta desenvolver:

$(1+\cot\alpha)^2 + (1-\cot\alpha)^2 = 2\cdot \text{cossec}^2\alpha$

$(1+\cot\alpha)^2 + (1-\cot\alpha)^2 = 2\cdot \text{cossec}^2\alpha$

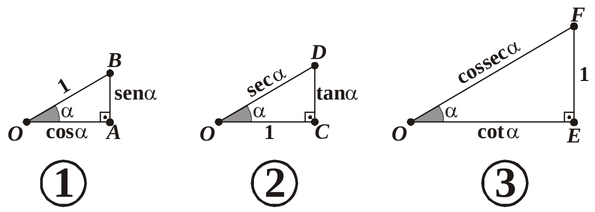
$1+2\cot\alpha + \cot^2\alpha + 1 - 2\cot\alpha + \cot^2\alpha = 2\cdot \text{cossec}^2\alpha$

$2+2\cot^2\alpha = 2\cdot \text{cossec}^2\alpha$

$2\cdot(1+\cot^2\alpha) = 2\cdot \text{cossec}^2\alpha$

$2\cdot \text{cossec}^2\alpha = 2\cdot \text{cossec}^2\alpha \Rightarrow$ C.Q.D.

**3)** $\sec^2\alpha + \text{cossec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \text{cossec}^2\alpha$



Levar do triângulo ③ para ②:

$$\sec^2\alpha + \operatorname{cossec}^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot \operatorname{cossec}^2\alpha$$

$$\sec^2\alpha + \frac{\sec^2\alpha}{\tan^2\alpha} = \sec^2\alpha \cdot \frac{\sec^2\alpha}{\tan^2\alpha}$$

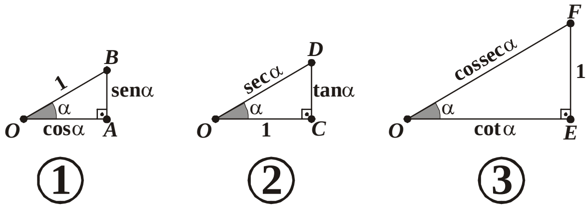
$$\frac{\sec^2\alpha\tan^2\alpha + \sec^2\alpha}{\tan^2\alpha} = \frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\alpha}$$

$$\frac{\sec^2\alpha\cdot(\tan^2\alpha + 1)}{\tan^2\alpha} = \frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\alpha}$$

$$\frac{\sec^2\alpha\cdot(\sec^2\alpha)}{\tan^2\alpha} = \frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\alpha}$$

$$\frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\alpha} = \frac{\sec^4\alpha}{\tan^2\alpha} \Rightarrow \text{C.Q.D.}$$

**4)** $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cossec}\alpha} = 1 - \dfrac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$




Levar dos triângulos ③ e ② para ①:

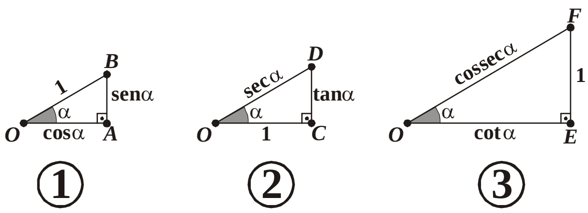
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cossec}\alpha} = 1 - \frac{\cos\alpha}{\sec\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}} = 1 - \frac{\cos\alpha}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \text{C.Q.D.}$$

**5)** $\dfrac{\operatorname{cossec}\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\sec\alpha - \cos\alpha} = \cot^3\alpha$



Levar dos triângulos ① e ② para ③:

$$\frac{\textbf{cossec}\,\alpha-\textbf{sen}\alpha}{\textbf{sec}\,\alpha-\textbf{cos}\,\alpha}=\textbf{cot}^{3}\alpha$$

$$\frac{\textbf{cossec}\,\alpha-\dfrac{1}{\textbf{cossec}\,\alpha}}{\dfrac{\textbf{cossec}\,\alpha}{\textbf{cot}\,\alpha}-\dfrac{\textbf{cot}\,\alpha}{\textbf{cossec}\,\alpha}}=\textbf{cot}^{3}\alpha$$

$$\frac{\dfrac{\textbf{cossec}^2\,\alpha-1}{\textbf{cossec}\,\alpha}}{\dfrac{\textbf{cossec}^2\,\alpha-\textbf{cot}^2\,\alpha}{\textbf{cot}\,\alpha\,\textbf{cossec}\,\alpha}}=\textbf{cot}^{3}\alpha \Rightarrow$$ Obs: $\textbf{cossec}^{2}\alpha-1=\textbf{cot}^{2}\alpha$

$$\frac{\textbf{cot}^2\,\alpha}{\textbf{cossec}\,\alpha}\cdot\frac{\textbf{cot}\,\alpha\,\textbf{cossec}\,\alpha}{\textbf{cossec}^2\,\alpha-\textbf{cot}^2\,\alpha}=\textbf{cot}^{3}\alpha$$

$$\frac{\textbf{cot}^3\,\alpha\,\textbf{cossec}\,\alpha}{\textbf{cossec}\,\alpha}\cdot\frac{1}{1+\textbf{cot}^2\,\alpha-\textbf{cot}^2\,\alpha}=\textbf{cot}^{3}\alpha$$

$$\textbf{cot}^{3}\alpha\cdot\frac{1}{1+0}=\textbf{cot}^{3}\alpha$$

$\textbf{cot}^{3}\alpha=\textbf{cot}^{3}\alpha \Rightarrow$ C.Q.D.

***AULA 06* - EXERCÍCIOS**

**1)** Dado sen x = 3/4 , com 0<x< $\pi$/2, calcular cos x.

**2)** Para que valores de ***a*** temos, simultaneamente, senx=a + 1 e cos x = a?

**3)** Dado $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, com $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, calcule tg x.

**4)** Simplifique a expressão $\frac{tg\alpha+\cot g\alpha}{\sec\alpha\cdot\cot g\alpha}$.

**5)** Demonstre as seguintes identidades:

**a)** $(1 + \text{cotg}^2x)(1 - \cos^2x) = 1$

**b)** tg x + cotgx = tg x. $\text{Cossec}^2x$

**c)** $\frac{sen2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=tg\frac{x}{2}$

***Respostas:***

**1)** $\cos x=\frac{\sqrt{7}}{4}$

**2)** a = 0 ou a = -1

**3)** $tgx=-\sqrt{2}$

**4)** sec $\alpha$

# AULA 07

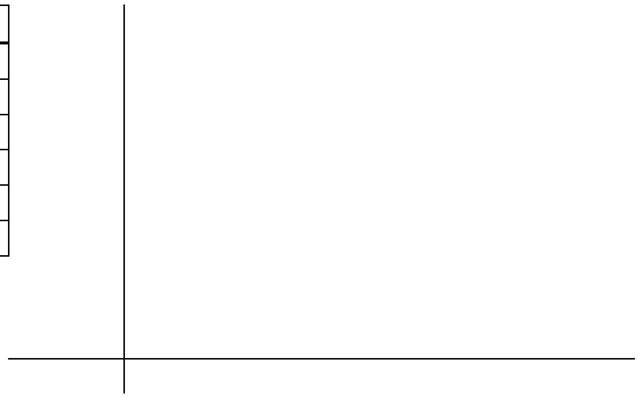
## 6 - LIMITES

### 6.1 - Noção Intuitiva:

Seja a função f(x)= 2x + 1. Vamos dar valores a **x** que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela sua esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de y.

| x | y = 2x + 1 |
|---|---|
| 1,01 | |
| 1,02 | |
| 1,03 | |
| 1,04 | |
| 1,1 | |
| 1,2 | |

| x | y = 2x + 1 |
|---|---|
| 0,6 | |
| 0,7 | |
| 0,9 | |
| 0,95 | |
| 0,98 | |
| 0,99 | |



Notamos que a medida que x se aproxima de 1, y se aproxima de ______, ou seja, quando x tende para 1 (x→1), y tende para _____ (y→_____), ou seja:

$$\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$$

De forma geral, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b}$$

#### 6.1.1 - Propriedades:

**1.** $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$

**2.** $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$

**3.** $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

**4.** $\lim_{x\to a} f(x)^n=\left(\lim_{x\to a0} f(x)\right)^n, n\in N^*$

**5.** $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}, n\in N^*$

**6.** $\lim_{x\to a} sen(f(x))=sen\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)$

*Exemplos:*

**1)** $\lim_{x\to 1}(x^2+3x^3)=$

**2)** $\lim_{x\to \pi}(x^3\cos x)=$

**3)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x^2+10}=$

**4)** $\lim_{x\to 1}(x^2+3)^2 =$

**5)** $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+x^2-1} =$

**6)** $\lim_{x\to 1} sen(x^2+3x) =$

**7)** $\lim_{x\to 2}(2x^2+3x-4) =$

**8)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} =$

**9)** $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9} =$

**10)** $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1} =$

**11)** $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-1} =$

**12)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} =$

**13)** $\lim_{x\to -1}(x^3+3x+4) =$

**14)** $\lim_{x\to 0}(\cos x+senx) =$

**15)** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} =$

**16)** $\lim_{h\to 1} \dfrac{\sqrt{h}-1}{h-1} =$

**17)** $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{25+3t}-5}{t} =$

**18)** $\lim_{t\to 0} \dfrac{(4+t)^2-16}{t} =$

**19)** $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} =$

**20)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} =$

**21)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^5-1} =$

## AULA 07 - EXERCÍCIOS

**1)** $\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+5x+1)=$

**2)** $\lim_{x\to -1}(x^3-2x^2-4x+3)=$

**3)** $\lim_{x\to -\sqrt{2}}(4x^3-2x^2-2x-1)=$

**4)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-4}{x^2-5}=$

**5)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x-2}=$

**6)** $\lim_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}=$

**7)** $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x+3}{x^5-2x+1}=$

**8)** $\lim_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x-6}=$

**9)** $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x+2}=$

**10)** $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^4-8x^3+18x^2-27}{x^4-10x^3+36x^2-54x+27}=$

**11)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-4}=$

**12)** $\lim_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=$

**13)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{4-x}}=$

**14)** $\lim_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{3+x}}{x-1}=$

**15)** $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}=$

**16)** $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=$

**17)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2-3x+2}-2}{\sqrt{3x^2-5x-1}-1}=$

***Respostas***

**1)** 8
**2)** 4
**3)** $-6\sqrt{2}-5$
**4)** -10
**5)** -3
**6)** -4
**7)** $-1/3$
**8)** 12
**9)** 80
**10)** 2
**11)** 0
**12)** 4
**13)** 4
**14)** $-1/4$
**15)** 2
**16)** $4/3$
**17)** $5/14$

# AULA 08

## 6.2 - LIMITES INFINITOS:

Quando os valores assumidos pela variável x são tais que |x|> N, sendo N tão grande quanto se queria, então se diz que o limite da variável x é infinito.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x = +\infty} \quad \text{ou} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} x = -\infty}$$

### 6.2.1 - Igualdades Simbólicas:

**6.2.1.1 – Tipo Soma:**

**a.** (3) + ($\pm\infty$) = $\pm\infty$
**b.** ($+\infty$) + ($+\infty$) = $+\infty$
**c.** $-\infty$ + ($-\infty$) = $-\infty$
**d.** $\infty - \infty$ = *indeterminado*

**6.2.1.2 – Tipo Produto:**

**a.** 5 x ($\pm\infty$) = $\pm\infty$
**b.** (-5) x ($\pm\infty$) = $\mp\infty$
**c.** **($+\infty$)**x($+\infty$) = $+\infty$
**d.** ($+\infty$)x($-\infty$) = $-\infty$
**e.** $\pm\infty$ x 0 = *indeterminado*

**6.2.1.3 – Tipo Quociente:**

**a.** $\dfrac{c}{\infty} = 0$

**b.** $\dfrac{\infty}{c} = \infty$

**c.** $\dfrac{0}{\infty} = 0$

**d.** $\dfrac{0}{0}$ **e** $\dfrac{\infty}{\infty} =$ *indeterminado*

**6.2.1.4 – Tipo Potência:**

**a.** $c^{+\infty} = +\infty$ (c>1)
**b.** $c^{+\infty} = 0$ (0<c<1)
**c.** $0^{\infty} = 0$
**d.** $c^{-\infty} = 0$
**e.** $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$
**f.** $(-\infty)^{c} = -\infty$ (se *c* for ímpar)
**g.** $(-\infty)^{c} = +\infty$ (se *c* for par)
**h.** $(+\infty)^{-\infty} = 0$
**i.** $(\pm\infty)^{-c} = 0$
**j.** $0^0$ = *indeterminado*
**k.** $(\pm\infty)^0$ = *indeterminado*
**l.** $1^{\pm\infty}$ = *indetermindado*

***Obs.:*** O limite de uma função polinomial quando x tende ao infinito, é o limite do termo de maior grau.

*Exemplos:*

**1)** $\lim_{x \leftarrow +\infty} (x^2 + 3x - 1) =$

**2)** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x \;\; - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 4} =$

**3)** $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 4x - 5}{x^2 - x + 3} =$

**4)** $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2x^5}{x^4 + 6}} =$

**5)** $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{18x^4 + x}{2x^4 + 3x - 1}} =$

**6)** $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}) =$

## AULA 08 – EXERCÍCIOS

**1)** $\lim_{x\to+\infty}(5x^3-3x^2-2x-1)=$

**2)** $\lim_{x\to-\infty}(2x^5-x^4+2x^2-1)=$

**3)** $\lim_{x\to-\infty}(-3x^4+2x^2-1)=$

**4)** $\lim_{x\to+\infty}(3x^4+5x^2+8)=$

**5)** $\lim_{x\to-\infty}(-5x^3+3x-2)=$

**6)** $\lim_{x\to+\infty}(-x^2+3x-2)=$

**7)** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+x-1}{x^2+x-3}=$

**8)** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}=$

**9)** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x^2-3}=$

**10)** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2x+1}{9x^3-5x^2+x-3}=$

**11)** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-8}{4x^5-8x+7}=$

**12)** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-2x^2+1}{x+7}=$

**13)** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^3-x^3}=$

**14)** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}=$

**15)** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}=$

**16)** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{\sqrt{x^4+1}}=$

**17)** $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{\sqrt{x^4+1}}=$

**18)** $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-x)=$

**19)** $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-x)=$

***Respostas:***

**1)** $+\infty$
**2)** $-\infty$
**3)** $-\infty$
**4)** $+\infty$
**5)** $+\infty$
**6)** $-\infty$
**7)** $+\infty$
**8)** 2
**9)** 0
**10)** $1/3$
**11)** 0
**12)** $+\infty$
**13)** $1/3$
**14)** 1
**15)** -1
**16)** 2
**17)** 2
**18)** $3/2$
**19)** $+\infty$

# AULA 09

## 6.3 – LIMITES TRIGONOMÉTRICOS:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1}$$

Demonstrando o limite fundamental por tabela temos que:

| x | Senx |
|---|---|
| 0,008 | 0,008 |
| 0,006 | 0,006 |
| 0,004 | 0,004 |
| 0,002 | 0,002 |
| 0,001 | 0,001 |

Usando valores de x→ 0 em ***radianos***, obtemos valores iguais ou muito próximos.

*Exemplos:*

**1)** $\lim_{x\to 0} \frac{sen3x}{x} =$

**2)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$

**3)** $\lim_{x\to 0} \frac{sen5x}{sen2x} =$

**4)** $\lim_{x\to 0} \frac{sen5x + senx}{sen2x + sen4x} =$

**5)** $\lim_{x\to 0} \frac{3x + sen2x}{x + sen9x} =$

**6)** $\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} =$

**7)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} =$

**8)** $\lim_{x\to 0} \frac{senmx}{sennx} =$

***<u>AULA 09</u> – EXERCÍCIOS***

**1)** $\lim_{x\to 0} \frac{sen3x}{2x} =$

**2)** $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{4x} =$

**3)** $\lim_{x\to 0} \frac{tg2x}{3x} =$

**4)** $\lim_{x\to 0} \frac{sen4x}{sen3x} =$

**5)** $\lim_{x\to 0} \frac{tg3x}{tg5x} =$

**6)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{xsenx} =$

**7)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sec x}{x^2} =$

**8)** $\lim_{x\to 0} \frac{tgx+senx}{x} =$

**9)** $\lim_{x\to 0} \frac{senx-\cos x}{1-tgx} =$

**10)** $\lim_{x\to 0} \frac{tgx-senx}{sen^2 x} =$

**11)** $\lim_{x\to 0} \frac{x-senx}{x+senx} =$

**12)** $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x-\cos 3x}{sen4x} =$

**13)** $\lim_{x\to 0} \frac{sen3x-sen2x}{senx} =$

**14)** $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x+a)-sena}{x} =$

**15)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{3x^2} =$

***Respostas:***

**1)** 3/2
**2)** ¼
**3)** 2/3
**4)** 4/3
**5)** 3/5
**6)** ½
**7)** – ½
**8)** 2
**9)** -1
**10)** 0
**11)** 0
**12)** 0
**13)** 1
**14)** cos a
**15)** 2/3

# *AULA 10*

## 6.4 – LIMITES DE FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARÍTMICAS:

### Mais Exemplos

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e} \quad \textbf{(1)}$$

Neste caso, ***e*** representa a base dos logaritmos naturais ou neperianos. Trata-se do número irracional ***e***, cujo valor aproximado é 2,7182818

| X | $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 2,25 |
| 3 | 2,3703 |
| 10 | 2,5937 |
| 100 | 2,7048 |
| 1000 | 2,7169 |
| 10000 | 2,7181 |
| 100000 | 2,7182 |

Nota-se que a medida que x $\to\infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\to$ e

De forma análoga, efetuando a substituição $\frac{1}{x}=y$ e $x=\frac{1}{y}$ temos:

$$\boxed{\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e} \quad (2)$$

Ainda de forma mais geral, temos:

$$(3)\quad \boxed{\lim_{y\to 0}(1+ky)^{l/y}=e^{kl}}$$

$$(4)\quad \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{lx}=e^{kl}}$$

$$(5)\quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a}$$

$$(6)\quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1}$$

*Exemplos:*

**1)** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}=$

**2)** $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}=$

**3)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{2x} =$

**4)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{sen 2x} =$

**5)** $\lim_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^{2x} =$

**6)** $\lim_{x\to 0} (1 + 2x)^{2/x} =$

**7)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x} =$

**8)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen 3x}{e^x - 1} =$

**9)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 1}{sen 4x} =$

**10)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{3^{5x} - 1}{sen 2x} =$

**11)** $\lim_{x\to -2} \log \dfrac{3 - \sqrt{1 - 4x}}{\sqrt{6 + x} - 2} =$

## ***AULA 10* – EXERCÍCIOS**

**1)** $\lim_{x\to 2} 3^{\frac{x^2-4}{x-2}} =$

**2)** $\lim_{x\to 1} e^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}} =$

**3)** $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}-2}} =$

**4)** $\lim_{x\to -1} \log_3 \frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+4} =$

**5)** $\lim_{x\to 3} \ln \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} =$

**6)** $\lim_{x\to 0} \log \frac{x-x^3}{x^2+x} =$

**7)** $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} =$

**8)** $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x/3} =$

**9)** $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2} =$

**10)** $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-3} =$

**11)** $\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x} =$

**12)** $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} =$

**13)** $\lim_{x\to -\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x} =$

**14)** $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{1/x} =$

**15)** $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{2/x} =$

**16)** $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^{x+3} =$

**17)** $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2} =$

**18)** $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x} =$

**19)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} =$

**20)** $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{3x} =$

***Respostas***

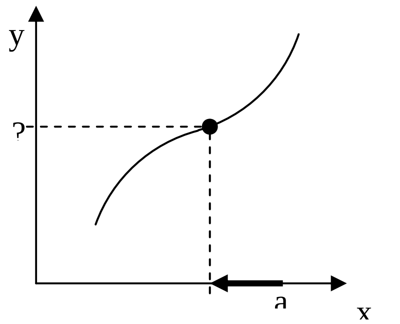
**1)** 81
**2)** $e^2$
**3)** $e^{-12}$
**4)** -1
**5)** ln4
**6)** 0
**7)** $e^2$
**8)** $e^{1/3}$
**9)** e
**10)** e
**11)** $e^4$
**12)** $e^6$
**13)** $e^{-6}$
**14)** $e^4$
**15)** $e^{-6}$
**16)** $e^{-3}$
**17)** $e^4$
**18)** e
**19)** ½
**20)** 2/3

# AULA 11

## 6.5 – LIMITES LATERAIS:

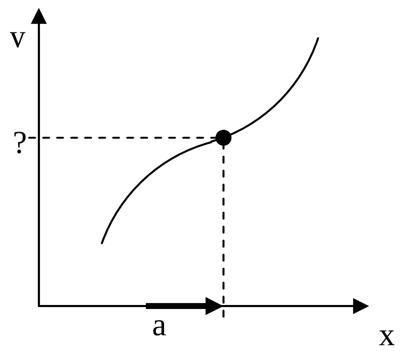
Consideramos uma função y = f(x), da qual queremos achar os limites laterais para x tendendo a ***a***, ou seja, queremos calcular:

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = ?$$




Limite lateral à direita

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = ?$$




Limite lateral à esquerda

Vejamos como proceder em cada caso:

- **Limite a direita (quando x→ a₊)**
  Fazemos a seguinte troca de variável:
  x = a + h, com h > 0
  x → a, devemos ter h → 0

  *Exemplo:*
  $$\lim_{x \to 2_+} (3x+4) =$$

- **Limite a esquerda (quando x → a₋)**
  Fazemos a seguinte troca de variável:
  x = a – h, com h > 0
  x → a devemos ter h → 0

  *Exemplo:*
  $$\lim_{x \to 2_-} (3x+4) =$$

**O Limite de uma função existe quando** $\lim_{x \to a_-} f(x) = \lim_{x \to a_+} f(x)$

## AULA 11 – EXERCÍCIOS

**1)** $\lim_{x\to 2^+}(3x^2 - x - 1) =$

**2)** $\lim_{x\to 3^+}\dfrac{3x-4}{x+2} =$

**3)** $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{5x^2-3x+2}{3x-1} =$

**4)** $\lim_{x\to 3^-}\dfrac{5x^2-x+10}{x^2-3x+2} =$

**5)** $\lim_{x\to 3^+}(1+\sqrt{x-3}) =$

**6)** $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x-2} =$

**7)** $\lim_{x\to 2^-}(x^2+3x) =$

**8)** $\lim_{x\to 2^+}(x^2+3x) =$

**9)** $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{3x}{x-2} =$

**10)** $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{3x}{x-2} =$

**11)** $\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} =$

**12)** $\lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} =$

**13)** $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{4}{1+2^{1/x}} =$

**14)** $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{4}{1+2^{1/x}} =$

**15) Calcule os limites laterais solicitados.**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & se \quad x>1 \\ 2 & se \quad x=1 \\ 4x+1 & se \quad x<1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ , $\lim_{x\to 1} f(x)$

b) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & se \quad x<2 \\ 0 & se \quad x=2 \\ x-1 & se \quad x>2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3x-1 & se \quad x<2 \\ 1 & se \quad x=2 \\ -x^2+6x-7 & se \quad x>2 \end{cases}$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

***Respostas:***

1) 9
2) 1
3) 2
4) 26
5) 1
6) $\infty$
7) 10
8) 10
9) $-\infty$
10) $+\infty$
11) 0
12) $+\infty$
13) 4
14) 0
15) a) 1 e 5
    b) 1 e -3
    c) 1 e 1

# AULA 12

# 7 - ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

## 7.1 – INTRODUÇÃO:

Traçaremos com facilidade um esboço gráfico de uma função se conhecermos as assíntotas horizontais e verticais do gráfico, caso elas existam.

Assíntota são as linhas horizontais e verticais que no gráfico servem para traçarmos a função, onde a função vai tender para este valor, o que encontrarmos da assíntota, porém não "toca " esta reta, pois a assintota são os limites laterais vertical e horizontal da função

## 7.2 – ASSÍNTOTA VERTICAL

Dizemos que a reta **x = a** é uma **assíntota vertical** do gráfico de f, se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:

i. $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$

ii. $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

iii. $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$

iv. $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

## 7.3 – ASSÍNTOTA HORIZONTAL

Dizemos que a reta **y = b** é uma **assíntota horizontal** do gráfico de f, se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:

i. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

ii. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

*Exemplos:*

**1)** Seja a função $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)}$. Encontre a equação assíntotas horizontais e verticais se ela existirem.

**2)** Considere a função $f(x) = 3 - \dfrac{4}{(x-2)^2}$. Encontre a equação das assíntotas horizontais e verticais, se ela existirem.

# 8 – FUNÇÕES CONTÍNUAS

## 8.1 – DEFINIÇÃO:

Uma função *f* é contínua em um ponto *a* se são satisfeitas as seguintes condições:

i. $\exists \ f(a)$

ii. $\exists \ \lim_{x \to a} f(x)$

iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

*Exemplos:*

Verifique se as funções abaixo são contínuas no ponto indicado:

**1)** $f(x) = \sqrt{2x-5} + 3x$ em x = 4

**2)** $f(x) = \dfrac{|x-2|}{2}$ em x = 2

**3)** $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & se \quad x<3 \\ 2 & se \quad x=3 \\ 3-x & se \quad x>3 \end{cases}$ em x = 3

## ***AULA 12*** *– EXERCÍCIOS*

Escreva a equação das assíntotas das funções abaixo, faça um esboço do gráfico da função:

**1)** $y=\dfrac{5}{x-3}$

**2)** $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$

**3)** $y=\dfrac{2}{x}$

**4)** $y=\dfrac{2}{(x-1)^2}$

**5)** $y=-1+\dfrac{3}{x-2}$

Verifique se as funções abaixo são contínuas nos pontos indicados

**6)** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3} & se \quad x\neq 3 \\ 1 & se \quad x=3 \end{cases}$ em x = 3

**7)** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ em x = 3

**8)** $f(x)=3x-5$ em x = 2

**9)** $f(x)=\begin{cases} x^2-5x+1 & se \quad x\geq 2 \\ x-3 & se \quad x<2 \end{cases}$ em x = 2

***Respostas***

**1)** x = 3 é a equação da assíntota vertical e y = 0 é a assintota horizontal
**2)** x = 1 é a equação da assíntota vertical e y = 3 é a assintota horizontal
**3)** x = 0 é a equação da assíntota vertical e y = 0 é a assíntota horizontal
**4)** x = 1 é a equação da assíntota vertical e y = 0 é a assíntota horizontal
**5)** x = 2 é a equação da assíntota vertical e y = - 1 é a assíntota horizontal
**6)** a função não é contínua
**7)** a função é continua
**8)** a função é contínua
**9)** a função não é contínua

# AULA 13

# 9 – DERIVADAS

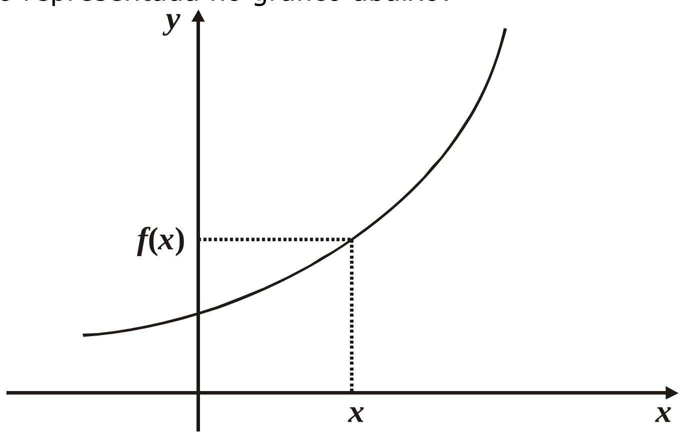
## 9.1 – INTRODUÇÃO:

O Cálculo Diferencial e Integral criado por Leibniz e Newton no século XVII tornou-se logo de início um instrumento precioso e imprescindível para a solução de vários problemas relativos à Matemática e a Física. Na verdade, é indispensável para investigação não-elementar tanto nas ciências naturais como humanas.

O formalismo matemático do Cálculo que à primeira vista nos parece abstrato e fora da realidade, está internamente relacionado com o raciocínio usado pelas pessoas em geral na resolução de problemas cotidianos.

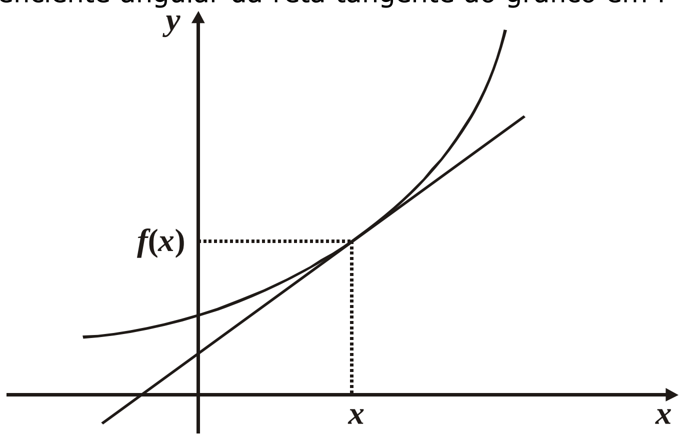
## 9.2 – DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO EM UM DETERMINADO PONTO DESTE GRÁFICO:

Seja f uma função representada no gráfico abaixo:



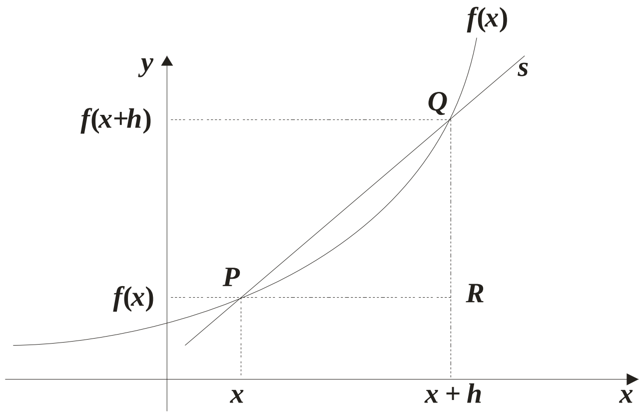

Gostaríamos de encontrar a inclinação da reta tangente a este gráfico em um determinado ponto, vamos supor P(x, f(x)).

Sabemos que o coeficiente angular da reta nos dá a inclinação desta. Sendo assim, devemos encontrar o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico em P (x, f(x)).



Seja P(x, f(x)) e Q (x + h, f(x +h)) dois pontos da função f onde h representa a diferença entre as abscissas de P e Q. É fácil determinar o coeficiente angular da reta PQ utilizando os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo.

Seja s a reta secante ao gráfico de f pelos pontos P e Q.

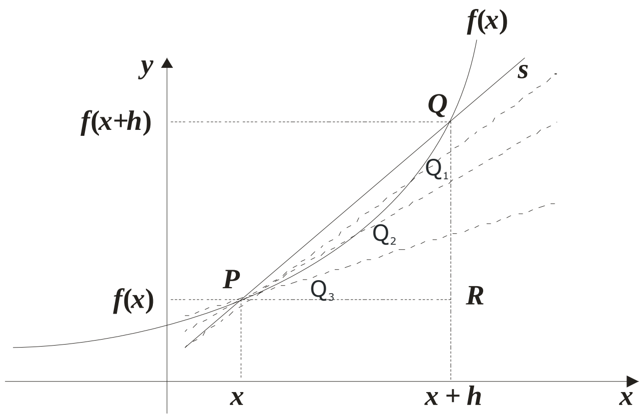



Sabemos que o coeficiente angular $m_{PQ}$ da reta secante é dado pr

$$m_{PQ} = m_s = tg\alpha = \frac{QR}{PR}$$

$$m_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (i) inclinação da reta secante

Podemos tomar no gráfico pontos $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_5$,....$Q_n$ cada vez mais próximos de P, a reta s(PQ) secante a curva, tende a posição de tangência em P e o acréscimo h, tende a zero.




Logo:

$$m_t = \lim_{x \to 0} m_s$$

$$m_t = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

onde m representa o coeficiente angular da reta tangente.

Esse limite quando existe é chamado ***Derivada de t***

## 9.3 – DEFINIÇÃO:

Seja uma função f: D $\rightarrow$ R, e seja D' o conjunto de todos os valores **x** tal que exista f'(x).
Chama-se ***função derivada*** de f a função f' : D' $\rightarrow$ R tal que:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

*Exemplo:* **Exercício Resolvido**

**1)** Se f(x) = $x^2$ determine a equação da reta tangente ao gráfico f no ponto de abscissa x = 2

**1)** Seja a função f: R $\rightarrow$ R tal que $f(x) = x^2$. Obter a função derivada de f:

**2)** Utilizando a definição calcule a derivada da função $f(x)=x^3$

### 9.3.1 – Outras notações para a função derivada:

- $y'$ (lê-se: derivada de y)
- $y'x$ (lê-se: derivada de y em relação a x)
- $\dfrac{dy}{dx}$ (derivada de y em relação a x)
- Df (derivada de f)

## 9.4 – SIGNIFICADO FÍSICO DA DERIVADA;

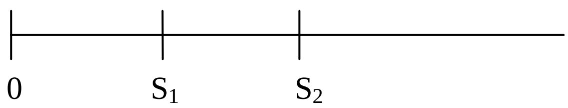
A questão fundamental da cinemática consiste em determinar a velocidade de um móvel em um instante qualquer quando é conhecida a equação de seu movimento ou seja, a expressão que nos dá o espaço (posição) em função do tempo, ***s=f(t)***.

Quantitativamente a velocidade exprime em geral, a razão de variação do espaço em relação ao tempo. Quando esta razão é constante, temos o movimento uniforme. Ou seja, se o móvel percorre um espaço $\Delta S$ em um intervalo de tempo $\Delta t$, a velocidade é dada pelo quociente $v = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, que é uma razão constante.

Quando porém, temos um movimento variado, ou seja, o móvel percorre espaços diferentes em tempos iguais, é necessário e fundamental distinguir a velocidade média da velocidade instantânea.

Se um automóvel percorre 120 km em 2 horas, não podemos concluir deste fato que sua velocidade tenha sido de 60 km/h. Se durante o percurso nós ativéssemos ao velocímetro constataríamos que a velocidade apresentou variação, ora para mais, ora para menos. Portanto a velocidade de 60 km/h que obtivemos dividindo 120km pelo tempo de 2 horas gastos em percorrê-los é o que chamamos de velocidade média. A velocidade que observamos a cada instante no velocímetro do veículo denominamos **velocidade instantânean.**

Consideremos um móvel de equação horária s = f(t) que se desloca sobre uma trajetória retilínea de origem O e que em um instante $t_1$ ocupe uma posição $S_1$ e num instante $t_2$ ocupe uma posição $S_2$.




Sabemos que o espaço percorrido pelo móvel entre uma posição e outra é $\Delta S = S_2 - S_1$ ou $\Delta S = f(t_2) - f(t_1)$ e que o tempo gasto para percorrê-lo é $\Delta t = t_2 - t_1$.

Logo, sua velocidade média neste percurso é:

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Com a definição de velocidade média e considerando a variação do tempo tendendo a zero podemos estabelecer a equação da velocidade instantânea no instante $t_1$, dada por:

$$\boxed{V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}}$$

Mas $t_2 - t_1 = \Delta t \Rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t$ e considerando $t_1$ um instante genérico t, temos $t_2 = t + \Delta t$, logo:

$$\boxed{V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

que é a derivada da função f em relação a sua variável independente t, ou seja:

***Se S = f(t) então S'(t) = v***

Raciocínio semelhante pode ser desenvolvido a partir da função velocidade do móvel, v= f(t), o que nos levará a concluir que a sua derivada nos fornecerá a aceleração do móvel em um instante qualquer, isto é:

***Se v = f(t) então v'(t) = a***

Onde ***a*** é a aceleração instantânea do móvel.

## 9.5 – REGRAS DE DERIVAÇÃO:

Esta seção contém algumas regras gerais que simplificam o trabalho de cálculo das derivadas.

**1)** $f(x) = c$ $\quad f'(x) = 0$

**2)** $f(x) = x^n$ $\quad f'(x) = n.x^{n-1}$

**3)** $f(x) = u.v$ $\quad f'(x) = u'v + uv'$

**4)** $f(x) = u.v.w$ $\quad f'(x) = u'vw + uv'w + uvw'$

**5)** $f(x) = \dfrac{u}{v}$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

**6)** $f(x) = u^n$ $\quad f'(x) = n.u^{n-1}.u'$

**7)** $f(x) = a^u$ $\quad f'(x) = a^u.\ln a.u'$

**8)** $f(x) = e^u$ $\quad f'(x) = e^u.u'$

**9)** $f(x) = \ln u$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'}{u}$

**10)** $f(x) = \log_a u$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'}{u.\ln a}$

**11)** $f(x) = \cos u$ $\quad f'(x) = - u'.\text{sen } u$

**12)** $f(x) = \text{sen } u$ $\quad f'(x) = u'.\cos u$

**13)** $f(x) = \text{tg } u$ $\quad f'(x) = u'.\sec^2 u$

**14)** $f(x) = \text{cotg } u$ $\quad f'(x) = - u'.\text{cossec}^2 u$

**15)** $f(x) = \sec u$ $\quad f'(x) = u'.\sec u.\ \text{tg } u$

**16)** $f(x) = \text{cossec } u$ $\quad f'(x) = - u'.\text{cossec } u.\ \text{cotg } u$

**17)** $f(x) = u^v$ $\quad f'(x) = v.u^{v-1}.u' + u^v.v'.\ln u$

$$f'(x) = u^v(v'\ln u + \frac{v}{u}.u')$$

**18)** $f(x) = \text{arc sen } u$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

**19)** $f(x) = \text{arc cos } u$ $\quad f'(x) = \dfrac{-u}{\sqrt{1-u^2}}$

**20)** $f(x) = \text{arc tg } u$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'}{1+u^2}$

### 9.5.1 – Derivada de função Algébrica:

*Exemplos:*

**1)** $y = 4x^2 - 2x$

**2)** $y = -\dfrac{7x^2}{5} - \dfrac{\sqrt{3}}{7}$

**3)** $y = \sqrt[3]{x^2}$

**4)** $y = \dfrac{2x}{x+1}$

**5)** $y = (2x+3)(1-x+x^2)$

**6)** $y = (x^2+3)^5$

**7)** $y = \sqrt{1-x^2}$

**8)** $y = \sqrt{\dfrac{2}{4x+3}}$

## *AULA 13* – *EXERCÍCIOS*

**1)** $y = 5X^4 - 3X^3 + 2X^2 + 3X + 5$
**2)** $y = 7x^4 - 2x^3 + 8x$
**3)** $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x$
**4)** $y = \frac{7}{x^3}$
**5)** $y = \frac{4}{x^5}$
**6)** $y = x^2 + \sqrt{x}$
**7)** $y = \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + x^4$
**8)** $y = 12\sqrt{x^3} + 6\sqrt{x}$
**9)** $y = \frac{1}{3x-5}$
**10)** $y = \frac{3x+5}{2x-7}$
**11)** $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$
**12)** $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+2}$
**13)** $y = (1 + 4x^3)(1 + 2x^2)$
**14)** $y = (x^2 - 1)(1 - 2x)(1 - 3x^2)$
**15)** $y = (2x^2 - 4x + 8)^8$
**16)** $y = (3a - 2bx)^6$
**17)** $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$
**18)** $y = \sqrt[3]{(2-5x^2)^2}$
**19)** $y = (a+x)\sqrt{a-x}$
**20)** $y = x\sqrt{5x+4}$
**21)** $y = \frac{2x-5}{\sqrt{6x^3+5}}$
**22)** $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$
**23)** $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
**24)** $y = \frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}$

***Respostas:***

**1)** $y' = 20x^3 - 9x^2 + 4x + 3$
**2)** $y' = 28x^3 - 6x^2 + 8$
**3)** $y' = 2x^2 + 5x - 4$
**4)** $y' = -\frac{21}{x^4}$
**5)** $y' = -\frac{20}{x^6}$
**6)** $y' = \frac{4x^2 + \sqrt{x}}{2x}$
**7)** $y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + 4x^3$
**8)** $y' = 18\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$
**9)** $y' = \frac{-3}{9x^2 - 30x + 25}$
**10)** $y' = \frac{-31}{(2x-7)^2}$
**11)** $y' = \frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2-5x+5)^2}$
**12)** $y' = \frac{2x^2 - 4}{(x^2 - x + 2)^2}$
**13)** $y' = 40x^4 + 12x^2 + 4x$
**14)** $y' = 30x^4 - 12x^3 - 24x^2 + 8x + 2$
**15)** $y' = (32x - 32)(2x^2 - 4x + 1)^7$
**16)** $y' = -12b(3^a - 2bx)^5$
**17)** $y' = \frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$
**18)** $y' = \frac{-20x}{3\sqrt[3]{2-5x^2}}$
**19)** $y' = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$
**20)** $y' = \frac{15x+8}{2\sqrt{5x+4}}$
**21)** $y' = \frac{-6x^3 + 45x^2 + 10}{\sqrt{(6x^2+5)^3}}$
**22)** $y' = \frac{3}{\sqrt{(x^2+2x+4)^3}}$
**23)** $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x)}$
24) $y' = \frac{a}{\sqrt{x}(a-\sqrt{x})^2}$

# AULA 14

## 9.5.2 – Derivada de Funções Exponenciais e Logarítmicas:

*Exemplos:*

**1)** $y = 3^x$

**2)** $y = e^x$

**3)** $y = e^{x^2+2x}$

**4)** $y = x^2 \cdot e^{ax}$

**5)** $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

**6)** $y = \log_3 x$

**7)** $y = \log_a (x^2 + 1)$

**8)** $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

## AULA 14 – EXERCÍCIOS

1) $y = 3^x$
2) $y = e^{-x}$
3) $y = e^{x^8}$
4) $y = e^{x^2+x+1}$
5) $y = 7^{x^2+2x}$
6) $y = \dfrac{e^x}{x}$
7) $y = (x+1)^x$
8) $y = (x+1)^{x^3+1}$
9) $y = \ln^3 x$
10) $y = 4\log x^3$
11) $y = \ln \dfrac{x^2}{1+x^2}$
12) $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$
13) $y = \ln\sqrt{9-2x^2}$
14) $y = \dfrac{1}{x\ln x}$
15) $y = e^x \ln x$
16) $y = x^2 \ln x^2$
17) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

**Respostas:**

1) $y' = 3^x \ln 3$
2) $y' = -e^{-x}$
3) $y' = 8x^7.e^{x^8}$
4) $y' = e^{x^2+x+1}.(2x+1)$
5) $y' = 7^{x^2+2x}.\ln 7.(2x+2)$
6) $y' = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$
7) $y' = x(x+1)^{x-1} + (x+1)^x \ln(x+1)$
8) $y' = (x^3+1)(x+1)^{x^3} + (x+1)^{x^3+1}.3x^2.\ln(x+1)$
9) $y' = 3\dfrac{\ln^2 x}{x}$
10) $y' = \dfrac{12}{x\ln 10}$
11) $y' = \dfrac{2}{x(1+x^2)}$
12) $y' = \dfrac{2}{(1-x)^2}$
13) $y' = \dfrac{-2x}{9-2x^2}$
14) $y' = \dfrac{-\ln x - 1}{(x\ln x)^2}$
15) $y' = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$
16) $y' = 2x(\ln x^2 + 1)$
17) $y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

# AULA 15

## 9.5.3 – Derivada de Funções Trigonométricas:

*Exemplos:*

**1)** $y = \text{sen } 5x$

**2)** $y = 3\cos 2x$

**3)** $y = \text{tg } 3x$

**4)** $y = \sec 4x$

**5)** $y = \text{tg } x^3$

**6)** $y = \text{tg}^2 x$

**7)** $y = \text{cotg}(1 - 2x^2)$

**8)** $y = x^2\cos x$

**9)** $y = \text{sen}2x.\cos x$

**10)** $y = \dfrac{\cos x}{x}$

**11)** $y = \arccos\dfrac{x}{2-x}$

## AULA 15 – EXERCÍCIOS

**1)** y = cossec 7x
**2)** y = sen3x + cos2x
**3)** y = $sen^5x$
**4)** y = $5sen^3x$
**5)** $y = \sqrt[3]{tg3x}$
**6)** $y = sen\sqrt{2x+1}$
**7)** $y = \dfrac{\cos x}{xe^x}$
**8)** $y = (\cos x)^x$
**9)** $y = \dfrac{senx}{\cos x}$
**10)** $y = e^x senx + 4x^3$
**11)** $y = \sec^3 \sqrt{x}$
**12)** $y = x^2 senx.e^x$
**13)** $y = arcsen3x$
**14)** $y = arctg\dfrac{1}{x}$
**15)** $y = arcsen(3x-2)$
**16)** $y = arctg2x^2$
**17)** $y = arcsen(5-2x^3)$
**18)** $y = arc\cot g(1-x^2)$
**19)** $y = arc\sec x^3$
**20)** $y = \arccos\sec(x-1)$
**21)** $y = x^2 + arcsenx$
**22)** $y = x.arctgx$
**23)** $y = \ln\arccos x$

***Respostas***

**1)** y' = -7cossec7x.cotg7x
**2)** y' = 3cos3x-2sen2x
**3)** y' = $5sen^4x$.cosx
**4)** y' = $15sen^2x$.cosx
**5)** $y' = \dfrac{\sqrt[3]{tg3x}}{\cos 3x.sen3x}$
**6)** $y' = \dfrac{\cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$
**7)** $y' = \dfrac{-x(senx+\cos x)-\cos x}{x^2e^x}$
**8)** $y' = (\cos x)^x(\ln\cos x - xtgx)$
**9)** $y' = \sec^2 x$
**10)** $y' = e^x(senx+\cos x)+12x^2$
**11)** $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}\sec^3\sqrt{x}.tg\sqrt{x}$
**12)** y' = $xe^x$(2senx+xcosx+xsenx)
**13)** $y' = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$
**14)** $y' = \dfrac{-1}{x^2+1}$
**15)** $y' = \dfrac{3}{\sqrt{-9x^2+12x-3}}$
**16)** $y' = \dfrac{4x}{1+4x^4}$
**17)** $y' = \dfrac{-6x^2}{\sqrt{-4x^6+20x^3-24}}$
**18)** $y' = \dfrac{2x}{2-2x^2+x^4}$
**19)** $y' = \dfrac{3}{x\sqrt{x^6-1}}$
**20)** $y' = \dfrac{-1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$
**21)** $y' = 2x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
**22)** $y' = arctgx + \dfrac{x}{1+x^2}$
**23)** $y' = \dfrac{-1}{\arccos x.\sqrt{1-x^2}}$

# *AULA 16*

## 9.6 – DERIVADAS SUCESSIVAS

Seja *f* uma função contínua em um intervalo I e derivável em um intervalo A $\subset$ I. Vimos que a derivada de *f* em A denotamos por f' . Se f' é derivável em um intervalo B, B $\subset$ A, a esta derivada de f' denotamos por f" denominamos derivada segunda de f.

Procedendo de maneira análoga, definimos as derivadas terceiras, quarta,...,enésimas.

*Exemplo:*

**1)** Obtenha até a derivada de 5ª ordem da função $f(x) = 5x^5 - 3x^3$

**2)** Dada a função $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1$, pede-se calcular $f''(-1)$ e $f^{(6)}(15)$

## 9.7 – REGRAS DE L'HOSPITAL

Agora apresentaremos um método geral para levantar indeterminações do tipo $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Esse método é dado pelas regras de L'Hospital.

***Regras de L'Hospital:*** Sejam *f* e *g* funções deriváveis num intervalo aberto I. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ em I.

i). Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x0} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

ii). Se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ então:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

*Obs.:* A regra de L'Hospital continua válida se $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ ou $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$. Ela também é válida para os limites laterais e para os limites no infinito.

*Exemplos:*

Determinar

**1)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{e^x - 1}$

**2)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{senx}{x}$

**3)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$

**4)** $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

**5)** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

## AULA 16 – EXERCÍCIOS

**1)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

**2)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

**3)** $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

**4)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

**5)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-senx}{3x^2}$

**6)** $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1-x-e^{-x}}{2x^3}$

**7)** $\lim_{x\to 3} \dfrac{e^x-e^3}{x-3}$

**8)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{tgx-x}{x-senx}$

**9)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-x^2}{2x-senx}$

**10)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{sen\pi x}$

**11)** $\lim_{x\to \pi} \dfrac{1-sen\frac{x}{2}}{\pi-x}$

**12)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-senx}{x^3}$

**13)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$

**14)** $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{1-sen^3x}{x-\pi/2}$

**15)** $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$

**16)** Obter a derivada terceira das seguintes funções:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$
b) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$
c) $f(x) = \dfrac{1}{2x^{-1}}$
d) $f(x) = 2x^{-3}$
e) $f(x) = sen3x$
f) $f(x) = e^{2x}$

**17)** Obter a derivada segunda das seguintes funções:

a) $y = \dfrac{x^2}{a+x}$
b) $y = e^x.\cos x$

***Respostas***

**1)** 2
**2)** $3/2$
**3)** 0
**4)** 1
**5)** 0
**6)** 0
**7)** $e^3$
**8)** 2
**9)** 2
**10)** $2/\pi$
**11)** 0
**12)** $1/6$
**13)** $\ln\dfrac{a}{b}$
**14)** 0
**15)** -2
**16)** a) 6 b) 0 c) 0
d) $-120x^{-6}$
e) $-27\cos 3x$ f) $8e^{2x}$

**17)** a) $y'' = \dfrac{2a^2}{(a+x)^3}$
b) $y'' = -2e^x senx$

# *AULA 17*

## 9.8 – APLICAÇÃO DAS DERIVADAS

### 9.8.1 – Taxas de Variação Relacionadas

Notemos que se duas grandezas variáveis estão relacionadas entre si através de uma terceira grandeza, então suas taxas de variação em relação a esta grandeza da qual dependem também estarão.

*Exemplo:* Se y depende de x e x depende de t, temos: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

*Exemplos:*

**1)** Um quadrado se expande de modo que seu lado varia a razão de 5 cm/s. Achar a taxa de variação de sua área em relação ao tempo no instante em que o lado mede 15cm.

**2)** Um cubo se expande de modo que sua aresta varia a razão de 12,5cm/s. Achar a taxa de variação de seu volume no instante em que sua aresta mede 10cm.

**3)** Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume de areia cresce a uma taxa de 10 $m^3/h$, a que razão aumenta a área da base quando a altura do monte é de 4m?

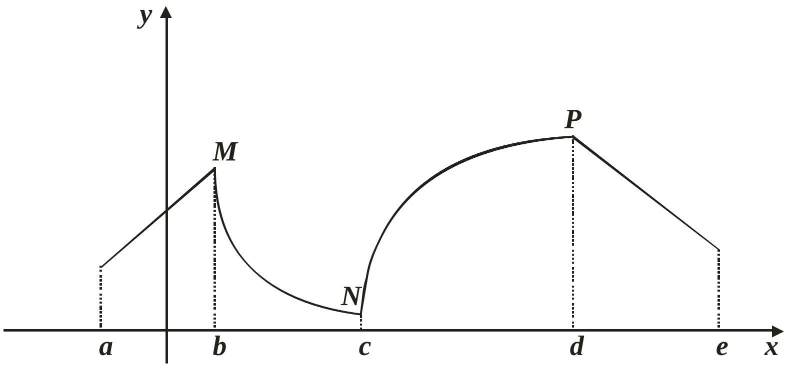
## 9.8.2 – Máximos e Mínimos

### 9.8.2.1 – Introdução:

Suponha que o gráfico abaixo tenha sido feito por um instrumento registrador usado para medir a variação de uma quantidade física em relação ao tempo. Em tal caso, o eixo dos x representa o tempo e as ordenadas dos pontos do gráfico, os valores da quantidade f(x).

Por exemplo, os valores de y podem representar medidas de temperaturas, pressão, corrente em um circuito elétrico, pressão sangüínea de indivíduo, quantidade de um produto químico em uma solução, bactérias em uma cultura, etc.

Observemos que há intervalos em que a função é crescente e outros nos quais ela é decrescente.




A figura mostra que f é crescente no intervalo de ]a,b[, decrescente de ]b, c[, crescente ]c, d[ e decrescente de ]d, e[.

Se restringirmos nossa atenção ao intervalo de [b, e], veremos que a quantidade atingiu seu máximo (maior valor) em d e seu mínimo em c.

Observe que em outros intervalos existem diferentes máximos e mínimos.

O ponto **M** da curva, de abscissa x = b, situa-se exatamente no ponto onde a função passa de crescente para decrescente. Dizemos então que a função apresenta um ***máximo local*** em x = b, ou que f(b) é um máximo local da função. Isto é, o valor de f(b) é o maior valor que a função assume para valores de x, próximos de b.

Convém observar que o ponto **M** não é o ponto mais alto do gráfico. **M** é o ponto mais alto dos que lhe são próximos. Por isso o adjetivo "local".

Vejamos agora que a função é decrescente no intervalo de ]b, c[ e crescente de ]c, d[. O ponto **N** da curva situa-se exatamente no ponto em que a função passa de decrescente para crescente e sua abscissa é x = c. Observamos que **N** é o mais baixo ponto entre os que lhe são próximos. Dizemos que a função apresenta ai um ***mínimo local***, ou que f(c) é um mínimo local de f. O valor de f(c) é o menor valor que a função assume para valores próximos de x, próximos de b.

Notemos que a função pode apresentar outros máximos e mínimos locais.

***Definição 1:*** Seja f uma função definida em um intervalo *I* e c um número em *I*, então:

i). f(x) é máximo de f em *I* se f(x) $\leq$ f(c) para todo x em *I*

ii). f(x) é mínimo em f em *I* se f(x) $\geq$ f(c) para todo x em *I*

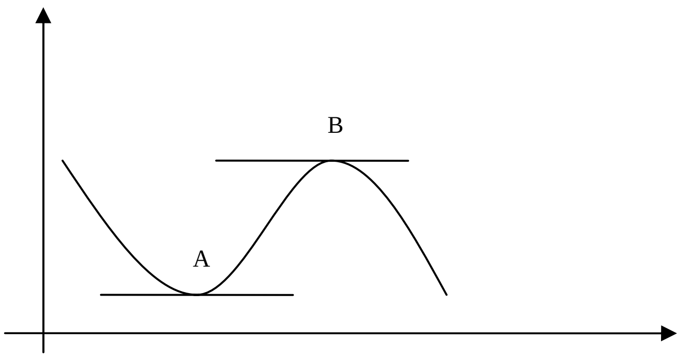
***Definição 2:*** Seja c um valor do domínio de uma função f

i). f(c) é máximo local de f se existe um intervalo (a,b), contendo c, tal que f(x) $\leq$f(c) para todo x em (a,b)

ii). f(c) é mínimo local de f se existe um intervalo (a,b), contendo c, tal que f(x) $\geq$f(c) para todo x em (a,b)

***Teorema:*** Se uma função f tem extremo local para um valor c, então f'(c) = 0 ou f'(c) não existe.

Suponha que uma função f seja derivável, neste caso o seu gráfico admite tangente em cada ponto, conforme o gráfico abaixo.




No ponto B, de máximo local, e A de mínimo local, a tangente ao gráfico é uma reta horizontal, paralela ao eixo x. Logo ***f'(a) = f'(b) = 0*** pois o ***coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função no ponto***.

Se f é uma função derivável e $x_o$ ponto tal que ***f'($x_o$) = 0*** ou não exista, dizemos que $x_0$ é um ponto crítico da função f.

Portanto da afirmação anterior, concluímos que os máximos e mínimos locais de uma função ocorrem em pontos críticos da função.

***A condição f'(x) = 0 é necessária para que haja máximo ou mínimo local no ponto x, mas não é suficiente.***

Seja por exemplo a função $f(x) = x^3$. Derivando temos: $f'(x) = 3x^2$, logo ***f'(x) = 0*** e o ponto de abscissa x = 0 não é nem máximo local nem mínimo local da função.

***Definição 3:*** Um ponto (número) c do domínio de uma função f é ponto crítico de f se, ou f'(c)=0 ou f'(c) não exista.

*Exemplo:*

Determine os pontos críticos da função $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$

**9.8.2.2 – Determinação dos Máximos e Mínimos locais:**

**1°)** Calcular a derivada primeira da função f e resolver a equação f′(x)=0, cujas raízes são as abscissas dos pontos críticos de f.

**2°)** Examinamos cada ponto crítico encontrado afim de verificar se trata-se de extremo ou não. Para isso, utilizaremos o ***teste da derivada primeira*** ou o ***teste da derivada segunda.***

**9.8.2.3 – Crescimento e Decrescimento de funções:**

***Teorema:*** Seja f uma função contínua em um intervalo fechado [a, b] e derivável no intervalo aberto (a, b).

i). Se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b) então f é crescente em [a, b]

ii). Se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b) então f é decrescente em [a, b]

**9.8.2.4 – Teste da Derivada Primeira:**

Suponhamos que para $x = x_0$ a função f tenha um ponto crítico e sejam a e b muito próximos de $x_0$ tais que $a<x_0<b$, então:

i). Se tivermos que $f'(a) > 0$ e $f'(b) < 0$, então, nesse caso a função passa de crescente a decrescente e podemos afiram que $f(x_0)$ é um ***máximo local*** da função.

ii). Se tivermos que $f'(a) < 0$ e $f'(b) > 0$, então, nesse caso a função passa de decrescente a crescente e podemos afirmar que $f(x_0)$ é um ***mínimo local*** da função.

*Exemplos:*

**1)** Seja a função $f(x) = x^2 -4$. Determine os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão se existirem.

**2)** Seja a função $f(x) = -x^3 + 8x^2 + 12x - 5$. Determine os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão se existirem.

### 9.8.2.5 – Concavidade e Teste da Derivada Segunda:

***Teste da Concavidade:*** Se uma função f é diferenciável em um intervalo aberto contendo c, então, no ponto P(c, f(c)), o gráfico é:

i). Côncavo para cima se $f''(c) > 0$

ii). Côncavo para baixo se $f''(c) < 0$

***Teste da Derivada Segunda:*** Seja f diferenciável em um intervalo aberto contendo c e $f'(c)=0$.

i). Se $f''(c) < 0$, então f tem máximo local em c

ii). Se $f''(c) > 0$, então f tem mínimo local em c

Se a função f admite derivada segunda nos pontos críticos, e supondo que esta seja contínua no domínio considerado, podemos empregá-la para examinar cada ponto crítico e classificá-lo.

Seja $x_0$ a abscissa de um ponto crítico, se $f''(x_0) > 0$, o gráfico de f côncavo para cima para x próximo de $x_0$, isto é, f tem ai concavidade voltada pra cima e então $f(x_0)$ é um mínimo local de f.

Se $f''(x_0) < 0$, o gráfico de f é côncavo para baixo pra x próximo de $x_0$, isto é, f tem concavidade voltada pra baixo, e nesse caso, $f(x_0)$ é um máximo local de f.

Resumindo:

***Mínimo Local:*** $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

***Máximo Local:*** $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$

*Exemplo:*

Determinar os pontos máximos ou mínimos da função $f(x) = - x^3 - 3x^2 + 9x - 5$, se existirem usando o teste da DERIVADA SEGUNDA.

## *AULA 17 – EXERCÍCIOS*

**1)** Ao aquecer um disco circular de metal, seu diâmetro varia à razão de 0,01 cm/min. Quando o diâmetro esta com 5 metros, a que taxa esta variando a área de uma face?

**2)** Um tanque em forma de cone com vértice para baixo mede 12 m de altura e tem no topo um diâmetro de 12 m. Bombeia-se água à taxa de 4m$^3$/min. Ache a taxa com que o nível da água sobe:

**a)** quando a água tem 2 m de profundidade.

**b)** quando a água tem 8 m de profundidade.

**3)** Uma pedra lançada em uma lagoa provoca uma série de ondulações concêntricas. Se o raio r da onda exterior cresce uniformemente à taxa de 1,8 m/s, determine a taxa com que a área de água perturbada está crescendo:

**a)** quando r = 3m

**b)** quando r = 6m

**4)** Determine as abscissas dos pontos críticos das funções abaixo:

**a)** $s(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 4$

**b)** $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 42x + 7$

**c)** $g(w) = w^4 - 32w$

**5)** Determine os pontos de máximo, de mínimo e de inflexão das seguintes funções se existires, UTILIZANDO O TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA.

**a)** $y = 6x^3 + 15x^2 - 12x - 5$

**b)** $f(x) = -\frac{4}{7}x^2 + 8x - 8$

**c)** $f(x) = -9x^2 + 14x + 15$

**6)** Determine as abscissas dos pontos máximos ou mínimos das seguintes funções, UTILIZANDO O TESTE DA DERIVADA SEGUNDA.

**a)** $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$

**b)** $y = 8x^3 - 51x^2 - 90x + 1$

**c)** $y = -x^3 - 9x^2 + 81x - 6$

**7)** Imagine que a trajetória de uma pedra lançada ao ar seja um trecho da parábola dada por $y = 5x^2 - 20x$ (x e y em metros), determine o ponto máximo da função.

***Respostas:***

**1)** $\frac{5\pi}{2} cm^2/\min$

**2)** $a)\ \frac{4}{\pi} m/\min$

$b)\ \frac{1}{4\pi} m/\min$

**3)** $a)\ 10{,}8\pi m^2/s$

$b)\ 21{,}6\pi m^2/s$

**4)** $a)\ t = 5/3\ e\ -2$

$b)\ x = -3/2\ e\ 7/3$

$c)\ w = 2$

**5)** *a) máx x = -2 e min x = 1/3*

*b) máx x = 7*

*c) máx x = 7/9*

**6)** *a) máx x = 3 e min x = 5*

*b) máx x = -3/4 e min x = 5*

*c) máx x = 3 e min x = - 9*

**7)** P(2,- 20)

# AULA 18

# 10 – INTEGRAIS

## 10.1 – INTRODUÇÃO:

Até o momento, nosso problema era; dada a função obter a sua derivada. A partir de agora, trabalharemos com a pergunta inversa: dada a função ***de quem ela é derivada?***

A operação contrária a diferenciação (ou a derivação) é chamada de antidiferenciação ou anti-derivada.

***Definição:*** Uma função F é chamada de anti-derivada de uma função f em um intervalo l se F'(x) = f(x) para todo x em l

*Exemplo:*

Seja $f(x) = 4x^3 + 2x + 1$. $F(x) = x^4 + x^2 + x$ é a anti-derivada da função f, pois F'(x0 = f(x). Mas não existe uma única integral, note por exemplo que: $G(x) = x^4 + x^2 + x + 5$ também é uma anti-derivada de f pois G'(x) = f9x0

Na verdade,qualquer função definida por **$H(x) = x^4 + x^2 + x + c$** onde x é uma constante qualquer, será uma integral de f.

### 10.1.1 – NOTAÇÃO:

A anti-diferenciação é um processo pelo qual se obtém a anti-derivada, mais geral de uma função encontrada. O símbolo $\int$ denota a operação de integral, e escrevemos:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{onde} \quad F'(x) = f(x)}$$

A expressão acima é chamada de ***Integral Indefinida*** de f. Em lugar de usarmos a expressão antiderivação para o processo de determinação de F, utilizaremos agora, a expressão ***Integração Indefinida.***

Para facilitar o nosso processo de obtenção da anti-derivada de uma função, temos algumas regras, que veremos a seguir.

## 10.2 – INTEGRAIS IMEDIATAS

Exercício Resolvido

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$$

1) $\int x^5 dx =$

2) $\int \frac{dx}{x^2} =$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} =$

4) $\int (1-x)\sqrt{x}dx =$

5) $\int \left( x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx =$

6) $\int \frac{(x^3 + 5x^2 - 4)}{x^2} dx =$

7) $\int (x^3 + 2)^2 .3x^2 dx =$

$$\boxed{\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c}$$

8) $\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2}.xdx =$

$$\boxed{\int \frac{dv}{v} = \ln v + c}$$

9) $\int \frac{dx}{(2x-3)} =$

10) $\int \frac{x^2dx}{1-2x^3} =$

$\boxed{\int a^v dv = \frac{a^v}{\ln a} + c}$ $\boxed{\int e^v dv = e^v + c}$

11) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx =$

12) $\int 3^x e^x dx =$

13) $\int \frac{\left(a^x - b^x\right)^2}{a^x b^x}dx =$

$\boxed{\int tgv.dv = -\ln\cos v + c}$ ou $\boxed{\int tgv.dv = \ln\sec v + c}$

14) $\int tg2xdx =$

$\boxed{\int \operatorname{cossec} v dv = \ln(\operatorname{cossec} v - \cot gv) + c}$

15) $\int \operatorname{cossec} xdx =$

$\boxed{\int \sec^2 v dv = tgv + c}$

16) $\int x^2 \sec^2 x^3 dx =$

$\boxed{\int \sec v dv = \ln(\sec v + tgv) + c}$

17) $\int \sec\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} =$

$\boxed{\int \sec x.tgx.dx = \sec x + c}$

18) $\int \frac{senx}{\cos^2 x} dx =$

$\boxed{\int \cos\sec^2 x dx = -\cot gx + c}$

19) $\int \frac{dx}{1+\cos x} =$

$$\boxed{\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = arcsen\frac{v}{a} + c}$$ ou $$\boxed{\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = -\arccos\frac{v}{a} + c}$$

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} =$

$$\boxed{\int \frac{dv}{a^2 + v^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{v}{a} + c}$$ ou $$\boxed{\int \frac{dv}{a^2 + v^2} = -\frac{1}{a} arc\cot\frac{v}{a} + c}$$

21) $\int \frac{dx}{4x^2 + 9} =$

$$\boxed{\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = \frac{1}{a} arc\sec\frac{v}{a} + c}$$ ou $$\boxed{\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2 - a^2}} = -\frac{1}{a} \mathrm{arccossec}\frac{v}{a} + c}$$

22) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}} =$

$$\boxed{\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+v}{a-v} + c}$$

23) $\int \frac{dx}{9x^2 - 1} =$

$$\boxed{\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{v-a}{v+a} + c}$$

$$\boxed{\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}) + c}$$

24) $\int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7} =$

## Aula 18 - Exercícios

1) $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}dx$

2) $\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}}dx$

3) $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx$

4) $\int \frac{(2+\ln x)}{x}dx$

5) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$

6) $\int (e^x+1)^3.e^x dx$

7) $\int sen2x.\cos^2 2x.dx$

8) $\int \left(\frac{\sec x}{1+tgx}\right)^2 dx$

9) $\int \frac{3ax}{b^2-c^2x^2}dx$

10) $\int \frac{dx}{x.\ln x}$

11) $\int tg2x.dx$

12) $\int \frac{dx}{(e^{2x})^2}$

13) $\int \frac{senx+\cos x}{\cos x}dx$

14) $\int \frac{\cot gx}{sen^2x}dx$

15) $\int (\sec 4x-1)^2 dx$

16) $\int \frac{\sec x.tgx}{a+b\sec x}dx$

17) $\int \frac{\cos^3 x}{sen^4 x}dx$

18) $\int tg^4 x.dx$

19) $\int (tg2x+\sec 2x)^2 dx$

20) $\int (tgx+\cot gx)^2 dx$

21) $\int \frac{ax}{x^4+b^4}dx$

22) $\int \frac{dt}{4-9t^2}$

23) $\int \frac{\cos\theta.d\theta}{4-sen^2\theta}$

24) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}$

25) $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

26) $\int \frac{x^2}{5-x^6}dx$

27) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arctgx}$

28) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

29) $\int \frac{\sec x.tgx}{9+4\sec^2 x}dx$

30) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

31) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

32) $\int \frac{3dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x-2}}$

33) $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

34) $\int \frac{2x-3}{3x^2+4x-7}dx$

35) $\int \frac{xdx}{\sqrt{27+6x-x^2}}$

36) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

37) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+9}}dx$

38) $\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx$

39) $\int \frac{sen2x}{\sqrt{1+sen^2x}}dx$

40) $\int \frac{e^{2x}dx}{2+e^{2x}}$

41) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

42) $\int \frac{dx}{2sen^2x+3\cos^2 x}$

43) $\int x.\sqrt[3]{3x+2}dx$

***Respostas:***

**1)** $\frac{-4}{3(x^3+2)^2}+c$ **2)** $\frac{3(x^2+6x)^{2/3}}{4}$ + c

**3)** $-\frac{(1-2x^2)^{3/2}}{6}+c$ **4)** $\frac{(2+\ln x)^2}{2}+c$

**5)** $2x^{1/2}+\frac{4x^{3/2}}{3}+\frac{2x^{5/2}}{5}+c$ **6)** $\frac{(e^x+1)^4}{4}+c$

**7)** $-\frac{(\cos 2x)^3}{6}+c$ **8)** $\frac{-1}{1+tgx}+c$

**9)** $\frac{-3a}{2c^2}\ln(b^2-c^2x^2)+c$ **10)** ln(lnx) + c

**11)** $\frac{1}{2}\ln(\sec 2x)+c$ **12)** $\frac{-1}{4e^{4x}}+c$

**13)** $\ln(\sec x)+x+c$ **14)** $-\frac{(\cot gx)^2}{2}+c$

**15)** $\frac{1}{4}tg4x-\frac{1}{2}\ln(\sec 4x+tg4x)+x+c$

**16)** $\frac{1}{b}\ln(a+b\sec x)+c$ **17)** $\frac{1}{senx}-\frac{1}{3sen^{3x}}+c$

**18)** $\frac{tg^3x}{3}-tgx+x+c$ **19)** $tg2x+\sec 2x-x+c$

**20)** $-\cot gx+tgx+c$ **21)** $\frac{a}{2b^2}arctg\frac{x^2}{b^2}+c$

**22)** $\frac{1}{12}\ln\left(\frac{2+3t}{2-3t}\right)+c$ **23)** $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+sen\theta}{2-sen\theta}\right)+c$

**24)** $\frac{1}{2}arc\sec x^2+c$ **25)** $\frac{-\arccos^3 x}{3}+c$

**26)** $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+x^3}{\sqrt{5}-x^3}\right)+c$ **27)** $\ln(arctgx)+c$

**28)** $arctge^x+c$ **29)** $\frac{1}{6}arctg\left(\frac{2\sec x}{3}\right)+c$

**30)** $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$ **31)** $arcsen(2x-3)+c$

**32)** $arc\sec\frac{(2x+1)}{3}+c$

**33)** $-\frac{\arccos^2 x}{2}+\sqrt{1-x^2}+c$

**34)** $\frac{1}{3}\ln(3x^2+4x-7)-\frac{13}{30}\ln\left(\frac{3x-3}{3x+7}\right)+c$

**35)** $-\sqrt{27+6x-x^2}+3arcsen\frac{(x-3)}{6}+c$

**36)** $\ln(x+1/2+\sqrt{1+x+x^2})+c$

**37)** $\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+9}-\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9})+c$

**38)** $\frac{1}{9}\ln(9x^2-12x+8)+\frac{13}{9}.\frac{1}{2}arctg\frac{3x-2}{2}+c$

**39)** $2\sqrt{1+sen^2x}+c$

**40)** $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{e^x}{\sqrt{2}}+c$

**41)** $arcsen\frac{\ln x}{1}+c$

**42)** $\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\left(\sqrt{\frac{2}{3}}tgx\right)+c$

**43)** $\frac{1}{21}(3x+2)^{7/3}-\frac{1}{6}(3x+2)^{4/3}$

# AULA 19

## 10.3 - INTEGRAIS POR PARTES

**Exemplo Resolvido**

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

1) $\int x.e^x dx =$

2) $\int x^2.\ln x.dx =$

3) $\int x\sqrt[3]{3x+2}dx =$

4) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx =$

5) $\int e^{senx} sen2x dx =$

## AULA 19 – EXERCÍCIOS

1) $\int arcsenxdx =$

2) $\int sen^2 xdx =$

3) $\int \sec^3 xdx =$

4) $\int x^2.senx.dx =$

5) $\int x^3.e^{x^2}.dx =$

6) $\int x^3.e^{2x}.dx =$

7) $\int x.arctgx.dx =$

8) $\int arcsenx.\dfrac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} =$

9) $\int tg^2 x.\sec^3 x.dx =$

10) $\int x.arctg\sqrt{x^2-1}dx =$

11) $\int \dfrac{\ln x.dx}{(x+1)^2} =$

12) $\int arcsen\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}dx =$

**Respostas:**

**1)** $x.arcsenx + \sqrt{1-x^2} + c$

**2)** $\dfrac{x}{2} - \dfrac{sen2x}{4} + c$

**3)** $\dfrac{1}{2}\sec x.tgx + \dfrac{1}{2}\ln(\sec x + tgx) + c$

**4)** $-x^2.\cos x + 2xsenx + 2\cos x + c$

**5)** $\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1) + c$

**6)** $\dfrac{3}{8}.e^{2x}.\left(\dfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 - 2x + 1\right) + c$

**7)** $arctgx(1+x^2) - x + c$

**8)** $\dfrac{arcsenx}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) + c$

**9)** $\dfrac{1}{4}\sec^3 xtgx - \dfrac{1}{8}\sec xtgx - \dfrac{1}{8}\ln(\sec x + tgx) + c$

**10)** $\dfrac{1}{2}x^2 arctg\sqrt{x^2-1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c$

**11)** $-\dfrac{\ln x}{(x+1)} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + c$

**12)** $xarcsen\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + arctg\dfrac{\sqrt{x} + c}{}$

# *AULA 20*

## 10.4 – INTEGRAÇÃO COM APLICAÇÃO DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

As identidades seguintes são empregadas no cálculo das integrais trigonométricas do presente capítulo:

**Parte 2**

**Parte 3**

i). $sen^2 x + \cos^2 x = 1$

ii). $1 + tg^2 x = \sec^2 x$

iii). $1 + \cot g^2 x = \cos\sec^2 x$

iv). $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

v). $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

vi). $senx \cdot \cos x = \frac{1}{2} sen2x$

vii). $senx \cdot \cos y = \frac{1}{2}[sen(x-y) + sen(x+y)]$

viii). $senx \cdot seny = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

ix). $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

x). $1 - \cos x = 2sen^2 \frac{1}{2} x$

xi). $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2} x$

xii). $1 \pm senx = 1 \pm \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$

*Exemplos:*

**1)** $\int sen^2 x dx =$

**2)** $\int \cos^2 3x dx =$

**3)** $\int sen^3 x dx =$

**4)** $\int \cos^6 x dx =$

**5)** $\int sen^2 x \cos^2 x dx =$

**6)** $\int sen3x.sen2xdx =$

**7)** $\int sen3x.\cos 5x.dx =$

**8)** $\int \cos 4x.\cos 2x.dx =$

**9)** $\int (1+\cos 3x)^{3/2}.dx =$

**10)** $\int \sqrt{1-\cos x}dx =$

**11)** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-sen2x}} =$

**12)** $\int tg^4 x.dx =$

**13)** $\int \cot g^3 2xdx =$

## AULA 20 – EXERCÍCIOS

**1)** $\int \cos^5 x dx =$

**2)** $\int sen^4 x dx =$

**3)** $\int \cos^4 2x . sen^3 2x . dx =$

**4)** $\int sen^3 3x . \cos^5 3x dx =$

**5)** $\int sen^4 x . \cos^4 x dx =$

**6)** $\int \frac{sen^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx =$

**7)** $\int tg^5 x dx =$

**8)** $\int \sec^4 2x dx =$

**9)** $\int \sec^4 x . tg^3 x dx =$

**10)** $\int tg^3 2x . \sec^3 2x dx =$

**11)** $\int tg^4 x . \sec^4 x dx =$

**12)** $\int \cot g^4 3x dx =$

***Respostas:***

**1)** $senx - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^5 x + C$

**2)** $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} sen 2x + \frac{1}{32} sen 4x + C$

**3)** $\frac{1}{14} \cos^7 2x - \frac{1}{10} \cos^5 2x + C$

**4)** $\frac{1}{24} \cos^8 3x - \frac{1}{18} \cos^6 3x + C$

**5)** $\frac{1}{128} \left( 3x - sen 4x + \frac{sen 8x}{8} + C \right)$

**6)** $3 \cos^{-1/3} x + \frac{3}{5} \cos^{5/3} x + C$

**7)** $\frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \ln \sec x + C$

**8)** $\frac{1}{6} tg^3 2x + \frac{1}{2} tg 2x + C$

**9)** $\frac{tg^4 x}{4} + \frac{tg^6 x}{6} + C$ **ou** $\frac{\sec^6 x}{6} - \frac{\sec^4 x}{4} + C$

**10)** $\frac{1}{10} \sec^5 2x - \frac{1}{6} \sec^3 2x + C$

**11)** $\frac{tg^5 x}{5} + \frac{tg^7 x}{7} + C$

**12)** $-\frac{1}{9} \cot g^3 3x + \frac{1}{3} \cot g 3x + x + C$

# *AULA 21*

## 10.5 – INTEGRAÇÃO POR FRAÇÕES PARCIAIS

Esta técnica é usada para integrar funções racionais próprias, isto é, funções da forma $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde ***p*** e ***q*** são polinomiais e o grau de p(x) é menor que o grau de q(x). A ídéia é desdobrar o integrando R(x) em uma soma de funções racionais mais simples, que podem ser integradas.

É fácil verificar que:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}$$

A expressão à direita é o que se chama uma *decomposição em frações parciais de* $\dfrac{2}{x^2-1}$.

Pode-se usar esta decomposição para calcular a integral indefinida de $\dfrac{2}{x^2-1}$.

Basta integrarmos cada uma das frações da decomposição, obtendo:

$$\int \frac{2}{x^2-1}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx$$

O desdobramento do integrando pode ser feito de acordo com os casos seguintes:

***CASO 1:*** O denominador de R(x) pode ser decomposto em fatores distintos do 1º grau. Neste caso, a cada fator da forma (ax + b), $a \in \Re^*$ e , $b \in \Re$, que aparece no denominador, corresponde uma fração da forma $\dfrac{A}{(ax+b)}$.

*Exemplos:*

$$\frac{2}{x(x^2-1)} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{2}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}$$

Calcule $\displaystyle\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}dx =$

***<u>CASO 2</u>:*** O denominador de R(x) pode ser decomposto em fatores repetidos do 1º grau. A cada fator da forma (ax + b) que aparece **<u>n</u>** vezes no denominador, corresponde uma soma de **<u>n</u>** frações da forma:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+...+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

*Exemplos:*

$$\frac{1+x}{(x+1)^2(x^2-2x+1)^2}=\frac{1+x}{(x+1)(x+1)[(x-1)^2]^2}$$

$$\frac{1+x}{(x+1)^2(x^2-2x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)(x-1)^4}$$

$$\frac{1+x}{(x+1)^2(x^2-2x+1)^2}=\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{A_3}{(x-1)^2}+\frac{A_4}{(x-1)^3}+\frac{A_5}{(x-1)^4}$$

Calcule $\int \frac{3x^3-18x^2+29x-4}{(x+1)(x-2)^3}dx=$

***<u>CASO 3</u>:*** O denominador é constituído por fatores quadráticos distintos e irredutíveis da forma q(x) = $ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ e não pode portanto ser decomposto em fatores do 1º grau. A cada fator q(x) que aparece no denominador, corresponde uma fração da forma $\dfrac{Ax+B}{q(x)}$

*Exemplo:*

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1x+B_1}{(x^2+x+1)} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)}$$

Calcule $\displaystyle\int \frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx =$

***CASO 4:*** O denominador é constituído por fatores quadráticos repetidos e irredutíveis da forma q(x) = a$x^2$ + bx + c com $a \neq 0$ e não pode portanto ser decomposto em fatores do 1° grau. A cada fator de q(x) que aparece repetido no denominador, corresponde uma soma de frações da forma $\frac{A_1 x + B_1}{q(x)} + \frac{A_2 x + B_2}{[q(x)]^2} + ... + \frac{A_n x + B_n}{[q(x)]^n}$

Calcule $\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2 + 1)^2} dx =$

## *AULA 21* – *EXERCÍCIOS*

**1)** $\int \frac{5x-12}{x(x-4)}dx =$

**2)** $\int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx =$

**3)** $\int \frac{6x-11}{(x-1)^2}dx =$

**4)** $\int \frac{x+16}{x^2+2x-8}dx =$

**5)** $\int \frac{5x^2-10x-8}{x^3-4x}dx =$

**6)** $\int \frac{2x^2-25x-33}{(x+1)^2(x-5)}dx =$

***Respostas:***

**1)** $3\ln|x|+2\ln|x-4|+C$

**2)** $4\ln|x+1|-5\ln|x-2|+\ln|x-3|+C$

**3)** $6\ln|x-1|+\frac{5}{x-1}+C$

**4)** $-2\ln|x+4|+3\ln|x-2|+C$

**5)** $2\ln|x|-\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C$

**6)** $5\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}-3\ln|x-5|+C$

# AULA 22

## 10.6 – INTEGRAL DEFINIDA:

***Teorema fundamental do Cálculo:*** Seja f uma função contínua em [a, b] e g uma função tal que g’(x) = f(x) para todo x $\in$ [a, b]. Então $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

A expressão $\int_a^b f(x)dx$ é chamada de *Integral Definida de f* de a até b.

Em linguagem simples, este teorema nos diz que se g é uma anti-derivada de f, então a integral definida de a até b de f é dada pela diferença g(b) – g(a).

Os valores de a e b são chamados de limites de integração.

*Exemplos:*

**1)** Calcule $\int_1^3 x^2 dx =$

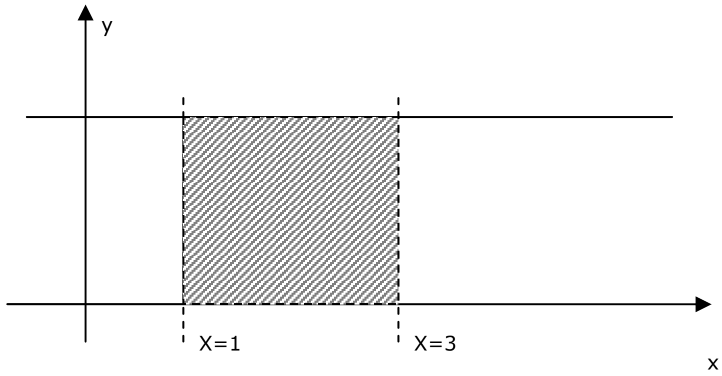
**2)** Calcule $\int_1^3 5dx =$

**3)** Calcule $\int_0^7 xdx =$

### 10.6.1 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA:

Vamos agora interpretar geometricamente os exemplos 2 e 3.

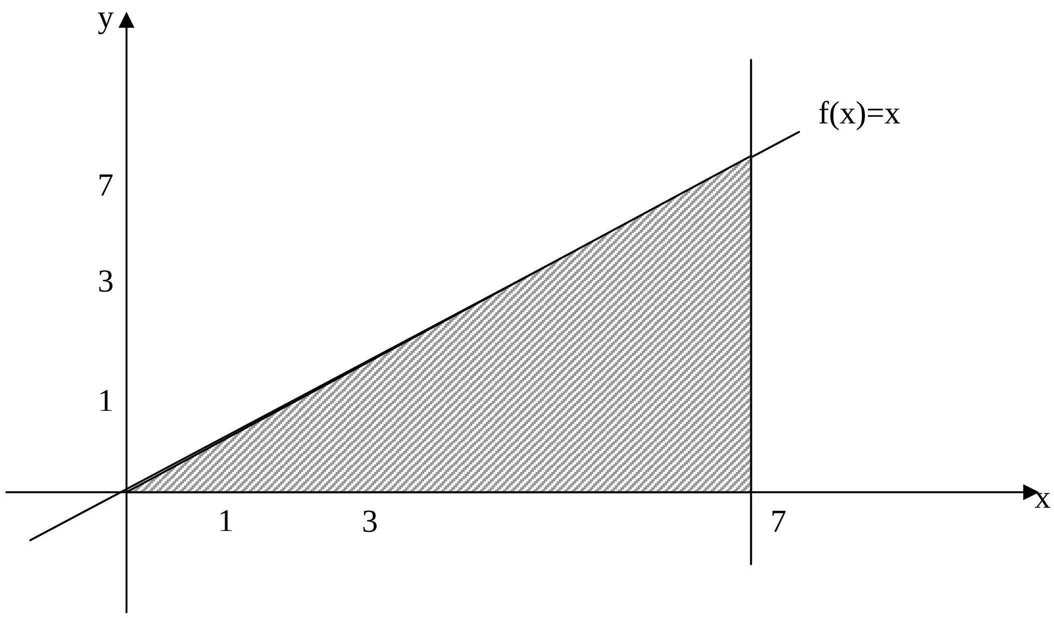
**1)** Seja f(x) = 5 *(exemplo 2)*. Tomemos a região delimitada por (x), o eixo x e as retas x = 1 e x = 3.




Temos um retângulo de base 2 e altura 5, cuja área é dada por:

$A_1$ = b.h = 2x5 = 10u.a (como no exemplo 2)

**2)** Seja f(x) = x *(exemplo 3)*. Tomaremos a região delimitada pelo eixo x, a função f(x) = x e as retas x = 0 e x = 7.



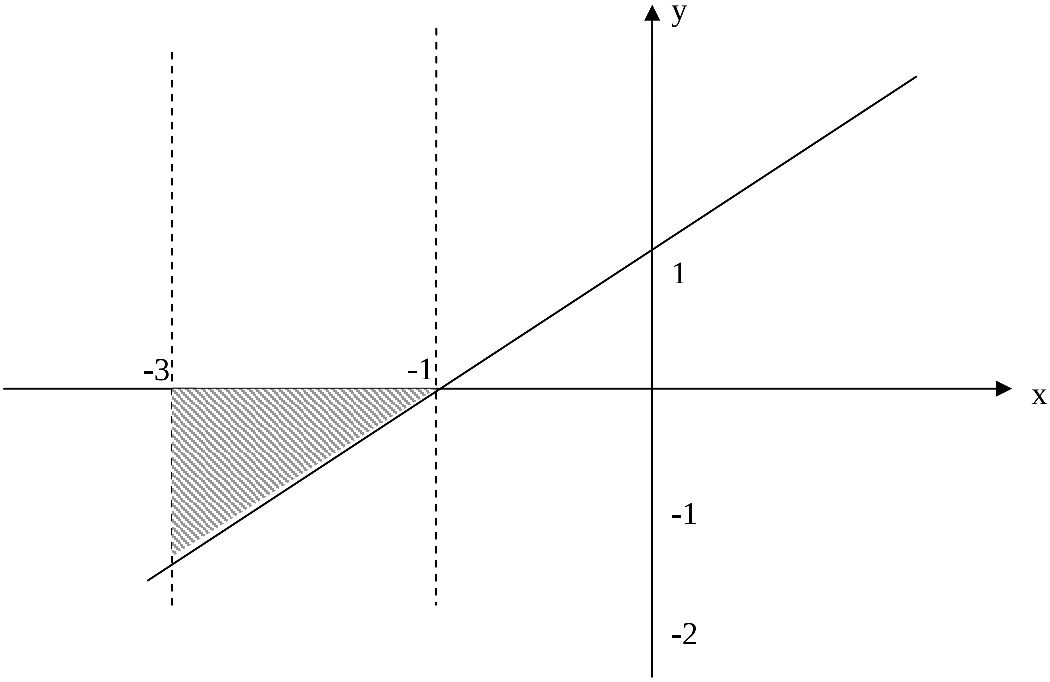

Temos um triângulo de base 7 e altura 7, cuja área é dada por $A_2 = \frac{7 \cdot 7}{2} = \frac{49}{2} u.a$ .

Os fatos observados nestes exemplos não são mera coincidência. Na verdade, se f(x)>0 para x $\in$ [a,b], então $\int_a^b f(x)dx$ nos fornece a área limitada por f(x) pelas retas x =a e x = b e o eixo x.

**3)** Tomemos agora um exemplo em que f(x) < 0 em [a, b]

$$\int_{-3}^{-1}(x+1)dx = \frac{x^2}{2}+x\Big|_{-3}^{-1} = \left[\frac{(-1)^2}{2}+(-1)\right]-\left[\frac{(-3)^2}{2}+(-3)\right] = -2$$

A região delimitada por y = (x+1), pelo eixo x e as retas x = - 3 e x = - 1 é apresentada abaixo:




Note que $A_3$ é um triângulo de base 2 e altura 2, assim, $A_3 = \frac{2\cdot 2}{2}u.a.$

Assim, vemos que $A_3 = \left|\int_{-3}^{-1} f(x)dx\right|$.

Em geral se f(x)<0 em [a, b] a área delimitada por f(x), o eixo x e as retas x = a e x=b é dada por $A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

## 10.6.2 – PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS DEFINIDAS

**1.** Se uma função f é integrável no intervalo fechado [a, b], e se k é uma constante qualquer, então:

$$\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

*Exemplo:*

Calcule o valor da integral $\int_0^3 5xdx =$

**2.** Se as funções f e g são integráveis no mesmo intervalo fechado [a,b] então f + g é integrável em [a, b] e:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

*Exemplo:*

Calcule o valor da integral $\int_3^5 \left[x^2 + \frac{1}{x}\right]dx =$

**3.** Se a função f é integrável nos intervalos fechados [a, b], [a, c] e [c, b] então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

*Exemplo:*

Calcule o valor da integral $\int_{-2}^3 xdx =$

***<u>AULA 22</u> – EXERCÍCIOS***

Encontre o valor das integrais definidas abaixo:

**1)** $\int_0^2 x^2 dx =$

**2)** $\int_1^2 x^3 dx =$

**3)** $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)dx =$

**4)** $\int_{-2}^2 (x^3 + 1)dx =$

**5)** $\int_{-1}^1 \left(x^{4/3} + 4x^{1/3}\right)dx =$

**6)** $\int_{-3}^4 (x + 2)dx =$

**7)** $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-1}} =$

**8)** $\int_{-3}^3 (t^6 - 3t)dt =$

**9)** $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + 9}} =$

**10)** $\int_0^5 \sqrt{x+4}dx =$

**11)** $\int_0^1 \sqrt[3]{8x^7}\, dx =$

***Respostas:***

**1)** $\frac{8}{3}$

**2)** $\frac{15}{4}$

**3)** 66

**4)** 4

**5)** $\frac{6}{7}$

**6)** $\frac{35}{2}$

**7)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\sqrt{7} - 1\right]$

**8)** $\frac{4374}{7}$

**9)** 2

**10)** $\frac{38}{3}$

**11)** $\frac{3}{5}$

# ***AULA 23***

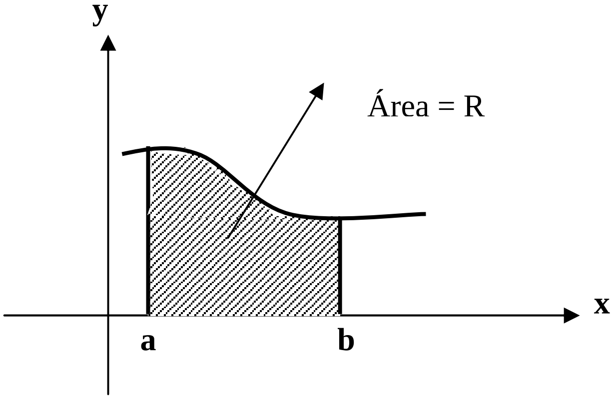
## 10.6.3 – APLICAÇÕES DE INTEGRAL DEFINIDA

### 10.6.3.1 – CÁLCULO DE ÁREAS DE UMA REGIÃO PLANA

Se f é uma função contínua em um intervalo fechado [a, b] e se f(x) $\geq 0$ para todo x em [a, b], então temos que o número que expressa a área da região limitada pela curva y = f(x), o eixo x e as retas x = a e x = b é dada por, em unidades quadradas:

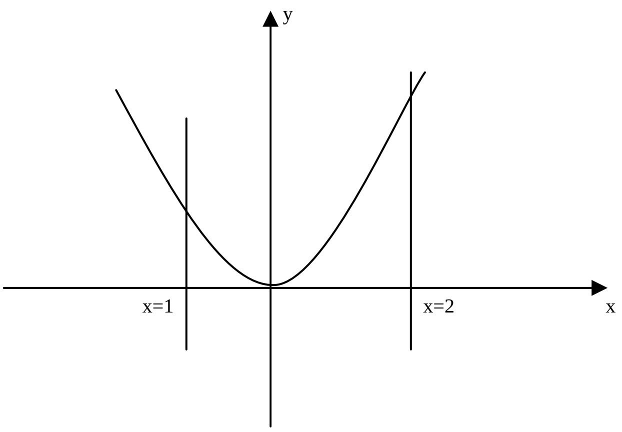
$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$

Por conveniência, referimo-nos à região R como a região sob o gráfico f de a até b.

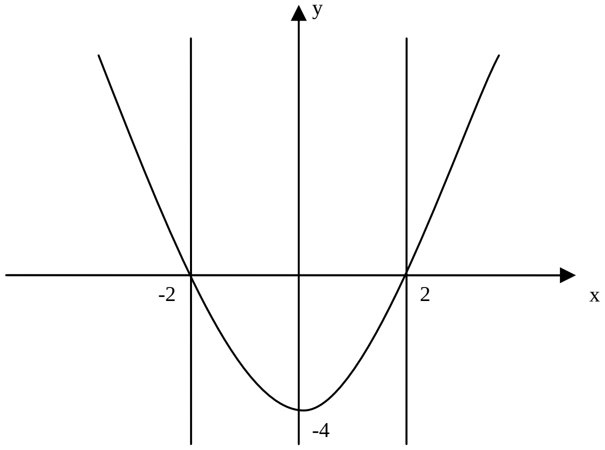



*Exemplos:*

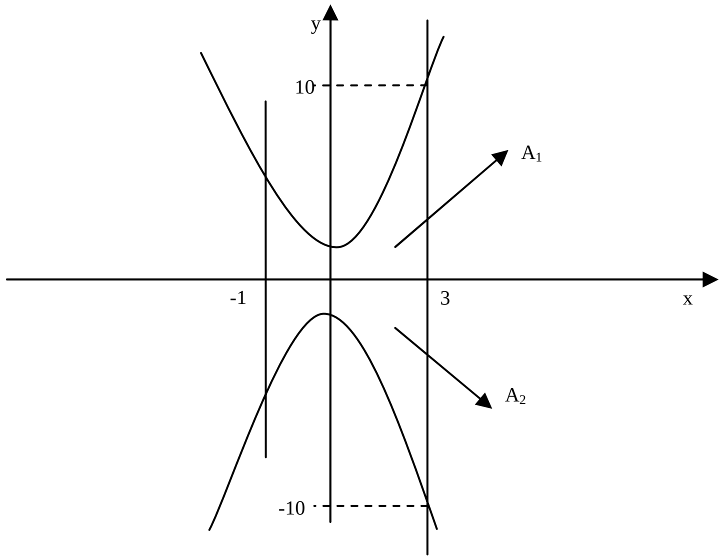
**1)** Encontre a área limitada pela curva y = $x^2$, o eixo x e as retas x = -1 e x = 2.



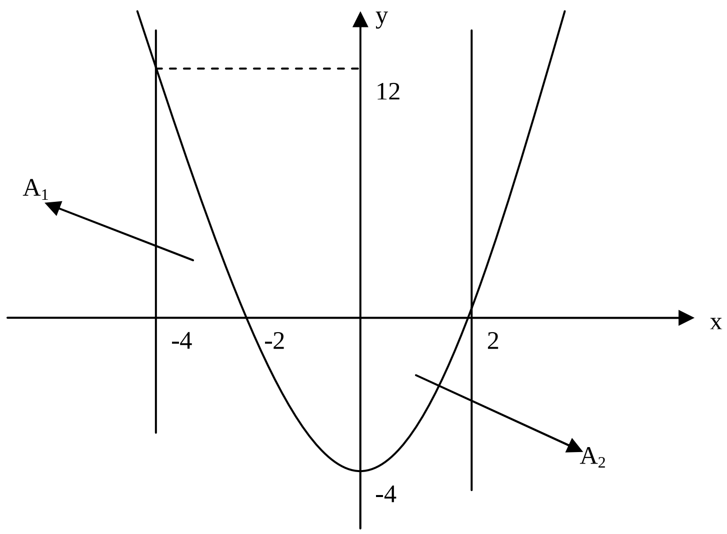
**2)** Encontre a área limitada pela curva $y = x^2 - 4$, o eixo x e as retas $y = -2$ e $x = 2$




**3)** Calcule a área limitada pelas curvas $y = x^2 + 1$, $y = -x^2 - 1$ e as retas $x = -1$ e $x = 3$.



**4)** Calcule a área da região definida pela curva $y = x^2 - 4$, o eixo x e as retas $x = -4$ e $x = 2$



**10.6.3.1.1 – ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR DUAS FUNÇÕES:**

Nesta seção, consideraremos a região que esta **entre** os gráficos de duas funções.

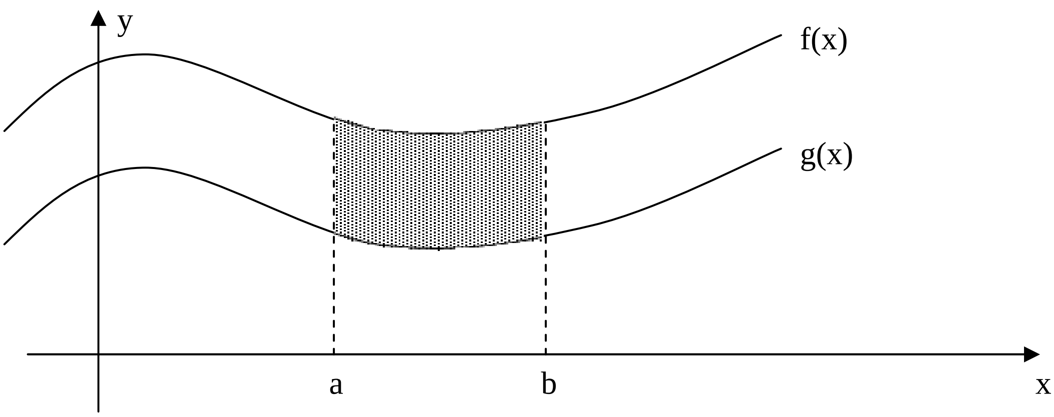
Se **f** e **g** são contínuas em $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x em [a, b], então a área A da região R, limitada pelos gráficos de f, g, x =a e x = b, pode ser calculada subtraindo-se a área da região sob o gráfico de g (*fronteira inferior de R*) da área da região sob o gráfico de f *(fronteira superior de R)*:

$$A = \int_a^b f(x)xdx - \int_a^b g(x)dx$$

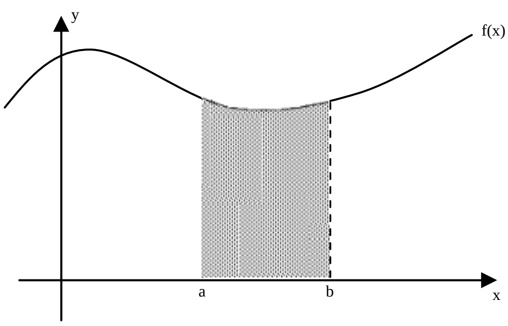
ou

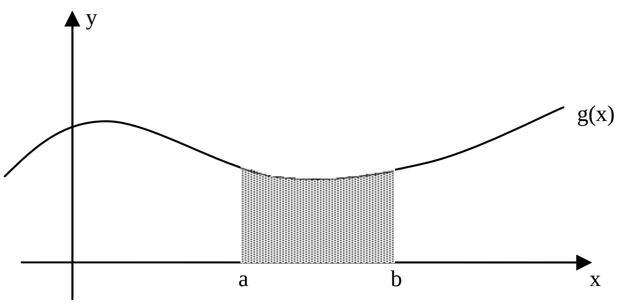
$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Suponha que desejamos calcular a área A delimitada por duas curvas f(x) e g(x) e as retas x = a e x = b, como ilustra a figura abaixo:




Note que a área pode ser obtida pela diferença das áreas $A_1 - A_2$




Sendo $A_1 = \int_a^b f(x)dx$ e $A_2 = \int_a^b g(x)dx$

$A = A_1 - A_2$

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Assim verificamos que é válido o teorema a seguir:

***Teorema:*** se f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para todo x em [a, b], então a área A da região delimitada pelos gráficos de f, g, x = a e x = b é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

**Diretrizes pra encontrar a área de uma região R limitada por duas funções:**

- ✓ Esboçar a região, designando por y = f(x) a fronteira superior e por y = g(x) a fronteira inferior.
- ✓ Encontrar os pontos de intersecção (a e b) entre as duas funções (sistema de equações)
- ✓ Calcular a integral $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

*Exemplos:*

**1)** Encontre a área A limitada pela curva $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = 1$ no intervalo de [-2, 3]

**2)** Encontre a área A da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

***AULA 23* – EXERCÍCIOS**

Encontre a área delimitada pelas curvas e as retas dadas.

**1)** $y = 4x - x^2$, o eixo x, as retas $x = 1$ e $x=3$.

**2)** $y = 8x-x^2$, o eixo x, as retas $x= 0$ e $x=4$.

**3)** $y = x^2 + 1$ e $y =5$

**4)** $y = x^2$ e $y = 4x$

**5)** $y = 1 - x^2$ e $y = x - 1$

**6)** y = senx, o eixo x, $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2} rad$

**7)** y = senx, o eixo x, $x = 0$ e $x = 2\pi$ rad

**8)** y = cosx, o eixo x, $x = 0$ e $x = 2\pi$ rad

**9)** $y = x$ e $y = x^2$ com $0 \leq x \leq 2$

**10)** $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

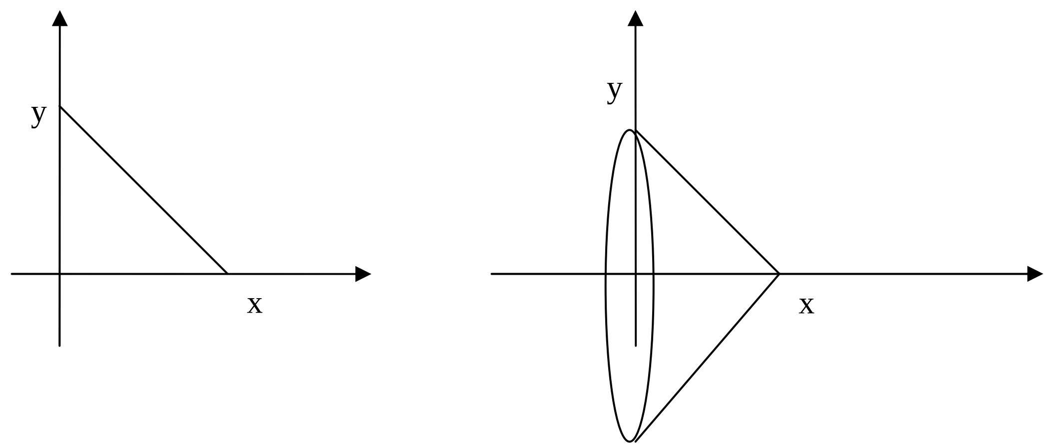
***Respostas:***

| | |
|---|---|
| **1)** $\dfrac{22}{3} u.a$ | **2)** $\dfrac{128}{3} u.a..$ |
| **3)** $\dfrac{32}{3} u.a$ | **4)** $\dfrac{32}{3} u.a$ |
| **5)** $\dfrac{9}{2} u.a$ | **6)** 1 u.a. |
| **7)** 4 u. a | **8)** 4 u. a |
| **9)** 1 u. a. | **10)** $\dfrac{1}{3} u.a.$ |

# AULA 24

## 10.6.3.2 – VOLUME DE UM SÓLIDO DE REVOLUÇÃO:

***Definição 1:*** Um sólido de revolução é um sólido gerado pela rotação de uma região do plano em torno de uma reta no plano, chamada de eixo de revolução.
Exemplo: Ao girarmos o triângulo abaixo em torno do eixo y, obtemos um cone de revolução.




***Definição 2:*** Seja f uma função contínua no intervalo fechado [a, b]. Se S for o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x da região limitada pela curva y = f(x), o eixo x e as retas x = a e x = b e se V for o número de unidades cúbicas do volume de S, então:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b [\,f(x)]^2\,dx}$$

*Exemplo:*

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região plana limitada pela curva $y=x^2$ e as retas x = 2 e x = 3 em torno do eixo x.

***Definição 3:*** Seja uma região R do plano limitada pelos gráficos de x = a, x = b e pelos gráficos de duas funções contínuas f e g, com f(x) ≥ g(x) ≥ 0 para todo x em [a, b]. Então o volume do sólido gerado pela rotação da região R em torno do eixo x é dado por:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi\left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx}$$

*Exemplo:*

Encontre o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x, da região limitada pela parábola $y = x^2 + 1$ e a reta $y = x + 3$

## *<u>AULA 24</u> – EXERCÍCIOS*

**1)** Seja $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x, da região do plano limitada por f(x), pelo eixo x e as retas x = -1 e x = 1.

**2)** Seja $f(x) = \frac{1}{x}$, determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x, da região limitada por f(x), pelo eixo x e as retas x = 1 e x = 3.

**3)** Seja $f(x) = x^2 - 4x$, determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo x, da região do plano limitada por f(x) e pelo eixo x.

**4)** Em cada um dos exercícios abaixo esboce a região R delimitada pelos gráficos das equações dadas e determine o volume do sólido gerado pela rotação de r em torno do eixo x.

**a)** $y = x^2$, $y = 4 - x^2$

**b)** y = 2x, y = 6, x = 0

**c)** $y = \frac{x}{2}$, y = 4, x = 1

***Respostas:***

**1)** $\frac{56\pi}{15} u.v.$

**2)** $\frac{2\pi}{3} u.v.$

**3)** $\frac{512\pi}{15} u.v.$

**4)** **a)** $\frac{64\sqrt{2}\pi}{3} u.v.$

**b)** $72\pi$ u.v.

**c)** $\frac{833\pi}{12} u.v.$

# AULA 25

# 11 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

## 11.1 – INTRODUÇÃO:

***Definição:*** Toda equação cujas incógnitas são funções e que contém pelo menos uma derivada ou diferencial destas funções, denomina-se equação diferencial.

*Exemplos:*

1) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 1$

2) $xdy - ydx = 0$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

4) $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 0$

***Classificação:*** A função ***y*** é denominada ***incógnita*** de uma variável independente de x. Quando existe apenas uma variável independente, a equação é denominada ordinária, quando há mais de uma variável livre, **equação diferencial de derivadas parciais** (4º exemplo)**.**

***Ordem:*** A ordem de uma equação diferencial é determinada pela ordem da derivada de mais alta ordem contida na equação.

***Grau:*** Supondo-se a equação escrita sob forma racional inteira em relação às derivadas, o grau da equação é o maior dos expoentes a que esta elevada a derivada de mais alta ordem contida na equação.

*Exemplos:*

$$x\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{y}{\dfrac{d^3y}{dx^3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - y = \frac{d^3y}{dx^3} \quad \Rightarrow \quad \text{3ª ordem e 2º grau}$$

$$Lg\left|\frac{dy}{dx}\right| - Lg\left|x^2\right| = y \quad \Rightarrow \quad Lg\left|\frac{\dfrac{dy}{dx}}{x^2}\right| = y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2}.\frac{dy}{dx} = e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^2e^y \quad \Rightarrow \text{1ª ordem e 1º grau}$$

Observe que nem sempre à primeira vista, pode-se classificar a equação de imediato quanto a ordem e grau.

***Resolução:*** Resolver uma ED é determinar todas as funções que, sob a forma finita, verificam a equação, ou seja, é obter uma função de variáveis que, substituída na equação, transforme-a numa identidade.

*Exemplo:* $\frac{dy}{dx} = 3x - 1$

- **Solução geral:** solução que contem tantas constantes arbitrárias quantas forem as unidades de ordem da equação.
- **Solução particular:** solução da equação deduzida da solução geral, atribuindo-se valores particulares as constantes arbitrárias.
- **Solução singular:** solução que não pode ser deduzida da equação geral.

**Curvas Integrais:** A solução geral de uma ED representa uma família de curvas. Essa solução denomina-se primitiva ou integral da ED.

*Exemplo:*

1) Seja a equação $\frac{dy}{dx} = 2x$

2) Sendo dadas as curvas seguintes, determinar para cada uma delas a equação diferencial de menor ordem possível que não contenha nenhuma constante arbitrária.

a) $y = \dfrac{3x^2}{2} - x + 6$

b) $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

c) $y = C_1 x^2 + C_2$

d) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$

## 11.2 - EQUAÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM E PRIMEIRO GRAU

São equações de 1ª ordem e 1º grau:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = F(x, y)} \quad \text{ou} \quad \boxed{Mdx + Ndy = 0}$$

em que M = M(x,y) e N = N(x,y).
Estas funções tem que ser contínuas no intervalo considerado ( - ∞, ∞)

**1⁰ TIPO: EQUAÇÕES DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS.**

Uma equação do tipo Mdx + Ndy = 0 em que M e N pode ser:

a) Funções de apenas uma variável:
b) Produtos com fatores de uma só variável ou
c) Constantes.

é denominada equação de variáveis separáveis.

*Exemplos:* Resolver as seguintes equações:

**1)** $\frac{dy}{dx} = 3x - 1$

**2)** y dx – x dy = 0

**3)** $xdx - \frac{\sqrt{4-x}}{y}dy = 0$

**4)** $tgx.\sec ydx - tgy\sec xdy = 0$

**5)** $(x^2 - 1)\sqrt{1 - y^2}\,dx - x^2 dy = 0$

**6)** (x – 1) dy – y dx = 0

**7)** $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)xy}$

**8)** $(1 + x^2)dy - xydx = 0$

**9)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

**10)** $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 0$

**11)** $(x^2 + a^2)(y^2 + b^2)dx + (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)dy = 0$

**12)** $\sec^2 x \, \text{tg}\, y \, dx + \sec^2 y \, \text{tg}\, x \, dy = 0$

**13)** $a\left(x\dfrac{dy}{dx}+2y\right)=xy\dfrac{dy}{dx}$

**14)** $(1 + x^2)\ y^3\ dx + (1 - y^2)\ x^3\ dy = 0$

## ***AULA 25*** *– EXERCÍCIOS*

Sendo dadas as curvas seguintes, determinar para cada uma delas a equação diferencial de menor ordem possível que não contenha nenhuma constante arbitrária.

**1)** $x^2 + y^2 = C^2$

**2)** $y = C e^x$

**3)** $x^3 = C (x^2 - y^2)$

**4)** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \text{ sen } 2x$

**5)** $y = (C_1 + C_2x) e^x + C_3$

**6)** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$

Resolver as equações abaixo:

**7)** $\frac{1}{x} - tgy.\frac{dy}{dx} = 0$

**8)** $4xy^2 \, dx + (x^2 + 1) \, dy = 0$

**9)** $(2+ y) \, dx - (3 - x) \, dy = 0$

**10)** $xy \, dx - (1 + x^2) \, dy = 0$

**11)** $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2y}}{x^2 + 4}$

***Respostas:***

**1)** $xdx + ydy = 0$

**2)** $\frac{dy}{dx} - y = 0$

**3)** $3y^2 - x^2 = 2xy\frac{dy}{dx}$

**4)** $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

**5)** $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0$

**6)** $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

**7)** $x \cos y = C$

**8)** $2Lg(x^2 + 1) - \frac{1}{y} = C$

**9)** $(2 + y)(3 - x) = C$

**10)** $C y^2 = 1 + x^2$

**11)** $e^{2y} - arctg\frac{x}{2} = C$

# AULA 26

## 11.3 - EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

São as da forma Mdx + Ndy = 0, onde M e N são funções homogêneas em x e y e do mesmo grau.

*Exemplos:*
1) $(x^2 - y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

2) $(2x - y)\,dx - (x + 4y)\,dy = 0$

3) $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$

## ***AULA 26** – EXERCÍCIOS*

1) $(x - y)\,dx - (x + y)\,dy = 0$

2) $(x^2 + y^2)\,dx + (2x + y)y\,dy = 0$

3) $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$

***Respostas:***

**1)** $y^2 + 2xy - x^2 = K$
**2)** $y^3 + 3xy^2 + x^3 = k$
**3)** $LgC_1\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\,\dfrac{y}{x}$

# AULA 27

## 11.4 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS

Uma equação do tipo **M dx + N dy = 0** é denominada diferencial exata, se e somente se:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \rightarrow \text{ condição necessária}$$

$$\boxed{U = \int M dx + \int \left( N - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy = C}$$

onde,

$$P = \int M dx$$

*Exemplos:*

1) $(x^2 - y^2)dx - 2xy\, dy = 0$

2) $(2x - y + 1)\, dx - (x + 3y - 2)\, dy = 0$

3) $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$

## 11.4.1 - FATOR INTEGRANTE:

Quando a expressão *Mdx* + Ndy não é diferencial exata, isto é, $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, mostra-se que há uma infinidade de funções $F(x,y)$, tais que $F(Mdx + Ndy)$ é uma diferencial exata.

A esta função $F(x,y)$, dá-se o nome de **fator integrante**.

***F(x):***

$$R(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$F(x) = c.e^{\int R(x)dx}$$

***F(y):***

$$R(y) = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$F(y) = c.e^{\int R(y)dy}$$

*Exemplos: Resolver as seguintes equações diferenciais transformando em exatas através do fator integrante.*

1) $y^2\,dx + (xy + 1)\,dy = 0$

2) $(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

## <u>AULA 27</u> – EXERCÍCIOS

**1)** $(x^3 + y^2)\,dx + (2xy + \cos y)\,dy = 0$

**2)** $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{dy}{y} = \dfrac{xdy}{y\sqrt{x^2+y^2}}$

**3)** $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$

**4)** senh x.cosy dx = coshx.seny dy

**5)** $e^{-2\theta}(rdr - r^2 d\theta) = 0$

**6)** $(2\cos y + 4x^2)\,dx = x \operatorname{sen} y\,dy$

**7)** $2x \operatorname{tg} y\,dx + \sec^2 y\,dy = 0$

**8)** seny dx + cos y dy = 0

*Encontre a solução particular em:*

**9)** $2xy\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$ para $y(1) = 2$

**10)** $3y^2\,dx + x\,dy = 0$ para $y(1) = 1/2$

***Respostas:***

**1)** $\dfrac{x^4}{4} + y^2x + seny = K$

**2)** $x + \sqrt{x^2+y^2} = K$

**3)** $x^2y = K$

**4)** coshycosy = K

**5)** $e^{-2\theta}r^2 = K$

**6)** $x^2 \cos y + x^4 = C$

**7)** $e^{x^2}tgy = C$

**8)** $seny.e^x = C$

**9)** $y = \sqrt{x^2 + 3x}$

**10)** $y = \dfrac{1}{3\ln x + 2}$

# AULA 28

## 11.5 - EQUAÇÕES LINEARES

Equações lineares são aquelas da forma $\boxed{\frac{dy}{dx} + Py = Q}$ onde P e Q são funções de x ou constantes.

Se Q = 0, a equação é denominada linear homogênea ou incompleta.

***1º Método: Substituição ou de Lagrange***

$$\boxed{y = e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx}.Q.dx + C\right]}$$

***2º Método: Fator Integrante***

Dado $\frac{dy}{dx} + Py = Q$

(Py – Q) dx + dy = 0

multiplica-se tudo por $e^{\int Pdx}$ transformando a equação diferencial em exata.

***Exemplos:***

**1)** Resolver a equação $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x - 2$ por:

a. Lagrange

b. Fator integrante:

**2)** $\dfrac{dy}{dx} - ytgx = senx$

**3)** $(x + \text{sen}y - 1)dy - \cos y.dx = 0$

## AULA 28 – EXERCÍCIOS

**1)** $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}-\dfrac{\cot gx}{x}=0$

**2)** $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+y=arctgx$

**3)** $\dfrac{dy}{dx}=tgx.y+\cos x$

**4)** $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=x$

**5)** $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x}=x^3$

**6)** Achar a solução particular para y = 0 e x = 0 em $\dfrac{dy}{dx}-ytgx=\dfrac{1}{\cos x}$

***Respotas:***

**1)** $y=\dfrac{1}{x}\left[\ln(senx)+C\right]$

**2)** $y=arctgx-1+C.e^{-arctgx}$

**3)** $y=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}sen2x+C_1\right)\sec x$

**4)** $y=Cx+x^2$

**5)** $y=\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{C}{x^2}$

**6)** $y=\dfrac{x}{\cos x}$

# AULA 29

## 11.6 - EQUAÇÃO DE BERNOULLI

Equação da forma: $\boxed{\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n}$ (1) para $n \neq 1$ e $n \neq 0$

Pois, se:

n = 0 $\Rightarrow$ y′ + P(x)y = g(x) $\Rightarrow$ caso anterior

n = 1 $\Rightarrow$ y′ + [P(x) − g(x)] y = 0 $\Rightarrow$ caso anterior e homogênea

Transformação de variável:

Substitui por $\boxed{y^{1-n} = t}$

Deriva-se em relação a x:

$$\boxed{(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}} \quad (2)$$

Substituindo (1), que é:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = Qy^n - Py$$

em (2) temos:

$$(1-n)y^{-n}\left(Qy^n - Py\right) = \frac{dt}{dx}$$

$$\left(1-n\right)\left(Q - Py^{1-n}\right) = \frac{dt}{dx}$$

como $y^{1-n} = t$, temos:

$$(1-n)(Q - Pt) = \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx} + [(1-n)P]t = (1-n)Q$$

Tornando-se assim uma equação linear a ser resolvida pelo método anterior.

***Exemplos:***

**1)** $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = 3xy^2$

**2)** $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = xy^3$

## AULA 29 – EXERCÍCIOS

**1)** $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$

**2)** $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$

**3)** $x\dfrac{dy}{dx} + y = x^3y^3$

**4)** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}$

**5)** $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$

***Respostas:***

**1)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C.e^{x^2}}}$

**2)** $y = \dfrac{1}{\ln(x.e) + Cx}$

**3)** $-2x^3y^2 + C.x^2y^2 = 1$

**4)** $y = x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln x + C\right)^2$

**5)** $y^2 = x.\ln\dfrac{C}{x}$