Série
Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo

Volume 2

Tecnologias educativas
[recurso eletrônico]

geometria analítica e álgebra linear

Eliakim Machado
Nadia Sanzovo
(Organizadores)

Pato Branco
UTFPR Câmpus Pato Branco
2017

Série “Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo”
Volume 2

Tecnologias educativas [recurso eletrônico]:

geometria analítica e álgebra linear

Eliakim Machado
Nadia Sanzovo
(Organizadores)

Pato Branco
UTFPR Câmpus Pato Branco
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

T255

Tecnologias educativas [recurso eletrônico]: geometria analítica e álgebra linear. / Eliakim Machado, Nadia Sanzovo (orgs.). – Pato Branco: UTFPR Câmpus Pato Branco, 2017.

v. 2; iv, 337 p.: Il. – (Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo)

ISBN: 978-85-99584-09-5

1. Tecnologia educacional. 2. Educação – Metodologia. 3. Inovações educacionais. 4. TIC 5. Ensino – Meios auxiliares. I. Machado, Eliakim, org. II. Sanzovo, Nadia, org. III. Título. IV. Série.

CDD (23. ed.) 372.3

Ficha Catalográfica elaborada por
Maria Juçara Vieira da Silveira CRB9/1359
Biblioteca da UTFPR Campus Pato Branco

Organizadores
Eliakim Machado
UTFPR/ Pato Branco – Brasil

Nadia Sanzovo
UTFPR/ Pato Branco – Brasil

Colaboração Científica
Joaquim José Jacinto Escola
UTAD/ Vila Real – Portugal

Colaboração Técnica
Anderson Mendes
Bacharelado em Engenharia da Computação
Felix Penna
Licenciatura em Matemática

Composição e diagramação final
Jorge Jamhour
LabEditor – UTFPR Câmpus Pato Branco

UTFPR Câmpus Pato Branco
Via do Conhecimento, km 01
Pato Branco – PR 85503-390

Série

LABORATÓRIO VIRTUAL E MODELO MULTIPLICADOR POR GRUPO

Perspectivas para o desenvolvimento de competências formativas, utilizando as Tecnologias da Informação e da Comunicação – TIC.

Organização do e-book:

Eliakim Machado

Organização da série:

Nadia Sanzovo – UTFPR/ Pato Branco – Brasil

Colaboração Científica:

Joaquim José Jacinto Escola – UTAD/ Vila Real – Portugal

Colaboração Técnica (Pesquisa, seleção e lincagem de material Web):

Anderson Mendes – Bacharelado em Engenharia da Computação

Felix Penna – Licenciatura em Matemática

Como citar (NBR-6023):

MACHADO, Eliakim; SANZOVO, Nadia. (org.). **Tecnologias educativas [recurso eletrônico]**: geometria analítica e álgebra linear. Série Laboratório Virtual e Modelo Multiplicador por grupo, v. 2. Pato Branco: UTFPR. 2017. 337 p. ISBN: 978-85-99584-09-5 Disponível em: <http://pb.utfpr.edu.br/labvirtual/inicio.html>. Acesso em: dd mmm AAAA.

Apresentação

Pensar a educação em todos os níveis na Sociedade Digital significa fazer mudanças, reestruturações curriculares, de espaços e tempos da aprendizagem, de modo a aproveitar o potencial humano de quem ensina, aprende e investiga, utilizando para tal as melhores pedagogias e tecnologias disponíveis.

A emergência de uma nova cultura digital, aliada à evolução tecnológica permite à educação, nesta proposta, educação regular, aliar as possibilidades tanto da educação a distância –EAD – quanto da presencial, em regime colaborativo e em rede.

Este volume e-book – Geometria Analítica e Álgebra Linear – faz parte da Série “LABORATÓRIO VIRTUAL E MODELO MULTIPLICADOR POR GRUPO” que tem por finalidade dar suporte aos estudantes dos cursos que contemplam a disciplina e/ou disciplinas da área de Cálculo em suas matrizes curriculares na graduação.

Ele apresenta os conhecimentos mínimos que são considerados essenciais no estudo do tema. Isto não significa que o estudante deva estar restrito somente ao estudo do volume, mas ao contrário, ele é tão somente o ponto de partida na busca de um conhecimento mais amplo e aprofundado sobre o assunto. Assim como os demais volumes da série apresenta uma bibliografia, com indicação de obras impressas e obras virtuais que deverão ser consultadas à medida que se fizer necessário.

As listas de exercício, propostas por cada professor, auxiliarão o estudante a tornar-se mais autônomo, responsável, crítico, capaz de desenvolver sua independência intelectual. Caso ela mostre que as competências e habilidades indicadas nos objetivos não foram alcançadas, ele deverá estudar com mais afinco e atenção o tema proposto, reorientar seus estudos ou buscar ajuda dos monitores, professores, especialistas e colegas numa perspectiva de metodologia ativa colaborativa.

As “aulas inseridas” facilitam o entendimento do texto – o que é imprescindível quando se almeja a formação de uma visão espacial na Geometria Analítica e, desde que Salman Khan colocou suas vídeo aulas pelo YouTube e se tornou um professor assistido mais de 280 milhões de vezes, a metodologia da sala de aula invertida tem se tornado cada vez mais popular. Oferecer, pois, aos estudantes recursos para que tenham contato com a teoria primeiro, de casa, e deixar para a sala de aula os momentos de discussão e de aprendizado mais profundo pode contribuir para que a aprendizagem seja mais efetiva.

Críticas e sugestões hão de surgir e serão sempre bem-vindas para que a obra possa ser atualizada e adaptada às reais necessidades dos estudantes!

Pato Branco, outono de 2017.

Os organizadores!

Sumário

CORPOS **10**

CAPÍTULO 01: MATRIZES **11**

1.1 INTRODUÇÃO 11

1.2 TIPOS DE MATRIZES 13

1.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES 17

1.4 MATRIZES INVERTÍVEIS 21

CAPÍTULO 02: SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES **25**

2.1 INTRODUÇÃO 25

2.2 EQUAÇÕES LINEARES 25

2.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES 27

2.4 OPERAÇÕES ELEMENTARES 31

2.5 FORMA ESCADA 32

2.6 TIPOS DE SOLUÇÕES (SPD, SPI E SI) 36

2.7 SOLUÇÃO DE UM SISTEMA PELA MATRIZ INVERSA 41

2.8 SISTEMAS HOMOGÊNEOS 42

CAPÍTULO 03: SISTEMAS DE COORDENADAS **45**

3.1 INTRODUÇÃO 45

3.2 PRODUTO CARTESIANO 45

3.3 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO 46

3.4 SISTEMA DE COORDENADAS NO ESPAÇO 48

CAPÍTULO 04: VETORES **50**

4.1 INTRODUÇÃO 50

4.2 CONCEITOS BÁSICOS.. 50

4.3 SEGMENTOS EQUIPOLENTES.. 53

4.4 VETOR 55

4.5 SOMA DE VETORES.. 57

4.6 MULTIPLICAÇÃO DE ESCALAR POR VETOR... 60

4.7 VETORES COLINEARES 64

4.8 VETORES COPLANARES 64

4.9 ÂNGULO ENTRE VETORES 64

CAPÍTULO 05: VETORES EM $\mathbb{R}2$ **E** $\mathbb{R}3$ **66**

5.1 INTRODUÇÃO 66

5.2 DECOMPOSIÇÃO DE UM VETOR NO PLANO.. 66

5.3 EXPRESSÃO ANALÍTICA EM $\mathbb{R}2$ 68

5.4 IGUALDADE E OPERAÇÕES 69

5.5 VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS 70

5.6 NORMA DE UM VETOR NO PLANO.. 71

5.7 DECOMPOSIÇÃO DE UM VETOR NO ESPAÇO 72

5.8 EXPRESSÃO ANALÍTICA EM $\mathbb{R}3$ 73

5.9 IGUALDADE E OPERAÇÕES 73

5.10 VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS... 74

5.11 NORMA DE UM VETOR NO ESPAÇO 74

5.12 CONDIÇÃO DE PARALELISMO ENTRE VETORES 75

CAPÍTULO 06: DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR.................................. **76**

6.1 INTRODUÇÃO 76

6.2 RESULTADOS COMPLEMENTARES 76

6.3 CONCEITOS GEOMÉTRICOS DE DEPÊNDENCIA E INDEPENDÊNCIA 78

6.4 CONCEITOS ALGÉBRICOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA 79

CAPÍTULO 07: BASE 90

7.1 INTRODUÇÃO 90

7.2 OPERAÇÕES SEGUNDO AS COORDENADAS 91

7.3 ANALISANDO A DEPENDÊNCIA PELAS COORDENADAS 92

7.4 ORTOGONALIDADE...96

CAPÍTULO 08: PRODUTO ESCALAR 98

8.1 INTRODUÇÃO 98

8.2 PROJEÇÃO ORTOGONAL 113

CAPÍTULO 09: PRODUTO VETORIAL.. 119

9.1 INTRODUÇÃO 119

9.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO VETORIAL.....................................127

CAPÍTULO 10: PRODUTO MISTO 133

10.1 INTRODUÇÃO 133

10.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO MISTO...137

CAPÍTULO 11: RETA... 140

11.1 INTRODUÇÃO 140

11.2 RETAS PARALELAS AOS PLANOS OU AOS EIXOS COORDENADOS..148

11.3 ÂNGULO ENTRE RETAS..154

11.4 POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS 159

11.5 INTERSEÇÃO ENTRE DUAS RETAS 162

CAPÍTULO 12: PLANO 164

12.1 INTRODUÇÃO 164

12.2 DETERMINAÇÃO DE UM PLANO 167

12.3 PLANOS PARALELOS AOS EIXOS E AOS PLANOS COORDENADOS..172

12.4 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO 177

12.5 ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS 179

12.6 ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO 182

12.7 INTERSEÇÃO ENTRE DOIS PLANOS...186

12.8 INTERSEÇÃO ENTRE RETA E PLANO 187

12.9 INTERSEÇÃO DE PLANO COM OS EIXOS E OS PLANOS COORDENADOS..............................188

CAPÍTULO 13: CÔNICAS 190

13.1 INTRODUÇÃO 190

13.2 TRANSLAÇÃO DE EIXOS...190

13.3 A PARÁBOLA...191

13.4 A ELIPSE..204

13.5 A HIPÉRBOLE 215

CAPÍTULO 14: ESPAÇOS VETORIAIS.. 228

14.1 INTRODUÇÃO 228

14.2 ESPAÇOS VETORIAIS 228

14.3 SUBESPAÇOS VETORIAIS 235

14.4 COMBINAÇÃO LINEAR 246

14.5 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR 249

14.6 BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL 253

14.7 MUDANÇA DE BASE 265

CAPÍTULO 15: TRANSFORMAÇÕES LINEARES 274

15.1 INTRODUÇÃO 274

15.2 RESULTADOS E CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES 281

15.3 MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES LINEARES 294

CAPÍTULO 16: AUTOVALORES E AUTOVETORES 307

16.1 INTRODUÇÃO 307

16.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ 312

CAPÍTULO 17: PRODUTO INTERNO 323

17.1 INTRODUÇÃO 323

17.2 COEFICIENTES DE FOURIER 327

17.3 NORMA 329

17.4 ÂNGULO ENTRE VETORES 333

17.5 PROCESSO DE ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT 336

CORPOS

Definição: Um conjunto $\mathbb{K} \neq \phi$ munido das operações: "+" chamada de *soma* e "·", chamada de *produto,* é um ***corpo*** se as seguintes propriedades são válidas:

S1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$. Esta propriedade recebe o nome de *associativa da soma*.

S2) $x + y = y + x$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$. Esta propriedade recebe o nome de *comutativa da soma*.

S3) Existe $z \in \mathbb{K}$ tal que $x + z = z + x = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{K}$. O elemento z é chamado de *elemento neutro da soma*. Além disso, podemos denotar $z = 0$.

S4) Para qualquer $x \in \mathbb{K}$, existe $w \in \mathbb{K}$ tal que $x + w = w + x = 0$. O elemento w é chamado de *oposto aditivo* de x. Além disso, podemos denotar $w = -x$.

P1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$. Esta propriedade recebe o nome de *associativa do produto*.

P2) $x \cdot y = y \cdot x$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{K}$. Esta propriedade recebe o nome de *comutativa do produto*.

P3) Existe $r \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot r = r \cdot x = x$, qualquer que seja $x \in \mathbb{K}$. O elemento r é chamado de *elemento neutro do produto*. Além disso, podemos denotar $r = 1$.

P4) Para qualquer $x \in \mathbb{K}$, com $x \neq 0$, existe $u \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot u = u \cdot x = 1$. O elemento u é chamado de inverso multiplicativo de x. Além disso, podemos denotar $u = x^{-1}$.

D) $z \cdot (x + y) = (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathbb{K}$. Esta propriedade recebe o nome de *distributiva do produto em relação à soma*.

Observação: Denotamos um corpo por $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Uma terna composta pelo conjunto e suas duas operações.

CAPÍTULO 01: MATRIZES

1.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é revisar o conteúdo matrizes. Vamos estudar os tipos de matrizes, transposição, operações com matrizes e matrizes invertíveis.

Basicamente, devemos abordar este conteúdo devido ao fato de que podemos simplificar e organizar uma grande variedade de problemas utilizando as matrizes.

Chamamos de *matriz* uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, vamos considerar a tabela abaixo que dispõem dados como altura, peso e idade de determinadas pessoas.

	Altura (m)	Peso (kg)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Podemos omitir o significado de cada linha e cada coluna, e escrevermos:

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

Uma matriz composta por 4 linhas e 3 colunas. Ainda podemos dizer que esta é uma matriz $4{\times}3$.

Os locais onde aparecem os números dispostos na matriz são chamados de *entradas* da matriz. As entradas podem ser números reais, números complexos, funções, ou até mesmo matrizes.

Alguns exemplos de matrizes são:

$$\begin{bmatrix} \ln 10 & \sin\dfrac{\pi}{4} \\ -1 & 10^{10} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-i & e^{\pi i} \\ \cos 45^o + i \cdot \sin 45^o & 0 \\ -2i & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que estamos usando colchetes para denotar as matrizes, mas ainda podemos usar as notações dos seguintes exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 6 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Representa-se uma matriz de m linhas e n colunas ($m \times n$) por:

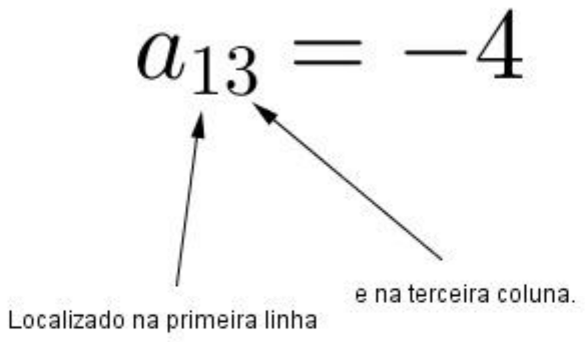
$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}.$$

Quando nos referirmos a matrizes, usaremos sempre letras maiúsculas para denota-las. Por exemplo, denotamos uma matriz A de m linhas e n colunas por $A_{m\times n}$.

Para a localização de elementos, dizemos a linha e em seguida a coluna (respeitando esta ordem) deste elemento. Vejamos o seguinte exemplo.

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

O elemento -4 está localizado na primeira linha e na terceira coluna, e escrevemos $a_{13} = -4$.



Em geral, o elemento a_{ij} está localizado na $i - ésima$ linha e na $j - ésima$ coluna.

Ainda na matriz A do exemplo, temos: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = -3$ e $a_{23} = 2$.

1.1.1 Definição: Duas matrizes $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$ são *iguais* se:

i. Elas possuírem o mesmo número de linhas ($m = r$);

ii. Elas possuírem o mesmo número de colunas ($n = s$);

iii. Os elementos das entradas correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

Denotamos a igualdade entre tais matrizes por $A = B$.

1.2 TIPOS DE MATRIZES

Nesta seção, vamos estudar algumas matrizes com características especiais. O que torna essas matrizes especiais, é a existência de algumas propriedades particulares que podem ser exploradas, seja pelo número de linhas e colunas ou pela natureza dos elementos em suas entradas.

1.2.1 Matriz Quadrada: Diz-se que uma matriz $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ é *quadrada* se $m = n$, isto é, se o número de linhas é igual ao número de colunas.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ e $B = [-8]$ são matrizes quadradas, pois o número de linhas e colunas de A é 2, enquanto o número de linhas e colunas de B é 1.

Observação: Dizemos que a matriz com m linhas e m colunas $A_{m \times m}$ é, simplesmente, uma *matriz quadrada de ordem* m.

1.2.2 Matriz Nula: Uma matriz é *nula* se $a_{ij} = 0$, para quaisquer i e j.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & \sin \pi & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & \tan 0 & 0 \\ 0 & \log 1 & 0 \\ 0 & 0^{101} & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes nulas, pois para todo i e j em A e B, tem-se $a_{ij} = 0$.

1.2.3 Matriz Coluna: Uma matriz $A_{m \times n}$ é chamada de *matriz coluna* se $n = 1$, isto é, se o número de colunas é igual a 1.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -10 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x \\ y + x \end{bmatrix}$ são exemplos de matriz coluna.

1.2.4 Matriz Linha: Uma matriz $A_{m \times n}$ é chamada de *matriz linha* se $m = 1$, isto é, se o número de linhas é igual a 1.

Exemplos:

$A = [1 \quad a]; a \in \Re$ e $B = [9]$ são matrizes linha.

Observações:

01. Denotamos o conjunto de todas as matrizes $m{\times}n$ com entradas em um corpo $(\mathbb{K},+,\cdot)$ por $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. No caso em que $m=n$, denotamos $M_n(\mathbb{K})$.

02. Consideramos uma matriz A de ordem m. A *diagonal* da matriz A é formada pelos elementos a_{ij}, onde $i=j$. Na matriz quadrada abaixo destacamos sua diagonal:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 \\ -3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -0{,}1 \end{bmatrix}$$

$a_{11}=1$, $a_{22}=-6$ e $a_{33}=-0{,}1$ formam a diagonal da matriz A.
É importante lembrar que somente matrizes quadradas possuem diagonal.

03. O *traço* de uma matriz quadrada é uma função $Tr: M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ que associa uma matriz quadrada A de ordem n a soma dos elementos da diagonal de A. Isto é:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow Tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1.2.5 Matriz Diagonal: Uma matriz quadrada é chamada de *matriz diagonal* se $a_{ij}=0$ para todo $i\neq j$, isto é, se todos os elementos que não estão na diagonal são nulos.

Exemplos:

$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{bmatrix}$ são exemplos de matriz diagonal.

1.2.6 Matriz Identidade: Uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são iguais a 1 é chamada de *matriz identidade*. Resumindo, uma matriz diagonal com $a_{ij} = 1$, para todo $i = j$, é chamada de matriz identidade.

Exemplos:

$A = [1]$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são exemplos de matriz identidade. A é a matriz identidade de ordem 1, enquanto B é a matriz identidade de ordem 3.

1.2.7 Matriz Triangular Superior: Uma matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, recebe o nome de *matriz triangular superior*. Ou ainda, uma matriz é triangular superior se $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são matrizes triangular superior.

1.2.8 Matriz Triangular Inferior: Uma matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos, recebe o nome de matriz *triangular inferior*. Ou ainda, uma matriz é triangular inferior se $a_{ij} = 0$, para todo $i < j$.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & -\pi & 6 \end{bmatrix}$ são matrizes triangular inferior.

1.2.9 Matriz Simétrica: Uma matriz quadrada é *simétrica* se $a_{ij} = a_{ji}$, para quaisquer i e j.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$ são matrizes simétricas.

1.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Parte 2 Parte 3

Nesta seção vamos estudar as operações: adição, produto por escalar, transposição de matrizes, multiplicação de matrizes e suas decorrentes propriedades.

1.3.1 Adição (soma): Sejam $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n}$ matrizes. A matriz *soma* de A e B, denotada por $A + B$, é uma matriz de ordem $m\times n$ tal que suas entradas são resultantes da soma das entradas correspondentes de A e B. Isto é, $A + B$ é tal que:

$$(A+B)_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}.$$

<u>Exemplo</u>:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \pi & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$, então:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \pi & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\pi & -4+1 \\ 3+2 & 5+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\pi & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 1+\pi & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3.1.1 Propriedades: Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem $m\times n$. Então as seguintes propriedades são válidas:

i. $A + B = B + A$ (comutatividade);

ii. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade);

iii. $A + 0 = A$ (elemento neutro aditivo).

Observação: O elemento 0 que aparece na propriedade iii é a matriz nula de ordem $m\times n$. Podemos ainda denotar esta matriz por $0_{m\times n}$.

1.3.2 Multiplicação por escalar: Seja $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$ uma matriz e k um número (real ou complexo) que chamaremos de escalar. Definimos a *multiplicação escalar* de k por A, como sendo a matriz $k\cdot A$, de ordem $m\times n$, tal que:

$$(k\cdot A)_{m\times n} = [k\cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -14 \\ 3 & 0 & 25 \end{bmatrix}$ e $k = 4$, então:

$$k\cdot A = 4\cdot \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -14 \\ 3 & 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot(-2) & 4\cdot 2 & 4\cdot 1 \\ 4\cdot(-3) & 4\cdot 6 & 4\cdot(-14) \\ 4\cdot 3 & 4\cdot 0 & 4\cdot 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -12 & 24 & -56 \\ 12 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow k\cdot A = \begin{bmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -12 & 24 & -56 \\ 12 & 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

1.3.2.1 Propriedades: Sejam A e B matrizes de ordem $m\times n$ e k, k_1 e k_2 escalares. As seguintes propriedades são válidas:

i. $k(A+B) = kA + kB$;

ii. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$;

iii. $0\cdot A = 0_{m\times n}$;

iv. $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$.

Observação: A propriedade iii nos diz que, ao multiplicarmos uma matriz A de ordem $m\times n$ pelo escalar zero (real ou complexo), vamos obter como resultado a matriz nula de ordem $m\times n$.

1.3.3 Transposição de matrizes: Dada uma matriz $A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$, podemos obter uma matriz $A'_{n\times m} = [b_{ij}]_{n\times m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A' é chamada de *matriz transposta* de A.

Exemplos:

01. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, então $A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$.

02. Seja $B = [0 \quad \pi \quad -e]$, então $B' = \begin{bmatrix} 0 \\ \pi \\ -e \end{bmatrix}$.

1.3.3.1 Propriedades:

i. Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual a sua transposta, isto é, se, e somente se $A = A'$.

ii. $A'' = A$, isto é, a transposta da transposta é igual a própria matriz.

iii. $(A+B)' = A' + B'$, isto é, a transposta da soma é igual à soma das transpostas.

iv. $(kA)' = kA'$, k escalar.

1.3.4 Multiplicação de matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n\times p}$. Definimos a *multiplicação* $A \cdot B = [c_{uv}]_{m\times p}$, onde:

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}b_{kv} = a_{u1}b_{1v} + a_{u2}b_{2v} + \cdots + a_{un}b_{nv}.$$

Observações:

01. Só podemos efetuar a multiplicação de duas matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{r\times s}$ se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, isto é, se $n = r$. A matriz $A \cdot B$ terá ordem $m\times s$.

02. O elemento c_{ij} é obtido multiplicando os elementos da $i-ésima$ linha da primeira matriz pelos elementos correspondentes da $j-ésima$ coluna da segunda matriz, e somando estes produtos.

<u>Exemplos</u>:

01. Sejam $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\4 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 4\end{bmatrix}$. Observe que o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, portanto podemos realizar a multiplicação de A por B. Além disso, como temos $A_{3\times 2}$ e $B_{2\times 2}$, a matriz $A\cdot B$ terá ordem 3×2. Calculamos então $A\cdot B$:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot(-1)+1\cdot 4\\4\cdot 1+2\cdot 0 & 4\cdot(-1)+2\cdot 4\\5\cdot 1+3\cdot 0 & 5\cdot(-1)+3\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\4 & 4\\5 & 7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 2\\4 & 4\\5 & 7\end{bmatrix}.$$

02. Considere $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-2 & 3 & -1\\5 & 4 & 0\\0 & 1 & -5\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\-1 & 0 & 1\\2 & -2 & -3\end{bmatrix}$. Efetuamos a multiplicação:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}1\cdot 1+0\cdot(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot(-2) & 1\cdot 4+0\cdot 1+2\cdot(-3)\\-2\cdot 1+3\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & -2\cdot 2+3\cdot 0+(-1)\cdot(-2) & -2\cdot 4+3\cdot 1+(-1)\cdot(-3)\\5\cdot 1+4\cdot(-1)+0\cdot 2 & 5\cdot 2+4\cdot 0+0\cdot(-2) & 5\cdot 4+4\cdot 1+0\cdot(-3)\\0\cdot 1+1\cdot(-1)+(-5)\cdot 2 & 0\cdot 2+1\cdot 0+(-5)\cdot(-2) & 0\cdot 4+1\cdot 1+(-5)\cdot(-3)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+0+4 & 2+0-4 & 4+0-6\\-2-3-2 & -4+0+2 & -8+3+3\\5-4+0 & 10+0+0 & 20+4+0\\0-1-10 & 0+0+10 & 0+1+15\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -7 & -2 & -2 \\ 1 & 10 & 24 \\ -11 & 10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -7 & -2 & -2 \\ 1 & 10 & 24 \\ -11 & 10 & 16 \end{bmatrix}.$$

1.3.4.1 Propriedades:

i. Em geral $A \cdot B \neq B \cdot A$, mesmo que um dos produtos não possa ser realizado;

ii. $A \cdot I = I \cdot A = A$, onde I é a matriz identidade. Como I é uma matriz quadrada, digamos que de ordem n, para que a multiplicação esteja definida, A deve possuir n colunas;

iii. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

iv. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

v. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

vi. $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$;

vii. $A \cdot 0 = 0$ e $0 \cdot A = 0$;

viii. $A \cdot B = 0$ não implica que $A = 0$ ou $B = 0$.

1.4 MATRIZES INVERTÍVEIS

Parte 2

Nesta seção, temos como objetivo definir matriz inversa, estudar algumas propriedades e métodos para a determinação de uma matriz inversa.

1.4.1 Matriz Inversa: Uma matriz quadrada A de ordem n admite uma *matriz inversa* se, existe uma matriz B de ordem n tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$, onde I é a matriz identidade de ordem n. Denotamos a matriz B inversa de A por $B = A^{-1}$.

Quando uma matriz não possui inversa, dizemos que esta matriz é *singular*.

1.4.2 Proposição: A inversa de uma matriz quadrada é única.

Prova: Seja A uma matriz quadrada e suponha que A possui duas matrizes inversas B e C.

Como B e C são inversas de A, temos por definição que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

$$A \cdot C = C \cdot A = I$$

Assim, temos:

$$B = B \cdot I = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$$

$$\Rightarrow B = C.$$

Portanto, a matriz inversa de A e única.

1.4.3 Propriedades:

i. A matriz identidade I de ordem n é invertível.

ii. Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} é invertível. Além disso, $(A^{-1})^{-1} = A$.

iii. Se A e B são matrizes invertíveis, então a matriz $A \cdot B$ também é invertível. Além disso, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

iv. Se A é invertível, então A' é invertível. Além disso, $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

Observação: Algumas das propriedades serão demonstradas em aula.

1.4.4 Teorema: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Para que A seja invertível é necessário e suficiente que $\det(A) \neq 0$.

Usamos o teorema acima para evitar que façamos cálculos desnecessários e tentemos determinar a inversa de uma matriz singular.

1.4.5 Algoritmo para calcular a inversa de uma matriz: Seja A uma matriz invertível. Determinamos a matriz A^{-1} usando o seguinte procedimento:

1. Construir uma matriz ampliada da forma $[A|I]$.

2. Usando operações elementares na matriz ampliada, devemos converter a matriz A na matriz identidade I. No final do processo obtemos uma matriz ampliada da forma $[I|A^{-1}]$.

Vejamos um exemplo para determinar a inversa de uma matriz.

<u>Exemplo</u>:

Consideramos a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Note que:

$$\det(A) = \left|\begin{matrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{matrix} = 0 - 3 + 5 - 2 + 0 - 6 = -6 \neq 0$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0.$$

$\det(A) \neq 0$ implica que a matriz A é invertível. Agora, usamos o algoritmo para determinar A^{-1}.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L3 \to L1 - L3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L3 \to L2 + L3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L2\to 2\cdot L2+L3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1\end{array}\right]\xrightarrow{L1\to 3\cdot L1-L2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & -3 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 6 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L1\to -3\cdot L3+2\cdot L1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}6 & 0 & 0 & -9 & 1 & 5\\ 0 & 6 & 0 & 3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1\end{array}\right]\xrightarrow[L3\to -\frac{1}{2}\cdot L3]{L1\to\frac{1}{6}\cdot L1,\ L2\to\frac{1}{6}\cdot L2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right]=[I|A^{-1}]$$

Desta forma, obtemos:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

CAPÍTULO 02: SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos sistemas de equações lineares. Os principais pontos abordados neste capítulo serão: equações lineares, soluções de equações lineares, sistemas de equações lineares, solução de sistemas de equações lineares, sistemas de equações lineares com duas ou mais incógnitas, sistemas equivalentes, operações elementares, tipos de sistemas e sistemas homogêneos.

2.2 EQUAÇÕES LINEARES

2.2.1 Definição: Uma *equação linear* nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, onde $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo, é uma expressão da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Onde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ são chamados de coeficientes e $b \in \mathbb{K}$ é chamado de termo independente da equação.

Exemplos:

01. A equação $2x_1 + x_2 - x_3 = 5$ é uma equação linear nas incógnitas x_1, x_2, x_3.

02. As equações $x_1 - 2x_2^2 + x_3 + x_4^3 + 12x_5^2 - 1 = 0$ e $\sqrt{2}x^2 + y = \cos x$ não são equações lineares.

2.2.2 Solução de uma equação linear: Uma equação linear $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ sobre $\mathbb{K}$, com pelo menos um dos $a_i \neq 0$, sempre possui solução. Uma

$n - upla$ $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ é uma *solução* da equação linear $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$ se $a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = b$.

Por exemplo, supondo que $a_i \neq 0, i = 1, \dots, n$, temos em particular $a_n \neq 0$. Logo, como $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ é um corpo, a_n possui inverso multiplicativo a_n^{-1}. Então:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \Leftrightarrow a_n^{-1}a_1x_1 + \cdots + a_n^{-1}a_nx_n = a_n^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow x_n = a_n^{-1}b - a_n^{-1}a_1x_1 - \cdots - a_n^{-1}a_{n-1}x_{n-1}.$$

Portanto $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a_n^{-1}b - a_n^{-1}a_1x_1 - \cdots - a_n^{-1}a_{n-1}x_{n-1})$ é uma solução da equação.

Em geral:

$$S = \{(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, a_n^{-1}b - a_n^{-1}a_1s_1 - \cdots - a_n^{-1}a_{n-1}s_{n-1}); s_1, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^n.$$

É o conjunto solução da equação.

<u>Exemplos</u>:

01. Considere a equação $2x + y = 2$. Note que uma solução para esta equação é o par $(1,0) \in \Re^2$. Outra solução é o par $(0,2) \in \Re^2$. É fácil perceber que existem infinitas soluções para a equação $2x + y = 2$. Fazendo:

$$2x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - 2x.$$

Portanto, o conjunto solução da equação $2x + y = 2$ é:

$$S = \{(x, 2 - 2x); x \in \Re\} \subset \Re^2.$$

02. Considere a equação $\sqrt{3}x_1 + 2x_2 - e^3x_3 = -2$. Fazendo:

$$\sqrt{3}x_1 + 2x_2 - e^3x_3 = -2 \Leftrightarrow e^3x_3 = 2 + \sqrt{3}x_1 + 2x_2$$

$$\Leftrightarrow x_3 = 2e^{-3} + \sqrt{3}e^{-3}x_1 + 2e^{-3}x_2.$$

Portanto, o conjunto solução da equação $\sqrt{2}x_1 + 2x_2 - e^3x_3 = -2$ é:

$$S = \{(x_1, x_2, 2e^{-3} + \sqrt{3}e^{-3}x_1 + 2e^{-3}x_2); x_1, x_2 \in \Re\} \subset \Re^3.$$

2.3 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.3.1 Definição: Um *sistema de equações lineares* com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k = b_1 \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}x_k = b_m \end{cases}.$$

Onde a_{ij} $(1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n)$ são elementos de um corpo.

<u>Exemplos</u>:

01. O conjunto de equações $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + y - 4z = -1 \end{cases}$ é um sistema de equações lineares composto por 3 equações e 3 incógnitas. Podemos ainda dizer que este é um sistema 3×3.

02. Se uma das equações em um sistema não for uma equação linear, então este sistema não é um sistema de equações lineares.

2.3.2 Solução de um sistema de equações lineares: Considere o sistema de equações lineares $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$. Uma $n-upla$ $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$ é *solução do sistema* se esta $n-upla$ satisfaz simultaneamente todas as equações deste sistema.

Exemplo:

A terna $(1,2,3)$ é solução do sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$. Observe que:

Tomando $(1,2,3)$ em $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$ temos:

$$2 \cdot (1) + (2) - (3) = 1.$$

A primeira equação é satisfeita pela terna.

Tomando $(1,2,3)$ em $x_1 - x_2 - x_3 = -4$ temos:

$$(1) - (2) - (3) = -4.$$

A segunda equação é satisfeita pela terna.

Tomando $(1,2,3)$ em $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$ temos:

$$3 \cdot (1) - 2 \cdot (2) + (3) = 2.$$

A terceira equação é satisfeita pela terna,

Logo, por definição, $(1,2,3)$ é solução do sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$.

Por outro lado, a terna $(-1,2,1)$ não é solução do sistema. Embora $(-1,2,1)$ satisfaça a segunda equação, o mesmo não ocorre para as outras equações do sistema.

2.3.2.1 Sistemas Equivalentes: Dois sistemas de equações lineares são *equivalentes* se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Exemplo:

Os sistemas de equações lineares $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ 4x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$ são sistemas equivalentes (verifique!). Indicamos a equivalência dos sistemas por:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_2 + x_3 = 9 \\ 4x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}.$$

2.3.3 Sistemas e matrizes: Podemos escrever o sistema de equações lineares $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ na *forma matricial*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = B.$$

Onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Dizemos que A é a *matriz dos coeficientes*, X é a *matriz das incógnitas* e B é a *matriz dos termos independentes*.

Podemos ainda representar o sistema acima pela *matriz ampliada*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz ampliada é composta pelos coeficientes de cada equação, juntamente com os termos independentes.

Exemplo:

O sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ em sua forma matricial é dado por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ou ainda, podemos escrever a matriz ampliada associada ao sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Observação: Note que, escrevemos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Devido ao fato de que, ao realizarmos a multiplicação $A \cdot X$ e usando a definição de igualdade entre matrizes, teremos exatamente o conjunto das equações do sistema.

2.4 OPERAÇÕES ELEMENTARES

São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz. A seguir, veremos estas operações e alguns exemplos.

2.4.1 Permuta das $\boldsymbol{i-ésima}$ e $\boldsymbol{j-ésima}$ linhas ($\boldsymbol{Li \leftrightarrow Lj}$): Consiste em "trocar de lugar" a $i-ésima$ linha pela $j-ésima$ linha.

Exemplo:

Façamos $L2 \leftrightarrow L3$ na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

.

2.4.2 Multiplicação da $\boldsymbol{i-ésima}$ linha por um escalar não nulo ($\boldsymbol{Li \to k \cdot Li}$): Consiste em multiplicar a $i-ésima$ linha de uma matriz por um escalar $k \neq 0$, onde $k \in \mathbb{K}$.

Exemplo:

Façamos $L2 \to -3 \cdot L2$ na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \to -3 \cdot L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.4.3 Substituição da $\boldsymbol{i-ésima}$ linha pela $\boldsymbol{i-ésima}$ linha mais $\boldsymbol{k}$ vezes a $\boldsymbol{j-ésima}$ linha ($\boldsymbol{Li \to Li + k \cdot Lj}$): Pensemos que, para usar esta operação, devemos trocar uma linha da matriz por ela própria somada com uma linha "múltipla" de outra linha presente na matriz.

Exemplo:

Façamos $L3 \rightarrow L3 + 2 \cdot L1$ na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$. Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 \rightarrow L3+2 \cdot L1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.4.4 Definição: Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é *linha equivalente* a A, se B é obtida através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A. Podemos denotar $A \rightarrow B$ ou $A \sim B$.

2.4.5 Teorema: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

2.5 FORMA ESCADA

2.5.1 Definição: Uma matriz $m \times n$ é *linha reduzida à forma escada* se:

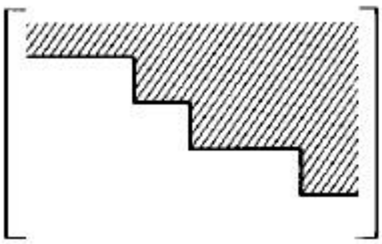
i. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;

ii. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais à zero;

iii. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;

iv. Se as linhas $1, 2 \ldots, r$ são linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

A condição (iv) impõe a forma escada à matriz:



Isto é, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, se houver.

<u>Exemplos</u>:

01. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ não é uma matriz linha reduzida à forma escada. Note que a condição (ii) não é satisfeita, pois $a_{33} = 1$ é o primeiro elemento não nulo da linha 3, mas o restante de elementos da coluna 3 não são nulos.

02. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é uma matriz linha reduzida à forma escada, as condições (i) e (iv) não são satisfeitas. A condição (i) diz que o primeiro elemento não nulo de cada linha deve ser igual a 1, note que o primeiro elemento não nulo da linha 1 é igual a 2. Já a linha 2 possui elemento não nulo na coluna 1, enquanto a linha 1 possui elemento não nulo na coluna 2, o que não corresponde a condição exigida em (iv).

03. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ não é uma matriz linha reduzida à forma escada, as condições (i) e (iii) não são satisfeitas. Na linha 3, note que o primeiro elemento não nulo é igual a -1, logo (i) não é satisfeita. Existe uma linha nula (linha 2) acima de uma linha não nula (linha 3), portanto (iii) não é satisfeita.

04. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha reduzida à forma escada.

2.5.2 Teorema: Toda matriz $A_{m \times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida à forma escada.

2.5.3 Definição: Seja $A_{m\times n}$ uma matriz e $B_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A. O *posto* de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B. A *nulidade* de A é o número $n-p$.

Observamos que, para determinar o posto de uma matriz, devemos encontrar sua matriz linha reduzida à forma escada, assim o posto de A será o número de linhas não nulas presentes na matriz escada. Para determinar a nulidade, fazemos a diferença entre o número de colunas de A e o posto de A.

Exemplos:

01. Vamos determinar o posto e a nulidade de $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 5\\ 1 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Primeiramente, usando operações elementares, vamos determinar a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a matriz A.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 3 & 5\\ 1 & -2 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[L3\to L3-L1]{L2\to L2+L1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 4 & 5\\ 0 & -4 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{L2\to\frac{1}{2}\cdot L2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2}\\ 0 & -4 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3\to L3+4\cdot L2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 8 & 11\end{bmatrix}\xrightarrow{L3\to\frac{1}{8}\cdot L3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8}\end{bmatrix}\xrightarrow[L1\to L1-L3]{L2\to L2-2\cdot L3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & -\frac{11}{8}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L1\to L1-2\cdot L2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8}\end{bmatrix}.$$

E temos a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A. Por definição, temos que o posto de A é $p=3$ e a nulidade é $4-3=1$.

Note que, se a matriz A acima for associada à matriz ampliada de um sistema, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 3z = 5 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}.$$

A matriz escada obtida é equivalente a matriz A e, pelo Teorema 2.4.5, o sistema associado a matriz A será equivalente ao sistema associado a matriz escada. Logo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 3z = 5 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = -\dfrac{7}{8} \\ y = -\dfrac{1}{4} \\ z = \dfrac{11}{8} \end{cases}.$$

Onde $\begin{cases} x = -\frac{7}{8} \\ y = -\frac{1}{4} \\ z = \frac{11}{8} \end{cases}$ é o sistema associado à matriz escada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} \end{bmatrix}$.

Note que, ao determinarmos a matriz escada equivalente a matriz ampliada do sistema, encontramos a solução de tal sistema.

02. A matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{bmatrix}$ é equivalente a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{14}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que é a matriz linha reduzida à forma escada. Temos o posto $p = 2$ e a nulidade $3 - 2 = 1$.

Novamente, associando as matrizes a sistemas de equações lineares, temos:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \\ x - 5y = 1 \\ 4x + 16y = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \dfrac{14}{9} \\ y = \dfrac{1}{9} \end{cases}.$$

Este é o caso de um sistema com equações redundantes, ou seja, a terceira e a quarta equações podem ser "desconsideradas". Isto significa que o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 4y = 2 \end{cases}.$$

Podemos ainda dizer que as duas primeiras equações são independentes e as demais são dependentes.

Observação: É muito importante perceber o que o posto de uma matriz ampliada de um sistema nos fornece o número de equações independentes do mesmo.

2.6 TIPOS DE SOLUÇÕES (SPD, SPI E SI)

Um sistema de equações lineares pode ser classificado da seguinte maneira:

Sistema Possível Determinado (SPD): Dizemos que um sistema é SPD se este possui solução única.

Sistema Possível Indeterminado (SPI): Dizemos que um sistema é SPI quando este possui infinitas soluções.

Sistema Impossível (SI): Dizemos que um sistema é SI quando este não possui solução.

2.6.1 Sistema $\boldsymbol{ax = b}$: Se tivermos um sistema de uma equação e uma incógnita $ax = b$, são três as possibilidades:

i. Se $a \neq 0$, então a equação possui uma única solução, que é:

$$x = \frac{b}{a}.$$

ii. Se $a = b = 0$, então a equação possui infinitas soluções, pois qualquer que seja o valor de x, teremos:

$$0 \cdot x = 0.$$

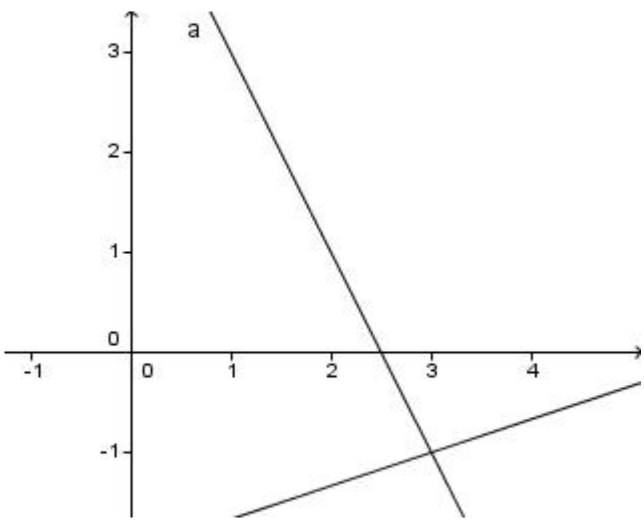
iii. Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então a equação não possui solução, pois não existe valor de x que satisfaça:

$$0 \cdot x = b.$$

2.6.2: Análise de sistemas de duas equações e duas incógnitas: Façamos tal analise utilizando exemplos práticos, e em seguida formalizaremos para casos mais gerais.

Exemplos:

01. Consideramos o sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$. Note que, cada uma das equações representa a equação de uma reta no plano, observe:



A solução deste sistema é o par $(x_1, x_2) \in \Re^2$ que satisfaz as duas equações simultaneamente. Geometricamente, devemos encontrar o ponto do plano que é comum às duas retas, ou seja, queremos encontrar a interseção destas retas. É fácil perceber que a solução será $(3, -1)$.

Note que $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ é a matriz ampliada do sistema. Agora, vamos "transformar" esta matriz em sua matriz equivalente na forma escada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \to L2 - 2 \cdot L1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \to \frac{1}{7} \cdot L2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

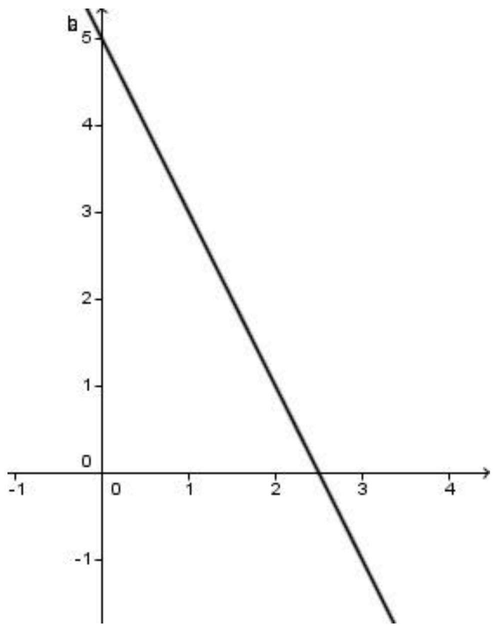
$$\xrightarrow{L1 \to L1 + 3 \cdot L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema equivalente ao sistema inicial, é o sistema associado a matriz escada obtida acima. Temos:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}.$$

Obtemos a solução $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$. Podemos ainda observar que o posto da matriz ampliada do sistema é $p = 2$ e a nulidade é $3 - 2 = 1$. Este é o caso de um sistema possível determinado.

02. Consideramos o sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 15 \end{cases}$. Note que as duas equações representam duas retas coincidentes no plano. Observe:



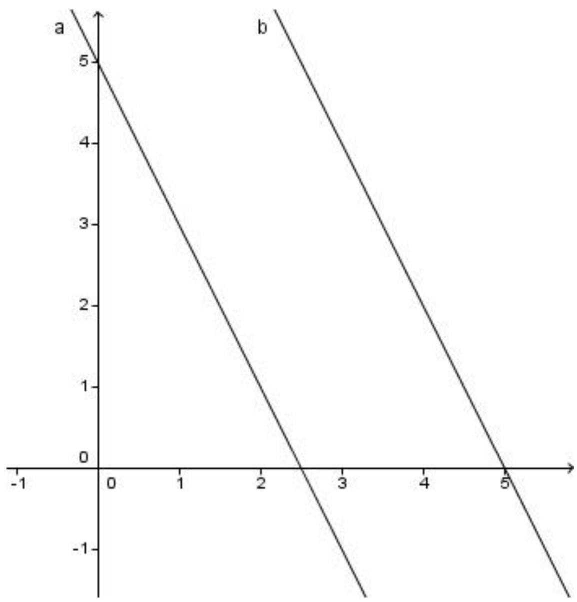
Geometricamente, qualquer ponto de uma das retas pertence à outra.

A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{bmatrix}$ e sua matriz equivalente na forma escada é $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto o sistema equivalente ao sistema inicial é:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y = \dfrac{5}{2} \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}.$$

Logo a segunda equação pode ser desconsiderada, pois não estabelecemos nenhuma condição sobre x ou y. Assim, a solução do sistema é obtida atribuindo-se valores a uma das incógnitas e em seguida determina-se o valor da outra incógnita. Por exemplo, sem escrevermos $y = 5 - 2x$, ao atribuirmos valores para x, encontramos valores consequentes para y. Este sistema admite infinitas soluções. Este é um caso de um sistema possível indeterminado.

03. Seja $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$ um sistema 2×2. Geometricamente, tem-se:



Note que, as equações representam duas retas paralelas, isto é, as retas em questão não possuem nenhum ponto em comum. Ainda podemos dizer que não existe $(x, y) \in \Re^2$ tal que x e y satisfaçam as equações simultaneamente. A matriz ampliada do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ e sua matriz escada equivalente é $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto, temos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{2}y = 0 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases}.$$

Não existem valores de x e y que satisfaçam a segunda equação. Assim, o sistema inicial não possui solução. Este é um caso de um sistema impossível.

2.6.3 Caso Geral: Consideramos um sistema de equações lineares $m \times n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Onde os coeficientes a_{ij} e b_i são elementos de um corpo. Este sistema poderá ter:

i. Uma única solução (SPD);

ii. Infinitas soluções (SPI);

iii. Nenhuma solução (SI).

2.6.4 Teorema:

i. Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii. Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii. Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

Dizemos no caso iii que o grau de liberdade do sistema é $n - p$. Denotamos o posto da matriz ampliada por p_a e o posto da matriz dos coeficientes de p_c. Se $p_c = p_a$, denotamos $p_c = p_a = p$.

<u>Exemplos</u>:

01. Na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ temos $n = 3$ e $p_c = p_a = p = 3$, note que $p = 3 = n$, segue pelo Teorema que a solução do sistema associado a esta matriz será única.

02. Na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ temos $n = 3$ e $p_c = p_a = p = 2$, também $p = 2 < 3 = n \Rightarrow p < n$ logo o sistema é SPI com grau de liberdade $n - p = 3 - 2 = 1$, ou seja, uma incógnita é livre e as outras duas dependem desta.

03. Na matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ temos $n = 3$, $p_c = 2$ e $p_a = 3$. Note que $p_c = 2 \neq 3 = p_a \Rightarrow p_c \neq p_a$ e, portanto, o sistema associado a esta matriz é SI.

2.7 SOLUÇÃO DE UM SISTEMA PELA MATRIZ INVERSA

Seja $A \cdot X = B$ a forma matricial de um sistema de equações lineares de m equações e m incógnitas e suponha que existe a matriz A^{-1} inversa de A. Temos que:

$$A \cdot X = B \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Portanto $X = A^{-1} \cdot B$ é solução do sistema $A \cdot X = B$.

2.8 SISTEMAS HOMOGÊNEOS

2.8.1 Definição: Um sistema de equações lineares $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ é chamado de *sistema homogêneo* se $b_1 = \cdots = b_n = 0$.

Na forma matricial, o sistema $A \cdot X = B$ é homogêneo se $B = 0$, onde 0 é a matriz nula de ordem $m{\times}1$ ($O_{m\times 1}$).

<u>Observação</u>: Todo sistema homogêneo possui pelo menos uma solução, chamamos esta de *solução trivial* ou *solução nula* X_0. Onde:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou ainda, podemos pensar na solução como sendo a $n-upla$ $(x_1, \dots, x_n) = (0,0, \dots, 0)$.

<u>Exemplos</u>:

01. O sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ é um sistema homogêneo e tem, como única solução, a solução $(0,0)$.

02. O sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ é homogêneo. Note que $(0,0,0)$ é uma solução deste sistema, porém não é única. Pois:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \to L2 - L1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L2 \to \frac{1}{2} \cdot L2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L1 \to L1 + L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Temos o sistema equivalente ao sistema inicial $\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases}$. Logo:

$$x=-z, y=0 \; e \; z \in \Re.$$

O conjunto solução do sistema é $S=\{(-z,0,z); z \in \Re\}$, isto é, a cada valor atribuído para z teremos uma solução. Portanto, este sistema possui infinitas soluções, ou seja, este é um SPI.
Isto acontece, por que se trata de um sistema 2×3, ou seja, um sistema com número de incógnitas maior do que o número de equações.

2.8.2 Teorema: Se um sistema de equações lineares homogêneo tem mais incógnitas do que equações, então existe uma solução não trivial.

Prova: Seja o sistema homogêneo na forma matricial $A \cdot X = 0$, onde A é uma matriz $m\times n$ com $m<n$ (isto quer dizer que o número de incógnitas é maior do que o número de equações).

Como um sistema homogêneo é sempre possível, pelo item i do Teorema 2.6.4 temos que $p_c = p_a = p$. E como o sistema possui mais incógnitas do que equações, obviamente $p<n$, segue então pelo item iii do Teorema 2.6.4 que o sistema possui grau de liberdade $n-p$ e p incógnitas dependentes das incógnitas livres, ou seja, este sistema é possível e indeterminado, portanto possui uma solução não trivial.

2.8.3 Propriedade: Se X_h é uma solução do sistema homogêneo $A \cdot X = 0$, então $\alpha \cdot X_h$ também é solução, onde $\alpha \in \mathbb{K}$ ($(\mathbb{K},+,\cdot)$ é um corpo).

Demonstração: Para mostrar que $\alpha \cdot X_h$ é uma solução do sistema homogêneo, basta mostrar que $A \cdot (\alpha \cdot X_h) = 0$. De fato:

$$A \cdot (\alpha \cdot X_h) = \alpha \cdot (A \cdot X_h) \ldots (1)$$

Da hipótese, sabemos que X_h é solução do sistema, ou seja, $A \cdot X_h = 0$. Daí, em (1) temos:

$$A \cdot (\alpha \cdot X_h) = \alpha \cdot (A \cdot X_h) = \alpha \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow A \cdot (\alpha \cdot X_h) = 0.$$

A igualdade acima nos diz que $\alpha \cdot X_h$ é solução do sistema, que é o desejado.

Como vimos anteriormente, o sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ tem como solução qualquer $S = \{(-z, 0, z); z \in \Re\}$. Note que $(-1,0,1)$ é uma solução do sistema, e consequentemente $(-2,0,2)$, $(-10,0,10)$ também.

2.8.4 Propriedade: Se X_1 e X_2 são soluções do sistema homogêneo $A \cdot X = 0$, então $X_1 + X_2$ também é solução.

2.8.5 Teorema: Qualquer combinação linear de soluções de um sistema homogêneo também é solução.

CAPÍTULO 03: SISTEMAS DE COORDENADAS

3.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é estudar o produto cartesiano entre conjuntos e fazer uma revisão sobre sistemas de coordenadas no plano e no espaço.

3.2 PRODUTO CARTESIANO

3.2.1 Definição: Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \neq \phi$ e $B \neq \phi$. Definimos o *produto cartesiano* entre A e B, denotado por $A \times B$, como sendo o conjunto $A \times B = \{(x, y); x \in A \ e \ y \in B\}$.

Observações:

01. Se $A = \phi$ ou $B = \phi$, o produto cartesiano de A por B é $A \times B = \phi$. Em outras palavras, se um dos conjuntos for vazio, então o produto cartesiano entre eles é vazio.

02. Se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$.

03. $A \times A = A^2$.

04. Se A possui m elementos e B possui n elementos, então $A \times B$ possui $m \cdot n$ elementos.

05. Denotaremos a quantidade de elementos de um conjunto A por $card(A)$. No caso em que A possui n elementos, temos $card(A) = n$.

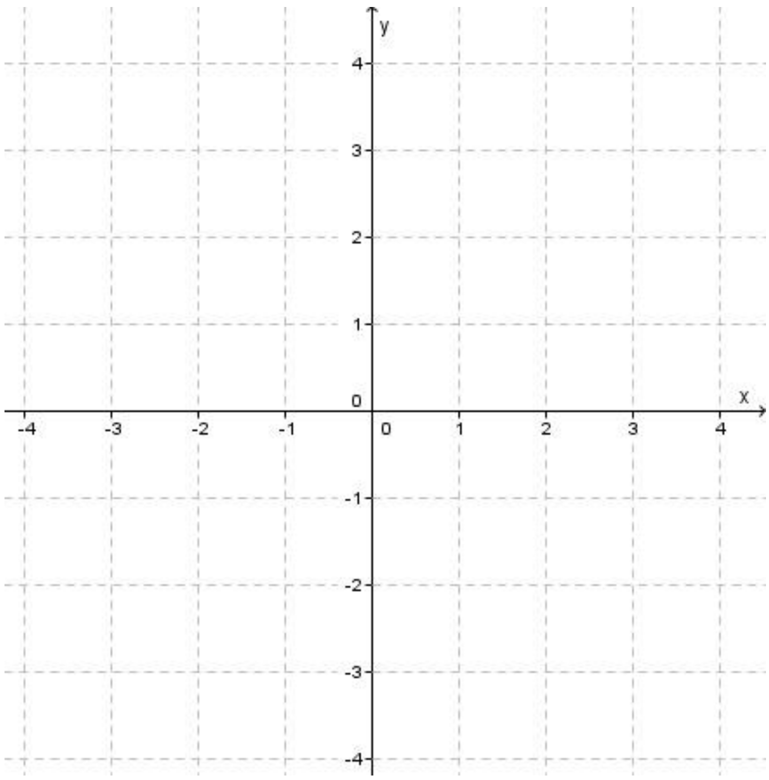
06. Reescrevemos a observação 04 por: $card(A) = m$ e $card(B) = n \Rightarrow Card(A \times B) = card(A) \cdot card(B) = m \cdot n$.

Exemplo:

Sejam $A = \{-1,0,2,3\}$ e $B = \{3,5\}$. O produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto $A \times B = \{(-1,3), (-1,5), (0,3), (0,5), (2,3), (2,5), (3,3), (3,5)\}$. Note que, como A possui 4 elementos e B possui 2 elementos, de acordo com a observação 04, $A \times B$ possui $4 \cdot 2 = 8$ elementos.

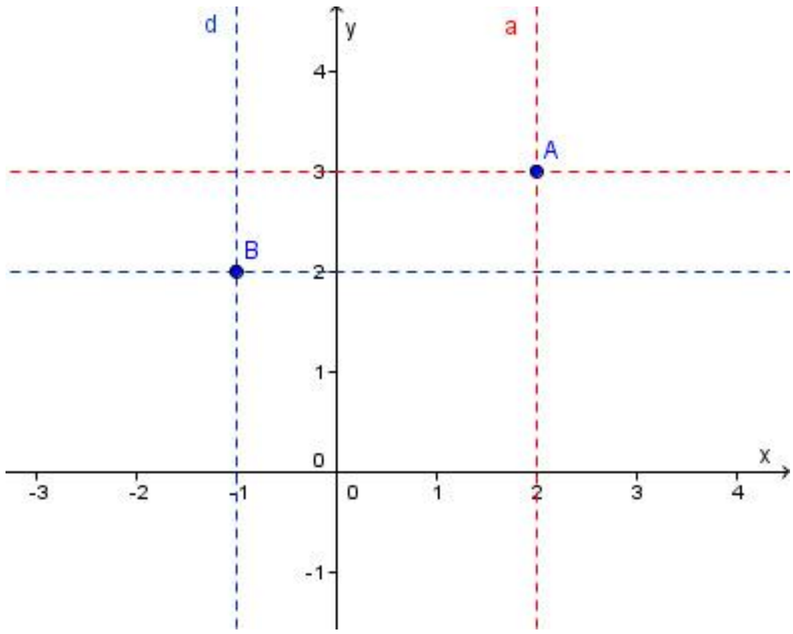
3.3 SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO

O sistema formado por um ponto do plano O chamado de origem e pelos eixos perpendiculares X e Y cuja interseção é o ponto O, onde ambos os eixos são retas que representam o conjunto dos números reais $\Re$, recebe o nome de *plano cartesiano* ou *sistema de coordenadas cartesianas no plano*.



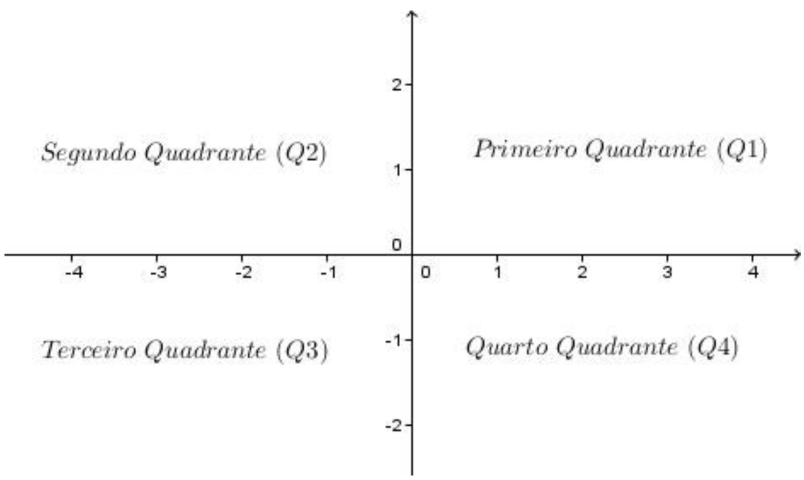
O sistema de coordenadas cartesianas no plano é o produto cartesiano $\Re \times \Re$, isto é, $\Re^2 = \{(x, y); x \in \Re \; e \; y \in \Re\}$.

Exemplo:



Na representação acima, o ponto A tem coordenadas $x = 2$ e $y = 3$, ou seja, $A = (2,3)$. O ponto B tem coordenadas $x = -1$ e $y = 2$, ou seja, $B = (-1,2)$.

3.3.1 Quadrantes: Os eixos X e Y dividem o plano em quatro semiplanos, cada um destes semiplanos recebe o nome de *quadrante*.



Considerando um ponto $P = (x, y)$ no plano, com relação ao sistema de coordenadas, temos:

i. $P \in Q1$ se $x > 0$e $y > 0$;

ii. $P \in Q2$ se $x < 0$ e $y > 0$;

iii. $P \in Q3$ se $x < 0$ e $y < 0$;

iv. $P \in Q4$ se $x > 0$ e $y < 0$.

v. Se $x = 0$, P está sobre o eixo Y.

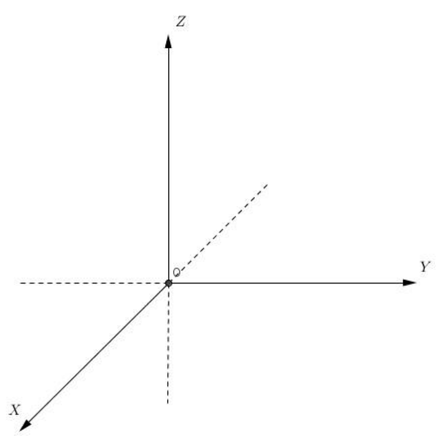
vi. Se $y = 0$, P está sobre o eixo X

3.3.2 Distância entre pontos no plano: Dados os pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ no plano. A *distância* entre os pontos A e B, denotada por $d(A, B)$, é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

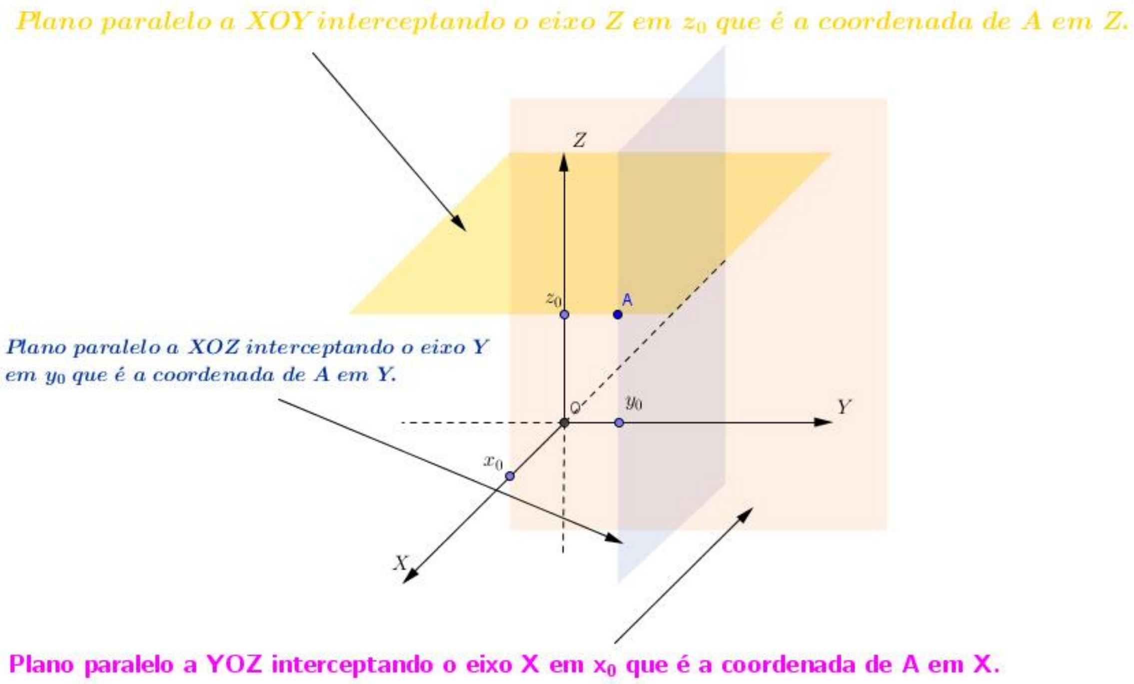
3.4 SISTEMA DE COORDENADAS NO ESPAÇO

O sistema formado por um ponto do espaço O chamado de origem e pelos eixos ortogonais X, Y e Z cuja interseção é o ponto O, onde estes eixos são retas que representam o conjunto dos números reais $\Re$, recebe o nome de *sistema de coordenadas cartesianas no espaço*.



O sistema de coordenadas cartesianas no espaço é o produto cartesiano $\Re\times\Re\times\Re$, isto é, $\Re^3 = \{(x, y, z); x \in \Re, y \in \Re \; e \; z \in \Re\}$.

Exemplo:



Na representação acima o ponto A tem coordenadas $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$, ou seja, $A = (x_0, y_0, z_0)$.

3.4.1 Octantes: Os eixos X, Y e Z dividem o espaço em oito semiespaços, cada um destes semiespaços recebe o nome de oct*ante*.

3.4.2 Distância entre pontos no espaço: Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ pontos do espaço. A *distância* entre os pontos A e B é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

CAPÍTULO 04: VETORES

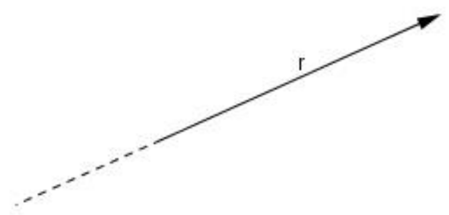
4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos vetores através de uma abordagem tendendo à geometria. Porém, no decorrer do semestre, veremos que podemos estudar vetores de uma maneira mais abstrata.

A partir de agora, nosso ambiente de estudo será o espaço tridimensional, denotado por E^3. Mais tarde veremos que estamos trabalhando no sistema $\Re^3$, porém, por enquanto digamos que este ambiente seja simplesmente E^3.

4.2 CONCEITOS BÁSICOS

4.2.1 Reta Orientada: Uma reta r é dita *orientada* quando nela fixamos um sentido de percurso, considerado positivo, e indicado por uma seta.



O sentido oposto é chamado de *sentido negativo*.

4.2.2 Segmento Orientado: Um *segmento orientado* é determinado por um par de pontos, onde o primeiro ponto é chamado de origem do segmento e o segundo é chamado de extremidade do segmento.

Sendo A a origem e B a extremidade, denotamos este segmento orientado por (A, B) (note que devemos levar em consideração a ordem em que dispomos os pontos). Geometricamente, este segmento é representado por uma seta, de acordo com a figura abaixo.

4.2.2 Segmento Nulo: Um segmento é considerado *nulo* se sua extremidade coincide com a origem.

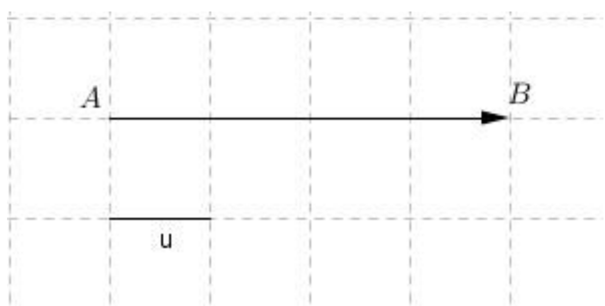
4.2.3 Segmento Oposto: Sendo (A, B) um segmento orientado, o segmento (B, A) é chamado de *segmento oposto* de (A, B).

4.2.4 Medida de um segmento: Ao fixarmos uma unidade de comprimento padrão, a cada segmento orientado pode-se associar um número real não negativo, que é a *medida do segmento* em relação à unidade considerada.

Chamamos a medida de um segmento de comprimento ou módulo. Denotamos o comprimento do segmento (A, B) por $\overline{AB}$.

Exemplo:

Considere o segmento (A, B) e a unidade de medida u na figura abaixo.



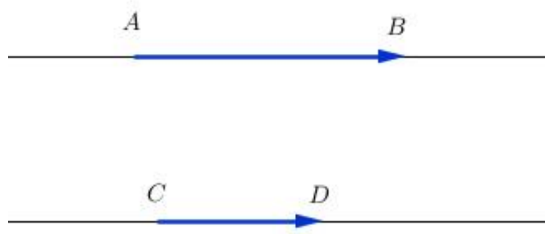
Neste caso, temos $\overline{AB} = 4u$.

Observações:

01. Qualquer segmento nulo tem comprimento igual à zero.

02. $\overline{AB} = \overline{BA}$, isto é, qualquer segmento e seu segmento oposto terão mesmo comprimento.

4.2.5 Direção e Sentido: Dois segmentos (A, B) e (C, D) possuem mesma *direção* se, suas retas suporte são paralelas ou coincidentes. Ainda podemos dizer que (A, B) e (C, D) possuem mesma direção se $AB // CD$.



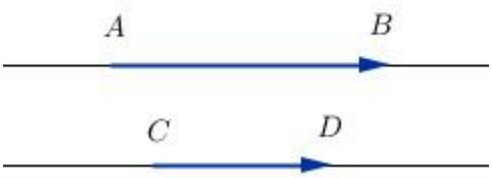
As retas suporte de AB e CD são paralelas.

As retas suporte de AB e CD são coincidentes.

Observação: Para compararmos o sentido de dois segmentos, estes devem possuir mesma direção.

Na figura abaixo, os segmentos (B, A) e (C, D) possuem sentido contrário (note que (B, A) e (C, D) possuem mesma direção).

Na figura abaixo, os segmentos (A, B) e (C, D) possuem mesmo sentido.

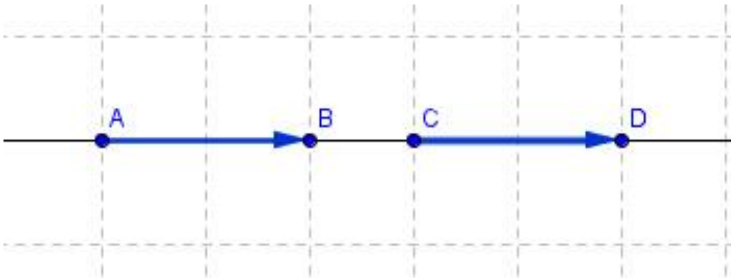


4.2.6 Definição: Dizemos que os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o *mesmo comprimento* se os segmentos AB e CD têm o mesmo comprimento.

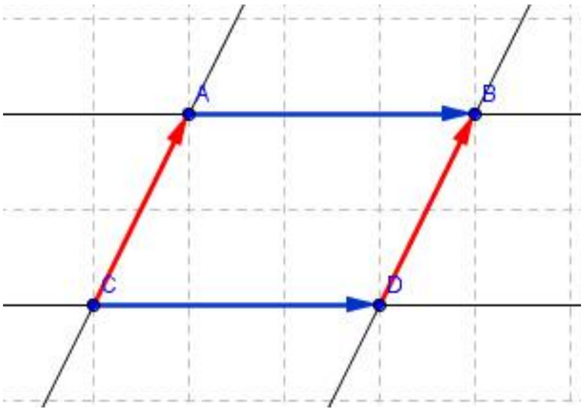
Observação: Dois segmentos opostos possuem sentidos contrários.

4.3 SEGMENTOS EQUIPOLENTES

Dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) são *equipolentes* se estes possuem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.



Se os segmentos (A,B) e (C,D) não pertencem a mesma reta, para que (A,B) seja equipolente a (C,D) devemos ter $(A,B)//(C,D)$ e $(A,C)//(B,D)$, isto é, $ABCD$ deve ser um paralelogramo.



<u>Observações</u>:

01. Dois segmentos nulos sempre serão equipolentes.

02. Denotamos a equipolência entre os segmentos (A,B) e (C,D) por $(A,B)\sim(C,D)$.

4.3.1 Propriedades: Sejam (A,B), (C,D) e (E,F) segmentos orientados. As seguintes propriedades são válidas:

i. $(A,B)\sim(A,B)$ (reflexiva);

ii. Se $(A,B)\sim(C,D)$, então $(C,D)\sim(A,B)$ (simétrica);

iii. Se $(A,B)\sim(C,D)$ e $(C,D)\sim(E,F)$, então $(A,B)\sim(E,F)$ (transitiva);

iv. Dado um ponto C, existe um único ponto D tal que $(A,B)\sim(C,D)$.

4.4 VETOR

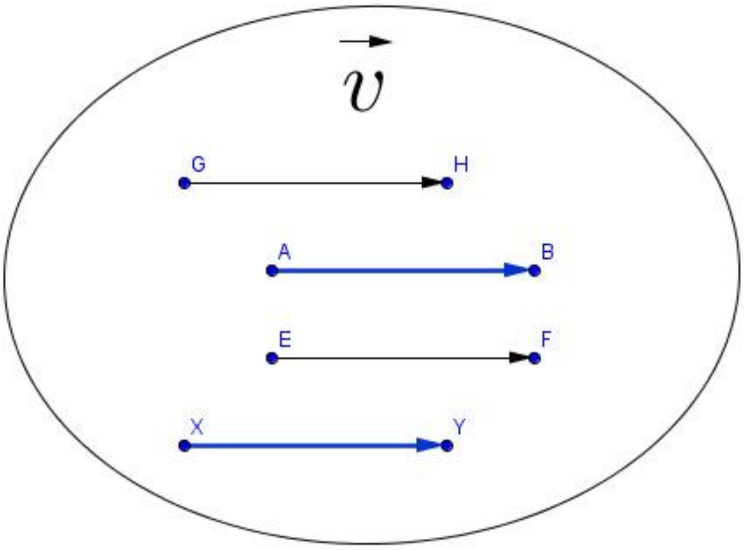
Chamamos de *vetor* determinado por um segmento orientado (A, B) de E^3, o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a (A, B) .

Se denotarmos este conjunto por $\vec{v}$, podemos escrever:

$$\vec{v} = \{(X, Y); (X, Y) \sim (A, B)\}.$$

Ou seja, o vetor $\vec{v}$ é o conjunto dos segmentos orientados (X, Y) tais que $(X, Y) \sim (A, B)$.

Denotamos o conjunto de todos os vetores por V^3.



Ainda podemos denotar o vetor determinado por (A, B) como $\overrightarrow{AB}$, $B - A$ ou $\vec{v}$.

Um vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser determinado por uma infinidade de segmentos orientados, chamados de *representantes* desse vetor, e todos equipolentes entre si. Portanto, um segmento determina um conjunto que é o vetor, e qualquer um dos representantes também determinará este mesmo vetor.

As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas para qualquer um de seus representantes, ou seja, todos os representantes possuem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

Observação: Denotamos o módulo do vetor $\vec{v}$ por $||\vec{v}||$.

4.4.1 Igualdade entre vetores: Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são *iguais* se, e somente se, $(A,B)\sim(C,D)$. Denotamos a igualdade por $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

4.4.2 Vetor Nulo: Os segmentos nulos, por serem equipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado de *vetor nulo*. Denotamos o vetor nulo por $\vec{0}$.

4.4.3 Vetor Oposto: Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é *oposto* de $\overrightarrow{AB}$. Denotamos o oposto de $\overrightarrow{AB}$ por $-\overrightarrow{AB}$ ou $-\vec{v}$.

4.4.4 Norma: A *norma* de um vetor é o comprimento ou o módulo de qualquer um dos representantes deste vetor. Como vimos anteriormente, denotamos a norma de $\vec{v}$ por $||\vec{v}||$.

4.4.5 Vetor Unitário: Se $||\vec{v}|| = 1$, dizemos que $\vec{v}$ é um *vetor unitário*.

4.4.6 Versor: Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$ um vetor. O *versor* de $\vec{v}$ será o vetor unitário de mesma direção e sentido de $\vec{v}$.

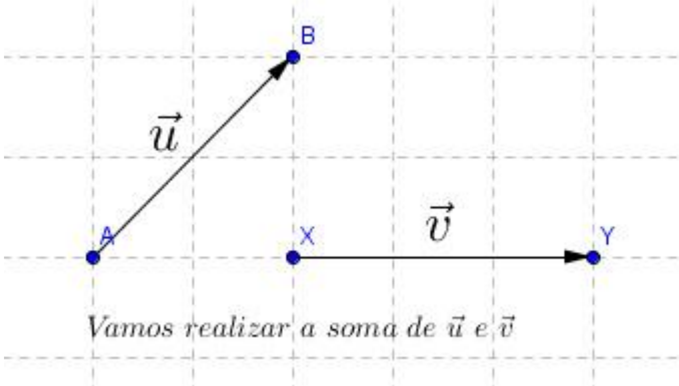
4.4.7 Paralelismo: Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in V^3$, dizemos que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são *paralelos* se um representante de $\vec{x}$ é paralelo a um representante de $\vec{y}$ (logo todos serão paralelos). Denotamos o paralelismo entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ por $\vec{x}//\vec{y}$. Além disso, $\vec{0}$ é paralelo a qualquer vetor.

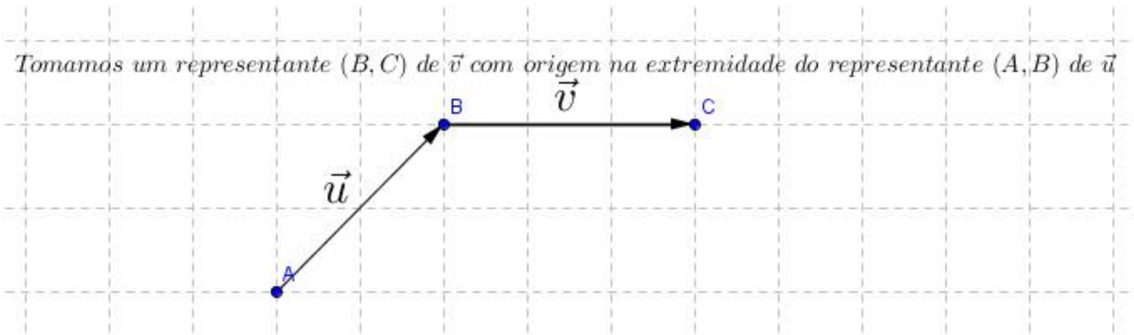
4.5 SOMA DE VETORES

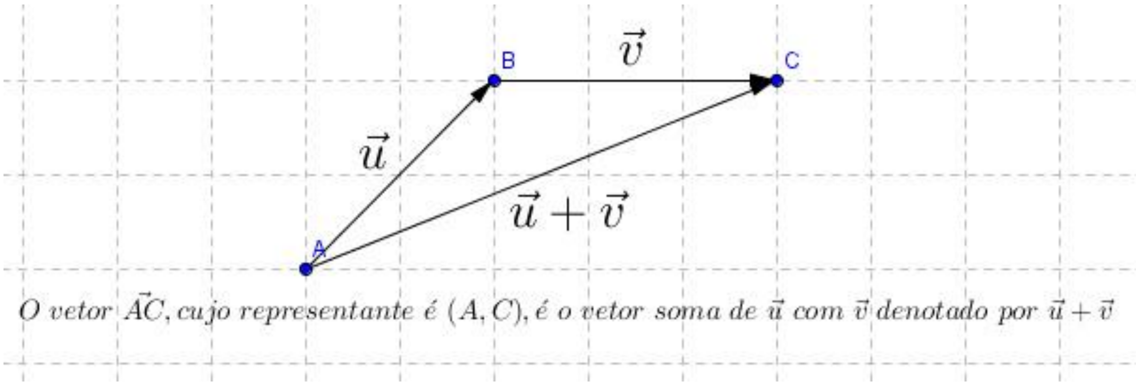
Considerando dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, vamos definir uma operação que associa o par de vetores $(\vec{u}, \vec{v})$ ao vetor denotado por $\vec{u} + \vec{v}$, chamado de vetor *soma* de $\vec{u}$ com $\vec{v}$. Note que aqui, a operação é $+: V^3 \times V^3 \to V^3$, onde $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$.

Tomamos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, isto é, tomando $\vec{u}$ como sendo o vetor determinado pelo segmento AB, $\vec{v}$ será o vetor determinado pelo segmento BC. Note que, $\vec{v}$ pode ser qualquer, porém tomamos um representante com origem no ponto B, isto é, a origem do representante de $\vec{v}$ coincide com a extremidade do representante de $\vec{u}$. O vetor $\overrightarrow{AC}$ será a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Em outras palavras $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, isto é, um representante do vetor soma é o segmento orientado (A, C). A definição de soma pode parecer um pouco confusa, mas veremos que geometricamente tudo fica mais claro.

Consideramos a figura abaixo, para uma melhor visualização.







Observações:

01. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Esta igualdade nos diz que, ao somarmos vetores onde a extremidade (do representante) do primeiro coincide com a origem (do representante) do segundo, o vetor resultante terá um representante com a origem do primeiro e a extremidade do segundo.

02. Ainda podemos usar a *regra do paralelogramo* para determinar a soma de dois vetores.

03. A escolha do representante (A, B) do vetor $\vec{u}$ é arbitrária, mas isso não influi na determinação de $\vec{u} + \vec{v}$. Note que, se escolhermos (A', B') e (B', C') como representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente, teremos $(A, B) \sim (A', B')$, $(B, C) \sim (B', C')$ e daí decorrerá $(A, C) \sim (A', C')$. Para ficar mais claro, faça as devidas representações geométricas.

4.5.1 Propriedades: Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$, as seguintes propriedades são válidas:

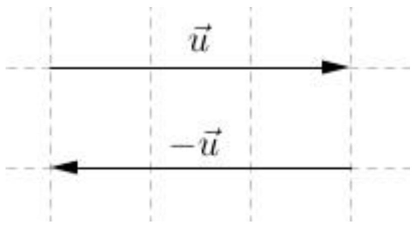
A1. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associativa);

A2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutativa);

A3. $\exists \vec{0} \in V^3$; $\forall \vec{u} \in V^3$ tem-se $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$. Observe que todo representante de $\vec{0}$ possui origem e extremidade coincidentes. Portanto, tomando $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, para realizarmos a soma de $\vec{u}$ com $\vec{0}$, tomamos um representante de $\vec{0}$ com origem na extremidade B de $\vec{u}$, isto é, $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$. Logo $\vec{u} +$

$\vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Esta propriedade garante a existência do elemento neutro para a soma de vetores.

A4. $\forall \vec{u} \in V^3,\ \exists -\vec{u} \in V^3;\ \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$. Tomando $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, seja $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$. Então $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Esta propriedade garante a existência do elemento oposto para a soma de vetores.



A propriedade iv nos permite definir a *subtração* ou *diferença* de vetores. Definimos $\vec{u} - \vec{v}$ em V^3 como sendo:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}), \forall \vec{u}, \vec{v} \in V^3.$$

Vejamos um exemplo onde fazemos o uso de algumas das propriedades.

<u>Exemplo</u>:

Mostre que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \vec{w}$. Em outras palavras, queremos mostrar que vale a "lei do cancelamento" para vetores.

De fato, pela propriedade A4, sabemos que existe $-\vec{u} \in V^3; \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, e somando $-\vec{u}$ na equação $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$, temos:

$$-\vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} + (\vec{u} + \vec{w}) \overset{A1}{\Rightarrow} (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{v} = (-\vec{u} + \vec{u}) + \vec{w}$$

$$\overset{A4}{\Rightarrow} \vec{0} + \vec{v} = \vec{0} + \vec{w} \overset{A3}{\Rightarrow} \vec{v} = \vec{w}$$

$$\therefore \boxed{\vec{v} = \vec{w}}.$$

4.6 MULTIPLICAÇÃO DE ESCALAR POR VETOR

Neste momento, vamos assumir que o corpo em questão é $(\Re, +, \cdot)$, isto é, o conjunto dos números reais munido de suas operações usuais soma e produto. O escalar a ser considerado para esta operação é $k \in \Re$.

Definimos a operação que associa o par $(\alpha, \vec{u})$, onde $\alpha \in \Re$ e $\vec{v} \in V^3$ ao vetor $\alpha\vec{v} \in V^3$, chamada de *multiplicação escalar* de α por $\vec{v}$. Apesar de estarmos denotando o vetor por $\alpha\vec{v}$, ainda podemos escrever $\alpha * \vec{v}$, e dizermos que $*$ é uma operação $*: \Re \times V^3 \to V^3$, onde $(\alpha, \vec{v}) \mapsto \alpha * \vec{v} = \alpha\vec{v}$.

Observações: Sejam $\alpha \in \Re$ e $\vec{u} \in V^3$. Então:

01. Se $\alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{u} = \vec{0}$.

02. Se $\alpha \neq 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, temos:

i. $\alpha\vec{u} // \vec{u}$;

ii. $\alpha\vec{u}$ e $\vec{u}$ tem mesmo sentido se $\alpha > 0$ e sentido contrário se $\alpha < 0$;

iii. $\left|\left|\alpha\vec{u}\right|\right| = |\alpha| \cdot \left|\left|\vec{u}\right|\right|$, isto é, a norma do vetor $\alpha\vec{u}$ é dada pelo produto usual em $\Re$ entre o módulo de α e a norma de $\vec{u}$.

4.6.1 Propriedades: Sejam $\alpha, \beta \in \Re$ e $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, as seguintes propriedades são válidas:

M1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$;

M2. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$;

M3. $1 * \vec{u} = \vec{u}$;

M4. $\alpha * (\beta * \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) * \vec{u}$.

Observações:

01. O conjunto V^3 com as operações soma e multiplicação por escalar acompanhadas de suas propriedades forma um "espaço vetorial". Em Álgebra Linear, veremos a definição geral de um espaço vetorial, para um conjunto e suas operações.

02. Definimos multiplicação por escalar como sendo a multiplicação de um escalar (número real) por vetor. Adiante será definido o produto escalar entre vetores, que é um conceito distinto da multiplicação de escalar por vetor.

03. No conjunto V^3 munido das duas operações definidas até o momento, acompanhadas de suas propriedades, ao fazer cálculos com vetores, podemos seguir as mesmas "regras" de cálculo algébrico elementar. Por exemplo, na equação vetorial $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$, se desejamos determinar $\vec{b}$ em função de $\vec{a}$ e $\vec{c}$, basta somar o oposto de $\vec{a}$ em ambos os lados da igualdade e aplicar as propriedades. Veja:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \overset{A4}{\Rightarrow} -\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\vec{a}+\vec{c} \xRightarrow{A1\ e\ A2} (-\vec{a}+\vec{a})+\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$$

$$\overset{A4}{\Rightarrow} \vec{0}+\vec{b}=\vec{c}-\vec{a} \overset{A3}{\Rightarrow} \boxed{\vec{b}=\vec{c}-\vec{a}}.$$

04. Se $\alpha \neq 0$, $\frac{\vec{v}}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\vec{v}$.

Exemplos:

01. Provemos que $(-\alpha)\vec{v}=-(\alpha\vec{v})$, $\forall\alpha\in\Re$ e $\forall\vec{v}\in V^3$. Nossa "missão" é provar que o vetor $(-\alpha)\vec{v}$ é o oposto aditivo de $\alpha\vec{v}$, ou seja, devemos mostrar que a soma de $(-\alpha)\vec{v}$ com $\alpha\vec{v}$ resulta no vetor $\vec{0}$. De fato:

$$(-\alpha)\vec{v}+\alpha\vec{v}=(-\alpha+\alpha)\vec{v}=0\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow (-\alpha)\vec{v}+\alpha\vec{v}=\vec{0}.$$

Portanto, $(-\alpha)\vec{v}=-(\alpha\vec{v})$.

02. Provemos que $\alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$, $\forall\alpha \in \Re$ e $\forall\vec{v} \in V^3$. Novamente, devemos mostrar que o vetor $\alpha\vec{v}$ é o oposto aditivo de $\alpha\vec{v}$. De fato:

$$\alpha(-\vec{v}) + \alpha\vec{v} = \alpha(-\vec{v} + \vec{v}) = \alpha\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\alpha(-\vec{v}) + \alpha\vec{v} = \vec{0}}.$$

Portanto, $\alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$.

03. Provemos que $(-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}$, $\forall\alpha \in \Re$ e $\forall\vec{v} \in V^3$. Sabemos, pelo Exemplo 01, que $(-\alpha)\vec{x} = -(\alpha\vec{x})$. Logo, aplicando este resultado para o vetor $(-\alpha)(-\vec{v})$, temos:

$$(-\alpha)(-\vec{v}) = -[\alpha(-\vec{v})] \ldots (1)$$

Sabemos também, pelo Exemplo 02, que $\alpha(-\vec{v}) = -(\alpha\vec{v})$. Usando esta informação em (1), temos:

$$(-\alpha)(-\vec{v}) = -[\alpha(-\vec{v})] = -[-(\alpha\vec{v})] = \alpha\vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{(-\alpha)(-\vec{v}) = \alpha\vec{v}}.$$

04. Provemos que se $\alpha\vec{v} = \beta\vec{v}$, com $\alpha, \beta \in \Re$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\alpha = \beta$. De fato:

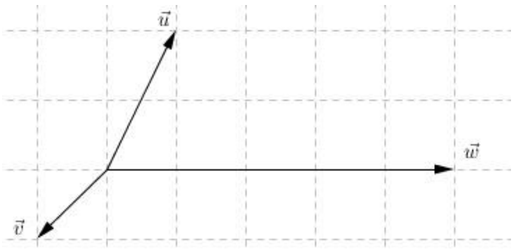
$$\alpha\vec{v} = \beta\vec{v} \Rightarrow \alpha\vec{v} - \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{v} + \big(-(\beta\vec{v})\big) = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{v} + (-\beta)\vec{v} = \vec{0}$$

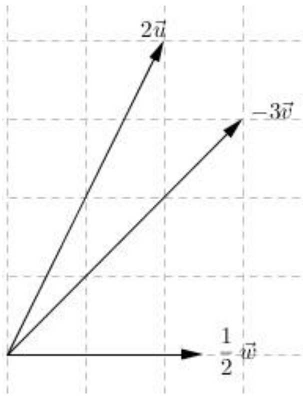
$$\Rightarrow (\alpha - \beta)\vec{v} = \vec{0}.$$

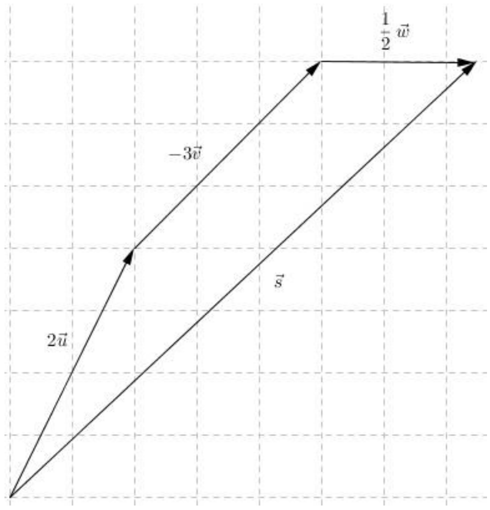
Mas, por hipótese, temos $\vec{v} \neq \vec{0}$. Então a igualdade acima será válida se $\alpha - \beta = 0$. Portanto:

$$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}.$$

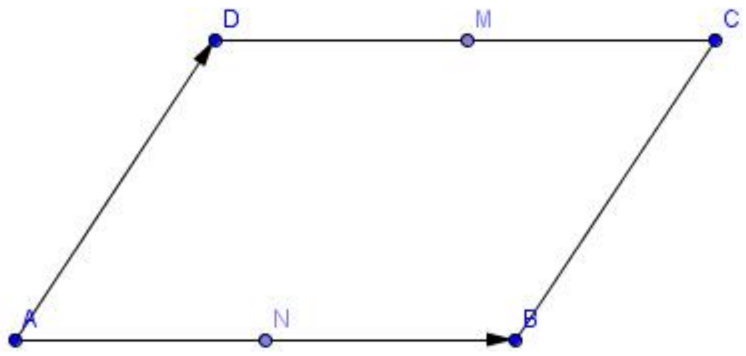
05. Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$, de acordo com a figura, construir o vetor $\vec{s} = 2\vec{u} - -3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.







06. O paralelogramo $ABCD$ é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N pontos médios dos lados DC e AB, respectivamente.



Temos:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$; c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM}$.

4.7 VETORES COLINEARES

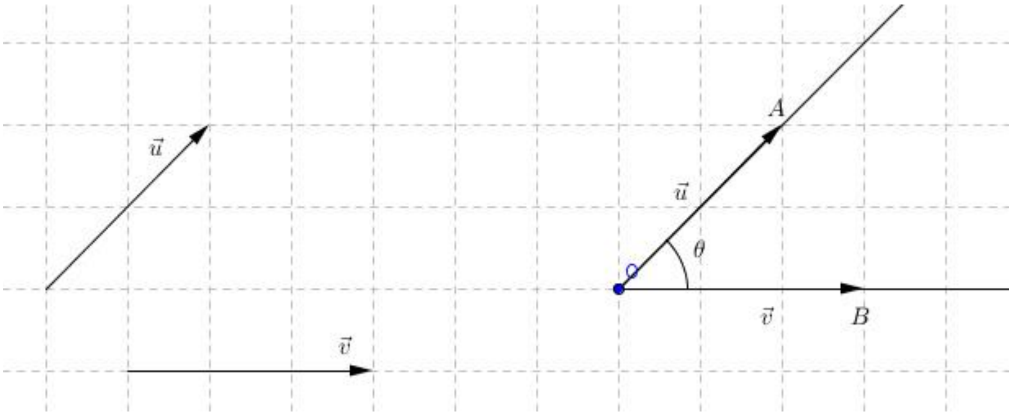
Dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ são *colineares* se possuírem mesma direção. Em outras palavras, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes (A, B) e (C, D), respectivamente, pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.

4.8 VETORES COPLANARES

Os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ são *coplanares* se possuem representantes (A, B), (C, D) e (E, F), respectivamente, pertencentes a um mesmo plano.

4.9 ÂNGULO ENTRE VETORES

Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. O *ângulo* θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o ângulo formado por (O, A) e (O, B) tal que $0 \leq \theta \leq \pi$.



4.9.1 Propriedades: Conhecendo o ângulo entre vetores, podemos fazer algumas afirmações. Seja θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, temos:

i. Se $\theta = \pi$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e sentidos contrários;

ii. Se $\theta = 0$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesma direção e mesmo sentido;

iii. Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores ortogonais. Indicamos a ortogonalidade entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por $\vec{u} \perp \vec{v}$. Além disso, quando $\vec{u} \perp \vec{v}$, a relação $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$ é válida;

iv. $\vec{0} \perp \vec{u}, \forall \vec{u} \in V^3$;

v. Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $m \in \Re$, então $\vec{u} \perp m\vec{v}$;

vi. O ângulo entre $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ é o suplemento do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, se $\phi = \hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v})$, então $\phi = \pi - \theta$.

CAPÍTULO 05: VETORES EM $\Re^2$ e $\Re^3$

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, temos como objetivo, relacionar vetores com pontos dos sistemas de coordenadas cartesianas.

Observação: Para cada caso, faremos analogia entre vetores no plano e no espaço. Embora estivéssemos acostumados a estudar vetores em V^3, neste capítulo vamos desconsiderar o conjunto V^3 e em cada definição esclarecemos se um vetor estará no plano ou no espaço.

5.2 DECOMPOSIÇÃO DE UM VETOR NO PLANO

Dados dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não colineares de um plano, qualquer vetor $\vec{v}$ no mesmo plano pode ser *decomposto* segundo as direções de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$. Devemos escrever o vetor $\vec{v}$ como sendo a soma de dois vetores com mesmas direções de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$. Em outras palavras, temos que determinar $a_1, a_2 \in \Re$ tais que $\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.

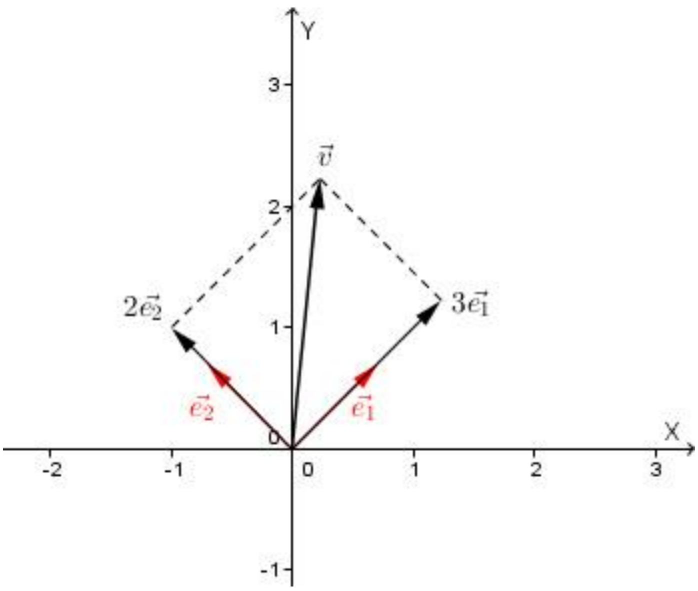
A possibilidade de escrever o vetor $\vec{v}$ como soma de outros dois vetores vem da definição de soma de vetores, que foi vista no capítulo anterior. Portanto, se você tiver dificuldade em perceber tal fato, tente fazer figuras para chegar a alguma conclusão.

5.2.1 Definição: Sejam $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ vetores não colineares. Quando o vetor $\vec{v}$ estiver representado por $\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$, dizemos que $\vec{v}$ é uma *combinação linear* de $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$. O par de vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ é chamado de *base* no plano. Aliás, qualquer conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$, com $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não colineares, constitui uma base no plano. Os números $a_1, a_2 \in \Re$ são chamados de *coordenadas* ou *componentes* de $\vec{v}$ em relação à base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$. Embora estejamos denotando a base por $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$, ou seja, usando a notação de conjunto, a ordem em que os vetores aparecem deve ser levada em consideração. O vetor $a_1\overrightarrow{v_1}$ é chamado de *projeção de* $\vec{v}$ *sobre* $\overrightarrow{v_1}$ *segundo a direção de* $\overrightarrow{v_2}$. O vetor $a_2\overrightarrow{v_2}$ é chamado de *projeção de* $\vec{v}$ *sobre* $\overrightarrow{v_2}$ *segundo a direção de* $\overrightarrow{v_1}$.

5.2.2 Base Ortonormal: Uma base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ é dita *ortonormal* se seus vetores são ortogonais e se cada vetor é unitário. Em outras palavras, $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ é ortonormal se $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ e $\left|\left|\overrightarrow{e_1}\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{e_2}\right|\right| = 1$.

Exemplo:

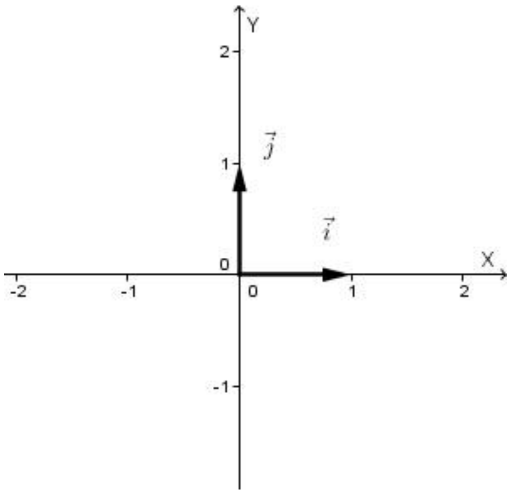
Consideramos $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ uma base ortonormal no sistema de coordenadas cartesianas $\Re^2$ e um vetor $\vec{v} = 3\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2}$, ou seja, as coordenadas de $\vec{v}$ com relação à base $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ são $a_1 = 3$ e $a_2 = 2$.



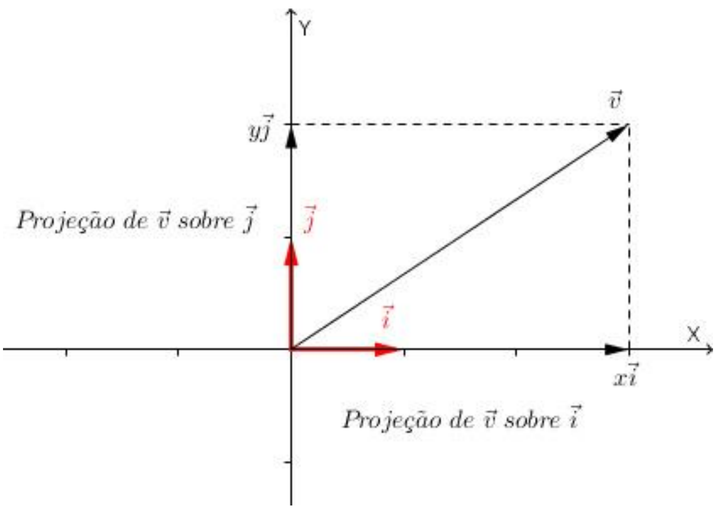
Se tratando de uma base ortonormal, dizemos que os vetores $3\overrightarrow{v_1}$ e $2\overrightarrow{v_2}$ são *projeções ortogonais* de $\vec{v}$ sobre $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, respectivamente.

Obviamente, existem infinitas bases ortonormais no plano cartesiano, porém vamos considerar, a partir de agora, uma base particular.

[5.2.3 Base Canônica]: A base $\{\vec{\imath},\vec{\jmath}\}$ formada pelos vetores $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ cujos representantes possuem origem no ponto O e extremidade nos pontos $(1{,}0)$ e $(0{,}1)$, respectivamente, é chamada de *base canônica* do plano.



Dado um vetor $\vec{v} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, onde x e y são as coordenadas de $\vec{v}$ com relação à base canônica $\{\vec{\imath},\vec{\jmath}\}$, temos:



[5.3 EXPRESSÃO ANALÍTICA EM R^2]

Fixada a base canônica $\{\vec{\imath},\vec{\jmath}\}$ no plano, existe uma correspondência biunívoca entre vetores e pontos do plano, ou seja, podemos associar cada vetor ao par $(x, y); x, y \in \Re$, pois, com relação à base canônica o representante do vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ possui origem em $(0,0)$ e extremidade no ponto $P = (x, y)$, quaisquer que sejam $x, y \in \Re$.

Define-se vetor no plano pelo par ordenado (x, y) e o representamos por $\boxed{\vec{v} = (x, y)}$, que é a expressão analítica de $\vec{v}$ em $\Re^2$.

A primeira coordenada x é chamada de *abcissa* e a segunda, *ordenada*.

Exemplo:

Podemos escrever $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} = (-1,1)$, $2\vec{i} = (2,0)$, $-\vec{j} = (0,-1)$ e $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} = (a, b)$. Particularmente $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$ e $\vec{0} = (0,0)$.

Observação: A escolha da base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é proposital para a simplificação da escrita. Por exemplo, quando nos referimos a qualquer ponto $P = (x, y)$, este pode ser identificado com o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y)$, onde O é a origem do sistema.

5.4 IGUALDADE E OPERAÇÕES

5.4.1 Igualdade: Os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v)$ são *iguais* se, e somente se, $x_u = x_v$ e $y_u = y_v$. Denotamos a igualdade por $\vec{u} = \vec{v}$.

Exemplos:

01. Os vetores $\vec{u} = (3,5)$ e $\vec{v} = (3,5)$ são iguais, pois $x_u = 3 = x_v$ e $y_u = 5 = y_v$.

02. Para que os vetores $\vec{u} = (x + 1,4)$ e $\vec{v} = (5,2y - 6)$ sejam iguais, de acordo com a definição, devemos ter $x + 1 = 5 \Rightarrow \boxed{x = 4}$ e $4 = 2y - 6 \Rightarrow \boxed{y = 5}$.

5.4.2 Operações: Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v)$ e $\alpha \in \Re$. Definimos:

i. $\vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v, y_u + y_v)$ (*soma*);

ii. $\alpha\vec{u} = (\alpha x_u, \alpha y_u)$ (*multiplicação por escalar*).

Resumindo: a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é um vetor cujas coordenadas são a soma das coordenadas correspondentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$. A multiplicação do escalar $\alpha \in \Re$ pelo vetor $\vec{u}$ é um vetor cujas coordenadas são a multiplicação (em $\Re$) de α por cada coordenada de $\vec{u}$.

Exemplo:

Sendo $\vec{u} = (4,1)$ e $\vec{v} = (-2,6)$, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = (4,1) + (-2,6) = (4-2, 1+6) = (2,7) \Rightarrow \boxed{\vec{u} + \vec{v} = (2,7)}.$$

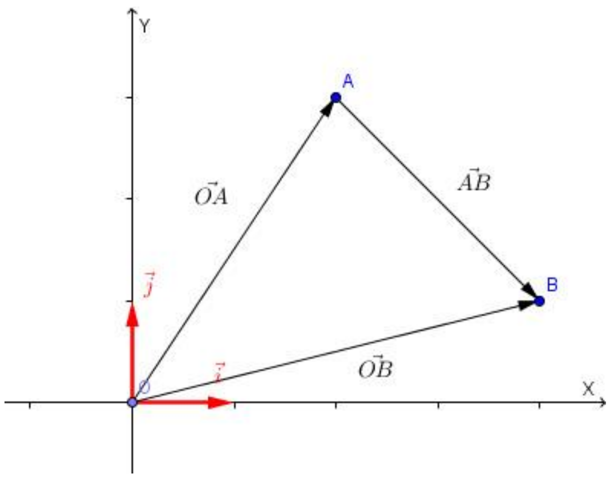
$$2\vec{v} = 2(-2,6) = (2 \cdot (-2), 2 \cdot 6) = (-4,12) \Rightarrow \boxed{2\vec{v} = (-4,12)}.$$

Observação: As propriedades das operações vistas no capítulo anterior, para as operações, são verificadas para vetores no plano.

5.5 VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, um vetor cujo representante é o segmento orientado (A, B). Digamos que, com relação ao sistema de coordenadas $\Re^2$, $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$.

De acordo com o que foi visto anteriormente, podemos associar os pontos A e B aos vetores $\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A)$ e $\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B)$, respectivamente. Observe a figura.



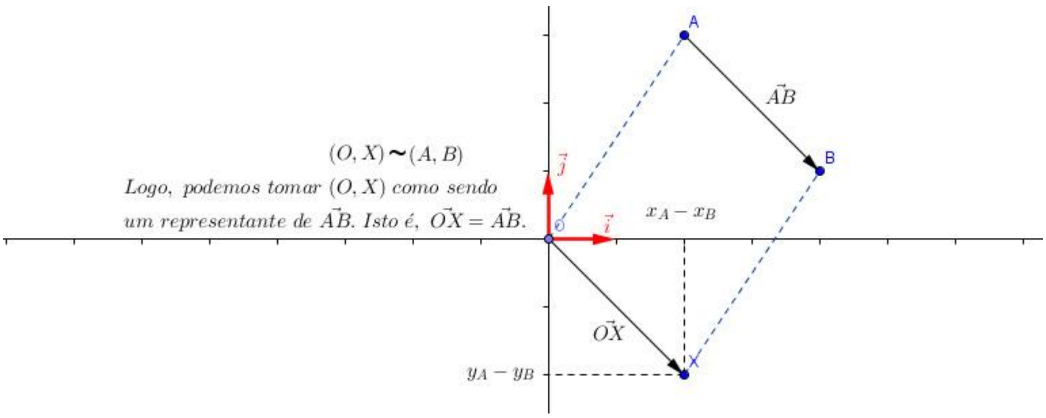
Note que, temos a soma de vetores:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B, y_B) - (x_A, y_A)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)}.$$

Isto é, as coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ são obtidas subtraindo-se as coordenadas correspondentes da extremidade e da origem do segmento representante. Por esta razão, podemos usar a notação $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Observe que, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ (com relação ao sistema $\Re^2$) serão exatamente as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OX}$ determinado pelo segmento orientado (O, X), onde $(O, X) \sim (A, B)$, com origem na origem do sistema de coordenadas. Ora, como este segmento (O, X) é equipolente a (A, B), podemos toma-lo como um representante do mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$.



5.6 NORMA DE UM VETOR NO PLANO

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ um vetor de $\Re^2$ (note que $\vec{v}$ é o vetor definido pelos pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$). A *norma* (ou *módulo*) do vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$\boxed{||\vec{v}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}.$$

Observação: Você deve perceber que o vetor definido pelos pontos A e B tem como norma $||\vec{v}|| = d(A, B)$.

Se $\vec{v} = (x, y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, sua norma é dada por:

$$\boxed{||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Observação: Note que a segunda fórmula é obtida fazendo a substituição $x_B - x_A = x$ e $y_B - y_A = y$.

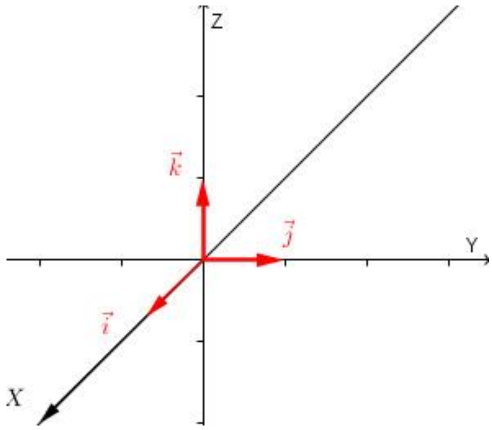
5.7 DECOMPOSIÇÃO DE UM VETOR NO ESPAÇO

Dados três vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ não coplanares no espaço, qualquer vetor $\vec{v}$ no mesmo espaço pode ser *decomposto* segundo as direções de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$. Devemos escrever o vetor $\vec{v}$ como sendo a soma de três vetores com mesmas direções de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$. Em outras palavras, temos que determinar $a_1, a_2, a_3 \in \Re$ tais que $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3}$.

5.7.1 Definição: Sejam $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ vetores não coplanares. Quando o vetor $\vec{v}$ estiver representado por $\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3}$, dizemos que $\vec{v}$ é uma *combinação linear* de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$. A tripla de vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ é chamada de *base* no espaço. Aliás, qualquer conjunto $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, com $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ não coplanares, constitui uma base no espaço. Os números $a_1, a_2, a_3 \in \Re$ são chamados de *coordenadas* ou *componentes* de $\vec{v}$ em relação à base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$. Embora estejamos denotando a base por $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$, ou seja, usando a notação de conjunto, a ordem em que os vetores aparecem deve ser levada em consideração.

5.7.2 Base Ortonormal: Uma base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é dita *ortonormal* se seus vetores são dois a dois ortogonais e se cada vetor é unitário. Em outras palavras, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é ortonormal se $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, $\vec{e_1} \perp \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \perp \vec{e_3}$ e $||\vec{e_1}|| = ||\vec{e_2}|| = ||\vec{e_3}|| = 1$.

5.7.3 Base Canônica: A base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ formada pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ cujos representantes possuem origem no ponto O e extremidade nos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, respectivamente, é chamada de *base canônica* do espaço.



5.8 EXPRESSÃO ANALÍTICA EM R³

Fixada a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ no espaço, existe uma correspondência biunívoca entre vetores e pontos do espaço, ou seja, podemos associar cada vetor à ternar $(x, y, z); x, y, z \in \mathfrak{R}$, pois, com relação à base canônica o representante do vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ possui origem em $(0,0,0)$ e extremidade no ponto $P = (x, y, z)$, quaisquer que sejam $x, y, z \in \mathfrak{R}$.

Define-se vetor no espaço pela terna ordenada (x, y, z) e o representamos por $\boxed{\vec{v} = (x, y, z)}$, que é a expressão analítica de $\vec{v}$ em $\mathfrak{R}^3$.

5.9 IGUALDADE E OPERAÇÕES

5.9.1 Igualdade: Os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ são *iguais* se, e somente se, $x_u = x_v$, $y_u = y_v$ e $z_u = z_v$. Denotamos a igualdade por $\vec{u} = \vec{v}$.

5.9.2 Operações: Sejam $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, z_u)$ e $\alpha \in \Re$. Definimos:

i. $\vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v)$ (*soma*);

ii. $\alpha\vec{u} = (\alpha x_u, \alpha y_u, \alpha z_u)$ (*multiplicação por escalar*).

5.10 VETOR DEFINIDO POR DOIS PONTOS

Sejam $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)}.$$

5.11 NORMA DE UM VETOR NO ESPAÇO

Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ um vetor de $\Re^3$ (note que $\vec{v}$ é o vetor definido pelos pontos $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$). A *norma* (ou *módulo*) do vetor $\vec{v}$ é dada por:

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}.$$

Observação: Você deve perceber que o vetor definido pelos pontos A e B tem como norma $\|\vec{v}\| = d(A, B)$.

Se $\vec{v} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, sua norma é dada por:

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Observação: Note que a segunda fórmula é obtida fazendo a substituição $x_B - x_A = x$, $y_B - y_A = y$ e $z_B - z_A = z$.

5.12 CONDIÇÃO DE PARALELISMO ENTRE VETORES

Já vimos anteriormente, que os vetores $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ são *colineares* (ou *paralelos*), se existe $\lambda \in \Re$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Isto é:

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \Rightarrow (x_u, y_u, z_u) = \lambda(x_v, y_v, z_v)$$

$$\Rightarrow (x_u, y_u, z_u) = (\lambda x_v, \lambda y_v, \lambda z_v).$$

Mas, pela igualdade entre vetores, temos:

$$\begin{cases} x_u = \lambda x_v \\ y_u = \lambda y_v \\ z_u = \lambda z_v \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v} = \frac{z_u}{z_v}}.$$

Em outras palavras, dois vetores são paralelos quando suas coordenadas são proporcionais.

Denotamos o paralelismo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por $\vec{u} // \vec{v}$.

CAPÍTULO 06: DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, vamos estudar a dependência linear entre vetores. Antes de tudo, veremos conceitos geométricos de dependência e em seguida faremos um estudo dos conceitos algébricos envolvidos na dependência linear.

6.2 RESULTADOS COMPLEMENTARES

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados complementares que serão de grande importância para a continuidade de nosso estudo.

6.2.1 Proposição: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ serão paralelos se, e somente se, existe um escalar $\lambda \in \Re$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Prova: Temos o seguinte:

($\Leftarrow$) Imediato, pois da definição de multiplicação de um escalar por um vetor, se $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ concluímos que $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$.

($\Rightarrow$) Queremos provar que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, então existirá um número real λ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

<u>Caso 01</u>: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem mesmo sentido, tomemos $\lambda = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}$. Para provar que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ é equivalente mostrar que $\vec{u}$ e $\lambda\vec{v}$ possuem mesma direção, sentido e norma.

Por hipótese, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, logo possuem mesma direção e consequentemente $\vec{u}$ e $\lambda\vec{v}$ também, pois $\lambda\vec{v}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Se tomarmos $\lambda = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||} > 0$, note que isto acarreta a $\vec{v}$ e $\lambda\vec{v}$ com mesmo sentido, devido à definição de multiplicação por escalar, com um escalar positivo. Assim, como supomos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com mesmo sentido, temos que $\vec{u}$ e $\lambda\vec{v}$ possuem mesmo sentido.

Resta mostrar que $\vec{u}$ e $\lambda\vec{v}$ possuem mesma norma. De fato:

$$\left|\left|\lambda\vec{v}\right|\right| = |\lambda| \cdot \left|\left|\vec{v}\right|\right| = \left|\frac{\left|\left|\vec{u}\right|\right|}{\left|\left|\vec{v}\right|\right|}\right| \cdot \left|\left|\vec{v}\right|\right| = \left|\left|\vec{u}\right|\right| \cdot \frac{\left|\left|\vec{v}\right|\right|}{\left|\left|\vec{v}\right|\right|} = \left|\left|\vec{u}\right|\right| \cdot 1 = \left|\left|\vec{u}\right|\right| \Rightarrow \boxed{\left|\left|\lambda\vec{v}\right|\right| = \left|\left|\vec{u}\right|\right|}.$$

Portanto, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Caso 02: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ possuem sentidos contrários, tomemos $\lambda = -\frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}$. Novamente, provar que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ é equivalente a provar que $\vec{u}$ e $\lambda\vec{v}$ possuem mesma direção, sentido e norma.

Como, por hipótese $\vec{u}//\vec{v}$ e $\lambda\vec{v}//\vec{v}$, temos $\vec{u}//\lambda\vec{v}$. Como $\lambda < 0$, temos que $\vec{v}$ e $\lambda\vec{v}$ possuem sentidos contrários, e devido ao fato de termos considerado $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de sentidos opostos, $\vec{u}$ e $\lambda\vec{v}$ só podem ser de mesmo sentido.

Resta mostrar que $\vec{u}$ e $\lambda\vec{v}$ possuem mesma norma. De fato:

$$\left|\left|\lambda\vec{v}\right|\right| = |\lambda| \cdot \left|\left|\vec{v}\right|\right| = \left|-\frac{\left|\left|\vec{u}\right|\right|}{\left|\left|\vec{v}\right|\right|}\right| \cdot \left|\left|\vec{v}\right|\right| = |-1| \cdot \left|\left|\vec{u}\right|\right| \cdot \frac{\left|\left|\vec{v}\right|\right|}{\left|\left|\vec{v}\right|\right|} = 1 \cdot \left|\left|\vec{u}\right|\right| \cdot 1 = \left|\left|\vec{u}\right|\right|$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\left|\lambda\vec{v}\right|\right| = \left|\left|\vec{u}\right|\right|}.$$

Portanto, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

6.2.2 Proposição: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ implica que $\alpha = \beta = 0$.

Prova: Suponha que $\alpha \neq 0$. Temos:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{v}}.$$

Mas, esta igualdade nos diz que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, o que contradiz a hipótese de que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.

Supondo $\beta \neq 0$, é análogo ao caso anterior.

Portanto, só podemos ter $\boxed{\alpha = \beta = 0}$.

6.2.2.1 Corolário: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, então $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v}$ implica que $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$.

Prova: De fato:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \gamma\vec{u} + \delta\vec{v} \Rightarrow \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} - (\gamma\vec{u} + \delta\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} - \gamma\vec{u} + \beta\vec{v} - \delta\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha - \gamma)\vec{u} + (\beta - \delta)\vec{v} = \vec{0}.$$

Mas, pela proposição 6.2.2, como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, a igualdade acima implica que $\alpha - \gamma = 0$ e $\beta - \delta = 0$. Logo:

$$\alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \gamma}$$

$$\beta - \delta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = \delta}.$$

E temos o desejado.

6.2.3 Conceitos Básicos: Inicialmente, fixemos a seguinte linguagem: Um vetor $\vec{u}$ será *paralelo a uma reta* r se existir um representante (A, B) de $\vec{u}$ paralelo a r e denotamos $\vec{u}//r$. Um vetor $\vec{u}$ será *paralelo a um plano* Π se existir um representante (A, B) de $\vec{u}$ paralelo a Π e denotamos $\vec{u}//\Pi$.

Dois vetores paralelos a uma mesma reta sempre serão paralelos. Cuidado, dois vetores paralelos a um mesmo plano podem não ser paralelos. O vetor nulo será paralelo a qualquer reta e a qualquer plano.

Agora, novamente estamos trabalhando no espaço, ou seja, em E^3. O conjunto dos vetores de E^3 será o conjunto já visto anteriormente V^3.

6.3 CONCEITOS GEOMÉTRICOS DE DEPÊNDENCIA E INDEPENDÊNCIA

Vamos analisar cada caso, considerando certa quantidade de vetores.

6.3.1 Definição: Para cada quantidade de vetores tem-se:

i. O conjunto $\{\vec{v}\}$ composto por um único vetor $\vec{v} \in V^3$ é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{v} = \vec{0}$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\{\vec{v}\}$ é *linearmente independente* (LI).

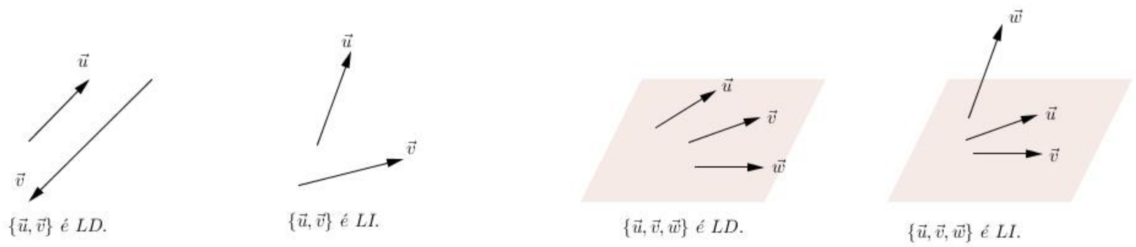
ii. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de vetores de V^3 é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos. Caso contrário, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é *linearmente independente* (LI), isto é, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.

iii. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de vetores de V^3 é *linearmente dependente* (LD) se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos a um mesmo plano, ou seja, se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares. Caso contrário, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é *linearmente independente* (LI), isto é, se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não coplanares.

iv. Qualquer conjunto $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n}\}$, com $n \geq 4$, é *linearmente dependente* (LD).

Exemplos:

Observe as figuras a seguir e tente associar cada uma com a Definição 6.3.1.



Observação: Se em $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ ocorrer $\overrightarrow{v_i} = \vec{0}$, para algum i, então $\{\overrightarrow{v_i}; 1 \leq i \leq n\}$ é LD.

6.4 CONCEITOS ALGÉBRICOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA

6.4.1 Definição: Sejam $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n} \in V^3$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Re$, com $n \geq 1$. Chamamos de *combinação linear* dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ (com coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) o vetor:

$$\vec{u} = \alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{v_n}.$$

Se $\vec{u}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$, diz-se que $\vec{u}$ é *gerado* pelos vetores $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$.

<u>Observações</u>:

01. Quaisquer que sejam $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$, o vetor nulo sempre será gerado por $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$. De fato, sempre é possível tomar $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, e teremos:

$$\vec{0} = 0 * \overrightarrow{v_1} + \cdots + 0 * \overrightarrow{v_n}.$$

02. Nem sempre a combinação $x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n}$ resultando no vetor nulo terá todos os coeficientes iguais à zero. Isso dependerá do conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$.

<u>Exemplos</u>:

01. Sabendo que $\vec{u} = 3\vec{v}$, vamos escrever duas expressões diferentes do vetor nulo como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
Sabemos que $\vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$, e esta é uma combinação. Como $\vec{u} = 3\vec{v}$, temos $\vec{u} + (-3)\vec{v} = \vec{0}$ e esta é outra forma de escrever o vetor nulo.

02. Supondo que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI só há uma expressão para o vetor nulo como combinação de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ que é $\vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v}$. Pois se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$, pela Proposição 6.2.2, $\alpha = \beta = 0$.

6.4.2 Proposição: O conjunto de vetores $\{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$, com $n \geq 2$, é LD se, e somente se, algum vetor do conjunto for gerado pelos demais.

Prova: Analisaremos separadamente ii, iii e iv da definição.

<u>Caso i</u>: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD $\Leftrightarrow$ Um dos vetores é gerado pelo outro.

(⇒) Queremos provar que se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, então $\vec{u}$ é gerado por $\vec{v}$ ou $\vec{v}$ é gerado por $\vec{u}$.

Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, deve ocorrer $\vec{u} = 0\vec{v}$ ou $\vec{v} = 0\vec{u}$. Logo um é gerado pelo outro.

Suponha agora, $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$. Por hipótese, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, logo, devido a definição de LD, existem representantes (A, B) de $\vec{u}$ e (A, C) de $\vec{v}$ tais que A, B e C são colineares (pois os representantes podem ser tomados contidos em uma mesma reta), com $A \neq B$ e $A \neq C$. Se os representantes são paralelos, por definição, temos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, assim existe $\lambda \in \Re$ tal que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ (como supomos $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, $\lambda \neq 0$) ou $\vec{v} = \frac{1}{\lambda}\vec{u}$, portanto um dos vetores é gerado pelo outro. Observe que, o sinal de λ só irá influenciar na direção dos vetores, e nada mudará sobre o fato de um ser gerado pelo outro.

(⇐) Queremos provar agora que, se $\vec{u}$ é gerado por $\vec{v}$ ou $\vec{v}$ é gerado por $\vec{u}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD.

Suponha que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ e que nenhum dos vetores é nulo (no caso em que um dos dois fosse nulo, não haveria nada o que fazer e já concluiríamos que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seria LD). Seja (A, B) um representante de $\vec{u}$. Da definição de multiplicação de um escalar por vetor, sabemos que $\vec{v}//\vec{u}$, pois $\vec{v}$ é a multiplicação do escalar α por $\vec{u}$. Logo podemos tomar um representante de $\vec{v}$ com origem em A e extremidade em C na reta que passa por A e B, ou seja, os pontos A, B e C são colineares. Como $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e ambos são paralelos a uma mesma reta, por definição $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD.

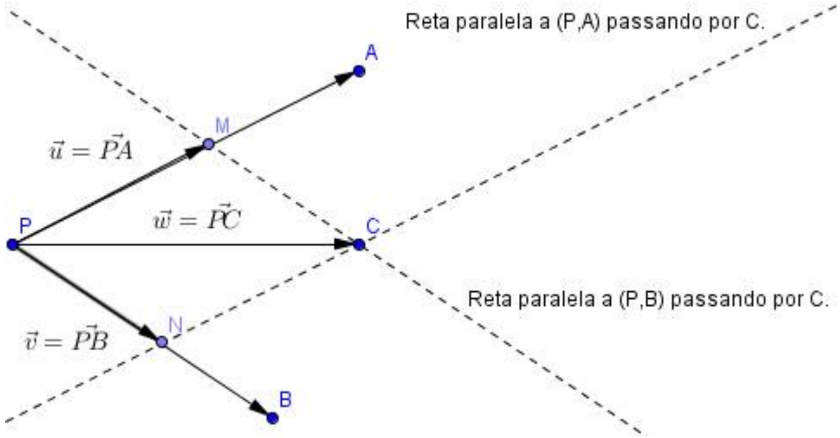
<u>Caso ii</u>: $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD ⇔ Um dos vetores é gerado pelos outros dois.

(⇒) Queremos provar que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD, então um dos vetores é gerado pelos outros.

Temos por hipótese que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

Suponha que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, então pelo caso anterior temos que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \beta\vec{u}$. Neste caso, $\vec{u} = \alpha\vec{v} + 0\vec{w}$ ou $\vec{v} = \beta\vec{u} + 0\vec{w}$ e está provada a afirmação.

Suponha que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, faremos a seguinte construção geométrica: Tomamos $P \in E^3$ e os representantes (P, A), (P, B) e (P, C) de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente. Em outras palavras, $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Note que, P, B e A não são colineares, uma vez que supomos $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ LI e também P, A, B e C são coplanares, devido à definição de LD para $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$. Pelo ponto C tomamos as retas paralelas a (P, A) e a (P, B), determinando assim os pontos M e N. Observe a figura.

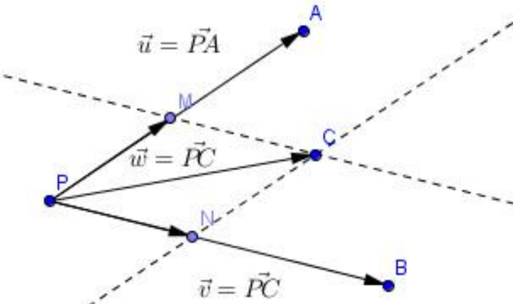


Então, temos que $\{\vec{u}, \overrightarrow{PM}\}$ e $\{\vec{v}, \overrightarrow{PN}\}$ são LD, e pelo que já foi provado no caso i, temos $\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{u}$ e $\overrightarrow{PN} = \beta\vec{v}$. Percebe-se que $\vec{w} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, ou seja, $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Portanto, $\vec{w}$ é gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

($\Leftarrow$) Queremos provar que se um dos vetores é combinação linear dos outros dois, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

Suponha que $\vec{w}$ seja gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ e que nenhum dos vetores é nulo (caso um deles seja nulo, já podemos concluir, devido ao caso anterior, que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD).

Tomemos $\vec{u} = \overrightarrow{PA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{PB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{PC}$. Se os pontos P, A e B forem colineares, é claro que os quatro pontos A, B, C e P estão em um mesmo plano, ou seja, os representantes de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ serão paralelos ao mesmo plano, logo por definição $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD. Caso P, A e B sejam não colineares, estes determinarão um plano (resultado da geometria elementar).



Como supomos $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, observe pela figura que $\vec{w} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$, logo $\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{u}$ e $\overrightarrow{PN} = \alpha\vec{v}$. Daí, M pertence à reta que contém (P, A) e N pertence à reta que contém (P, B), portanto o paralelogramo $PMCN$ está contido no plano determinado por P, A e B. Concluímos assim que P, A, B e C são coplanares e, portanto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

Caso iv: Consulte o livro "Geometria Analítica: um tratamento vetorial 2ª Ed." de Paulo Boulos. Demonstração na página 30.

6.4.2.1 Corolário: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD se, e somente se, existe $\alpha \in \Re$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou existe $\beta \in \Re$ tal que $\vec{v} = \beta\vec{u}$. Além disso, se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, então $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

Prova: Caso ii da Proposição 6.4.2.

6.4.2.2 Corolário: Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI e $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD, então $\vec{w}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Prova: Caso iii da Proposição 6.4.2.

6.4.2.3 Corolário: Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então todo vetor $\vec{x} \in \Re^3$ é gerado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Isto é, qualquer que seja $\vec{x} \in \Re^3$, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tais que:

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}.$$

Prova: Caso iv da Proposição 6.4.2.

6.4.3 Proposição: O conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LD se, e somente se, a equação $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$ implicar que pelo menos um dos α_k é diferente de zero.

Prova: De fato:

($\Rightarrow$) Queremos mostrar que se $\{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LD, então $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{v_k} = \vec{0}$ implica que $\alpha_k \neq 0$, para algum $k \in \{1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n\}$.

Por hipótese, temos que $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ é LD, logo pela Proposição 6.4.2, algum dos vetores será gerado pelos demais. Suponha que $\vec{v_i}$ seja gerado pelos demais vetores do conjunto. Então:

$$\vec{v_i} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_{i-1}\overrightarrow{v_{i-1}} + \alpha_{i+1}\overrightarrow{v_{i+1}} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n}$$

$$\Rightarrow \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + \cdots + \alpha_{i-1}\overrightarrow{v_{i-1}} + \boldsymbol{(-1)v_i} + \alpha_{i+1}\overrightarrow{v_{i+1}} + \cdots + \alpha_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = -1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\alpha_i \neq 0}.$$

Portanto, a equação $\sum \alpha_k\vec{v_k} = \vec{0}$ implicou que algum dos coeficientes α_k é diferente de zero. Temos o desejado.

($\Leftarrow$) Queremos mostrar que se a equação $\sum \alpha_k\vec{v_k} = \vec{0}$ implicar que algum dos α_k é diferente de zero, então o conjunto $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ é LD.

Por hipótese, $\alpha_1\vec{v_1} + \cdots + \alpha_{i-1}\overrightarrow{v_{i-1}} + \alpha_i\vec{v_i} + \alpha_{i+1}\overrightarrow{v_{i+1}} + \cdots + a_n\vec{v_n} = \vec{0}$ implica que algum α_k, com $k \in \{1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n\}$, é não nulo. Suponha que $\alpha_i \neq 0$. Então:

$$\alpha_1\vec{v_1} + \cdots + \alpha_{i-1}\overrightarrow{v_{i-1}} + \alpha_i\vec{v_i} + \alpha_{i+1}\overrightarrow{v_{i+1}} + \cdots + a_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_i\vec{v_i} = -\alpha_1\vec{v_1} - \cdots - \alpha_{i-1}\overrightarrow{v_{i-1}} - \alpha_{i+1}\overrightarrow{v_{i+1}} - \cdots - \alpha_n\vec{v_n}.$$

Como $a_i \neq 0$, existe $a_i^{-1} = \frac{1}{a_i}$ tal que $a_i \cdot \frac{1}{a_i} = 1$. Multiplicando a equação por $\frac{1}{a_i}$, tem-se:

$$\vec{v_i} = -\frac{a_1}{a_i}\vec{v_1} - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i}\overrightarrow{v_{i-1}} - \frac{a_{i+1}}{a_i}\overrightarrow{v_{i+1}} - \cdots - \frac{a_n}{a_i}\vec{v_n}.$$

Ou seja, $\vec{v_i}$ é combinação linear de $\vec{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{i-1}}, \overrightarrow{v_{i+1}}, \dots, \vec{v_n}$. Mas, pela Proposição 6.4.2, se um dos vetores é gerado pelo restante, temos que $\{\vec{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_{i-1}}, \vec{v_i}, \overrightarrow{v_{i+1}}, \dots, \vec{v_n}\}$ é LD. Temos o desejado.

<u>Observação</u>: A proposição a seguir é uma maneira alternativa de escrever a proposição vista acima, isto é, as proposições serão equivalentes. É importante enunciá-la, pois esta será bastante usada.

6.4.4 Proposição: $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LI se, e somente se, a equação $\alpha_1\overrightarrow{v_1} + \alpha_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$ implica que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

<u>Exemplo</u>:

Sejam $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{c} = \vec{v} - 2\vec{w}$. Prove que:

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ é LI} \Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ é LI.}$$

Queremos mostrar que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é LI. Para isto, façamos $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$, e provar que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é LI é equivalente a provar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, devido à Proposição 6.4.4. Então:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha(\vec{u} + \vec{w}) + \beta(2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) + \gamma(\vec{v} - 2\vec{w}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\vec{u} + \alpha\vec{w} + 2\beta\vec{u} + \beta\vec{v} - \beta\vec{w} + \gamma\vec{v} - 2\gamma\vec{w} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha + 2\beta)\vec{u} + (\beta + \gamma)\vec{v} + (\alpha - \beta - 2\gamma)\vec{w} = \vec{0}.$$

Como, por hipótese $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI equivale a:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}.$$

Note que este sistema é homogêneo e possui número de incógnitas e equações iguais, logo sua solução é $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Desta forma, pela Proposição 6.4.4, temos que $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é LI.

6.4.4.1 Corolário: Se $\{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LI, então para cada vetor gerado por $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ os coeficientes são univocamente determinados, isto é:

$$x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} = y_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{v_n} \Rightarrow x_i = y_i, \forall i.$$

Prova: Façamos:

$$x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} = y_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{v_n}$$

$$\Rightarrow x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} - (y_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{v_n}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} - y_1\overrightarrow{v_1} - \cdots - y_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_1\overrightarrow{v_1} - y_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{v_n} - y_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (x_1 - y_1)\overrightarrow{v_1} + \cdots + (x_n - y_n)\overrightarrow{v_n} = \vec{0}.$$

Como, por hipótese $\{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LI, pela Proposição 6.4.4 qualquer combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}$ resultando no vetor nulo implica que os coeficientes são iguais à zero, isto é, $x_i - y_i = 0$, com $i \in \{1, \dots, n\}$. Logo:

$$\boxed{x_i = y_i}, \forall i.$$

6.4.4.2 Corolário: Se $a_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = b_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + b_n\overrightarrow{v_n}$, e $a_i = b_i$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, então $\{\overrightarrow{v_1}, \dots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LI $(1 \leq n \leq 3)$.

Prova: Se $a_1, \dots, a_n \in \Re$ tais que $a_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_1} = \vec{0}$, segue que:

$$a_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = \vec{0} = 0\overrightarrow{v_1} + \cdots + 0\overrightarrow{v_n}$$

$$\Rightarrow a_1\overrightarrow{v_1} + \cdots + a_n\overrightarrow{v_n} = 0\overrightarrow{v_1} + \cdots + 0\overrightarrow{v_n}.$$

Mas por hipótese, essa igualdade só é válida de $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_n = 0$. Logo, novamente pela Proposição 6.4.4, temos que $\{\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_n}\}$ é LI.

Exemplos:

01. Prove que se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, então $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LI.

Sejam $x, y \in \Re$ tais que $x(\vec{u} + \vec{v}) + y(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$, devemos mostrar que os escalares x e y são iguais a zero. De fato:

$$x(\vec{u} + \vec{v}) + y(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow x\vec{u} + x\vec{v} + y\vec{u} - y\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (x + y)\vec{u} + (x - y)\vec{v} = \vec{0}.$$

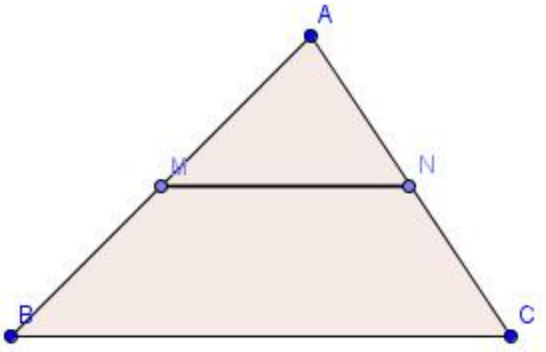
Temos uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ resultando no vetor nulo, e da hipótese $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, logo pela Proposição 6.4.4, os coeficientes desta combinação devem ser iguais à zero. Assim, temos:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Um sistema homogêneo com número de equações e incógnitas iguais, ou seja, a única solução que este sistema admite é $x = 0$ e $y = 0$.

Portanto, como a combinação $x(\vec{u} + \vec{v}) + y(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$ implicou em $x = y = 0$, temos pela proposição 6.4.4 que o conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LI.

02. Na figura, ABC é um triângulo e M é o ponto médio de AB. Sabendo que MN é paralelo a BC, prove que N é o ponto médio de AC.



Podemos tratar cada lado do triângulo como sendo representantes de vetores, basta "colocar" orientações nestes segmentos. Por exemplo, como ABC é um triângulo, temos $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$ é LI.

Como M é o ponto médio de AB, temos:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \dots (1)$$

Como, por hipótese, MN é paralelo a BC, temos:

$$\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{BC} \dots (2)$$

Finalmente, como N pertence ao lado AC, temos:

$$\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC} \dots (3)$$

Note que, nosso objetivo agora é concluir que $\beta = \frac{1}{2}$. Façamos:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM}.$$

Logo, por (1) e (2):

$$\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \dots (4)$$

Por outro lado, de (3) vem:

$$\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC} = \beta\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \beta\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{AB} \dots (5)$$

Comparando (4) e (5):

$$\alpha\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{AB}.$$

Como vimos no Exemplo 01, se $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$ é LI, a igualdade acima implica que os coeficientes são iguais, ou seja:

$$\alpha = \beta \ e \ \beta = \frac{1}{2}.$$

Portanto, $\beta = \frac{1}{2}$ e temos o desejado.

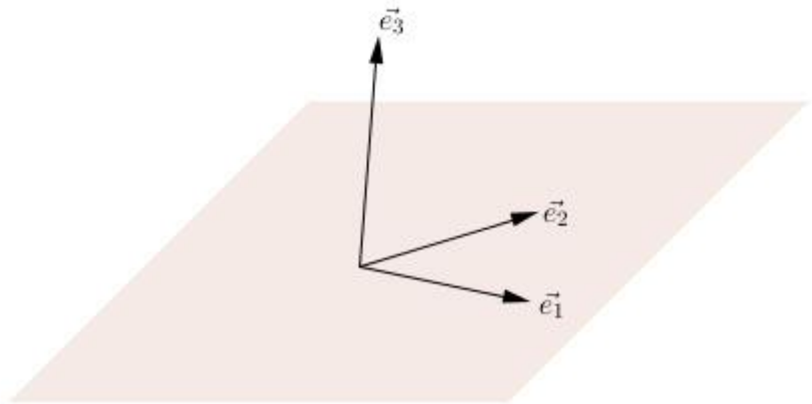
CAPÍTULO 07: BASE

7.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, falamos um pouco sobre um conjunto especifico de vetores que formava uma base para determinado "lugar". Lembre que estudamos vetores no plano e no espaço. No plano, um conjunto composto por dois vetores, onde esse conjunto é LI, forma uma base para o plano. Enquanto no espaço, um conjunto composto por três vetores, onde esse conjunto é LI, forma uma base para o espaço.

Neste capítulo, vamos fazer uma abordagem mais teoria sobre bases do espaço.

7.1.1 Definição: O conjunto ordenado LI, $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, chama-se *base* de V^3.



Se $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é uma base, podemos dizer, conforme o Corolário 6.4.2.3 que todo vetor $\vec{u} \in V^3$ é gerado por $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$, isto é, existem $a_1, a_2, a_3 \in \Re$ tais que:

$$\vec{u} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}.$$

A terna (a_1, a_2, a_3) é a única a satisfazer a equação acima, pois, se supormos $\vec{u} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$, devido ao fato de que $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ é LI, o Corolário 6.4.4.1 diz que $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3$. Cada escalar $a_i \in \Re$ é chamado de *coordenada* de $\vec{u}$ em relação à base E. Lembre-se de nunca trocar a ordem dos vetores ou dos escalares. Como (a_1, a_2, a_3) é composto pelas coordenadas de $\vec{u}$ em relação à base E, podemos reescrever o vetor $\vec{u}$ como sendo, simplesmente:

$$\vec{u} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = (a_1, a_2, a_3)_E$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E}.$$

Quando trabalharmos com uma grande quantidade de vetores, podemos supor que todos estão escritos em relação à uma mesma base e omitimos o índice E em $(a_1, a_2, a_3)_E$, isto é, escrevemos $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$.

7.2 OPERAÇÕES SEGUNDO AS COORDENADAS

7.2.1 Proposição: Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$. A soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$, em termos de coordenadas, é o vetor:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_E}.$$

Prova: Seja $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1, a_2, a_3)_E + (b_1, b_2, b_3)_E = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} + b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$$

$$= (a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2} + (a_3 + b_3)\vec{e_3} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_E$$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)_E.$$

7.2.2 Proposição: Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$ e $\eta \in \Re$. A multiplicação escalar de η por $\vec{u}$, em termos de coordenadas, é o vetor:

$$\boxed{\eta\vec{u} = (\eta a_1, \eta a_2, \eta a_3)_E}.$$

Prova: Seja $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, então:

$$\eta\vec{u} = \eta(a_1, a_2, a_3)_E = \eta(a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}) = (\eta a_1)\vec{e_1} + (\eta a_2)\vec{e_2} + (\eta a_3)\vec{e_3}$$

$$= (\eta a_1, \eta a_2, \eta a_3)_E \Rightarrow \eta\vec{u} = (\eta a_1, \eta a_2, \eta a_3)_E.$$

<u>Exemplo</u>:

Sendo $\vec{u} = (-1,2,0)_E$ e $\vec{v} = (3.-3,4)_E$, vamos determinar a tripla de coordenadas do vetor $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$ na base E. Temos:

$$\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v} = -3(-1,2,0)_E + 2(3,-3,4)_E = (3,-6,0)_E + (6,-6,8)_E$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{w} = (9,-12,8)_E}.$$

7.3 ANALISANDO A DEPENDÊNCIA PELAS COORDENADAS

A seguir, veremos um resultado que nos ajudará a concluir se um conjunto de vetores é LD ou LI em termos de suas coordenadas.

7.3.1 Proposição: Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E$ e $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E$. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD se, e somente se, $[a_1, a_2, a_3]$ e $[b_1, b_2, b_3]$ são proporcionais[1], ou equivalentemente, se:

---

[1] Estamos usando $[a_1, a_2, a_3]$ e $[b_1, b_2, b_2]$ para representar sequências de números. $[a_1, a_2, a_3]$ e $[b_1, b_2, b_2]$ serão proporcionais se $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k \in \Re$.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Exemplos</u>:

01. Os vetores $\vec{u} = (3,10,11)$ e $\vec{v} = (4,7,-1)$ formam um conjunto LI, pois $\frac{3}{4} \neq \frac{10}{7}$ e isto implica a NÃO proporcionalidade das sequências $[3,10,11]$ e $[4,7,-1]$.

02. Os vetores $\vec{u} = (1,7,1)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ formam um conjunto LD, pois as sequências $[1,7,1]$ e $\left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right]$ são proporcionais, note que $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{\frac{7}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Logo, pela proposição, a proporcionalidade entre as sequências das coordenadas equivale à dependência linear dos vetores, ou seja, o par de vetores forma um conjunto LD.

7.3.2 Proposição: Sejam $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

<u>Exemplos</u>:

01. Verifique se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD ou LI, onde $\vec{u} = (1,-1,2)_E$, $\vec{v} = (0,1,3)_E$ e $\vec{w} = (4,-3,11)_E$.

Usando a Proposição 6.3.2:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{matrix} = 11 - 12 - 8 + 9 = 20 - 20 = 0.$$

Portanto, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

02. Sabendo que $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ é uma base e que $\overrightarrow{f_1} = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3}$ e $\overrightarrow{f_3} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3}$, mostre que $F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ é uma base e, em seguida, escreva o vetor $\vec{v} = (2,-1,1)_E$ na base F.

Para mostrar que F é uma base, basta mostrar que este conjunto é LI. Note que $\overrightarrow{f_1} = (2,-1,0)_E$, $\overrightarrow{f_2} = (1,-1,2)_E$ e $\overrightarrow{f_3} = (1,0,2)_E$. Usando a Proposição 6.3.2, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} = -4 - 2 + 2 = -4 \neq 0.$$

O determinante é diferente de zero e equivale a F é LI. Portanto F é uma base. Agora, queremos escrever o vetor $\vec{v} = (2,-1,1)_E = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ na base F. A ideia aqui é escrever os vetores de E como combinações dos vetores de F. Podemos associar o sistema $\begin{cases} 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{f_1} \\ \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{f_3} \end{cases}$ à matriz A e em seguida usar operações elementares para expressar $\overrightarrow{e_i}$ em termos dos vetores de F, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \overrightarrow{f_1} \\ 1 & -1 & 2 & \overrightarrow{f_2} \\ 1 & 0 & 2 & \overrightarrow{f_3} \end{bmatrix}$. Para isso, vamos reduzir A à sua matriz equivalente linha reduzida à forma escada. Temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \overrightarrow{f_1} \\ 1 & -1 & 2 & \overrightarrow{f_2} \\ 1 & 0 & 2 & \overrightarrow{f_3} \end{vmatrix} \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & \overrightarrow{f_3} \\ 1 & -1 & 2 & \overrightarrow{f_2} \\ 2 & -1 & 0 & \overrightarrow{f_1} \end{vmatrix} \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & \overrightarrow{f_3} \\ 2 & -1 & 0 & \overrightarrow{f_1} \\ 1 & -1 & 2 & \overrightarrow{f_2} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[L3 \to L3 - L1]{L2 \to L2 - 2\cdot L1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & \overrightarrow{f_3} \\ 0 & -1 & -4 & \overrightarrow{f_1} - 2\overrightarrow{f_3} \\ 0 & -1 & 0 & \overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_3} \end{vmatrix} \xrightarrow{L2 \leftrightarrow L3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & \overrightarrow{f_3} \\ 0 & -1 & 0 & \overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_3} \\ 0 & -1 & -4 & \overrightarrow{f_1} - 2\overrightarrow{f_3} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L3 \to L3 - L2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & \overrightarrow{f_3} \\ 0 & -1 & 0 & \overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_3} \\ 0 & 0 & -4 & \overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_3} \end{vmatrix} \xrightarrow[L2 \to -L2]{L3 \to -\frac{1}{4}\cdot L3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & \overrightarrow{f_3} \\ 0 & 1 & 0 & -\overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4}(\overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_2} - \overrightarrow{f_3}) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L1\to L1-2L3}\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \overrightarrow{f_3}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{f_1}-\overrightarrow{f_2}-\overrightarrow{f_3}\right) \\ 0 & 1 & 0 & -\overrightarrow{f_2}+\overrightarrow{f_3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{f_1}-\overrightarrow{f_2}-\overrightarrow{f_3}\right) \end{matrix}\right|.$$

Desta forma, temos:

$$\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{f_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{f_2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{f_3}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_F \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{e_1}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)_F}$$

$$\overrightarrow{e_2}=-\overrightarrow{f_2}+\overrightarrow{f_3}=(0,-1,1)_F \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{e_2}=(0,-1,1)_F}$$

$$\overrightarrow{e_3}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{f_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_2}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_3}=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)_F \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{e_3}=\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)_F}.$$

Agora, vamos determinar as coordenadas de $\vec{v}=(2,-1,1)_E$ em relação à base F. Temos:

$$\vec{v}=(2,-1,1)_E=2\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}$$

$$=2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{f_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{f_2}+\frac{1}{2}\overrightarrow{f_3}\right)-\left(-\overrightarrow{f_2}+\overrightarrow{f_3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{f_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_2}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_3}\right)$$

$$=\overrightarrow{f_1}-\overrightarrow{f_2}+\overrightarrow{f_3}+\overrightarrow{f_2}-\overrightarrow{f_3}-\frac{1}{4}\overrightarrow{f_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_2}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_3}$$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{f_1}+\left(-1+1+\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{f_2}+\left(1-1+\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{f_3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{f_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_2}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}=\frac{3}{4}\overrightarrow{f_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_2}+\frac{1}{4}\overrightarrow{f_2}=\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)_F$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)_F}.$$

Note que, podemos escrever $\vec{v} = (2, -1, 1)_E = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)_F$.

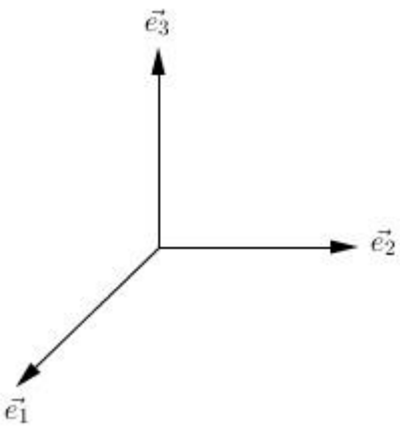
7.4 ORTOGONALIDADE

7.4.1 Definição: Os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se seus representantes são *ortogonais*. Indicamos a ortogonalidade por $\vec{u} \perp \vec{v}$.

7.4.2 Proposição: Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.

Observação: $\vec{0} \perp \vec{v}, \forall \vec{v} \in V^3$.

7.4.2 Definição: Uma base $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ é *ortonormal* se $||\overrightarrow{e_1}|| = ||\overrightarrow{e_2}|| = ||\overrightarrow{e_3}|| = 1$ e $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_3}$ e $\overrightarrow{e_2} \perp \overrightarrow{e_3}$. Em outras palavras, E é uma base ortonormal se seus vetores são unitários e dois a dois ortogonais.



$E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ *é uma base ortonormal de* V^3.

7.4.3 Proposição: Seja $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ uma base ortonormal. Se $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3} = (\alpha, \beta, \gamma)_E$, então:

$$\boxed{\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

<u>Exemplo</u>:

Seja E uma base ortonormal e $\vec{u} = (2, -1, 3)_E$. Vamos calcular a norma de $\vec{u}$. Temos:

$$\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}.$$

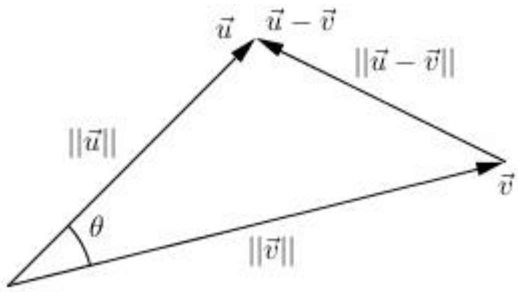
[CAPÍTULO 08: PRODUTO ESCALAR]

8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo estudaremos o produto escalar entre vetores. É importante que fique claro a diferença entre produto escalar e a multiplicação por escalar vista anteriormente.

Antes de iniciarmos, lembre-se da definição de ângulo entre dois vetores, isto é, caso os conceitos não fiquem claros aqui, revise as propriedades de ângulo entre vetores.

Considere a figura abaixo:



Sendo $\theta = ang(\vec{u},\vec{v})$, e o triângulo formado pelos representantes dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u}-\vec{v}$, podemos aplicar a Lei dos Cossenos e obter:

$$\boxed{\left|\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\right|^2 = \left|\left|\vec{u}\right|\right|^2 + \left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 - 2\left|\left|\vec{u}\right|\right|\left|\left|\vec{v}\right|\right|\cos\theta} \dots (I)$$

Por outro lado, se considerarmos uma base ortonormal $B = \{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$, podemos escrever $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_B$, $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_B$ e consequentemente $\vec{u}-\vec{v} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)_B$. Calculemos a norma de $\vec{u}-\vec{v}$ em termos de suas coordenadas e em seguida elevamos esta ao quadrado:

$$\left|\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\right|^2 = (a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2$$

$$= a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2$$

$$= \boldsymbol{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} + \boldsymbol{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)} - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$= \left|\left|\boldsymbol{\vec{u}}\right|\right|^{\mathbf{2}} + \left|\left|\boldsymbol{\vec{v}}\right|\right|^{\mathbf{2}} - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\left|\vec{u}-\vec{v}\right|\right|^2 = \left|\left|\vec{u}\right|\right|^2 + \left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)} \ldots (II)$$

Substituindo (II) em (I), tem-se:

$$\cancel{\left|\left|\boldsymbol{\vec{u}}\right|\right|^{\mathbf{2}}} + \cancel{\left|\left|\boldsymbol{\vec{v}}\right|\right|^{\mathbf{2}}} - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = \cancel{\left|\left|\boldsymbol{\vec{u}}\right|\right|^{\mathbf{2}}} \cancel{+} \cancel{\left|\left|\boldsymbol{\vec{v}}\right|\right|^{\mathbf{2}}} - 2\left|\left|\vec{u}\right|\right|\left|\left|\vec{v}\right|\right|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = -2\left|\left|\vec{u}\right|\right|\left|\left|\vec{v}\right|\right|\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \left|\left|\vec{u}\right|\right|\left|\left|\vec{v}\right|\right|\cos\theta} \ldots (8.1-E)$$

Note que esta equação nos permite calcular o ângulo entre os vetores em termos de suas coordenadas em relação à uma base ortonormal. Basta tomar $\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ e $\left|\left|\vec{v}\right|\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, e temos (considere $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos):

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \arccos\left[\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}\right]}.$$

8.1.1 Definição: Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$. O *produto escalar* dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, indicado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é o número real tal que:

i. Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$;

ii. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta}$.

Observação: Podemos ainda, pensar no produto escalar como sendo uma operação:

$$\cdot : V^3 \times V^3 \to \Re$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

8.1.2 Proposição: Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ e $\theta = ang(\vec{u}, \vec{v})$.

i. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$;

ii. Qualquer que seja $\vec{u} \in V^3$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$;

iii. Quaisquer que sejam $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Prova:

i. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, temos que $\|\vec{u}\| \neq 0$ e $\|\vec{v}\| \neq 0$, logo existem $\frac{1}{\|\vec{u}\|} = (\|\vec{u}\|)^{-1}$ e $\frac{1}{\|\vec{v}\|} = (\|\vec{v}\|)^{-1}$. Então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}}.$$

ii. Caso 01: Se $\vec{u} = \vec{0}$, por definição $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = 0}$. Por outro lado, $\|\vec{u}\|\|\vec{u}\| \cos\theta = 0 \cdot 0 \cdot \cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\|\|\vec{u}\| \cos\theta = 0}$. Como ambos os membros (olhe para a definição) são iguais a zero, vale a igualdade:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta}.$$

Caso 02: Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, note que $ang(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ (por que?). Temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\| \cos 0 = \|\vec{u}\|^2 \cdot 1 = \|\vec{u}\|^2 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}.$$

Observe que, ao "passar" a raiz quadrada para o outro membro, teríamos dois possíveis valores, porém, a norma de $\vec{u}$ sempre será positiva, logo tomamos o valor positivo.

iii. Caso 01: Se um dos vetores é nulo, a equivalência é válida, pois ambas as afirmações serão verdadeiras.

Caso 02: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, temos:

($\Rightarrow$) Queremos mostrar que se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. De fato, se $\vec{u} \perp \vec{v}$, temos que $\theta = \frac{\pi}{2}$, logo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \cos\frac{\pi}{2} = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$

($\Leftarrow$) Queremos mostrar que, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$. De fato, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, temos:

$$||\vec{u}||||\vec{v}|| \cos\theta = 0.$$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, suas normas são diferentes de zero, logo podemos multiplicar a igualdade acima por $\frac{1}{||\vec{u}||||\vec{v}||}$. Portanto:

$$\cos\theta = \frac{0}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0.$$

Lembrando que da definição de ângulo entre vetores $0 \leq \theta \leq \pi$, e o único valor de θ no intervalo $[0, \pi]$ que satisfaz $\cos\theta = 0$ é $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo:

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}.$$

Assim, se $ang(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$, temos por definição que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Observações:

01. Perceba que, se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, pode ocorrer:
i. $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
ii. $\vec{u} \perp \vec{v}$.

02. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$, temos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos.

03. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, temos $ang(\vec{u}, \vec{v}) = \theta$ é agudo, pois $\cos\theta > 0$. Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, esse ângulo é obtuso, pois $\cos\theta < 0$.

8.1.3 Proposição: Seja B uma base ortonormal. Se, em relação à base B, temos $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_B$, $\vec{v} = (b_1, b_1, b_3)_B$, então:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}.$$

Prova: O caso em que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são nulos, é imediato.
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, por definição, temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cos\theta \ldots (*)$$

Por outro lado, pela equação (8.1-E), temos:

$$||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cos\theta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ldots (**)$$

Substituindo (**) em (*), tem-se o desejado:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

<u>Observação</u>: É fundamental perceber que o produto escalar não dependerá das coordenadas do vetor em relação à base, desde que essa seja ortonormal. Se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são nulos, não há o que discutir, pois sabemos que o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ será igual à zero. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos, suponha que E e F sejam bases ortonormais. Temos:

$$\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)_E = (a_1', a_2', a_3')_F$$

$$\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)_E = (b_1', b_2', b_3')_F$$

Logo:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \left||\vec{u}|\right|\left||\vec{v}|\right| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \left||\vec{u}|\right|\left||\vec{v}|\right| \cos\theta} \ldots (I)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3' = \left||\vec{u}|\right|\left||\vec{v}|\right| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\left||\vec{u}|\right|\left||\vec{v}|\right| \cos\theta = a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3'} \ldots (II)$$

Substituindo (II) em (I), tem-se:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3'.$$

Isto é, independente das coordenadas, o produto vetorial é o mesmo. Em outras palavras, o produto vetorial não depende das coordenadas dos vetores, em relação a bases ortonormais.

<u>Exemplos</u>:

01. Em relação a uma base ortonormal, são dados $\vec{u} = (2,0,-3)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$. Calcule, em radianos, a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, se θ é a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, esta é dada por $\theta = \arccos\left[\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}\right]$.

Calculando $\vec{u} \cdot \vec{v}$, sabendo que $\vec{u} = (2,0,-3)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = -1}$$

Calculando $||\vec{u}||||\vec{v}||$, sabendo que $\vec{u} = (2,0,-3)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$:

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \Rightarrow \boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{13}}$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{||\vec{v}|| = \sqrt{3}}.$$

Portanto, $||\vec{u}||||\vec{v}|| = \sqrt{13} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{13 \cdot 3} = \sqrt{39} \Rightarrow \boxed{||\vec{u}||||\vec{v}|| = \sqrt{39}}$.

Finalmente, temos:

$$\theta = \arccos\left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}\right] = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{39}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{39}}{39}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{39}}{39}\right) rad}.$$

02. Sendo E uma base ortonormal, determine $x \in \Re$ de modo que os vetores $\vec{u} = (x, 10,200)_E$ e $\vec{v} = (-10, x, 0)_E$ sejam ortogonais.

De acordo com o item iii da Proposição 8.1.2, dois vetores são ortogonais se, e somente se, o produto escalar entre eles é zero. Portanto, façamos $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x, 10,200) \cdot (-10, x, 0) = -10 \cdot x + 10 \cdot x + 200 \cdot 0 = -10x + 10x + 0$$

$$= 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}.$$

Note que, independente do valor de x, o produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ resultou em zero. Logo, qualquer que seja $x \in \Re$, temos $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, o que é equivalente a $\vec{u} \perp \vec{v}$ para qualquer $x \in \Re$.

03. Determine $y \in \Re$ de modo que os vetores $\overrightarrow{u_1} = (y, 0,3)_E$ e $\overrightarrow{u_2} = (1, y, 3)_E$ sejam ortogonais, onde E é uma base ortonormal.

Queremos calcular o valor de y de modo que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais, mas isto é equivalente a determinar o valor de y que satisfaça $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Vejamos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (y, 0,3) \cdot (1, y, 3) = 0 \Leftrightarrow y \cdot 1 + 0 \cdot y + 3 \cdot 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y + 9 = 0.$$

Para determinar tal valor de y, basta resolver a equação $y + 9 = 0$. Sua solução é $y = -9$.

Portanto, por iii da Proposição 8.1.2, o valor de y que torna os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ortogonais é o mesmo valor que torna o produto escalar entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nulo, isto é, $\boxed{y = -9}$.

04. Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)_E$, $\vec{v} = (\alpha, 2,3)_E$ e $\overrightarrow{AB} = (1, -3,3)_E$, determine o valor de $\alpha \in \Re$ tal que $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \overrightarrow{AB}\right) = 5$.

Note que:

$$\vec{v} + \overrightarrow{AB} = (\alpha, 2,3)_E + (1, -3,3)_E = (\alpha + 1, -1,6)_E \Rightarrow \boxed{\vec{v} + \overrightarrow{AB} = (\alpha + 1, -1,6)}.$$

Então:

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \overrightarrow{AB}\right) = 5 \Leftrightarrow (4, \alpha, -1) \cdot (\alpha + 1, -1,6) = 5 \Leftrightarrow 4(\alpha + 1) - \alpha - 6 = 5$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha + 4 - \alpha - 6 = 5 \Leftrightarrow 3\alpha - 2 = 5 \Leftrightarrow 3\alpha = 7 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{7}{3}}.$$

8.1.4 Proposição: Quaisquer que sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$ e $\lambda \in \Re$, valem as propriedades:

P1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;

P2. $\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$;

P3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;

P4. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

P5. A propriedade P1 é válida para uma quantidade finita qualquer de vetores, isto é, $\vec{u} \cdot (\overrightarrow{v_1} + \cdots + \overrightarrow{v_n}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{v_1} + \cdots + \vec{u} \cdot \overrightarrow{v_n}$.

<u>Exemplos</u>:

01. Sabendo que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores unitários e que $ang(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$, $ang(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{4}$ e $ang(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{2}$, prove que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base.

Para provar que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base, basta mostrar que este conjunto é LI, de acordo com a definição de base.

Agora, nossa tarefa é mostrar que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI. Para isto, façamos uma combinação linear dos vetores do conjunto e igualemos esta combinação ao vetor nulo, ou seja, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$. Assim sendo, por um resultado já visto, mostrar que o conjunto é LI, é equivalente a mostrar que os coeficientes α, β, γ tais que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ são todos nulos. Façamos isto:

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}} \ldots (I)$$

1º passo: Façamos o produto escalar de $\vec{u}$ nos dois membros de (I):

$$\vec{u} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = 0$$

$$\overset{P5}{\Rightarrow} \vec{u} \cdot (\alpha\vec{u}) + \vec{u} \cdot (\beta\vec{v}) + \vec{u} \cdot (\gamma\vec{w}) = 0 \overset{P2}{\Rightarrow} \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \gamma(\vec{u} \cdot \vec{w}) = 0$$

$$\overset{Def.}{\Longrightarrow} \alpha\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2 + \beta\left|\left|\vec{u}\right|\right|\left|\left|\vec{v}\right|\right|\cos\frac{\pi}{6} + \gamma\left|\left|\vec{u}\right|\right|\left|\left|\vec{w}\right|\right|\cos\frac{\pi}{4} = 0 \ldots (*)$$

Como, por hipótese, os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são unitários, temos:

$$\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \left|\left|\vec{v}\right|\right| = \left|\left|\vec{w}\right|\right| = 1.$$

Substituindo o valor de cada norma na equação (*):

$$\alpha \cdot 1^2 + \beta \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \gamma \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma = 0} \ldots (\Delta)$$

2º passo: Façamos o produto escalar de $\vec{v}$ nos dois membros de (I):

$$\vec{v} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{0} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = 0$$

$$\overset{P5}{\Rightarrow} \vec{v} \cdot (\alpha\vec{u}) + \vec{v} \cdot (\beta\vec{v}) + \vec{v} \cdot (\gamma\vec{w}) = 0 \overset{P2}{\Rightarrow} \alpha(\vec{v} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \gamma(\vec{v} \cdot \vec{w}) = 0$$

$$\overset{Def.}{\Longrightarrow} \alpha\left|\left|\vec{u}\right|\right|\left|\left|\vec{v}\right|\right|\cos\frac{\pi}{6} + \beta\left|\left|\vec{v}\right|\right|^2 + \gamma\left|\left|\vec{v}\right|\right|\left|\left|\vec{w}\right|\right|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\overset{Hip.}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \beta = 0} \ldots (\Delta\Delta)$$

3º Passo: Façamos o produto escalar de $\vec{w}$ nos dois membros de (I):

$$\vec{w} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{0} = 0 \Rightarrow \vec{w} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}) = 0$$

$$\overset{P5}{\Rightarrow} \vec{w} \cdot (\alpha\vec{u}) + \vec{w} \cdot (\beta\vec{v}) + \vec{w} \cdot (\gamma\vec{w}) = 0 \overset{P2}{\Rightarrow} \alpha(\vec{w} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{w} \cdot \vec{v}) + \gamma(\vec{w} \cdot \vec{w}) = 0$$

$$\overset{Def.}{\Longrightarrow} \alpha\left|\left|\vec{w}\right|\right|\left|\left|\vec{u}\right|\right|\cos\frac{\pi}{4} + \beta\left|\left|\vec{w}\right|\right|\left|\left|\vec{v}\right|\right|\cos\frac{\pi}{2} + \gamma\left|\left|\vec{w}\right|\right|^2 = 0$$

$$\overset{Hip.}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha + \gamma = 0} \dots (\Delta\Delta\Delta)$$

Juntando $(\Delta), (\Delta\Delta)$ e $(\Delta\Delta\Delta)$ temos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \beta = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha + \gamma = 0 \end{cases}.$$

Este sistema admite somente a solução $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Portanto, como $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ implicou $\alpha = \beta = \gamma = 0$, concluímos que o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI e, por definição, é uma base.

02. Sabendo que $\vec{v} = (2,1,-1)$ forma um ângulo de 60^o com o vetor $\overrightarrow{AB} = (1,-1,\omega + 2)$, determinemos o valor de ω.

Sabemos que $\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}}{||\vec{v}||\,||\overrightarrow{AB}||}$, e $\theta = 60^o = \frac{\pi}{3}$. Então:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}}{||\vec{v}||\,\left||\overrightarrow{AB}|\right|} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{2} = \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB}}{||\vec{v}||\,\left||\overrightarrow{AB}|\right|}} \dots (I)$$

Calculando $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB} = (2,1,-1)\cdot(1,-1,\omega+2) = 2 - 1 - \omega - 2 = -1 - \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}\cdot\overrightarrow{AB} = -1 - \omega}.$$

Calculando $\left||\vec{v}|\right|$:

$$\left|\left|\vec{v}\right|\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \Rightarrow \boxed{\left|\left|\vec{v}\right|\right| = \sqrt{6}}.$$

Calculando $\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|$:

$$\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\omega + 2)^2} = \sqrt{1 + 1 + \omega^2 + 4\omega + 4} = \sqrt{\omega^2 + 4\omega + 6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| = \sqrt{\omega^2 + 4\omega + 6}}.$$

Substituindo os valores em (I):

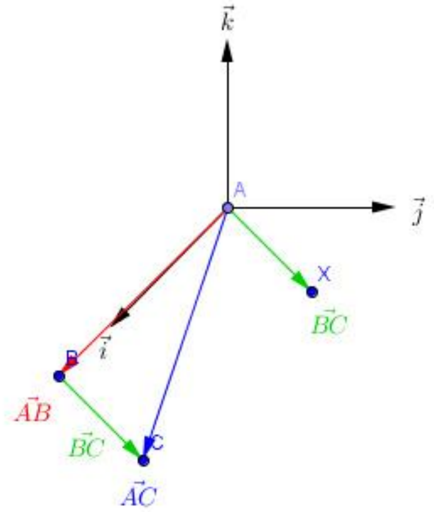
$$\frac{1}{2} = \frac{-1 - \omega}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{\omega^2 + 4\omega + 6}} \Rightarrow \sqrt{6\omega^2 + 24\omega + 36} = -2 - 2\omega$$

$$\xRightarrow{eleva\ ao\ quadrado} 6\omega^2 + 24\omega + 36 = 4 + 8\omega + 4\omega^2 \Rightarrow 2\omega^2 + 16\omega + 32 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 + 8\omega + 16 = 0 \Rightarrow (\omega + 4)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = -4}\ raiz\ dupla.$$

03. Suponha $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ uma base ortonormal. Vamos provar que o triângulo formado por $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (0, -1, -3)$ e $\overrightarrow{BC} = (0,1, -1)$ é retângulo (omitimos o índice B, mas assuma que as coordenadas dos vetores são dadas na base B).

(A, X) *é o representante de* $\vec{BC}$ *com origem em* A.



Para provar que o triângulo ABC é retângulo, devemos mostrar que dois de seus lados são ortogonais, ou seja, devemos mostrar que dois dos vetores que estão determinando seus lados são ortogonais, o que equivale a provar que o produto escalar entre dois dos vetores é igual à zero. Vejamos:

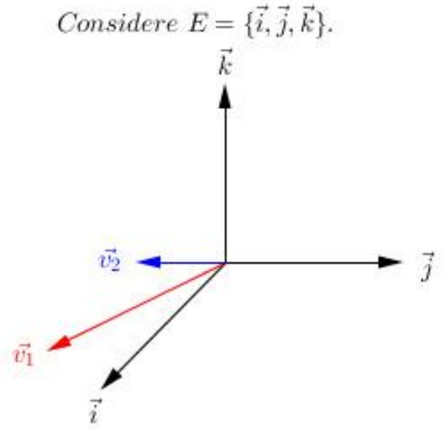
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (0,-2,-2) \cdot (0,-1,-3) = 2 + 6 = 8 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \; e \; \overrightarrow{AC} \; não \; são \; ortogonais.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (0,-2,-2) \cdot (0,1,-1) = -2 + 2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}.$$

Portanto, o triângulo ABC é retângulo em B.

04. Sendo $\overrightarrow{v_1} = (1,-1,0)_E$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,0,1)_E$, onde E é uma base ortonormal, determinemos um vetor $\vec{u} \in V^3$ que seja ortogonal a $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.



Seja $\vec{u} = (x, y, z)_E \in V^3$, para que $\vec{u}$ seja ortogonal a $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, devemos ter $\vec{u} \cdot \vec{v_1} = 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$. Então:

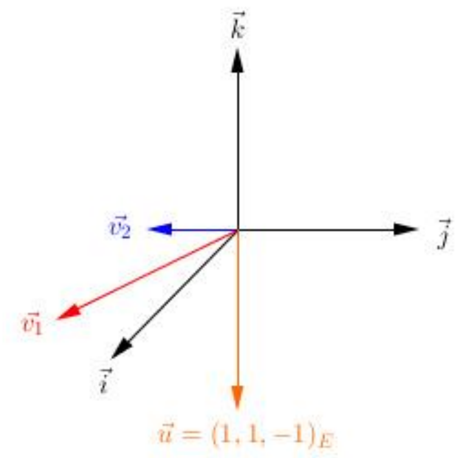
$$\vec{u} \cdot \vec{v_1} = (x, y, z) \cdot (1, -1, 0) = x - y = 0 \Rightarrow \boxed{x - y = 0} \ldots (*)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v_2} = (x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = x + z = 0 \Rightarrow \boxed{x + z = 0} \ldots (**)$$

Junto (*) e (**), temos o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Donde $y = x$, $z = -x$ e $x \in \Re$ é qualquer. Portanto, qualquer vetor da forma $\vec{u} = (x, x, -x)_E$ é ortogonal a $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$.
Por exemplo, se $x = 1$, então $\vec{u} = (1, 1, -1)_E$. Observe:



8.1.5 Proposição: $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ é uma base ortonormal se, e somente se, $\begin{cases} \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_3} = 1 \\ \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_3} = 0 \end{cases}$.

<u>Exemplo</u>:

Vamos mostrar que $\left||\vec{u} + \vec{v}|\right|^2 = \left||\vec{u}|\right|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \left||\vec{v}|\right|^2$.
Sabemos por ii da Proposição 8.1.2 que, para qualquer $\vec{w} \in V^3$, tem-se $\left||\vec{w}|\right| = \sqrt{\vec{w} \cdot \vec{w}}$. Usando este resultado para $\vec{u} + \vec{v}$, temos:

$$\left||\vec{u} + \vec{v}|\right| = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})}.$$

Ou ainda:

$$\left||\vec{u} + \vec{v}|\right|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}).$$

Partindo disso, vamos mostrar o desejado:

$$\left||\vec{u} + \vec{v}|\right|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

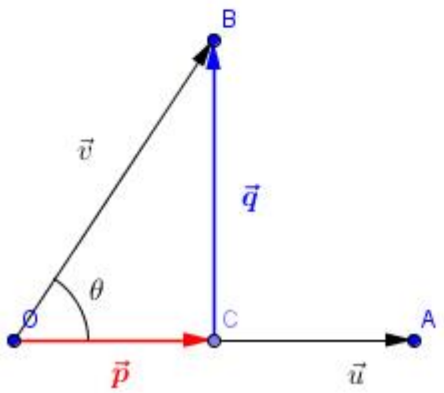
$$= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= ||\vec{u}||^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v} + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + ||\vec{v}||^2$$

$$\Rightarrow \boxed{||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + ||\vec{v}||^2}.$$

8.2 PROJEÇÃO ORTOGONAL

Nesta seção, vamos falar sobre o importante conceito de projeção ortogonal de um vetor sobre outro. Por exemplo, considere os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ não nulos que formam um ângulo agudo de medida θ, de acordo com a figura.



O ponto C é o pé da perpendicular a OC passando por B. O vetor $\vec{p} = \overrightarrow{OC}$ será o vetor que nos interessa, o qual será chamado de *projeção ortogonal* $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

É obvio que $\vec{p}//\vec{u}$, e o vetor $\vec{p}$ é o único vetor paralelo a $\vec{u}$ tal que o vetor soma $\vec{v} + (-\vec{p}) = \overrightarrow{CB}$ é ortogonal a $\vec{u}$.

Podemos ainda escrever $\vec{v} - \vec{p} = \overrightarrow{CB} = \vec{q}$, e assim:

$$\boxed{\vec{p} + \vec{q} = \vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{p}//\vec{u}}$$

$$\boxed{\vec{q} \perp \vec{u}}.$$

8.2.1 Definição: Seja $\vec{u} \neq \vec{0}$ um vetor. Dado $\vec{v} \in V^3$, o vetor $\vec{p} \in V^3$ é chamado de *projeção ortogonal* de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, denotado por $proj_{\vec{u}}\vec{v}$, se satisfaz as condições:

i. $\vec{p}//\vec{u}$;

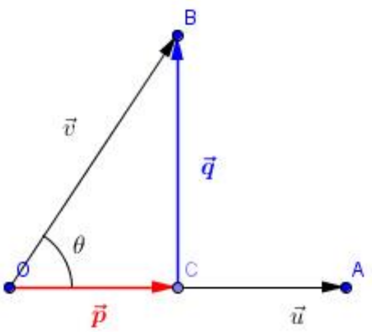
ii. $(\vec{v} - \vec{p}) \perp \vec{u}$.

Como $\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v}$, reescrevemos as condições i e ii usando esta notação:

i'. $proj_{\vec{u}}\vec{v}//\vec{u}$;

ii'. $(\vec{v} - proj_{\vec{u}}\vec{v}) \perp \vec{u}$.

Voltando a observar a figura anterior:



No triângulo retângulo OBC, note que $\cos\theta = \frac{||\vec{p}||}{||\vec{v}||}$ ou $||\vec{p}|| = ||\vec{v}||\cos\theta$ e ainda:

$$||\vec{p}|| = \left(\frac{||\vec{u}||}{||\vec{u}||}\right)||\vec{v}||\cos\theta = \frac{||\vec{u}||||\vec{v}||\cos\theta}{||\vec{u}||} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||}$$

$$\Rightarrow \boxed{||\vec{p}|| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||}} \ldots (*)$$

Por outro lado, como $\vec{u}$ e $\vec{p}$ são de mesmo sentido, podemos escrever:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{||\vec{p}||}{||\vec{u}||}\vec{u}} \ldots (**)$$

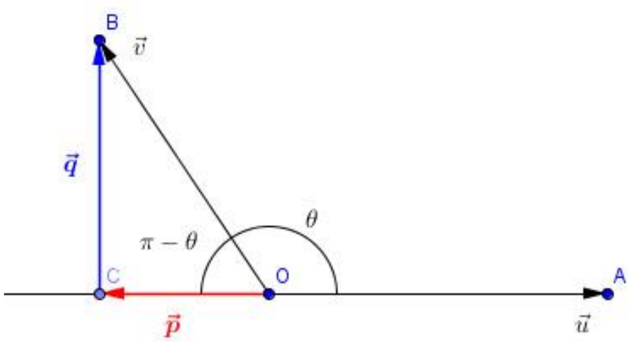
Substituindo (*) em (**), temos:

$$\vec{p} = \frac{\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||}\right)}{||\vec{u}||}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||^2}\right)\vec{u} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||^2}\right)\vec{u}}$$

Logo, podemos escrever uma "fórmula" alternativa para a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$:

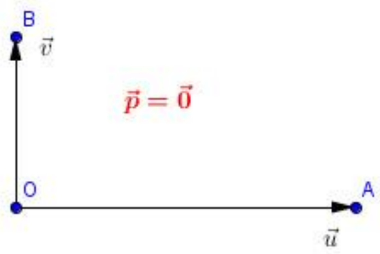
$$\boxed{proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||^2}\right)\vec{u}}.$$

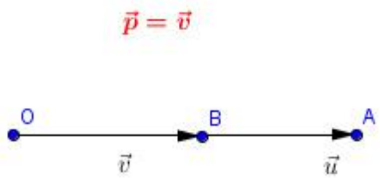
Observação: As expressões para $\vec{p}$ e $||\vec{p}||$ ainda não podem ser utilizadas para um caso geral, pois só são válidas para o triângulo OBC da figura acima. A seguir, consideramos outra figura e faremos a análise.



Na figura acima, a igualdade $||\vec{p}|| = ||\vec{v}|| \cos\theta$ não é válida, pois a medida do ângulo $B\hat{O}C$ é $\pi - \theta$ e não θ.

Nas figuras abaixo, observe:





A proposição a seguir fala sobre a unicidade da projeção ortogonal de um vetor sobre outro.

8.2.2 Proposição: Considere o vetor $\vec{u} \neq \vec{0}$. Para todo $\vec{v} \in V^3$, existe uma única projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. A projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é dada por:

$$\boxed{proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2}\right]\vec{u}}.$$

A norma do vetor projeção é dada por:

$$\boxed{\left|\left|proj_{\vec{u}}\vec{v}\right|\right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|}}.$$

Prova: De acordo com a definição de projeção ortogonal, dizer que $\vec{p}$ é projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é equivalente a dizer que $\vec{p}//\vec{u}$ e que $(\vec{v}-\vec{p}) \perp \vec{u}$.

Mas dizer que $\vec{p}$ é paralelo a $\vec{u}$ é equivalente a dizer que $\vec{p} = \lambda\vec{u}$. Logo podemos escrever $(\vec{v}-\lambda\vec{u}) \perp \vec{u}$.

Agora, para mostrar que a projeção ortogonal é única, devemos mostrar que $\lambda \in \Re$ é o único valor a satisfazer $(\vec{v}-\lambda\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$ (esta igualdade vem do fato de que $(\vec{v}-\lambda\vec{u})$ e $\vec{u}$ são ortogonais). De fato:

$$(\vec{v}-\lambda\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} - \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \lambda\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2}}.$$

E este valor de λ é único. Disso decorre que:

$$\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \lambda\vec{u} = \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2}\right]\vec{u} \Leftrightarrow proj_{\vec{u}}\vec{v} = \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2}\right]\vec{u}.$$

A norma vem de:

$$\left|\left|\vec{p}\right|\right| = \left|\left|\lambda\vec{u}\right|\right| = |\lambda|\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \left|\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2}\right|\left|\left|\vec{u}\right|\right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\cancel{\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2}}\cancel{\left|\left|\vec{u}\right|\right|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|}$$

$$\Rightarrow \left|\left|\vec{p}\right|\right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|} \Leftrightarrow \left|\left|proj_u\vec{v}\right|\right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\left|\left|\vec{u}\right|\right|}.$$

Exemplos:

01. Sejam $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal, $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$. Vamos obter a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Sabemos que $\vec{p} = proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$. Vamos determinar cada valor da expressão. Temos $\vec{u} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k} = (2,-2,1)_B$ e $\vec{v} = 3\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} = (2,-6,0)_B$, logo:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-2,1)_B \cdot (3,-6,0)_B = 2\cdot 3 + (-2)\cdot(-6) + 1\cdot 0 = 6 + 12 + 0 = 18$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = 18}.$$

$$\left||\vec{u}|\right|^2 = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 = 4 + 4 + 1 = 9 \Rightarrow \boxed{\left||\vec{u}|\right|^2 = 9}.$$

Desta forma:

$$\vec{p} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left||\vec{u}|\right|^2}\vec{u} = \frac{18}{9}\vec{u} = 2\vec{u} = 2(2,-2,1)_B = (4,-4,2)_B$$

$$\Rightarrow \boxed{proj_{\vec{u}}\vec{v} = (4,-4,2)_B}.$$

Para determinar o vetor $\vec{q} = \vec{v} - \vec{p}$ ortogonal a $\vec{u}$:

$$\vec{q} = (3,-6,0)_B - (4,-4,2)_B = (3-4,-6+4,0-2)_B = (-1,-2,-2)_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{q} = (-1,-2,-2)_B}.$$

Note que $\vec{q}$ é, de fato, ortogonal a $\vec{u}$, pois se fizermos $\vec{u}\cdot\vec{v}$ este produto escalar será igual à zero:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-2,1)_B \cdot (-1,-2,-2)_B = -2 + 4 - 2 = 0.$$

[CAPÍTULO 09: PRODUTO VETORIAL]

9.1 INTRODUÇÃO

A partir de agora, fixamos nossa base ortonormal $E = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ na origem do sistema cartesiano $\Re^3$ de modo que os vetores $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$ tenham origem na origem de $\Re^3$ e extremidade nos pontos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$, respectivamente. Assim, escrevemos $\vec{\imath} = (1,0,0)$, $\vec{\jmath} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$. Chamamos a base E de *base canônica*.

9.1.1 Definição: Sejam $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ uma base ortnormal, $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_B$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_B$ vetores, tomados nesta ordem, chama-se *produto vetorial* de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, representado por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (x_2 y_3 - x_2 y_2)\vec{\imath} - (x_1 y_3 - x_3 y_1)\vec{\jmath} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}}.$$

Ou:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)_B}.$$

Cada coordenada do vetor produto vetorial pode ainda ser reescrita usando os determinantes de ordem 2, da seguinte maneira:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Podemos ainda usar um determinante "simbólico" de ordem 3, cuja primeira linha é composta pelos vetores da base ortonormal considerada, isto é:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

<u>Exemplo</u>:

O produto vetorial entre $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$ é dado da seguinte maneira:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{matrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k} - 5\vec{j} = 4\vec{i} + (3-5)\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Note que, ao fazermos o produto $\vec{v} \times \vec{u}$, ocorre:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{matrix} = 5\vec{j} + 4\vec{k} - 4\vec{i} - 3\vec{j} = -4\vec{i} + (5-3)\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{u} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Obtemos vetores opostos, isto é, o produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é diferente do produto vetorial de $\vec{v}$ por $\vec{u}$. E vale $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$.

9.1.2 Proposição: Seja $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal, $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_E$ e $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)_E$ vetores de V^3. Valem as propriedades:

i. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$;

ii. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$;

iii. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$;

iv. $(m\vec{u}) \times \vec{v} = m(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (m\vec{v})$;

v. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD ou se um dos vetores é nulo;

vi. $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ e $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$.

Prova:

i. Sabemos que $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$, logo o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{u}$ é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 \end{matrix} = x_2x_3\vec{i} + x_1x_3\vec{j} + x_1x_2\vec{k} - x_1x_2\vec{k} - x_2x_3\vec{i} - x_1x_3\vec{j}$$

$$= (x_2x_3 - x_2x_3)\vec{i} + (x_1x_3 - x_1x_3)\vec{j} + (x_1x_2 - x_1x_2)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}}.$$

ii. Como $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_E$, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}.$$

Por outro lado, temos:

$$\vec{v} \times \vec{u} = (y_2x_3 - y_3x_2)\vec{i} - (y_1x_3 - y_3x_1)\vec{j} + (y_1x_2 - y_2x_1)\vec{k}$$

$$= -(x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} - [-(x_1y_3 - x_3y_1)]\vec{j} - (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

$$= -\left[(x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} - (x_1y_3 - x_3y_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}\right] = -(\vec{u} \times \vec{v})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})}.$$

iii. Sabemos que $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$ e que $\vec{v} + \vec{w} = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)_E$. Por definição:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 & y_3 + z_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ x_1 & x_2 \\ y_1 + z_1 & y_2 + z_2 \end{matrix}$$

$$= x_2(y_3 + z_3)\vec{i} + x_3(y_1 + z_1)\vec{j} + x_1(y_2 + z_2)\vec{k} - x_2(y_1 + z_1)\vec{k} - x_3(y_2 + z_2)\vec{i} - x_1(y_3 + z_3)\vec{j}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}}.$$

iv. Sabemos que $m\vec{u} = (mx_1, mx_2, mx_3)_E$. Logo:

$$(m\vec{u})\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ mx_1 & mx_2 & mx_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = m(\vec{u}\times\vec{v}).$$

Por outro lado, sabemos que $m\vec{v} = (my_1, my_2, my_3)$, então:

$$m(\vec{u}\times\vec{v}) = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ my_1 & my_2 & my_3 \end{vmatrix} = \vec{u}\times(m\vec{v}).$$

v. $(\Rightarrow)$ Queremos mostrar que se $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD. De fato, se $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$, as coordenadas de $\vec{u}\times\vec{v}$ são nulas, isto é:

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \; e \; \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Estes determinantes serão iguais a zero se cada coordenada de $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ for nula e, então teríamos que um dos vetores é nulo. Os determinantes seriam, também, iguais a zero se $[x_1, x_2, x_3]$ e $[y_1, y_2, y_3]$ fossem proporcionais e, neste caso, teríamos $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ linearmente dependente.

$(\Leftarrow)$ Caso 01: Queremos mostrar que se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}$. De fato, suponha $\vec{u} = \vec{0}$, então $\vec{u} = (0,0,0)_E$ e:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0}.$$

Para $\vec{v}=\vec{0}$, é análogo.

Caso 02: Queremos mostrar que se o conjunto $\{\vec{u},\vec{v}\}$ é LD, então $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$. De fato, se $\{\vec{u},\vec{v}\}$ é LD, então $\vec{u}=\lambda\vec{v}$. Logo se $\vec{v}=(y_1,y_2,y_2)_E$, então $\vec{u}=(\lambda y_1,\lambda y_2,\lambda y_3)_E$. Portanto:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \lambda y_1 & \lambda y_2 & \lambda y_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=0\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+0\vec{k}=\vec{0}.$$

E temos o desejado.

vi. Queremos provar que os o produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, mas isso equivale a mostrar que $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0$ e $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v}=0$. De fato:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=(x_2y_3-x_3y_2,-x_1y_3+x_3y_1,x_1y_2-x_2y_1)_E\cdot(x_1,x_2,x_3)_E$$

$$=x_1(x_2y_3-x_3y_2)+x_2(-x_1y_3+x_3y_1)+x_3(x_1y_2-x_2y_1)$$

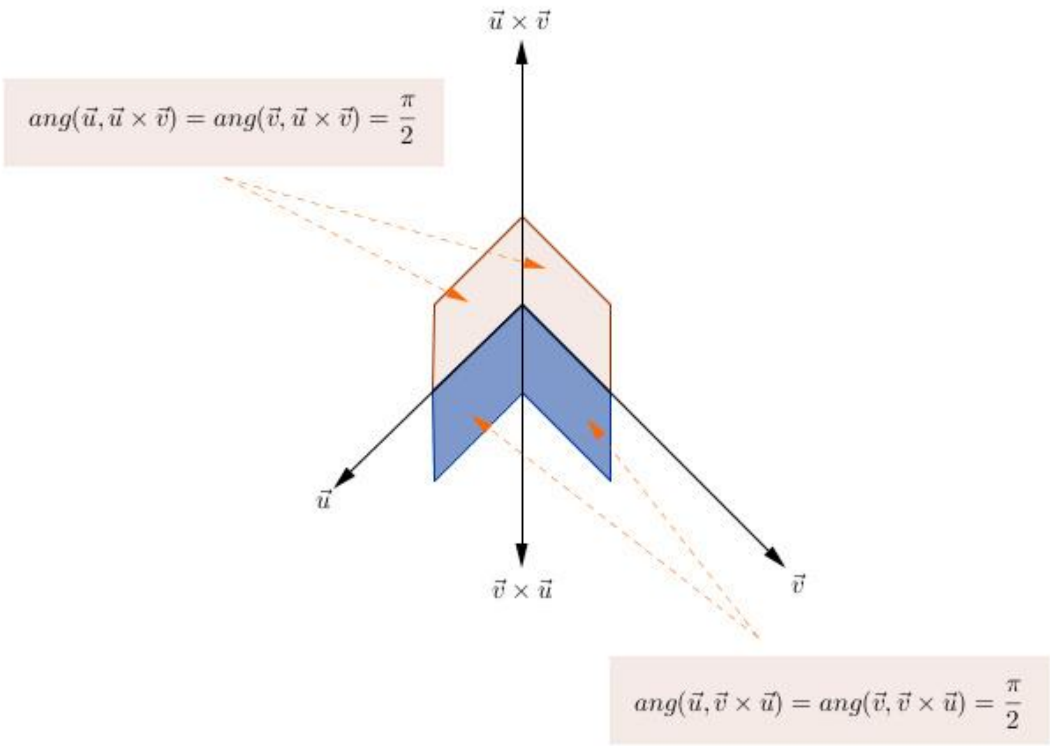
$$=x_1x_2y_3-x_1x_3y_2-x_1x_2y_3+x_2x_3y_1+x_1x_3y_2-x_2x_3y_1=0$$

$$\Rightarrow\boxed{(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}}.$$

De forma análoga conclui-se que $\boxed{(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}}$.

Observação: Note que de (vi) podemos dizer que se $\{\vec{u},\vec{v}\}$ é LI, então $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ e $\{\vec{u},\vec{v},\vec{v}\times\vec{u}\}$ formam bases para o espaço, pois o vetor obtido pelo produto vetorial de dois vetores é ortogonal a estes.
Como o vetor $\vec{v}\times\vec{u}$ é oposto de $\vec{u}\times\vec{v}$, tem-se $ang(\vec{u}\times\vec{v},\vec{v}\times\vec{u})=\pi$. Logo $\vec{v}\times\vec{u}$ também será ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

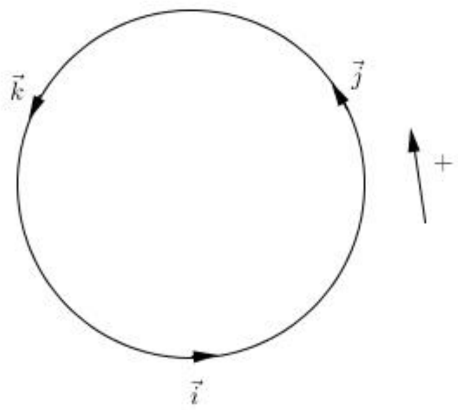
Uma ilustração das bases $\{\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}\}$ e $\{\vec{u},\vec{v},\vec{v}\times\vec{u}\}$ é dada na figura abaixo:



Considerando a base canônica $E = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, observe que:

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = (1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}}.$$

Analogamente $\vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$ e $\vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}$. Note que, os vetores $\vec{\imath}$ e $\vec{k}$ não estão "um ao lado do outro", ou ainda, $\vec{k}$ não vem depois de $\vec{\imath}$ no conjunto $\{\boldsymbol{\vec{\imath}}, \vec{\jmath}, \boldsymbol{\vec{k}}\}$, logo o produto vetorial entre eles, resulta no vetor oposto de $\vec{\jmath}$ e, desta forma, $\vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$. Considerando a figura abaixo:



Se pensarmos em um ciclo, o vetor que "vem depois" de $\vec{i}$ é $\vec{j}$, logo o produto vetorial entre $\vec{i}$ e $\vec{j}$ resulta no outro vetor da base, que é $\vec{k}$. Analogamente, o vetor que vem depois de $\vec{j}$ é $\vec{k}$, portanto o produto vetorial entre $\vec{j}$ e $\vec{k}$ é o outro vetor da base, que é $\vec{i}$. Perceba que $\vec{k}$ não vem depois de $\vec{i}$, por isso o produto $\vec{i}\times\vec{k}$ não resulta em $\vec{j}$. Porém, observando o ciclo, o vetor que vem depois de $\vec{k}$ é $\vec{i}$, desta forma o produto $\vec{k}\times\vec{i}$ resulta no outro vetor da base, que é $\vec{j}$.

Ainda podemos dizer que a base $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ é de *sentido positivo*, de acordo com a ordem circular fixada. No momento em que a ordem circular é fixada, pode-se analisar que as bases $\{\vec{j},\vec{k},\vec{i}\}$ e $\{\vec{k},\vec{i},\vec{j}\}$ também são de sentido positivo. Logo, fazendo o produto vetorial de vetores sucessivos, na ordem apropriada, obtém-se o terceiro vetor da base.

9.1.3 Proposição: Seja $E = \{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ uma base ortonormal, $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_E$ e $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)_E$ vetores de V^3. Valem as propriedades:

i. $||\vec{u}\times\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2 - (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$ (Identidade de Lagrange);

ii. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\theta = ang(\vec{u},\vec{v})$, então $||\vec{u}\times\vec{v}|| = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \sin\theta$;

iii. Não é válido $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})$.

Prova:

i. Como $\vec{u}\times\vec{v} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)_E$, temos:

$$||\vec{u}\times\vec{v}||^2 = (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (-x_1y_3 + x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

Por outro lado, se $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_E$, temos:

$$||\vec{u}||^2 \cdot ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2$$

Realizando os devidos cálculos, constata-se que:

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

A Identidade de Lagrange ainda pode ser reescrita por:

$$\boxed{(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}.$$

ii. Sabemos que $||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$. Por outro lado, da definição de produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cos\theta$ e, substituindo na Identidade de Lagrange:

$$||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 - (||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cos\theta)^2 = ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 \cos^2\theta$$

$$= ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 (1 - \cos^2\theta) = ||\vec{u}||^2 ||\vec{v}||^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow ||\vec{u} \times \vec{v}||^2 = (||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \sin\theta)^2 \Rightarrow \sqrt{||\vec{u} \times \vec{v}||^2} = \sqrt{(||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \sin\theta)^2}$$

$$\Rightarrow {}^{2}\boxed{||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \sin\theta}.$$

iii. Note que o vetor $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ é coplanar a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, enquanto $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ é coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, em geral $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

---

[2] Lembre-se que $\sqrt{a^2} = |a| = a$, se $a \geq 0$ (que é o caso: $||\vec{u} \times \vec{v}|| \geq 0$ e $||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \sin\theta \geq 0$, pois $\sin\theta \geq 0$ para $\theta \in [0, \pi]$).

Exemplo:

Vamos determinar um vetor unitário que seja ortogonal a $\vec{u}=(2,-6,3)$ e $\vec{v}=(4,3,1)$.

Sabemos que o vetor $\vec{u}\times\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente ($\vec{v}\times\vec{u}$ também). Portanto, temos:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left|\begin{matrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -6 & 3\\ 4 & 3 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath}\\ 2 & -6\\ 4 & 3\end{matrix}=-6\vec{\imath}+12\vec{\jmath}+6\vec{k}+24\vec{k}-9\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=-15\vec{\imath}+10\vec{\jmath}+30\vec{k}=(-15,10,30).$$

Para determinar agora um vetor unitário à $\vec{u}$ e $\vec{v}$, basta determinar o versor de $\vec{u}\times\vec{v}$. Então:

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{||\vec{u}\times\vec{v}||}=\frac{1}{||\vec{u}\times\vec{v}||}(-15,10,30)=\frac{1}{\sqrt{(-15^2)+10^2+30^2}}(-15,10,30)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{225+100+900}}(-15,10,30)=\frac{1}{\sqrt{1125}}(-15,10,30)=\frac{1}{35}(-15,10,30)$$

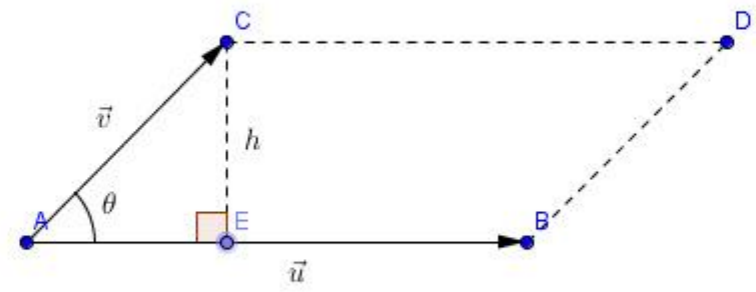
$$=\left(-\frac{15}{35},\frac{10}{35},\frac{30}{35}\right)=\left(-\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right).$$

Portanto, o vetor unitário ortogonal à $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente é:

$$\boxed{\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{||\vec{u}\times\vec{v}||}=\left(-\frac{3}{7},\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)}.$$

9.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO VETORIAL

Se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, a norma do produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede a área do paralelogramo $ABCD$. Observe:



Note que, a área do paralelogramo $ABCD$ é dada por:

$$\boxed{A(ABCD) = ||\vec{u}||h} \dots (I)$$

Do triângulo retângulo ACE tem-se:

$$\sin\theta = \frac{h}{||\vec{v}||} \Rightarrow \boxed{h = ||\vec{v}|| \sin\theta} \dots (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$A(ABCD) = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \sin\theta.$$

Por outro lado, já foi visto que $||\vec{u}\times\vec{v}|| = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \sin\theta$. Logo, segue que:

$$\boxed{A(ABCD) = ||\vec{u}\times\vec{v}||}.$$

<u>Exemplos</u>: Para os exemplos a seguir considere $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma base ortonormal.

01. Dados os vetores $\vec{u} = (1,2,-1)_E$ e $\vec{v} = (0,-1,3)_E$, vamos calcular a área do paralelogramo determinado pelos vetores $3\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{u}$. Sabemos que a área do

paralelogramo determinado por $3\vec{u}$ e $\vec{v}-\vec{u}$ é dada pela norma do vetor $3\vec{u}\times(\vec{v}-\vec{u})$. Portanto:

$$A=\left\|3\vec{u}\times(\vec{v}-\vec{u})\right\|=\left\|3\vec{u}\times\vec{v}+3\vec{u}\times(-\vec{u})\right\|=\left\|3(\vec{u}\times\vec{v})+3[\vec{u}\times(-\vec{u})]\right\|$$

$$=\left\|3(\vec{u}\times\vec{v})+3\cdot(-1)(\vec{u}\times\vec{u})\right\|=\left\|3\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&2&-1\\0&-1&3\end{vmatrix}-3\vec{0}\right\|$$

$$=\left\|3\left(6\vec{i}-\vec{k}-\vec{i}-3\vec{j}\right)-\vec{0}\right\|=\left\|3\left(5\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}\right)\right\|=\left\|3(5,-3,-1)_E\right\|$$

$$=|3|\cdot\left\|(5,-3,-1)_E\right\|=3\sqrt{5^2+(-3)^2+(-1)^2}=3\sqrt{25+9+1}=3\sqrt{35}$$

$$\Rightarrow\boxed{A=3\sqrt{35}}.$$

02. Determine o conjunto de soluções de $\begin{cases}\vec{x}\times\left(\vec{i}+2\vec{k}\right)=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\\ \vec{x}\cdot\vec{j}=1\end{cases}$. Para isto, vamos tomar $\vec{x}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=(a,b,c)_E$. Sabemos também que $\vec{i}+2\vec{k}=(1,0,2)_E$, $2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(2,1,-1)_E$ e $\vec{j}=(0,1,0)_E$. Portanto, reescrevemos o sistema:

$$\begin{cases}(a,b,c)_E\times(1,0,2)_E=(2,1,-1)_E\ \ldots(I)\\ (a,b,c)_E\cdot(0,1,0)_E=1\ \ldots(II)\end{cases}$$

Da equação (I), vem:

$$(a,b,c)_E\times(1,0,2)_E=(2,1,-1)_E\Leftrightarrow\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a&b&c\\1&0&2\end{vmatrix}=(2,1,-1)_E$$

$$\Leftrightarrow(2b-c\cdot0)\vec{i}-(2a-c)\vec{j}+(a\cdot0-b)\vec{k}=(2,1,-1)_E$$

$$\Leftrightarrow 2b\vec{i}+(c-2a)\vec{j}+(-b)\vec{k}=(2,1,-1)_E\Leftrightarrow(2b,c-2a,-b)_E=(2,1,-1)_E$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b = 2 \\ c - 2a = 1 \\ -b = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = 1}\ e\ \boxed{c = 2a + 1}.$$

Assim, $\vec{x} = (a, 1, 2a + 1)$. Temos da equação (II):

$$(a, 1, 2a + 1)_E \cdot (0,1,0)_E = 1 \Leftrightarrow 1 = 1.$$

E isto nos diz que, para qualquer valor de $a \in \Re$, o vetor $\vec{x} = a\vec{\imath} + \vec{\jmath} + (2a + 1)\vec{k}$ é solução do sistema. Desta forma, o conjunto solução do sistema é $\{(a, 1, 2a + 1); a \in \Re\}$.

03. Sejam $\vec{u} = (3,1,-1)_E$ e $\vec{v} = (a, 0,2)_E$. Vamos calcular um valor para a de modo que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja $2\sqrt{6}$.
Sabemos que $A = \left|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|\right|$, então:

$$A = \left|\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|\right| \Leftrightarrow 2\sqrt{6} = \left|\left|(3,1,-1)_E\times(a, 0,2)_E\right|\right|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} = \left|\left|\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}\right|\right| \Leftrightarrow 2\sqrt{6} = \left|\left|(2 - 0)\vec{\imath} - (6 + a)\vec{\jmath} + (0 - a)\vec{k}\right|\right|$$

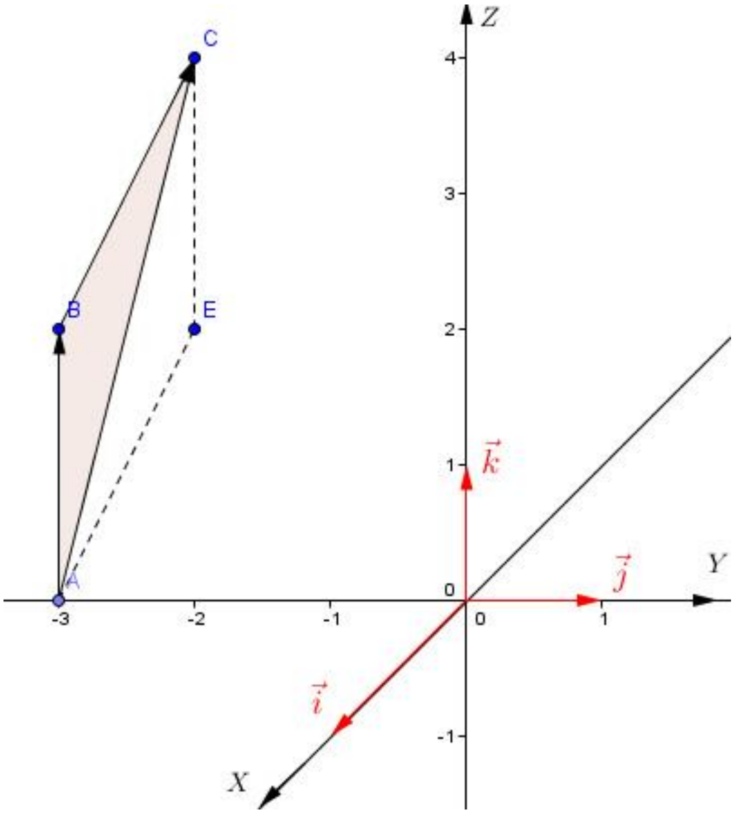
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{6} = \left|\left|(2, -a - 6, -a)_E\right|\right| \Leftrightarrow 2\sqrt{6} = \sqrt{2^2 + (-a - 6)^2 + (-a)^2}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 6 = 4 + a^2 + 12a + 36 + a^2 \Rightarrow 24 = 40 + 2a^2 + 12a$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 12a + 16 = 0 \Rightarrow \boxed{a^2 + 6a + 8 = 0}.$$

A solução desta equação é $a = -4$ ou $a = -2$.

04. Calcular a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (1, -2,1)$, $B = (2, -1,4)$ e $C = (-1, -3,3)$.



Note que o triângulo ABC tem os lados determinados pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Portanto, vamos determinar cada um desses vetores:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,-1,4) - (1,-2,1) = (1,1,3) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (1,1,3)_E}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1,-3,3) - (2,-1,4) = (-3,-2,-1) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BC} = (-3,-2,-1)_E}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (1,1,3)_E + (-3,-2,-1)_E = (-2,-1,2)_E.$$

Agora, perceba que a área do triângulo ABC é igual à metade do paralelogramo $ABCE$ determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$. Logo:

$$\boxed{A_\Delta = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right\|}{2}} \ldots (*)$$

Fazendo $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1+6)\vec{i} - (-1+9)\vec{j} + (-2+3)\vec{k} = 5\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = (5,-8,1)_E.$$

Calculando a norma de $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}$:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|(5,-8,1)_E\right\| = \sqrt{25+64+1} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = 3\sqrt{10}} \ldots (**)$$

Substituindo (**) em (*):

$$A_\Delta = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\|}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \boxed{A_\Delta = \frac{3\sqrt{10}}{2}}.$$

CAPÍTULO 10: PRODUTO MISTO

10.1 INTRODUÇÃO

10.1.1 Definição: Sejam $\vec{E} = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ a base canônica de V^3 e os vetores $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)_B$ e $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)_E$. Definimos o *produto misto* entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como sendo o número real $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Indicamos o produto misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Desta forma, sempre tome cuidado com a ordem em que os vetores aparecem.

Já sabemos que:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right)_E.$$

E como $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)_E$, temos o produto escalar:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (x_1, x_2, x_3)_E \cdot \left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \right)_E$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}.$$

Exemplo:

O produto misto entre os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ é dado por:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ((2,3,5)_E, (-1,3,3)_E, (4,-3,2)_E) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(6+9) - 3(-2-12) + 5(3-12) = 2 \cdot 15 - 3 \cdot (-14) + 5 \cdot (-9)$$

$$= 30 + 42 - 45 = 27 \Rightarrow \boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27}.$$

Observação: Tome cuidado com a ordem em que os vetores aparecem no produto misto. Por exemplo:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$$

$$\left(\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{x}, \vec{y} + 3\vec{x}\right) = \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \left(2\vec{x} \times (\vec{y} + 3\vec{x})\right).$$

10.1.1 Proposição: Sejam $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$ e $\vec{w} = (z_1, z_2, z_3)$ vetores. As seguintes propriedades são válidas:

i. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se um dos vetores é nulo, se dois a dois são paralelos, ou se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD;

ii. O produto misto independe da ordem circular dos vetores, isto é, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$;

iii. $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{t}\right) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}\right)$;

iv. $(\vec{u}, \vec{v}, m\vec{w}) = (\vec{u}, m\vec{v}, \vec{w}) = (m\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = m(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Prova:

i. Vamos separar em três casos:

Caso 01: Suponha que um dos vetores é nulo, digamos $\vec{u}$. Então $\vec{u} = (0,0,0)$ e tem-se:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

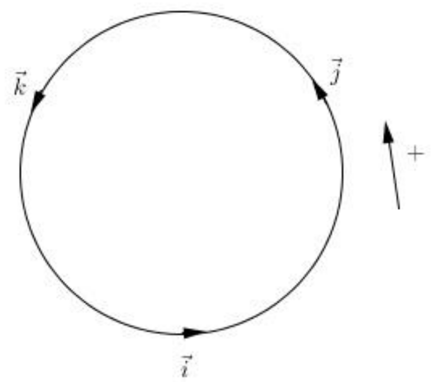
Caso 02: Suponha dois vetores paralelos, digamos $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ e temos:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Caso 03: Suponha $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ LD. Sabemos que $\vec{v}\times\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$ e consequentemente será ortogonal a $\vec{u}$, uma vez que $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ estão num mesmo plano. Ora, se $\vec{u} \perp \vec{v}\times\vec{w}$, então $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = 0$. Mas $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, logo $(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$.

Observação: Note que o caso 3 do item i nos diz que se os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares, então o produto misto entre eles é nulo.
De forma análoga, se considerarmos os pontos A, B, C e D, estes pontos pertence a um mesmo plano se os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ forem coplanares, isto é, se $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\right) = 0$.

ii. Observe:



Esta propriedade decorre imediatamente das propriedades de determinantes (apenas fazemos uma analogia para os vetores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$. Mas estes poderiam ser quaisquer).

Observação: Desta propriedade, resulta que as operações $\cdot$ e $\times$ permutam entre si, isto é:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Chamamos esta consequência de *propriedade cíclica*.

Exemplos:

01. Vamos verificar se os vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 0)$ são coplanares. Para isto, basta calcular o produto misto entre eles:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 4 - 3 = -5 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \; e \; \vec{w} \; não \; coplanares.$$

02. Qual deve ser o valor de η para que os vetores $\vec{a} = (\eta, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ e $\vec{c} = (0, -2, 4)$ sejam coplanares? Para que os vetores sejam coplanares, devemos ter:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \eta & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -4\eta + 2 + 6\eta - 8 = 0$$

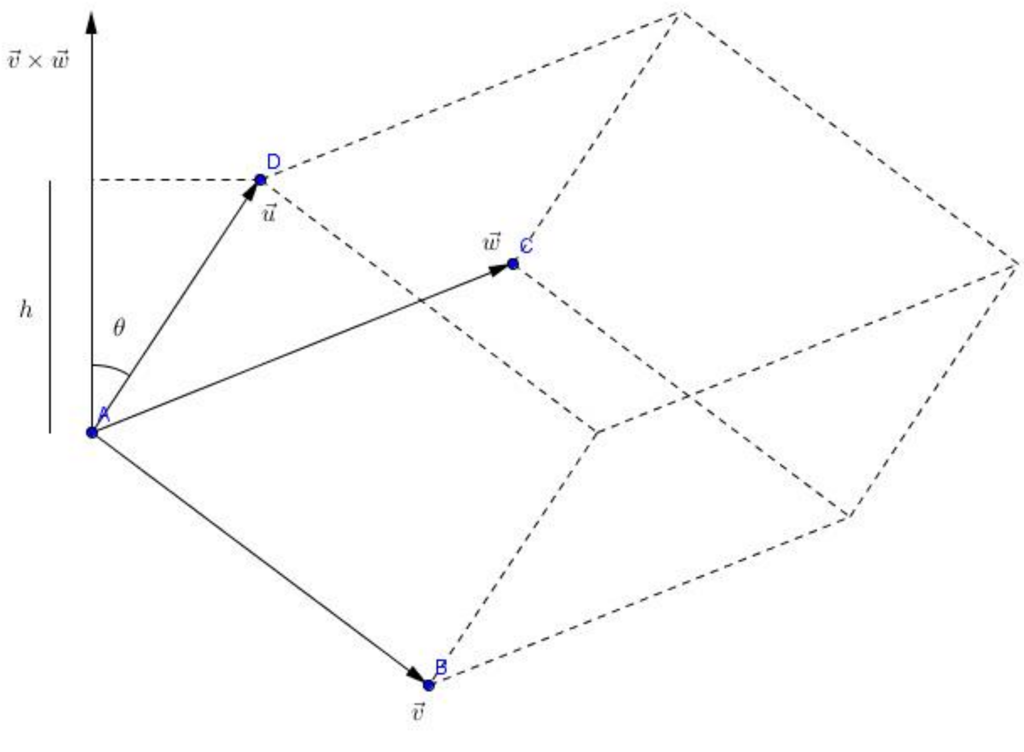
$$\Leftrightarrow 2\eta - 6 = 0 \Leftrightarrow 2\eta = 6 \Leftrightarrow \boxed{\eta = 3}.$$

03. Verificar se os pontos $A = (1, 2, 4)$, $B = (-1, 0, -2)$, $C = (0, 2, 2)$ e $D = (-2, 1, -3)$ são coplanares. Para verificar se os pontos são coplanares, construímos os vetores $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, -6)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, -2)$ e $\overrightarrow{AD} = (-3, -1, -7)$ e calculamos o produto misto:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2 & -6\\ -1 & 0 & -2\\ -3 & -1 & -7\end{vmatrix}=0\Rightarrow A,B,C\ e\ D\ são\ coplanares.$$

10.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÓDULO DO PRODUTO MISTO

Geometricamente, o módulo do produto misto $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ calcula o volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$. Observe a figura:



Sabemos que o volume de um paralelepípedo é dado por "área da base vezes a altura". Então:

$$\boxed{V=A_b\cdot h}\ldots(I)$$

Como a área da base é o paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sabemos que:

$$\boxed{A_b = ||\vec{v}\times\vec{w}||} \dots (*)$$

Observando o ângulo formado entre $\vec{u}$ e $\vec{v}\times\vec{w}$, temos:

$$|\cos\theta| = \frac{h}{||\vec{u}||} \Rightarrow \boxed{h = ||\vec{u}|| |\cos\theta|} \dots (**)^3$$

Substituindo (*) e (**) em (I), temos:

$$V = ||\vec{v}\times\vec{w}|| ||\vec{u}|| |\cos\theta| \Rightarrow \boxed{V = ||\vec{u}|| ||\vec{v}\times\vec{w}|| |\cos\theta|} \dots (II)$$

Sabemos ainda que:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = ||\vec{u}|| ||\vec{v}\times\vec{w}|| \cos\theta \Rightarrow \boxed{|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = ||\vec{u}|| ||\vec{v}\times\vec{w}|| |\cos\theta|} \dots (***)$$

Comparando (***) e (I), tem-se:

$$V = |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})| = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| \Rightarrow \boxed{V = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|}.$$

<u>Exemplos</u>:

01. Vamos calcular o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AD} = (0,3,3)$. Para calcular tal volume, basta calcular o produto misto entre os vetores e em seguida tomar o módulo deste valor. Calculemos:

---

[3] Devemos considerar $|\cos\theta|$, pois poderia ocorrer $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ e então $\cos\theta < 0$.

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Agora, temos:

$$V = \left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = |3| = 3 \Rightarrow \boxed{V = 3u.v.}.$$

02. Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5{,}0)$, $\vec{v} = (3, -2{,}1)$ e $\vec{w} = (1{,}1, -1)$, calcule o valor de x para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja igual a $24u.v.$.

Sabemos que o volume do paralelepípedo é dado por $V = |(\vec{u}, \vec{v}. \vec{w})|$. Para que o volume seja igual a 24, temos:

$$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 24 \Rightarrow \left\|\begin{matrix} x & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}\right\| = 24 \Rightarrow |x + 20| = 24.$$

Sabemos que, por definição:

$$|x + 20| = \begin{cases} x + 20, se\ x \geq -20 \\ -x - 20, se\ x < -20 \end{cases}.$$

Então, temos:

Se $x \geq -20$, então $|x + 20| = 24 \Rightarrow x + 20 = 24 \Rightarrow \boxed{x = 4}$.

Se $x < -20$, então $|x + 20| = 24 \Rightarrow -x - 20 = 24 \Rightarrow \boxed{x = -44}$.

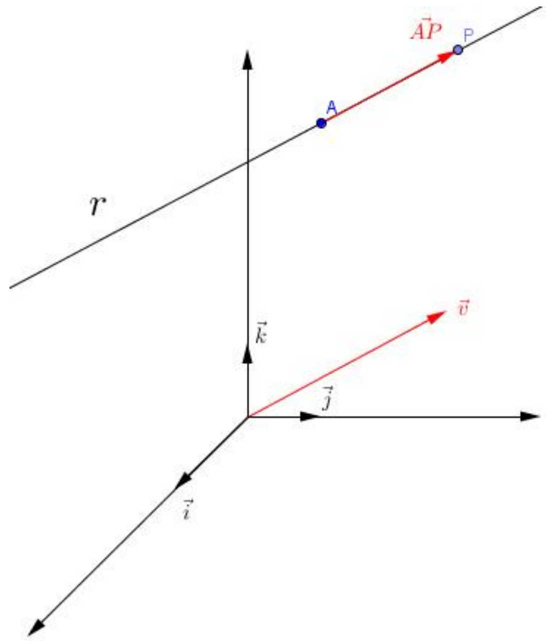
Desta forma, concluímos que $x = 4$ ou $x = 44$.

CAPÍTULO 11: RETA

11.1 INTRODUÇÃO

11.1.1 Equação Vetorial da Reta: Considere o sistema de coordenadas $\Re^3$, a base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, uma reta r passando por um ponto $A \in \Re^3$ com mesma direção de um vetor não nulo $\vec{v}$. Para que um ponto P do espaço pertença à reta r é necessário e suficiente que, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{v}$ sejam paralelos, isto é:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow P - A = \lambda\vec{v}.$$



Podemos ainda reescrever a equação $P - A = \lambda\vec{v}$ por:

$$\boxed{P = A + \lambda\vec{v}} \ldots (I)$$

A princípio podemos pensar que a equação (I) não faz sentido, pois parece ser composta por "um ponto igual a um ponto somado com um vetor", porém a igualdade pode ser "aceita" devido ao fato de que existe uma correspondência biunívoca entre pontos e vetores do espaço. Note que ao ponto P corresponde o vetor $\overrightarrow{OP}$ cujas coordenadas serão as mesmas coordenadas de P em relação ao sistema de coordenadas e, analogamente, ao ponto A corresponde o vetor $\overrightarrow{OA}$.

Se tomarmos, $P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (a, b, c)$, reescrevemos (I) como:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)} \ldots (II)$$

Qualquer uma das equações (I) e (II) é denominada *equação vetorial da reta* que passa pelo ponto A e tem a direção de $\vec{v}$.

O vetor $\vec{v}$ é chamado de *vetor diretor* da reta e o número real λ recebe o nome de *parâmetro*. Note que para cada valor de λ, obtemos um ponto P da reta, ou seja, quando variamos λ no intervalo $(-\infty, +\infty)$ o ponto P descreve a reta r.

<u>Exemplo</u>:

Vamos encontrar a equação vetorial da reta que passa pelo ponto $A = (3,0,-5)$ e tem como vetor diretor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.
Sendo $P = (x, y, z)$ um ponto genérico da reta, temos:

$$P = A + \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \boxed{(x, y, z) = (3,0,-5) + \lambda(2,2,-1)}.$$

A equação vetorial da reta é $(x, y, z) = (3,0,-5) + \lambda(2,2,-1)$. Quando λ varia de $-\infty$ até $+\infty$, P descreve tal reta. Por exemplo, se $\lambda = 2$, temos:

$$(x, y, z) = (3,0,-5) + 2(2,2,-1) = (3,0,-5) + (4,4,-1) = (3 + 4,0 + 4,-5 - 1)$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (7,4,-6).$$

Ou seja, o ponto $P_1 = (7,4,-4)$ pertence à reta r.

Por outro lado, como proceder para verificar se um ponto pertence a uma reta? Considerando a reta do exemplo $r: (x, y, z) = (3,0,-5) + \lambda(2,2,-1)$, o ponto $Q = (5,2,-6)$ pertence à reta r? Para verificar se Q pertence à reta, basta substituir as respectivas coordenadas de Q nas coordenadas do ponto P genérico da construção, isto é:

$$(5,2,-6) = (3,0,-5) + \lambda(2,2,-1) \Rightarrow (5,2,-6) = (3 + 2\lambda, 2\lambda, -5 - \lambda)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\lambda = 5 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1} \\ 2\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1} \\ -5 - \lambda = -6 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1} \end{cases}.$$

O valor de λ é único, e isto nos diz que o ponto Q pertence à reta r.

Por outro lado, tomemos $M = (2,-1,3)$. Este ponto pertence à reta? Vamos substituir suas coordenadas na equação de r. Então:

$$(2,-1,3) = (3,0,-5) + \lambda(2,2,-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{2}} \\ 2\lambda = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{1}{2}} \\ -5 - \lambda = 3 \Rightarrow \boxed{\lambda = -8} \end{cases}.$$

Obtemos valores distintos de λ, e isso nos diz que o ponto M não pertence à reta r.

11.1.2 Equações Paramétricas da Reta: Considere o sistema de coordenadas no espaço $\Re^3$ e a base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. Seja $P = (x, y, z)$ um ponto genérico do espaço e $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto dado, onde $P, A \in r$ uma reta cujo vetor diretor é $\vec{v} = (a, b, c)$. Da equação vetorial da reta, temos:

$$P = A + \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \dots (\Delta) \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

O sistema de equações (Δ), com a, b, c não são todos nulos $(\vec{v} \neq \vec{0})$ nos fornece as *equações paramétricas* de r em relação ao sistema de coordenadas fixado.

<u>Exemplo</u>:

As equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (3, -1,2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = (-3, -2,1)$ são:

$$(x, y, z) = (3, -1,2) + \lambda(-3, -2,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda. \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Para obter qualquer ponto de r, basta atribuir um valor para λ. Por exemplo, se $\lambda = -1$, temos:

$$\begin{cases} x = 3 - 3(-1) = 3 + 3 = 6 \\ y = -1 - 2(-1) = -1 + 2 = 1. \\ z = 2 + (-1) = 2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Desta forma, temos o ponto $P_1 = (6,1,1) \in r$.
Note que o ponto $A \in r$ e, obviamente, este ponto satisfaz as equações vetoriais de r. Temos:

$$\begin{cases} 3 = 3 - 3\lambda \\ -1 = -1 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \; \textit{nas três equações}. \\ 2 = 2 + \lambda \end{cases}$$

Por outro lado, o ponto $B = (1,1,-1) \notin r$, pois:

$$\begin{cases} 1 = 3 - 3\lambda \\ 1 = -1 - 2\lambda \\ -1 = 2 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}, \lambda = -1 \; e \; \lambda = -3 \; (três \; valores \; distintos).$$

11.1.3 Reta Definida por Dois Pontos: A *reta definida pelos pontos* $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ é a reta que passa pelo ponto A (ou B) e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$. Sendo $P \in r$ um ponto genérico, a equação vetorial da reta definida pelos pontos A e B é:

$$\boxed{P = A + \lambda\overrightarrow{AB}} \; ou \; \boxed{P = B + \lambda\overrightarrow{AB}}.$$

<u>Exemplo</u>:

Vamos construir a equação vetorial da reta r que passa pelos pontos $A = (1,-2,-3)$ e $B = (3,1,-4)$. Para construir tal equação, devemos determinar o vetor diretor de r a partir dos pontos A e B, isto é:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,1,-4) - (1,-2,-3) \Rightarrow \vec{v} = (2,3,-1).$$

Tomando $P \in r$, tem-se:

$$P = A + \lambda\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (1,-2,-3) + \lambda(2,3,-1) \text{ é } a \; equação \; vetorial \; de \; r.$$

E as equações paramétricas são as equações do sistema:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda. \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

Se tivéssemos tomado $P = B + \lambda\vec{v}$:

$$(x, y, z) = (3,1,-4) + \lambda(2,3,-1) \; e \; \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda. \\ z = -4 - \lambda \end{cases}$$

Que representam a mesma reta r.

11.1.4 Equações Simétricas da Reta: Considere r a reta cujas equações paramétricas são $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b. \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ Supondo que $abc \neq 0$, ou seja, nenhuma das coordenadas de $\vec{v}$ nula, temos:

$$x = x_0 + \lambda a \Leftrightarrow \lambda a = x - x_0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{x - x_0}{a}} \ldots (I)$$

$$y = y_0 + \lambda b \Leftrightarrow \lambda b = y - y_0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{y - y_0}{b}} \ldots (II)$$

$$z = z_0 + \lambda c \Leftrightarrow \lambda c = z - z_0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{z - z_0}{c}} \ldots (III)$$

Comparando (I), (II) e (III), temos:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}.$$

Estas equações são denominadas *equações simétricas* da reta r que passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e tem direção de $\vec{v} = (a, b, c)$.

<u>Exemplo</u>:

As equações simétricas da reta que passa pelo ponto $A = (3,0,-5)$ e tem como vetor diretor o vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ são:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y}{2} = -z - 5.$$

Observação: Para construir as equações simétricas de uma reta definida por dois pontos, basta construir o vetor diretor a partir dos pontos e proceder de forma análoga à definição.

11.1.5 Equações Reduzidas da Reta: Considerando as equações simétricas de uma reta $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$, podemos isolar as variáveis y e z em função de x. Observe:

Da igualdade entre a primeira e a segunda expressão:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}x_0 + y_0 \ldots (I)$$

Fazendo $m = \frac{b}{a}$ e $n = -\frac{b}{a}x_0 + y_0$ e, substituindo em (I):

$$\boxed{y = mx + n} \ldots (*)$$

Da igualdade entre a primeira e a terceira expressão:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \Leftrightarrow z - z_0 = \frac{c}{a}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{c}{a}x - \frac{c}{a}x_0 + z_0 \ldots (II)$$

Fazendo $p = \frac{c}{a}$ e $q = -\frac{c}{a}x_0 + z_0$ e, substituindo em (II):

$$\boxed{z = px + q} \ldots (**)$$

O sistema formado pelas equações (*) e (**) nos fornece as *equações reduzidas da reta* passando por $A = (x_0, y_0, z_0)$ com vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$.

$$\begin{cases} y = mx + n \\ z = px + q \end{cases}.$$

<u>Exemplo</u>:

Vamos construir as equações reduzidas da reta r que passa por $A = (2,1,-3)$ e tem a direção do vetor $\vec{w} = (2,-1,1)$. Das equações simétricas de r vem:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}.$$

Da igualdade entre a primeira e a segunda expressão:

$$\frac{x-2}{2} = 1 - y \Leftrightarrow 2 - 2y = x - 2 \Leftrightarrow -2y = x - 4 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 \ldots (*)$$

Da igualdade entre a primeira e a terceira expressão:

$$\frac{x-2}{2} = x + 3 \Leftrightarrow x - 2 = 2z + 6 \Leftrightarrow 2z = x - 8 \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}x - 4 \ldots (**)$$

De (*) e (**), temos:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ z = \dfrac{1}{2}x - 4 \end{cases}.$$

Que nos fornece as equações reduzidas de $r: P = A + \lambda\vec{w}$.

<u>Observação</u>: A variável x nas equações reduzidas faz o papel de variável independente na equação da reta. Da mesma forma que deixamos as variáveis y e z em função de x, poderíamos deixar qualquer outra das variáveis como sendo a variável livre.

11.2 RETAS PARALELAS AOS PLANOS OU AOS EIXOS COORDENADOS

Até o momento, quando tínhamos as equações paramétricas $\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$ de uma reta r passando por $A = (x_0, y_0, z_0)$ com a direção de $\vec{v} = (a, b, c)$, onde $abc \neq 0$, poderíamos escrever as equações simétricas de r como $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

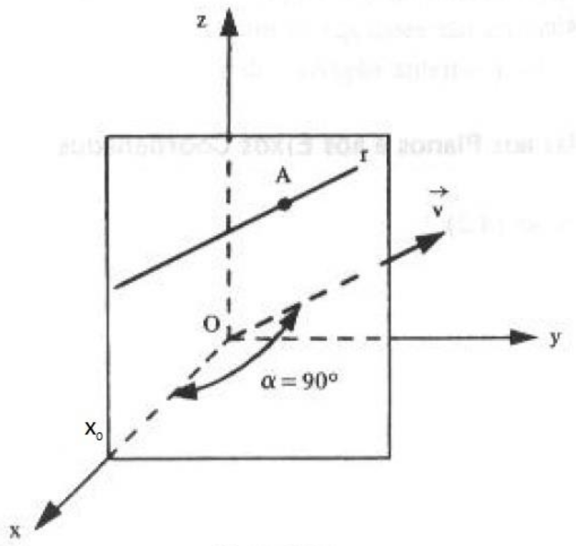
Eventualmente, pode ocorrer que uma ou duas coordenadas de $\vec{v}$ sejam nulas e, neste momento, vamos analisar estes possíveis casos.

11.2.1 Uma componente do vetor diretor nula: Consideramos r a reta que passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção de $\vec{v} = (a, b, c)$. No caso em que uma das coordenadas de $\vec{v} = (a, b, c)$ é nula, teremos o seguinte:

i. Se $a = 0$, então $\vec{v} = (0, b, c)$ é um vetor ortogonal ao eixo X e paralelo ao plano YZ. Consequentemente, qualquer reta r que tenha mesma direção de $\vec{v}$ será ortogonal ao eixo X e paralela ao plano YZ. As equações paramétricas e simétricas serão respectivamente:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda a \\ z = z_0 + \lambda b \end{cases} e \begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}. \end{cases}$$

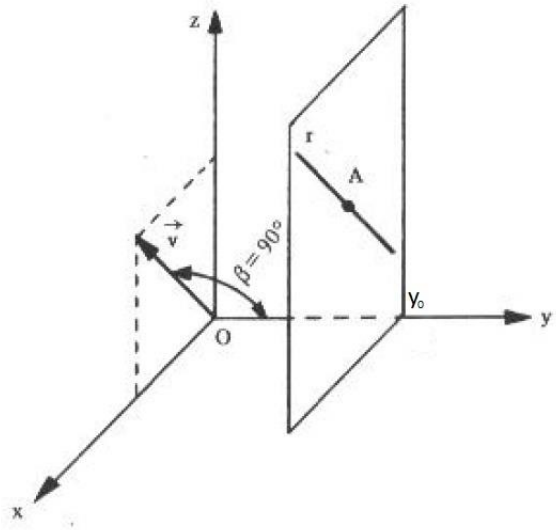
Note que, as coordenadas de qualquer ponto $P = (x, y, z) \in r$ variam somente em Y e Z, sendo que a coordenada X se mantém fixa $x = x_0$. Observe a figura:



ii. Se $b = 0$, então $\vec{v} = (a, 0, c)$ é um vetor ortogonal ao eixo Y e paralelo ao plano XZ. Consequentemente, qualquer reta r que tenha mesma direção de $\vec{v}$ será ortogonal ao eixo Y e paralela ao plano XZ. As equações paramétricas e simétricas serão respectivamente:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 \\ z = z_0 + \lambda b \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = y_0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c} \end{cases}.$$

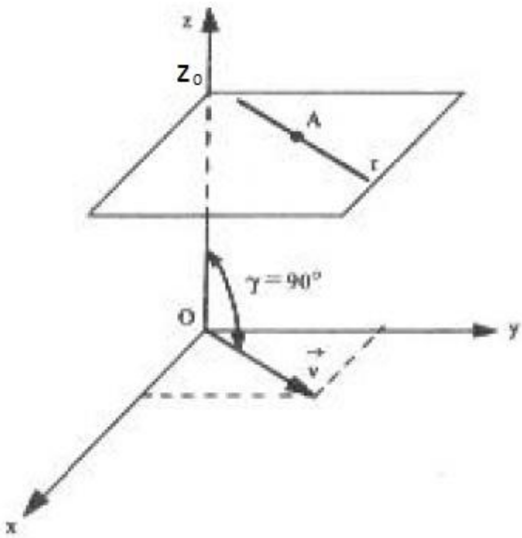
Note que, as coordenadas de qualquer ponto $P = (x, y, z) \in r$ variam somente em X e Z, sendo que a coordenada em Y se mantém fixa $y = y_0$. Observe a figura:



iii. Se $c = 0$, então $\vec{v} = (a, b, 0)$ é um vetor ortogonal ao eixo Z e paralelo ao plano XY. Consequentemente, qualquer reta r que tenha mesma direção de $\vec{v}$ será ortogonal ao eixo Z e paralela ao plano XY. As equações paramétricas e simétricas serão respectivamente:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 \end{cases} e \begin{cases} z = z_0 \\ \dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}. \end{cases}$$

Note que, as coordenadas de qualquer ponto $P = (x, y, z) \in r$ variam somente em X e Y, sendo que a coordenada em Z se mantém fixa $z = z_0$. Observe a figura:

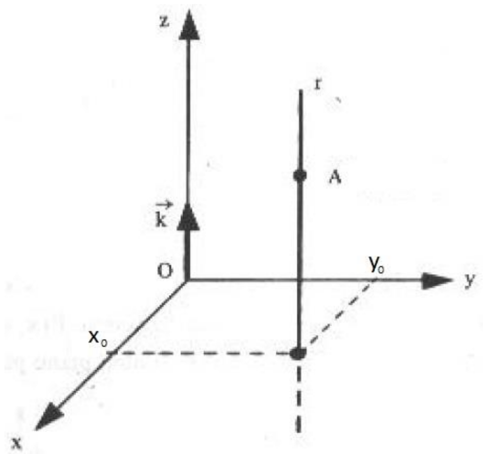


11.2.2 Duas componentes do vetor diretor nulas: Consideramos r a reta que passa por $A = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção de $\vec{v} = (a, b, c)$. No caso em que duas das coordenadas de $\vec{v} = (a, b, c)$ são nulas, o vetor $\vec{v}$ terá a direção de um dos vetores da base canônica $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$. Assim:

i. Se $a = b = 0$, então $\vec{v} = (0,0,c)$ é um vetor paralelo ao eixo Z, ou seja, $\vec{v}//\vec{k}$. Consequentemente, qualquer reta r que tenha a direção de $\vec{v}$ será paralela ao eixo Z. As equações paramétricas serão:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}.$$

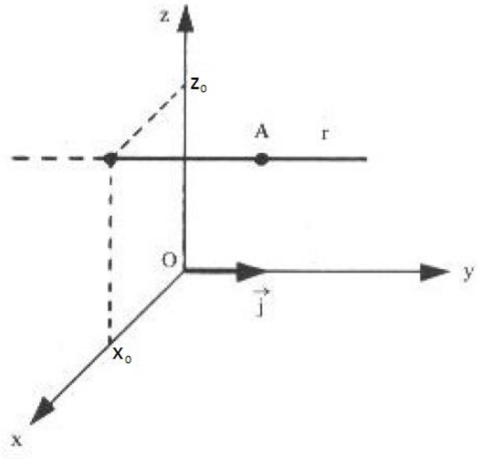
Note que, as coordenadas de qualquer ponto $P = (x, y, z) \in r$ variam somente em Z, sendo que as coordenada em X e Y se mantém fixas $x = x_0$ e $y = y_0$. Observe a figura:



ii. Se $a = c = 0$, então $\vec{v} = (0, b, 0)$ é um vetor paralelo ao eixo Y, ou seja, $\vec{v}//\vec{\jmath}$. Consequentemente, qualquer reta r que tenha a direção de $\vec{v}$ será paralela ao eixo Y. As equações paramétricas serão:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 \end{cases}.$$

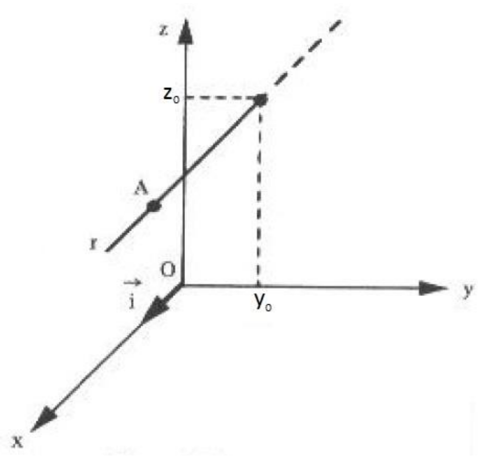
Note que, as coordenadas de qualquer ponto $P = (x, y, z) \in r$ variam somente em Y, sendo que as coordenada em X e Z se mantém fixas $x = x_0$ e $z = z_0$. Observe a figura:



iii. Se $b = c = 0$, então $\vec{v} = (a, 0,0)$ é um vetor paralelo ao eixo X, ou seja, $\vec{v} // \vec{\imath}$. Consequentemente, qualquer reta r que tenha a direção de $\vec{v}$ será paralela ao eixo X. As equações paramétricas serão:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}.$$

Note que, as coordenadas de qualquer ponto $P = (x, y, z) \in r$ variam somente em X, sendo que as coordenada em Y e Z se mantém fixas $y = y_0$ e $z = z_0$. Observe a figura:



Observação: Os eixos X, Y e Z são retas particulares. Observemos:

a) O eixo X é a reta que passa pelo ponto $O = (0,0,0)$ e tem como vetor diretor o vetor $\vec{i} = (1,0,0)$. Portanto:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0. \\ z = 0 \end{cases}$$

b) O eixo Y é a reta que passa pelo ponto $O = (0,0,0)$ e tem como vetor diretor o vetor $\vec{j} = (0,1,0)$. Portanto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda. \\ z = 0 \end{cases}$$

c) O eixo Z é a reta que passa pelo ponto $O = (0,0,0)$ e tem como vetor diretor o vetor $\vec{k} = (0,0,1)$. Portanto:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Exemplos:

01. Vamos determinar a equação da reta t que passa pelo ponto $A = (-2,3,-2)$ e tem a direção do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$.
Note que o vetor $\vec{v} = (3,0,2)$ tem a segunda componente nula, isto é, este vetor é ortogonal ao eixo Y e paralelo ao plano XZ, logo a reta que passa por A e tem direção de $\vec{v}$ tem as mesmas particularidades de $\vec{v}$ em relação ao eixo Y e ao plano XZ.
A equação vetorial de t é, considerando $P = (x, y, z) \in t$, $P = A + \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (x, y, z) = (-2,3,-2) + \lambda(3,0,2)$. Portanto, podemos escrever sua equação na forma:

$$t: \begin{cases} y = 3 \\ \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{z+2}{2} \end{cases}.$$

02. Determinaremos a equação da reta s que passa pelos pontos $A = (1,0,9)$ e $B = (4,8,9)$.

Primeiramente, sabemos que o vetor diretor de tal reta será $\vec{v} = B - A$, então:

$$\vec{v} = B - A = (4,8,9) - (1,0,9) = (3,8,0) \Rightarrow \boxed{\vec{v} = 3\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}}.$$

O vetor $\vec{v} = (3,8,0)$ tem a terceira componente nula, isto é, a reta s que tem a direção de $\vec{v}$ será ortogonal ao eixo Z e paralela ao plano XY. Sendo $P = (x,y,z) \in s$, a equação de s é, portanto:

$$(x,y,z) = (1,0,9) + \lambda(3,8,0) \Leftrightarrow s: \begin{cases} z = 9 \\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{8} \end{cases}.$$

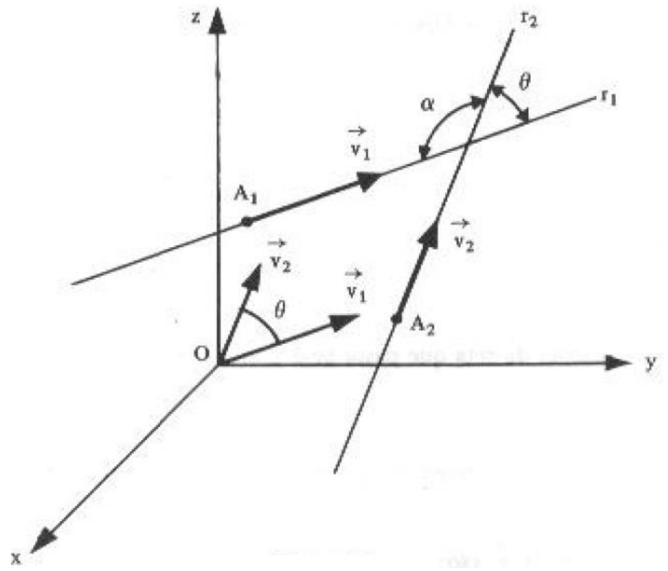
03. Estabeleceremos a equação da reta ψ que passa pelo ponto $A = (0,3,-2)$ e tem como vetor diretor $\vec{v} = 2\vec{\imath}$.

Note que $\vec{v} = (2,0,0)$ tem a segunda e a terceira coordenada nula, logo a reta ψ que tem a mesma direção de $\vec{v}$ será paralela ao eixo X. Portanto, sendo $P = (x,y,z) \in \psi$:

$$(x,y,z) = (0,3,-2) + \lambda(2,0,0) \Leftrightarrow \psi: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}.$$

11.3 ÂNGULO ENTRE RETAS

Considere r_1 a reta que passa por $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e tem a direção de $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e r_2 a reta que passa por $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ e tem a direção de $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$. O *ângulo* entre r_1 e r_2 é o menor ângulo entre os vetores os vetores diretores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$. Observe a figura:



Logo, sendo θ a medida angular entre r_1 e r_2, temos:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{||\overrightarrow{v_1}||\,||\overrightarrow{v_2}||}, onde\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

<u>Observação</u>: Note que θ sempre estará no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, pois se $\theta > \frac{\pi}{2}$ então tomaríamos o ângulo entre as retas como sendo o suplemento do ângulo de medida θ.

<u>Exemplo</u>:

Calculemos os ângulos entre as retas $r_1: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$ e $r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$. Note que, r_1 é a reta que passa pelo ponto $A_1 = (3,0,-1)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{v_1} = (1,1,-2)$ e a reta r_2 passa pelo ponto $A_2 = (-2,3,0)$ e tem direção de $\overrightarrow{v_2} = (-2,1,1)$. Portanto:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{||\overrightarrow{v_1}||\,||\overrightarrow{v_2}||} = \frac{|(1,1,-2) \cdot (-2,1,1)|}{||(1,1,-2)||\,||(-2,1,1)||}$$

$$= \frac{|-2+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}.$$

Como $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$.

Portanto, o ângulo entre r_1 e r_2 é o ângulo de medida $\theta = 60^o$.

11.3.1 Condição de Paralelismo: Considere as retas $r_1 \colon P = A_1 + \lambda\overrightarrow{v_1}$ e $r_2 \colon P = A_2 + \lambda\overrightarrow{v_2}$. As retas r_1 e r_2 serão *paralelas* se $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ é LD, ou equivalentemente, se $\overrightarrow{v_1} // \overrightarrow{v_2}$.

De outra forma: se $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$, as retas r_1 e $r_2$serão paralelas se existe $\alpha \in \Re$ tal que $\overrightarrow{v_1} = \alpha\overrightarrow{v_2}$. Portanto, $r_1 // r_2$ se:

$$a_1 = \alpha a_2 \overset{a_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \alpha = \frac{a_1}{a_2}$$

$$b_1 = \alpha b_2 \overset{b_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \alpha = \frac{b_1}{b_2}$$

$$c_1 = \alpha c_2 \overset{c_2 \neq 0}{\Longleftrightarrow} \alpha = \frac{c_1}{c_2}$$

E temos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

<u>Exemplo</u>:

Sejam r_1a reta que passa por $A_1 = (-3,4,2)$ e $B_1 = (5,-2,4)$ e r_2 a reta que passa por $A_2 = (-1,2,-3)$ e $B_2 = (-5,5,-4)$. As retas r_1 e r_2 são paralelas, pois seus vetores diretores são respectivamente:

$$\overrightarrow{v_1} = B_1 - A_1 = (8,-6,2)$$

$$\overrightarrow{v_2} = B_2 - A_2 = (-4,3,-1)$$

Logo:

$$\frac{8}{-4} = \frac{-6}{3} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow r_1 // r_2.$$

11.3.2 Condição de Ortogonalidade: Sejam r_1 e r_2 retas cujos vetores diretores são, respectivamente, $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$. As retas r_1 e r_2 serão *ortogonais* se $\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$, isto é, se:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0.$$

Ou ainda, se:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0.$$

Denotamos a ortogonalidade entre r_1 e r_2 por $r_1 \perp r_2$.

Exemplo:

Considere as retas $r_1: \begin{cases} y = 3 \\ \frac{x-3}{8} = \frac{z+1}{-6} \end{cases}$ e $r_2: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{4}$. Os vetores diretores de r_1 e r_2 são, respectivamente, $\overrightarrow{v_1} = (8,0,-6)$ e $\overrightarrow{v_2} = (3,5,4)$. Daí, temos:

$$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (8,0,-6) \cdot (3,5,4) = 24 - 24 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = 0 \Leftrightarrow v_1 \perp \overrightarrow{v_2}$$

$$\therefore r_1 \perp r_2.$$

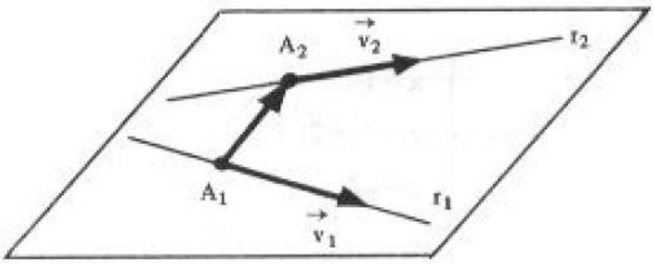
11.3.3 Condição de Coplanaridade: Sejam r_1 a reta que passa por $A_1 = (x_1, y_1, z_1)$ com vetor diretor $\overrightarrow{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e r_2 a reta que passa por $A_2 = (x_2, y_2, z_2)$ com vetor diretor $\overrightarrow{v_2} = (a_2, b_2, c_2)$. As retas r_1 e r_2 serão *coplanares* se

$\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\}$ é LD. Em outras palavras r_1 e r_2 serão coplanares se os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1$ estiverem contidos em um mesmo plano.

Lembrando que, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\}$ é LD $\Leftrightarrow (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$, portanto:

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r_1 \; e \; r_2 \; são \; coplanares.$$

Observe:



<u>Exemplo</u>:

As retas $r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ e $r_2 : \frac{x+5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{3}$ são coplanares. De fato, note que $r_1 : (x, y, z) = (2,0,,5) + \lambda(2,3,4)$ e $r_2 : (x, y, z) = (-5, -3,6) + \lambda(-1,1,3)$. Assim $A_1 = (2,0,5)$ e $A_2 = (-5, -3,6)$, então $\overrightarrow{A_1A_2} = (-7, -3,1)$, $\overrightarrow{v_1} = (2,3,4)$ e $\overrightarrow{v_2} = (-1,1,3)$. Desta forma:

$$(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -7 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 10 - 3 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 20 - 60 + 40 = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}) = 0$$

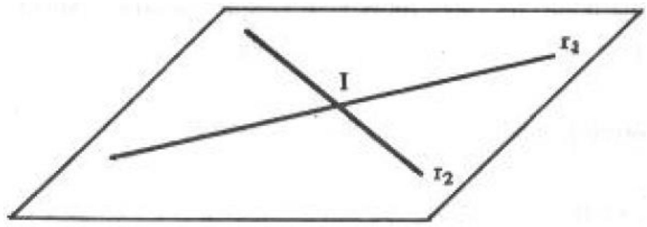
$$\therefore r_1 \; e \; r_2 \; são \; coplanares.$$

11.4 POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS

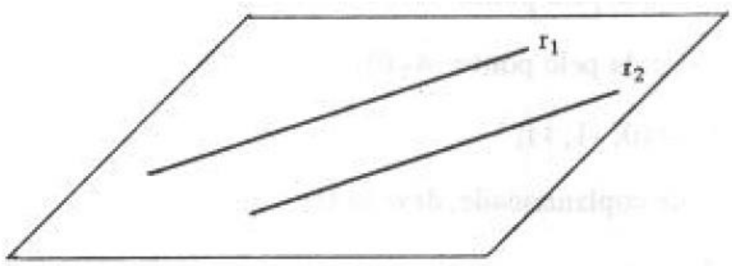
Considerando r_1 e r_2 retas do espaço, estas podem ser:

01. *Coplanares*, isto é, r_1 e r_2 situadas em um mesmo plano. Neste caso, r_1 e r_2 poderão ser:

a) *Concorrentes*: $r_1 \cap r_2 = \{I\}$, isto é, I é o ponto de interseção entre r_1 e r_2.

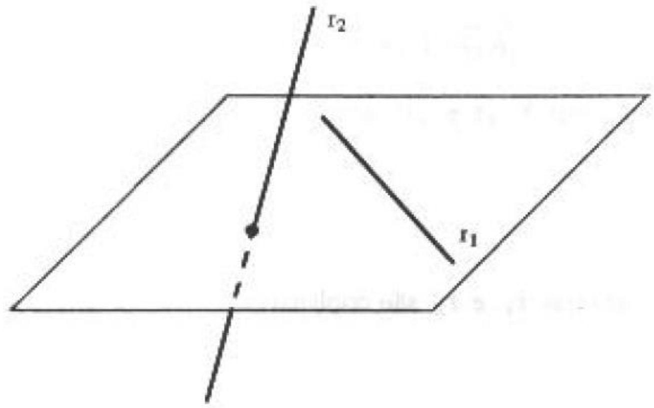


b) *Paralelas*: $r_1 \cap r_2 = \phi$, isto é, não existe ponto de interseção entre r_1 e r_2.



Se r_1 e r_2 são coincidentes, elas ainda serão paralelas.

02. *Reversas*, isto é, não existe nenhum plano que contenha r_1 e r_2. Neste caso, sempre temos $r_1 \cap r_2 = \phi$.



11.4.1 Verificação Algébrica: Considere as retas $r_1: P = A_1 + \lambda\overrightarrow{v_1}$ e $r_1: P = A_2 + \lambda\overrightarrow{v_2}$. Temos que:

i. $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = 0 \Rightarrow r_1 \; e \; r_2 \; coplanares$. Se existir $\alpha \in \Re$ tal que $\overrightarrow{v_1} = \alpha\overrightarrow{v_2}$, então r_1 e r_2 serão paralelas ou, caso contrário, r_1 e r_2 serão concorrentes.

ii. $\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right) \neq 0 \Rightarrow r_1 \; e \; r_2 \; reversas$.

<u>Exemplos</u>:

01. Vamos estudar a posição relativa entre as retas:

a) $r_1: \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 4 - 6\lambda; \\ z = 3\lambda \end{cases}$

Note que r_1 pode ser expressa por $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-1}$, logo seu vetor diretor é $\overrightarrow{v_1} = (1,2,-1)$ e um ponto de r_1 é $A_1 = (0,3,0)$, enquanto r_2 tem como vetor diretor $\overrightarrow{v_2} = (-3,-6,3)$ e passa pelo ponto $A_2 = (1,4,0)$.

Observe que $\overrightarrow{v_2} = -3\overrightarrow{v_1}$, logo r_1 e r_2 são paralelas.

Resta verificar se r_1 e r_2 são coincidentes ou não. Para isto, basta verificar se um ponto de r_1 também é ponto de r_2. Como $A_1 = (0,3,0)$ é um ponto de r_1, vamos substituir suas coordenadas em r_2:

$$\begin{cases} 0 = 1 - 3\lambda \\ 3 = 4 - 6\lambda. \\ 0 = 3\lambda \end{cases}$$

Obviamente, no sistema acima, obtemos mais de um valor para λ e isto implica que $A_1 \notin r_2$. Portanto, r_1 e r_2 são paralelas tais que $r_1 \cap r_2 = \phi$.

b) $r_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = z$ e $r_2: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$;

Temos $\overrightarrow{v_1} = (2,-1,1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (-4,2,-2)$. É fácil notar que $\overrightarrow{v_2} = -2\overrightarrow{v_1}$ e, portanto, r_1 e r_2 são paralelas.

Sabemos também que $A_1 = (0,1,0)$. Note que $A_1 \in r_2$, pois ao substituirmos A_1 em r_2 obtemos $\lambda = \frac{1}{2}$ nas três equações paramétricas de r_2. Daí, conclui-se que $r_1 = r_2$ pois, se estas são paralelas e possuem pelo menos um ponto em comum, então todos os outros pontos de qualquer uma das retas também esta na outra.

c) $r_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-5}{4}$ e $r_2: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 - t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$;

Observe que $\overrightarrow{v_1} = (2,3,4)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,-1,-2)$ e assim $\frac{2}{1} \neq -\frac{1}{3} \neq \frac{4}{-2}$ implica que $\nexists \alpha \in \Re$ tal que $\overrightarrow{v_1} = \alpha\overrightarrow{v_2}$. Desta forma r_1 e r_2 não são paralelas.

Agora, devemos verificar se as retas são coplanares ou reversas. Para isto seja $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (5,2,7) - (2,0,5) = (3,2,2) \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} = (3,2,2)$. Então:

$$\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2+4) - 3(2+6) + 4(2+3)$$

$$= 2 \cdot 2 - 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 = 4 - 24 + 20 = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = 0$$

$$\therefore r_1 \; e \; r_2 \; são \; coplanares.$$

Se r_1 e r_2 são coplanares e não são paralelas, temos que r_1 e r_2 são retas concorrentes, isto é, $r_1 \cap r_2 = \{I\}$.

d) $r_1: \begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ e $r_2: x = y = z$;

Podemos fazer em r_1 $\frac{z}{2} = x$, logo $r_1: (x, y, z) = (0,3,0) + \lambda(1,0,2)$. Ainda temos $r_2: (x, y, z) = (0,0,0) + \lambda(1,1,1)$.

É fácil notar que r_1 e r_2 não são paralelas, pois $\vec{v_1} = (1,0,2)$ e $\vec{v_2} = (1,1,1)$.

Resta verificar se as retas são coplanares ou reversas. Fazendo $\overrightarrow{A_1A_2} = A_2 - A_1 = (0,0,0) - (0,3,0) = (0,-3,0) \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} = (0,-3,0)$. Então:

$$\left(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow \left(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right) \neq 0$$

$$\therefore r_1 \; e \; r_2 \; não \; são \; coplanares.$$

Se r_1 e r_2 não são coplanares, então estas são retas reversas.

11.5 INTERSEÇÃO ENTRE DUAS RETAS

Se considerarmos duas retas coplanares concorrentes, sabemos que existe um ponto de *interseção* entre elas. Veremos através de um exemplo como determinar o ponto de interseção entre duas retas.

<u>Exemplo</u>:

Considere $r_1: \begin{cases} y = -3 + 2x \\ z = 3x - 1 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$, queremos determinar o ponto $I = (x, y, z)$ tal que $I = r_1 \cap r_2$, isto é, devemos determinar as coordenadas do ponto I que satisfaz as equações de r_1 e r_2 simultaneamente. Para encontrar tais valores de x, y, z basta resolver o sistema formados pelas equações de r_1 e r_2. Então:

$$\begin{cases} y = -3 + 2x \ldots (I) \\ z = 3x - 1 \ldots (II) \\ x = -\lambda \ldots (III) \\ y = 1 + 2\lambda \ldots (IV) \\ z = -2\lambda \ldots (V) \end{cases}$$

Da equação (III), podemos tomar $\lambda = -x$ e substituir em (IV) e (V) e, teremos:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \dots (1) \\ z = 3x - 1 \dots (2) \\ y = 1 - 2x \dots (3) \\ z = 2x \dots (4) \end{cases} \dots (*)$$

Comparando (1) com (3) e (2) com (2):

$$2x - 3 = 1 - 2x \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

$$3x - 1 = 2x \Rightarrow x = 1$$

Obtemos um mesmo valor para x. Substituindo $x = 1$ no sistema (*):

$$\begin{cases} y = 2(1) - 3 = -1 \\ z = 3(1) - 1 = 2 \\ y = 1 - 2(1) = -1 \\ z = 2(1) = 2 \end{cases}.$$

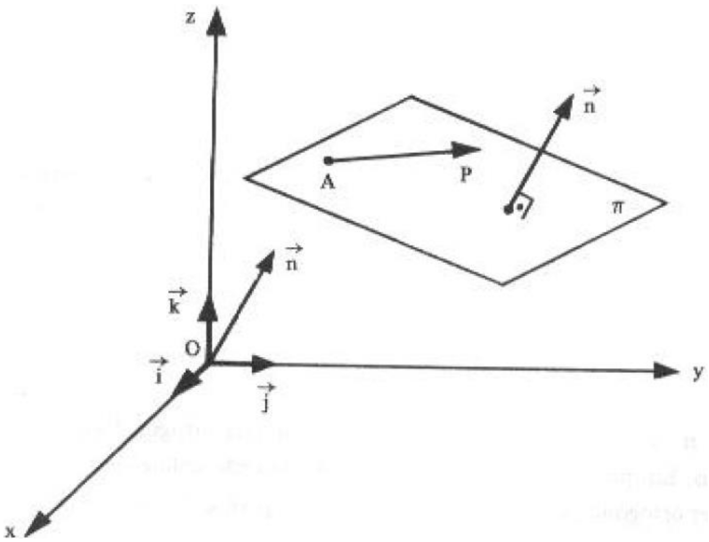
Portanto, $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$. Assim o ponto de interseção entre r_1 e r_2 é $I = (1, -1,2)$.

CAPÍTULO 12: PLANO

12.1 INTRODUÇÃO

12.1.1 Equação Geral do Plano: Considere $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, onde $abc \neq 0$, um vetor normal (ortogonal) ao plano π. O plano π é definido como sendo o conjunto de todos os pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tais que $\overrightarrow{AP} \perp \vec{n}$. Em outras palavras, $P \in \pi$ se, e somente:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0} \ldots (I)$$



Como $\vec{n} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, de (I) temos:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \ldots (*)$$

Fazendo $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ e substituindo em (*):

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \ldots (II)$$

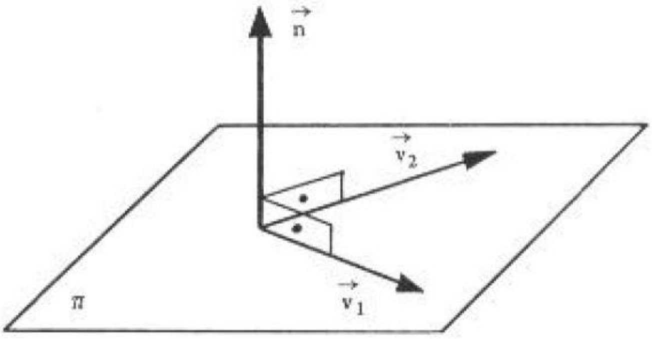
A equação (II) é chamada de equação geral do plano π.

Observações:

01. Note que as coordenadas do vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ ficam evidentes na equação geral do plano (equação II).

02. Se $\vec{n}$ é um vetor normal a π, então qualquer vetor $k\vec{n}$, com $k \neq 0$, também é normal a π.

03. Se $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ é LI e $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são paralelos a π, podemos tomar o vetor $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \vec{n}$ como sendo o vetor normal a π.



Exemplos:

01. Se o plano π_1 tem equação $3x + 2y - 4z + 5 = 0$, perceba que um vetor normal a π_1 é $\overrightarrow{n_1} = (3,2,-4)$ e, além disso, para qualquer plano π_2 que seja paralelo a π_1 também podemos tomar $\overrightarrow{n_1}$ como sendo um de seus vetores normais. Assim, qualquer plano que seja paralelo a π_1 possui equação geral do tipo $3x + 2y - 4z + d = 0$, onde $d \in \Re$ é o elemento que determina a diferença entre os planos paralelos.

Em geral, se π_1 *tem equação geral* $ax + by + cz + d_1 = 0$*, então qualquer plano* π_i *paralelo a* π_1 *tem equação geral* $ax + by + cz + d_i = 0$.

02. Vamos determinar a equação geral do plano π que contém o ponto $A = (2,-1,3)$ e tem como vetor normal $\vec{n} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Se $\vec{n} = (3,2,-1)$ é normal ao plano π, então a equação de π é da forma $3x + 2y - z + d = 0$. Como $A = (2,-1,3) \in \pi$, suas coordenadas devem satisfazer a equação de π, isto é:

$$3(2) + 2(-1) - (3) + d = 0 \Rightarrow 6 - 2 - 3 + d = 0 \Rightarrow 1 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = -1}.$$

Portanto, a equação geral de π é $\boxed{3x + 2y - z - 1 = 0}$.

Ainda poderíamos determinar a equação do plano usando a equação $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. Como $\vec{n} = (3,2,-1)$ e $A = (2,-1,3)$, temos $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$ e $z_0 = 3$. Então

$$3(x-2) + 2(y+1) - (z-3) = 0 \Rightarrow 3x - 6 + 2y + 2 - z + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - z - 1 = 0.$$

03. Estabelecer a equação geral do ***plano mediador*** do segmento AB, onde $A = (2,-1,4)$ e $B = (4,-3,-2)$.

O plano mediador de AB é o plano perpendicular ao segmento AB que contém seu ponto médio. Note que $\overrightarrow{AB} = (2,-2,-6)$ pode ser tomado como vetor normal ao plano mediador e o *ponto médio*[4] de AB é $M = (3,-2,1)$ que está contido no plano. Então, a equação geral do plano é dada por:

$$2x - 2y - 6z + d = 0 \ldots (*)$$

[4] Se $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, então o ponto médio do segmento AB é dado por $M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Como $M = (3, -2, 1)$ está contido no plano, substituindo sua coordenadas em (*):

$$2(3) - 2(-2) - 6(1) + d = 0 \Rightarrow d = -6 - 4 + 6 \Rightarrow d = -4.$$

Portanto, a equação geral do plano mediador do segmento AB é $2x - 2y - 6z - 4 = 0$. Ainda podemos dividir a equação por 2 e obter:

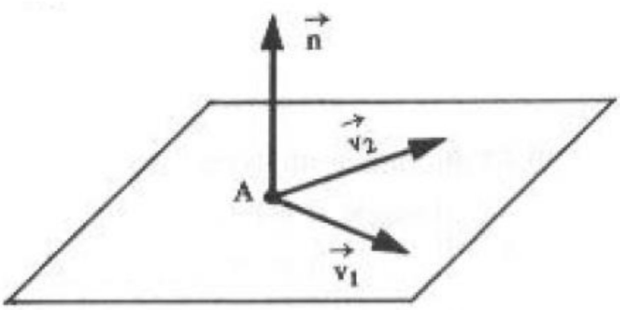
$$x - y - 3z - 2 = 0.$$

Observe que $\vec{n} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e este vetor ainda pode ser tomado como vetor normal ao plano.

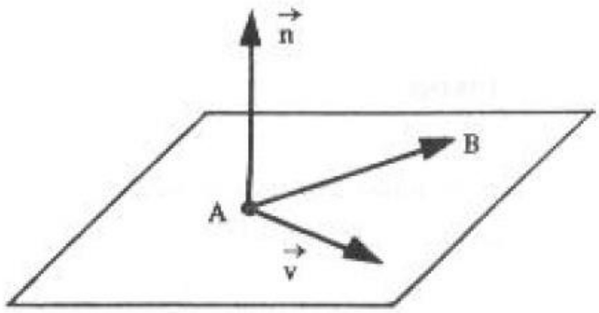
12.2 DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

Embora a equação geral de um plano seja construída a partir de um ponto e um vetor ortogonal ao plano, existem outras maneiras de determinar um plano, que é o que veremos em seguida.

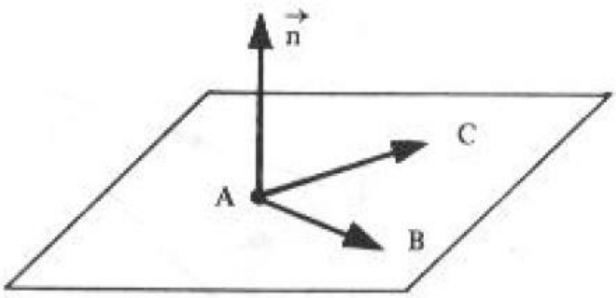
12.2.1 Determinação 01: Consideramos o plano que passa por um ponto A e é paralelo a dois vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ não colineares. Neste caso, tomamos o vetor normal ao plano como sendo $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.



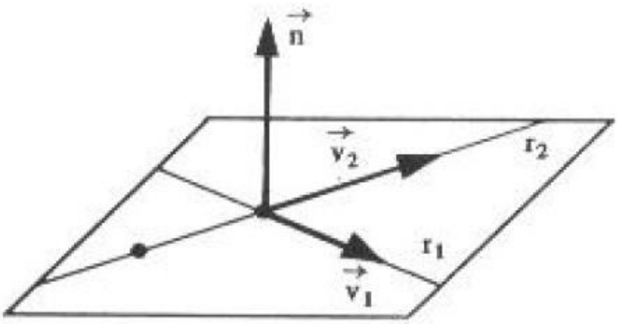
12.2.2 Determinação 02: Consideramos o plano que passa por dois pontos A e B e é paralelo ao vetor $\vec{v}$ não colinear a $\overrightarrow{AB}$. Neste caso tomamos o vetor normal ao plano como sendo $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$.



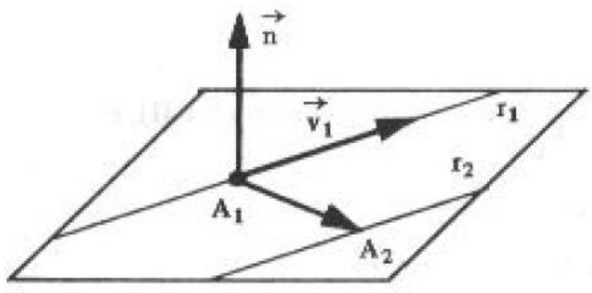
12.2.3 Determinação 03: Consideramos o plano que passa por três pontos A, B e C não colineares. Neste caso, tomamos o vetor normal ao plano como sendo $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.



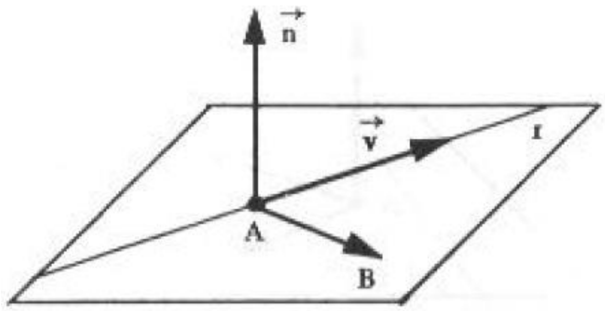
12.2.4 Determinação 04: Consideramos o plano que passa pelas retas concorrentes $r_1 \colon P = A_1 + \lambda\overrightarrow{v_1}$ e $r_2 \colon P = A_2 + \lambda\overrightarrow{v_2}$. Neste caso, tomamos o vetor normal ao plano como sendo $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$.



12.2.5 Determinação 05: Consideramos o plano que passa pelas retas paralelas $r_1: P = A_1 + \lambda\overrightarrow{v_1}$ e $r_2: P = A_2 + \lambda\overrightarrow{v_2}$. Neste caso, tomamos o vetor normal ao plano como sendo $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{A_1A_2}$ ou pode-se tomar também $\vec{n} = \overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{A_1A_2}$.



12.2.6 Determinação 06: Consideramos o plano que passa pela reta $r: P = A + \lambda\vec{v}$ e contém o ponto $B \notin r$. Neste caso, tomamos o vetor normal ao plano como sendo $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$.



Observação: Nos seis casos, o vetor normal foi determinado fazendo o produto vetorial de vetores que possuíam representantes contidos no plano. Os vetores com representantes contidos no plano que fornecem o vetor normal são chamados de *vetores base* do plano.

Exemplos:

01. Determinar a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A = (1, -3,4)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v_2} = (3,1, -2)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1, -1,1)$.
Os vetores base do plano são $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ e, portanto, podemos tomar como vetor normal ao plano $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$. Façamos:

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = (3,1,-2) \times (1,-1,1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 4\vec{k} = (-1,-5,-4) \Rightarrow \boxed{\vec{n} = (-1,-5,-4)}.$$

Portanto, a equação geral do plano cujo vetor normal é $\vec{n} = (-1,-5,-4)$ é:

$$-x - 5y - 4z + d = 0.$$

Para determinar d, basta atribuir as coordenadas de $A = (1,-3,4)$ na equação do plano, uma vez que sabemos que $A \in \pi$. Então:

$$-(1) - 5(-3) - 4(4) + d = 0 \Rightarrow -1 + 15 - 16 + d = 0 \Rightarrow d = 2.$$

Temos $-x - 5y - 4z + 2 = 0$ e, multiplicando a equação por -1:

$$\pi: x + 5y + 4z - 2 = 0.$$

02. Estabelecer a equação cartesiana do plano π que contém os pontos $A = (2,1,-1)$, $B = (0,-1,1)$ e $C = (1,2,1)$.

Neste caso, foi visto que podemos tomar $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Temos $\overrightarrow{AB} = (-2,-2,2)$ e $\overrightarrow{AC} = (-1,1,2)$ e, portanto:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -6\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

$$= (-6,2,-4) \Rightarrow \boxed{\vec{n} = (-6,2,-4)}.$$

Temos que a equação geral do plano é $-6x + 2y - 4z + d = 0$ e nos resta determinar o valor da constante d. Para isto, basta substituir as coordenadas de qualquer um dos pontos A, B e C na equação, pois sabemos que estes estão contidos no plano. Substituímos $B = (0,-1,1)$:

$$-6(0) + 2(-1) - 4(1) + d = 0 \Rightarrow -2 - 4 + d = 0 \Rightarrow d = 6.$$

Logo $-6x + 2y - 4z + 6 = 0$ é a equação cartesiana do plano que passa pelos pontos A, B e C. Ainda podemos escrever $\pi: 3x - y + 2z - 3 = 0$.

03. A equação geral do plano π que contém a reta $r: \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ e o ponto $B = (-3,2,1)$.

Note que podemos reescrever a reta $r: (x, y, z) = (4,3,0) + \lambda(0,0,1)$ que passa pelo ponto $A = (4,3,0)$ e tem a direção de $\vec{v} = (0,0,1)$ e, de acordo com a determinação 02, o vetor normal ao pano π é $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB}$. Calculando $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AB} = (0,0,1) \times (-7,-1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{\imath} - 7\vec{\jmath} = (1,-7,0) \Rightarrow \boxed{\vec{n} = (1,-7,0)}.$$

Desta forma, a equação geral de π é $x - 7y + d = 0$. Determinando d substituindo as coordenadas de $A = (4,3,0) \in \pi$ na equação:

$$(4) - 7(3) + d = 0 \Rightarrow 4 - 21 + d = 0 \Rightarrow d = 17.$$

Logo $\pi: x - 7y + 17 = 0$ é a equação geral do plano.

04. Calcular a equação cartesiana do plano π que contém as retas $r_1: \begin{cases} y = 2x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 3 - 6\lambda \end{cases}$.

A reta r_1 passa pelo ponto $A_1 = (0,1,-2)$ e tem como vetor diretor $\vec{v_1} = (1,2,-3)$ e a reta r_2 passa pelo ponto $A_2 = (-1,0,3)$ e tem como vetor diretor $\vec{v_2} = (2,4,-6)$. Como $\vec{v_2} = 2\vec{v_1}$, temos que $r_1 // r_2$ e, neste caso, podemos tomar o vetor normal ao plano como sendo $\vec{n} = \vec{v_1} \times \overrightarrow{A_1A_2}$ (ou também $\vec{n} = \vec{v_2} \times \overrightarrow{A_1A_2}$). Calculando $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \vec{v_1} \times \overrightarrow{A_1A_2} = (1,2,-3)\times(-1,-1,5) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 7\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k} = (6,0,2) \Rightarrow \boxed{\vec{n} = (7,-2,1)}.$$

Então a equação geral do plano é $7x - 2y + z + d = 0$ e para calcular o valor de d substituímos as coordenadas de um dos pontos, façamos $A_1 = (0,1,-2)$, na equação. Portanto:

$$7(0) - 2(1) + (-2) + d = 0 \Rightarrow -2 - 2 + d = 0 \Rightarrow d = 4.$$

Logo, $7x - 2y + z + 4 = 0$ é a equação geral do plano que contém r_1 e r_2.

12.3 PLANOS PARALELOS AOS EIXOS E AOS PLANOS COORDENADOS

Considere o plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$, com vetor normal $\vec{n} = (a,b,c)$. Vamos analisar os casos em que o vetor normal possui uma ou duas componentes nulas, ou quando a constante d é nula.

12.3.1 Plano que passa pela origem: Se π passa pela origem, então o ponto $O = (0,0,0)$ pertence a π, logo suas coordenadas satisfazem a equação de π. Então:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0}.$$

Se $d = 0$, temos $\pi: ax + by + cz = 0$, ou seja, esta equação representa qualquer plano que passa pela origem. Em outras palavras, qualquer plano que passe pela origem tem o termo constante d nulo.

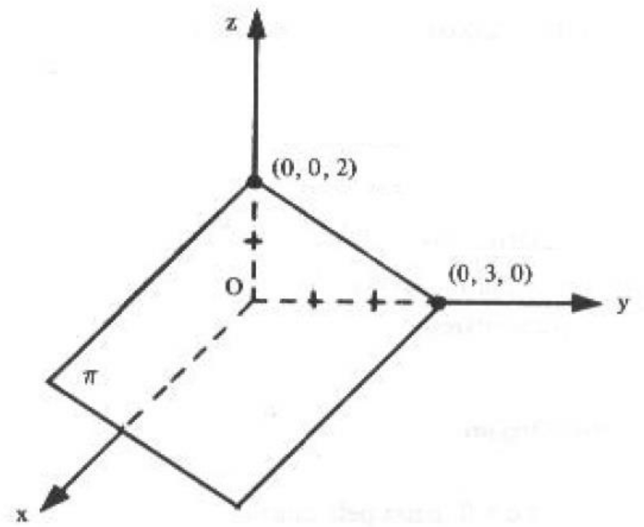
12.3.2 Uma componente do vetor normal nula: Se apenas uma das coordenadas do vetor normal $\vec{n} = (a,b,c)$ é nula, o vetor é ortogonal a um dos eixos coordenados e, portanto, o plano π é *paralelo ao mesmo eixo.*

i. Se $a = 0$, então $\vec{n} = (0, b, c)$ é um vetor ortogonal ao eixo X, logo o plano $by + cz + d = 0$ que possui $\vec{n}$ como vetor normal é paralelo ao eixo X. Isto é:

$$\pi: by + cz + d = 0 \Rightarrow \pi \text{ é } paralelo\ ao\ eixo\ X.$$

<u>Exemplo</u>:

Se $\pi: 2y + 3z - 6 = 0$, temos:



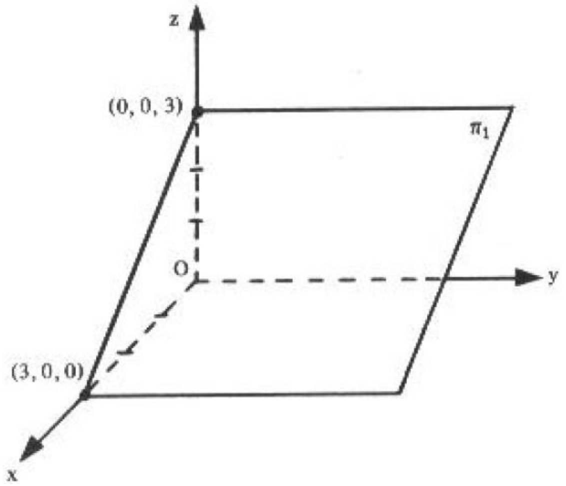
Perceba que as interseções com os eixos Y e Z são, respectivamente, os pontos $(0,3,0)$ e $(0,0,2)$, e que nenhum ponto $(x, 0,0); x \neq 0$ pertence ao plano, pois não satisfaz a equação $2y + 3z - 6 = 0$.

ii. Se $b = 0$, então $\vec{n} = (a, 0, c)$ é um vetor ortogonal ao eixo Y, logo o plano $ax + cz + d = 0$ que possui $\vec{n}$ como vetor normal é paralelo ao eixo Y. Isto é:

$$\pi: ax + cz + d = 0 \Rightarrow \pi \text{ é } paralelo\ ao\ eixo\ Y.$$

<u>Exemplo</u>:

Se $\pi: x + z - 3 = 0$, temos:



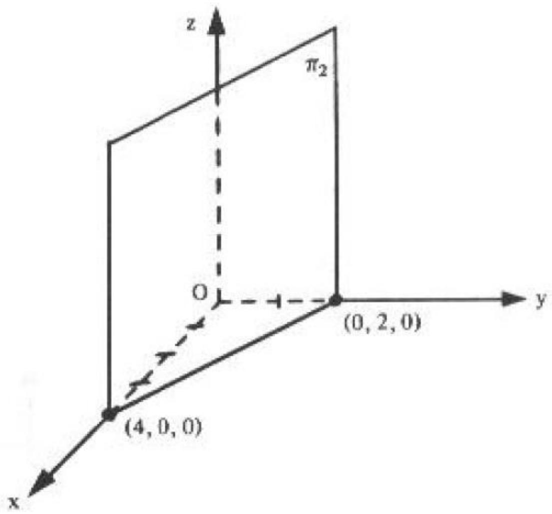
Perceba que as interseções com os eixos X e Z são, respectivamente, os pontos (3,0,0) e (0,0,3), e que nenhum ponto $(0, y, 0); y \neq 0$ pertence ao plano, pois não satisfaz a equação $x + z - 3 = 0$.

iii. Se $c = 0$, então $\vec{n} = (a, b, 0)$ é um vetor ortogonal ao eixo Z, logo o plano $ax + by + d = 0$ que possui $\vec{n}$ como vetor normal é paralelo ao eixo Z. Isto é:

$$\pi: ax + by + d = 0 \Rightarrow \pi \text{ é } paralelo\ ao\ eixo\ Z.$$

Exemplo:

Se $\pi: x + 2y - 4 = 0$, temos:



Perceba que as interseções com os eixos X e Y são, respectivamente, os pontos $(4,0,0)$ e $(0,2,0)$, e que nenhum ponto $(0,0,z); z \neq 0$ pertence ao plano, pois não satisfaz a equação $x + 2y - 4 = 0$.

Observação: Perceba que o plano será paralelo ao eixo correspondente à coordenada nula do vetor normal.

12.3.3 Duas componentes do vetor normal nulas: Se duas das coordenadas do vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ são nulas, o vetor é paralelo a um dos eixos coordenados e, portanto, o plano π é *paralelo ao plano determinado pelos outros dois eixos*.

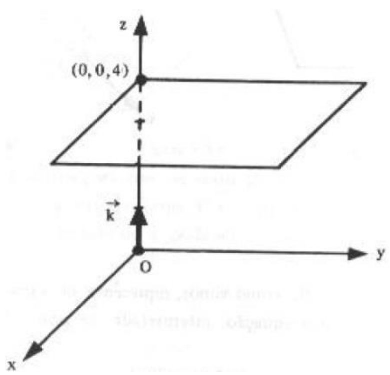
i. Se $a = b = 0$, então $\vec{n} = (0,0,c)$ é um vetor paralelo ao eixo Z, logo o plano $cz + d = 0$ que possui $\vec{n}$ como vetor normal é paralelo ao plano XY. Isto é:

$$\pi: cz + d = 0 \Rightarrow \pi \text{ é } \textit{paralelo ao plano } XY.$$

Como $c \neq 0$, temos $z = -\frac{d}{c} = k \in \Re$. Portanto, qualquer plano cuja equação é da forma $z = k$ é paralelo ao plano XY.

Exemplo:

Se $\pi: z = 4$, temos:



O plano $z = 4$ intercepta o eixo Z no ponto $(0,0,4)$ e, além disso, perceba que qualquer ponto da forma $(x, y, 4)$ satisfaz a equação deste plano.
Um vetor normal a esse plano é $\vec{k} = (0,0,1)$.

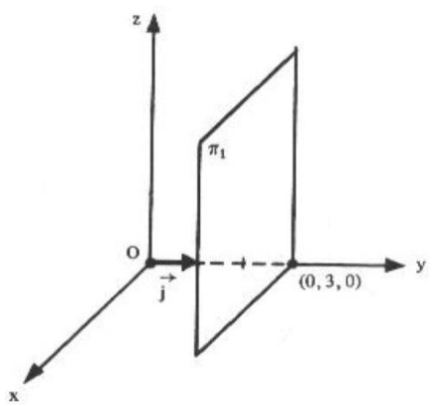
ii. Se $a = c = 0$, então $\vec{n} = (0, b, 0)$ é um vetor paralelo ao eixo Y, logo o plano $by + d = 0$ que possui $\vec{n}$ como vetor normal é paralelo ao plano XZ. Isto é:

$$\pi: by + d = 0 \Rightarrow \pi \text{ é } paralelo\ ao\ plano\ XZ.$$

Como $b \neq 0$, temos $y = -\frac{d}{b} = k \in \Re$. Portanto, qualquer plano cuja equação é da forma $y = k$ é paralelo ao plano XZ.

Exemplo:

Se $\pi_1: y = 3$, temos:



O plano $y = 3$ intercepta o eixo Y no ponto $(0,3,0)$ e, além disso, perceba que qualquer ponto da forma $(x, 3, z)$ satisfaz a equação deste plano.
Um vetor normal a esse plano é $\vec{j} = (0,1,0)$.

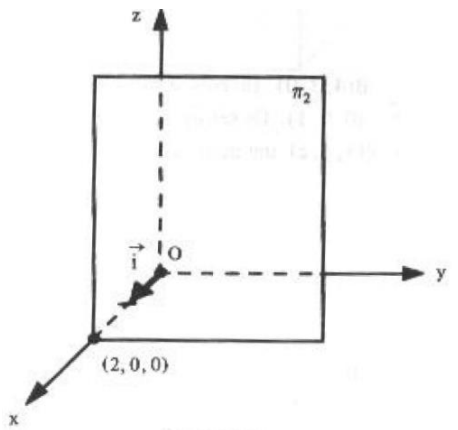
iii. Se $b = c = 0$, então $\vec{n} = (a, 0,0)$ é um vetor paralelo ao eixo X, logo o plano $ax + d = 0$ que possui $\vec{n}$ como vetor normal é paralelo ao plano YZ. Isto é:

$$\pi: ax + d = 0 \Rightarrow \pi \text{ é } paralelo\ ao\ plano\ YZ.$$

Como $a \neq 0$, temos $x = -\frac{d}{a} = k \in \Re$. Portanto, qualquer plano cuja equação é da forma $x = k$ é paralelo ao plano YZ.

Exemplo:

Se $\pi_2: x = 2$, temos:



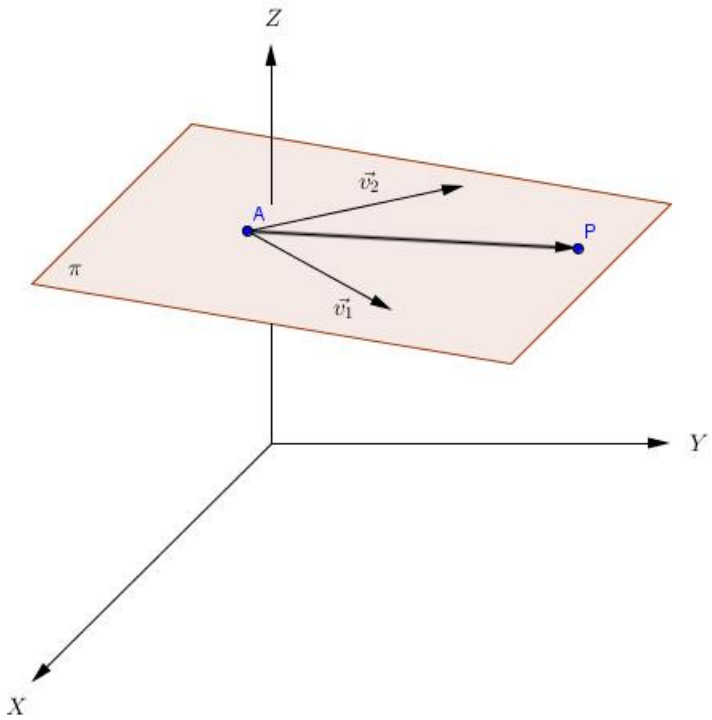
O plano $x = 2$ intercepta o eixo X no ponto (2,0,0) e, além disso, perceba que qualquer ponto da forma $(2, y, z)$ satisfaz a equação deste plano.
Um vetor normal a esse plano é $\vec{i} = (1,0,0)$.

Observação: Perceba que o plano sempre será paralelo ao plano que corresponde às coordenadas nulas do vetor normal.

12.4 EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

Considere um ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ em um plano π e os vetores $\vec{v_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v_2} = (a_1, b_2, c_2)$ não paralelos entre si e paralelos a π. Um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, o conjunto $\{\overrightarrow{AP}, \vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ é LD. Em outras palavras, $P \in \pi$ se, e somente se, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$ tais que:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2}} \dots (I)$$



Podemos reescrever a equação (I) em termos de coordenadas:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda_1(a_1, b_1, c_1) + \lambda_2(a_2, b_2, c_2)$$

$$= (\lambda_1 a_1, \lambda_1 b_1, \lambda_1, c_1) + (\lambda_2 a_2, \lambda_2 b_2, \lambda_2 c_2)$$

$$= (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)$$

$$\Rightarrow (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \\ y = y_0 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ z = z_0 + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \end{cases}} \dots (II)$$

O sistema (II) nos fornece as *equações paramétricas* do plano. Note que, à medida que variamos os *parâmetros* λ_1 e λ_2 de $-\infty$ a $+\infty$, o ponto P descreve o plano.

Exemplo:

Determinar as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto $A = (2,1,3)$ e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v_1} = (-3,-3,1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (2,1,-2)$.
Seja $P = (x,y,z) \in \pi$, temos:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = 1 - 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ z = 3 + \lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases}.$$

Para determinarmos pontos quaisquer do plano, basta atribuir valores para os parâmetros λ_1 e λ_2. Por exemplo, se tomarmos $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$, temos:

$$x = 2 - 3(2) + 2(3) = 2 - 6 + 6 = 2$$

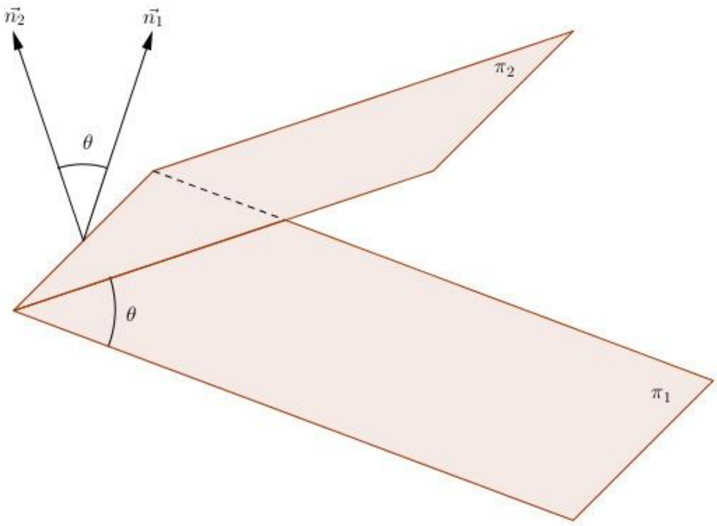
$$y = 1 - 3(2) + (3) = 1 - 6 + 3 = -2$$

$$z = 3 + (2) - 2(3) = 3 + 2 - 6 = -1.$$

Portanto, $Q = (2,-2,-1)$ é um ponto do plano que passa por A e é paralelo aos vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$.

12.5 ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS

Considere os planos $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Os vetores normais a π_1e π_2 são, respectivamente, $\overrightarrow{n_1} = (a_1,b_1,c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2,b_2,c_2)$.



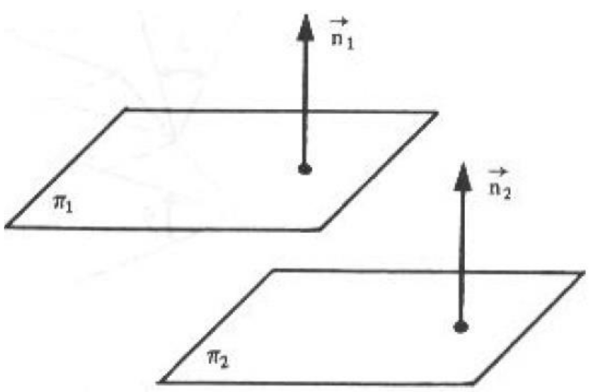
O *ângulo* entre π_1 e π_2 tem a mesma medida que o menor ângulo formado entre seus vetores normais $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$. Sendo $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal ângulo, temos:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{||\overrightarrow{n_1}||\,||\overrightarrow{n_2}||}}.$$

12.5.1 Condições de paralelismo entre planos: Sejam $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ planos cujos vetores normais são $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Os planos π_1 e π_2 serão *paralelos* se seus vetores normais $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ forem paralelos.

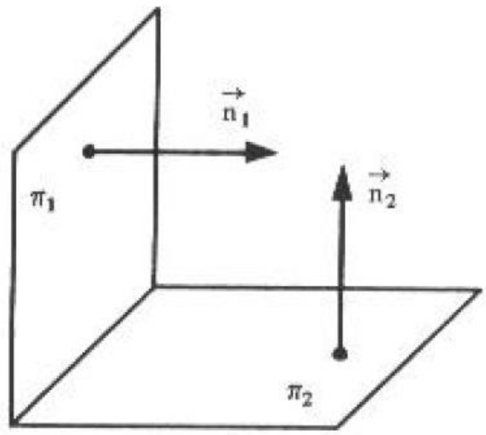
Em outras palavras, $\pi_1 // \pi_2$ se existe $\alpha \in \Re$ tal que $\overrightarrow{n_1} = \alpha\overrightarrow{n_2}$. Ou ainda, $\pi_1 // \pi_2$ se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \alpha$.

Se tivermos ainda $\frac{d_1}{d_2} = \alpha$, então $\pi_1 = \pi_2$.



12.5.2 Condição de ortogonalidade entre planos: Sejam $\pi_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ e $\pi_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ planos cujos vetores normais são $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Os planos π_1 e π_2 serão *ortogonais* se seus vetores normais $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ forem ortogonais ($\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$).

Em outras palavras, $\pi_1 \perp \pi_2$ se $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0$.



Exemplos:

01. Determine o ângulo entre os planos $\pi_1: 2x - 3y + 5z - 8 = 0$ e $\pi_2: 3x + 2y + 5z - 4 = 0$.

Os vetores normais de π_1 e π_2 são, respectivamente $\overrightarrow{n_1} = (2, -3,5)$ e $\overrightarrow{n_2} = (3,2,5)$. Para a medida angular entre os planos, basta calcular a medida angular entre seus vetores normais. Então:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{\left||\overrightarrow{n_1}|\right|\left||\overrightarrow{n_2}|\right|} = \frac{|(2, -3,5) \cdot (3,2,5)|}{\left||(2, -3,5)|\right|\left||(3,2,5)|\right|} = \frac{|6 - 6 + 25|}{\sqrt{4 + 9 + 25}\sqrt{9 + 4 + 25}} = \frac{|25|}{\sqrt{38}\sqrt{38}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{25}{38} \Rightarrow \boxed{\theta = \arccos\left(\frac{25}{38}\right)}.$$

02. Calcule o valor de m e n para que os planos $\pi_1: (2m - 1)x - 2y + nz - 3 = 0$ e $\pi_2: 4x + 4y - z = 0$ sejam paralelos.

Para que os planos sejam paralelos, basta que seus vetores normais sejam paralelos. Note que, $\vec{n_1} = (2m-1, -2, n)$ e $\vec{n_2} = (4,4,-1)$ e, observe que para que $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ sejam paralelos deve ocorrer $\frac{2m-1}{4} = -\frac{2}{4} = \frac{n}{-1}$. Logo:

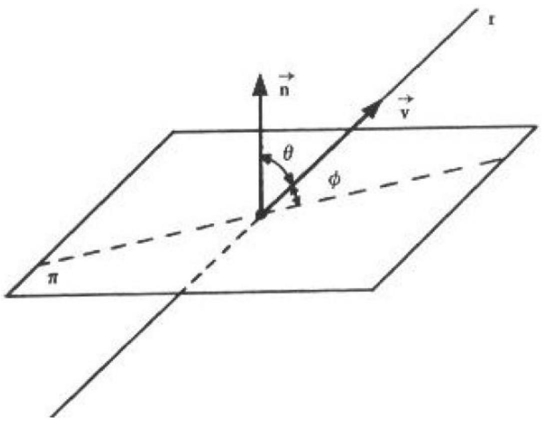
$$\frac{2m-1}{4} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow 2m-1 = -2 \Leftrightarrow 2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{n}{-1} \Leftrightarrow n = \frac{1}{2}.$$

Portanto, para que π_1 e π_2 sejam paralelos deve ocorrer $m = -\frac{1}{2}$ e $n = \frac{1}{2}$.

12.6 ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO

Sejam $r: P = A + \lambda\vec{v}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$, onde $\vec{v}$ é o vetor diretor de r e $\vec{n}$ é o vetor normal a π.

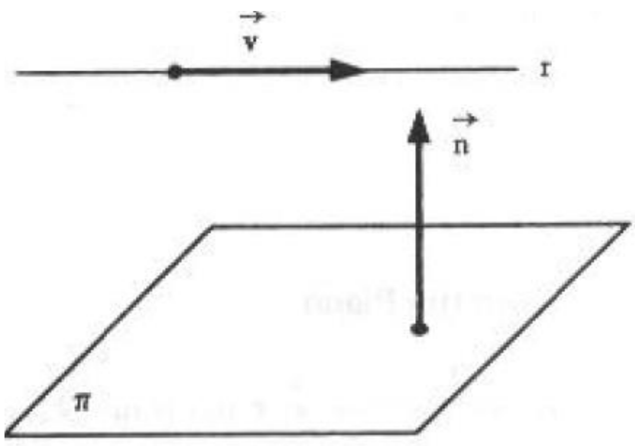


O *ângulo* de medida ϕ entre r e π é igual ao complemento do ângulo de medida θ entre o vetor diretor de r e o vetor normal a π, portanto $\phi + \theta = \frac{\pi}{2}$ e então $\sin\phi = \cos\theta = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||||\vec{n}||}$, logo:

$$\boxed{\sin\phi = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||\,||\vec{n}||}, onde\ \phi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}.$$

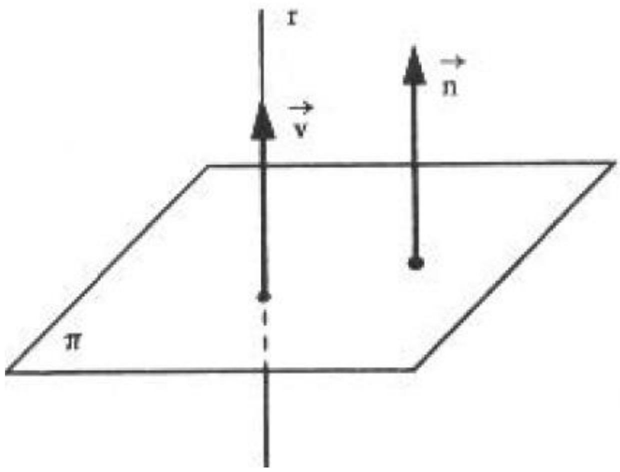
12.6.1 Condição de paralelismo entre reta e plano: Sejam $r: P = A + \lambda\vec{v}$ uma reta com vetor diretor $\vec{v}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$ cujo vetor normal é $\vec{n} = (a, b, c)$. A reta r é *paralela* ao plano π se o vetor diretor de r for ortogonal ao vetor normal a π ($\vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{n} = 0$).

Em outras palavras, $r//\pi$ se $\vec{v}\cdot\vec{n} = 0$.



12.6.2 Condição de ortogonalidade entre reta e plano: Sejam $r: P = A + \lambda\vec{v}$ uma reta com vetor diretor $\vec{v} = (k, l, m)$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$ cujo vetor normal é $\vec{n} = (a, b, c)$. A reta r é *ortogonal* ao plano π se o vetor diretor de r é paralelo ao vetor normal a π.

Em outras palavras, $r \perp \pi$ se existe $\alpha \in \Re$ tal que $\vec{v} = \alpha\vec{n}$. Ou ainda, $r \perp \pi$ se $\frac{a}{k} = \frac{b}{l} = \frac{c}{m} = \alpha$.

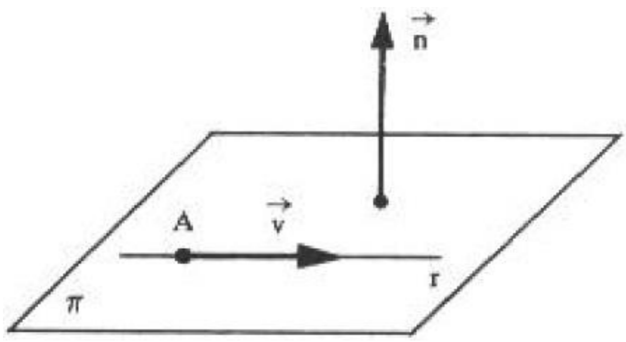


12.6.3 Reta contida em um plano: Sejam $r: P = A + \lambda\vec{v}$ a reta passando por A cujo vetor diretor é $\vec{v}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$ o plano cujo vetor normal é $\vec{n} = (a, b, c)$. Teremos $r \subset \pi$ se:

i. $\vec{v} \perp \vec{n}$;

ii. $A \in \pi$.

Em outras palavras, r estará *contida* em π se seu vetor diretor for ortogonal ao vetor normal a π e se $A \in r$ também pertencer a π.



<u>Exemplos</u>:

01. Determinar o ângulo entre $r: \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$ e $\pi: x + y - 5 = 0$.

Observe que o vetor diretor de r é $\vec{v} = (-2, -1, 1)$ e o vetor normal a π é $\vec{n} = (1, 10)$, portanto o ângulo ϕ entre r e π é tal que:

$$\sin\phi = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{||\vec{v}||||\vec{n}||} = \frac{|(-2,-1,1)\cdot(1,1,0)|}{||(-2,-1,1)||||(1,1,0)||} = \frac{|-2-1|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \phi = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\pi}{3}}.$$

02. Verifique se $r{:}\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ e $\pi{:}\, 9x - 6y - 3z + 5 = 0$ são ortogonais.

Para que r e π sejam ortogonais, o vetor diretor de r e o vetor normal a π devem ser paralelos. Temos $\vec{v} = (3,-2,-1)$ e $\vec{n} = (9,-6,-3)$ e, perceba que $\vec{n} = 3\vec{v}$, isto é, $\vec{n}//\vec{v}$ e temos que r e π são ortogonais.

03. Determine os valores de p e q para que $r \subset \pi$, onde $r{:}\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -3-2\lambda \end{cases}$ e $\pi{:}\, px + qy + 2z - 1 = 0$.

Note que, um ponto de r é $A = (2,1,-3)$, o vetor diretor de r é $\vec{v} = (1,1,-2)$ e o vetor normal de π é $\vec{n} = (p,q,2)$. Para que $r \subset \pi$, devemos ter $\vec{v} \perp \vec{n}$ e $A \in \pi$.

$$\vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (1,1,-2)\cdot(p,q,2) = 0 \Leftrightarrow p + q - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 4 - q}.$$

Então $\vec{n} = (4-q,q,2)$ e $\pi{:}\,(4-q)x + qy + 2z - 1 = 0$. Devemos ter também $A = (2,1,-3) \in \pi$ e, para isto, as coordenadas de A devem verificar a equação de π, portanto:

$$(4-q)(2) + q(1) + 2(-3) - 1 = 0 \Leftrightarrow 8 - 2q + q - 6 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - q = 0 \Leftrightarrow \boxed{q = 1}.$$

Logo $p = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \boxed{p = 3}$.

12.7 INTERSEÇÃO ENTRE DOIS PLANOS

A interseção entre dois planos pode ser uma reta ou, no caso em que os planos são paralelos e não coincidentes, a interseção é vazia.

Veremos através de um exemplo como determinar a interseção entre planos.

12.7.1 Interseção vazia: Se tivermos $\pi_1: ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2: ax + by + cz + d_2 = 0$, onde $d_1 \neq d_2$, então $\pi_1 // \pi_2$ e, consequentemente, $\pi_1 \cap \pi_2 = \phi$.

12.7.2 Interseção não vazia: Considere $\pi_1: 5x - 2y + z + 7 = 0$ e $\pi_2: 3x - 3y + z + 4 = 0$. Note que os vetores normais a estes planos não são paralelos, portanto $\pi_1 \cap \pi_2 = r$, onde r é uma reta. Juntando as equações:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x - 3y + z + 4 = 0 \end{cases} \text{ é } SPI.$$

Em termos de x, a solução deste sistema é:

$$\begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -9x - 13 \end{cases} \ldots (*)$$

Perceba que o sistema (*) nos fornece as equações reduzidas da reta $r = \pi_1 \cap \pi_2$.

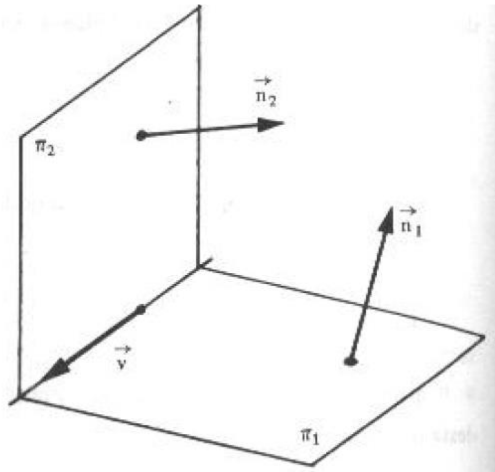
Determinando a equação vetorial de $r: \begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -9x - 13 \end{cases}$:

$$y = -2x - 3 \Leftrightarrow -2x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y + 3}{-2}$$

$$z = -9x - 13 \Leftrightarrow -9x = z + 13 \Leftrightarrow x = \frac{z + 13}{-9}.$$

Temos que $r: x = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+13}{-9}$ ou ainda podemos escrever a equação da reta $r: (x, y, z) = (0, -3, -13) + \lambda(1, -2, -9)$. Perceba que o vetor diretor de r é $\vec{v} = (1, -2, -9)$.

Obviamente, qualquer ponto de r também será um ponto de π_1 e π_2, uma vez que $r = \pi_1 \cap \pi_2$.



12.8 INTERSEÇÃO ENTRE RETA E PLANO

A interseção entre uma reta r e um plano π pode ser: *a própria reta*, no caso em que $r \subset \pi$; *vazia*, no caso em que $r // \pi$; *um ponto*, no caso em que r não é paralela a π.

Vejamos através de um exemplo como determinar a interseção de uma reta com um plano.

12.8.1 A interseção é a própria reta: Se tivermos $r: P = A + \lambda\vec{v}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$, onde $\vec{n} = (a, b, c)$, tais que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ e $A \in \pi$, então $r \cap \pi = r$.

12.8.2 A interseção é vazia: Se tivermos $r: P = A + \lambda\vec{v}$ e $\pi: ax + by + cz + d = 0$, onde $\vec{n} = (a, b, c)$, tais que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ e $A \notin \pi$, então $r \cap \pi = \phi$.

12.8.3 A interseção é um ponto: Consideramos $r: \begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 4 \end{cases}$ e $\pi: 3x + 5y - 2z - 9 = 0$. O ponto de interseção entre r e π é o ponto $I = (x, y, z)$ tal que, suas coordenadas determinam a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 3 \\ z = 3x - 4 \\ 3x + 5y - 2z - 9 = 0 \end{cases} \quad \dots (*)$$

Substituindo as duas primeiras equações de (*) na terceira:

$$3x + 5(2x + 3) - 2(3x - 4) - 9 = 0 \Leftrightarrow 3x + 10x + 15 - 6x + 8 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7x + 14 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}.$$

Temos também $\boxed{y = -1}$ e $\boxed{z = -10}$.

Portanto, o ponto de interseção entre r e π é $I = (-2, -1, -10)$, isto é, $r \cap \pi = \{(-2, -1, -10)\}$.

12.9 INTERSEÇÃO DE PLANO COM OS EIXOS E OS PLANOS COORDENADOS

12.9.1 Interseção entre plano e os eixos coordenados: Considere $\pi: ax + by + cz + d = 0$, com $abc \neq 0$. Se tomarmos:

i. $x = y = 0$, então $cz + d = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{d}{c}$, isto é, a interseção entre π e o eixo Z é o ponto $\left(0,0,-\frac{d}{c}\right)$;

ii. $x = z = 0$, então $by + d = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{d}{b}$, isto é, a interseção entre π e o eixo Y é o ponto $\left(0,-\frac{d}{b},0\right)$;

iii. $y = z = 0$, então $ax + d = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{d}{a}$, isto é, a interseção entre π e o eixo x é o ponto $\left(-\frac{d}{a},0,0\right)$.

12.9.2 Interseção entre plano e os eixos coordenados: Considere $\pi: ax + by + cz + d = 0$, com $abc \neq 0$. Se tomarmos:

i. $x = 0$, então $by + cz + d = 0$ e a interseção entre π e o plano YZ é a reta $r: \begin{cases} x = 0 \\ z = -\frac{d}{c} - \frac{b}{c}y \end{cases}$;

ii. $y = 0$, então $ax + cz + d = 0$ e a interseção entre π e o plano XZ é a reta $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = -\frac{d}{c} - \frac{a}{c}x \end{cases}$;

iii. $z = 0$, então $ax + by + d = 0$ e a interseção entre π e o plano XY é a reta $r: \begin{cases} z = 0 \\ y = -\frac{d}{b} - \frac{a}{b}x \end{cases}$.

CAPÍTULO 13: CÔNICAS

13.1 INTRODUÇÃO

Até o momento, estávamos estudando a geometria analítica no espaço e havíamos determinado as equações de uma reta e de um plano no espaço. A partir de agora, o espaço considerado será o plano e, tomamos como sistema de referência o sistema de coordenadas $\Re^2$.

13.2 TRANSLAÇÃO DE EIXOS

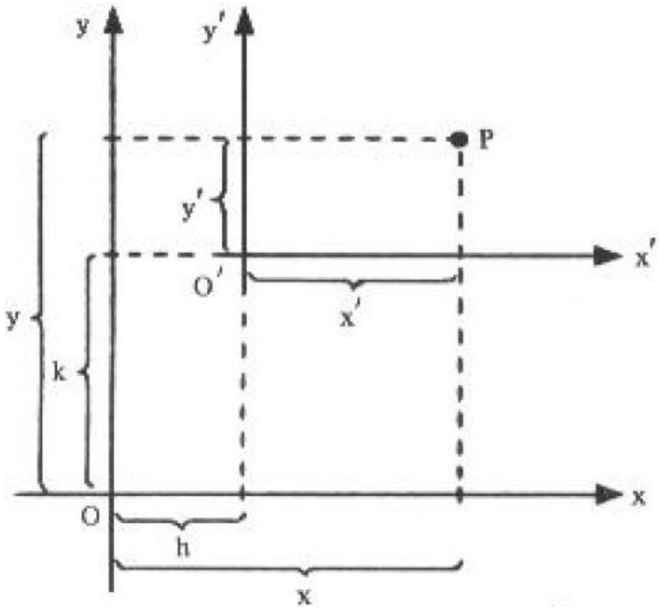
Considere o sistema de coordenadas $\Re^2$ e um ponto arbitrário $O' = (h, k)$. A partir do ponto O', podemos introduzir um novo sistema de coordenadas com eixos X' e Y' paralelos aos eixos X e Y, respectivamente, cuja unidade de medida é a mesma do sistema $\Re^2$. Nestas condições, um sistema pode ser obtido do outro fazendo a *translação de eixos*.

Tomando um ponto P no plano, temos o que suas coordenadas são:

x e y em relação ao sistema usual com eixos X e Y;

x' e y' em relação ao novo sistema com eixos X' e Y'.

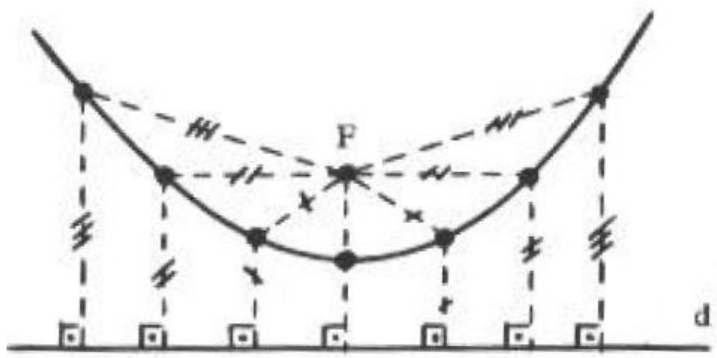
Desta forma, teríamos $P = (x, y)$ no sistema usual e $P = (x', y')$ no novo sistema. Observe:



Temos que $x = x' + h \Leftrightarrow \boxed{x' = x - h}$ e $y = y' + k \Leftrightarrow \boxed{y' = y - k}$ são as formulas usadas para a translação de eixos.

13.3 A PARÁBOLA

Considere d uma reta e $F \notin d$ um ponto, ambos no mesmo plano. Definimos a *parábola* como sendo o lugar geométrico dos pontos (do mesmo plano de d e F) que equidistam da reta d e do ponto F.



Note que, na figura, todos os pontos que estão sobre a “curva” são equidistantes de d e F. Todos os pontos com esta propriedade formam a parábola.

Observe na figura abaixo que, para calcular a distância entre o ponto P da parábola e a reta d, basta traçar a perpendicular a d passando por P, o ponto $P' \in d$ é o pé desta perpendicular e, a distância entre P e d é a distância entre P e P'.

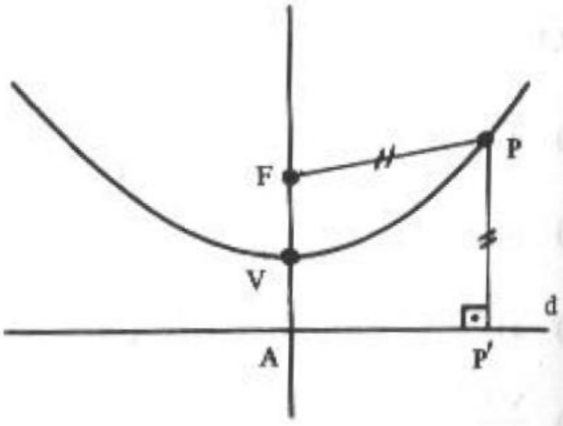


Figura 1

De acordo com a definição, o ponto P pertence à parábola se, e somente se:

$$\boxed{d(P, F) = d(P, P')}$$

Observação: Perceba que $F \notin d$, pois se tivéssemos $F \in d$, a parábola se degeneraria em uma reta.

13.3.1 Elementos da parábola: Considerando a "figura 1", temos:

a) *Foco*: É o ponto F;

b) *Diretriz*: É a reta d;

c) *Eixo*: É a reta que passa pelo foco (F) e é perpendicular à diretriz (d);

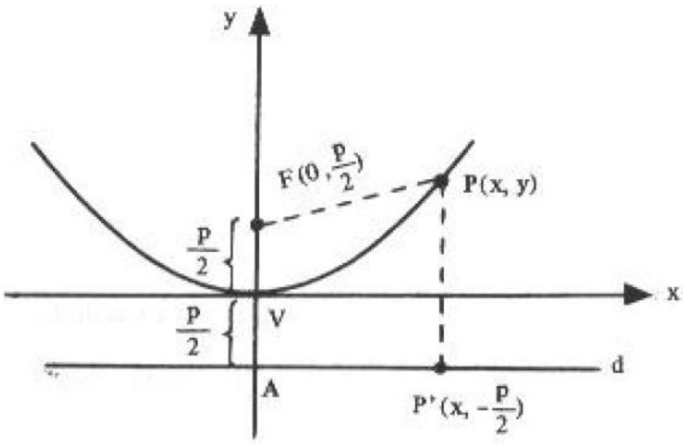
d) *Vértice*: É o ponto V que é dado pela interseção entre a parábola e o eixo.

Observe ainda que, V é um ponto da parábola e, como A é a interseção do eixo da parábola com a diretriz (pensamos em A como sendo o pé da perpendicular sobre a diretriz e que passa por V), temos $d(V, A) = d(V, F)$.

Em seguida, vamos analisar os casos mais simples da parábola e construir suas equações cartesianas.

13.3.2 Equação da Parábola com Vértice na Origem do Sistema: Consideramos os seguintes casos:

Caso 01: O eixo da parábola coincide com o eixo Y.



Obviamente o vértice é $V = (0{,}0)$ e, se considerarmos o foco $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$, tem-se $A = \left(0, -\frac{p}{2}\right)$ e a equação da diretriz é $y = -\frac{p}{2}$.

Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola, temos que o pé da perpendicular à diretriz passando por P é $P' = \left(x, -\frac{p}{2}\right)$. Por definição:

$$d(P, F) = d(P, P') \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left[y - \left(-\frac{p}{2}\right)\right]^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = (x-x)^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2$$

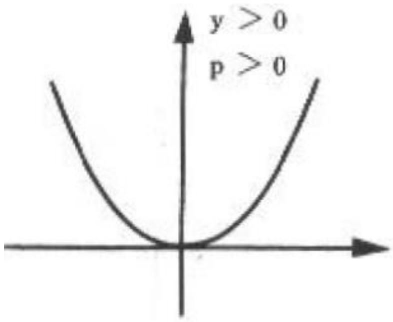
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow x^2 - py = py \Leftrightarrow x^2 = 2py$$

$$\therefore \boxed{x^2 = 2py}.$$

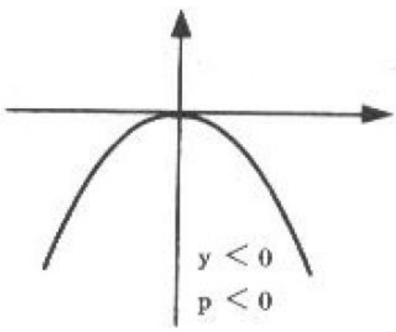
Esta é a *equação reduzida da parábola com vértice na origem cujo eixo coincide com o eixo* Y.

Observe que, como $x^2 \geq 0$ temos $2py \geq 0$, logo p e y devem possuir sempre mesmo sinal.

Se $p > 0$, então $y > 0$ e isto implica que todos os pontos da parábola estão acima da diretriz. Neste caso, dizemos que a parábola tem *concavidade para cima (ou concavidade positiva em relação a Y).*

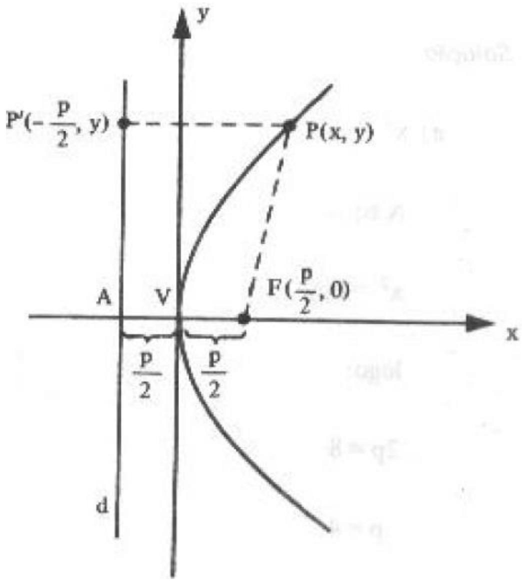


Se $p < 0$, então $y < 0$ e isto implica que todos os pontos da parábola estão abaixo da diretriz. Neste caso, dizemos que a parábola tem *concavidade para baixo (ou concavidade negativa em relação a Y).*



O número real $p \neq 0$ é chamado de *parâmetro* da parábola.

Caso 02: O eixo da parábola coincide com o eixo X.



Obviamente o vértice é $V = (0{,}0)$ e, se considerarmos o foco $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, tem-se $A = \left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ e a equação da diretriz é $x = -\frac{p}{2}$.

Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola, temos que o pé da perpendicular à diretriz passando por P é $P' = \left(-\frac{p}{2}, y\right)$. Por definição:

$$d(P,F) = d(P,P') \Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{\left[x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y-y)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2$$

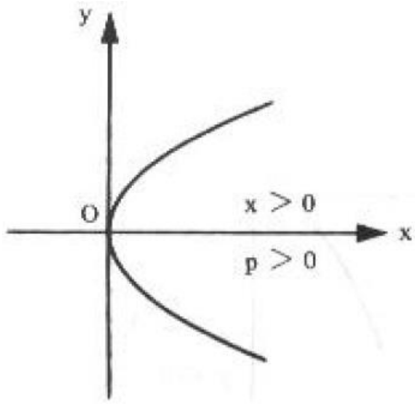
$$\Leftrightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4} \Leftrightarrow y^2 - px = px \Leftrightarrow y^2 = 2px$$

$$\therefore \boxed{y^2 = 2px}.$$

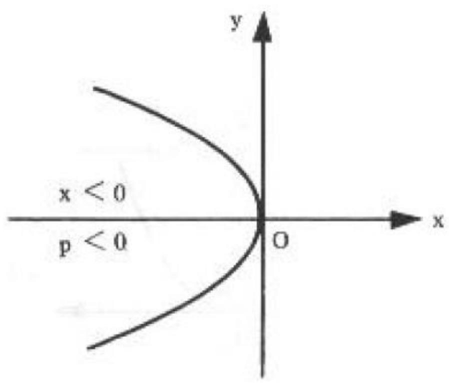
Esta é a *equação reduzida da parábola com vértice na origem cujo eixo coincide com o eixo X.*

Observe que, como $y^2 \geq 0$ temos $2px \geq 0$, logo p e x devem possuir sempre mesmo sinal.

Se $p > 0$, então $x > 0$ e isto implica que todos os pontos da parábola estão à direita da diretriz. Neste caso, dizemos que a parábola tem *concavidade para a direita (ou concavidade positiva em relação a X).*



Se $p < 0$, então $x < 0$ e isto implica que todos os pontos da parábola estão à esquerda da diretriz. Neste caso, dizemos que a parábola tem *concavidade para a esquerda (ou concavidade negativa em relação a X).*



Exemplos:

01. Determine o foco e construa o gráfico da parábola:

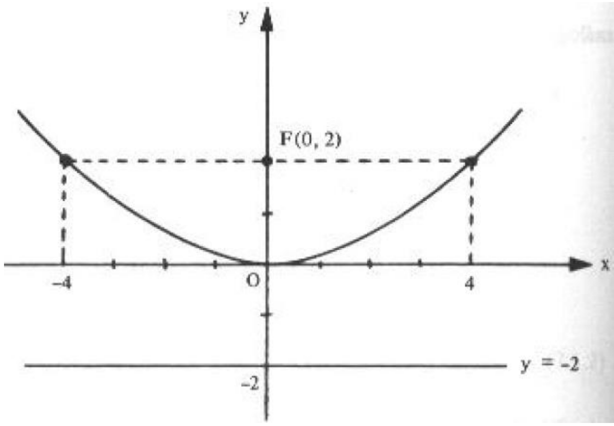
a) $x^2 = 8y$.

Observe que esta é uma parábola cujo eixo coincide com o eixo Y e seu vértice é a origem do sistema cartesiano. Sua equação é da forma $x^2 = 2py$ e temos:

$$2p = 8 \Leftrightarrow p = 4 > 0\ (concavidade\ para\ cima).$$

Mas, de $p = 4$ vem $\frac{p}{2} = 2$. Logo o foco, que é da forma $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$, é o ponto $\boxed{F = (0,2)}$. Além disso, a equação da diretriz é $y = -2$.

O gráfico:



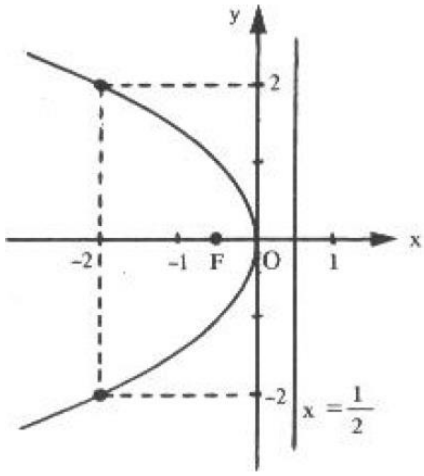
b) $y^2 = -2x$.

Observe que esta é uma parábola cujo eixo coincide com o eixo X e seu vértice é a origem do sistema cartesiano. Sua equação é da forma $y^2 = 2px$ e temos:

$$2p = -2 \Leftrightarrow p = -1 < 0\ (concavidade\ para\ a\ esquerda).$$

De $p = -1$, vem $\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$. Logo o foco, que é da forma $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, é o ponto $F = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Além disso, a equação da diretriz é $x = \frac{1}{2}$.

O gráfico:



02. Determinar a equação de cada uma das parábolas:

a) Vértice $V = (0,0)$ e foco $F = (1,0)$;

Perceba que o foco $F = (1,0)$ é um ponto do eixo X, logo se trata de uma parábola eixo coincidente com o eixo X e sua equação é da forma $y^2 = 2px$.

Como $F = (1,0) = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, temos $\frac{p}{2} = 1 \Leftrightarrow 2p = 4$, logo a equação da parábola com vértice na origem e foco $F = (1,0)$ é $y^2 = 4x$ ou $y^2 - 4x = 0$. A concavidade desta parábola é voltada para a direita.

b) Vértice em $V = (0,0)$ e diretriz $y = 3$;

Como a diretriz é $y = 3$, esta parábola tem eixo coincidente com o eixo Y e sua equação é da forma $x^2 = 2py$. Desta forma, o foco será o ponto $F = (0, -3) = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ e temos $\frac{p}{2} = -3 \Leftrightarrow 2p = -12$.

Portanto, a equação da parábola com vértice na origem e diretriz $y = 3$ é $x^2 = -12y$ ou $x^2 + 12y = 0$. A concavidade desta parábola é voltada para baixo.

c) Vértice em $V = (0,0)$, passa pelo ponto $A = (-2,5)$ e concavidade voltada para cima;

Como a concavidade é voltada para cima, o eixo da parábola coincide com o eixo X, logo sua equação é da forma $x^2 = 2py$.

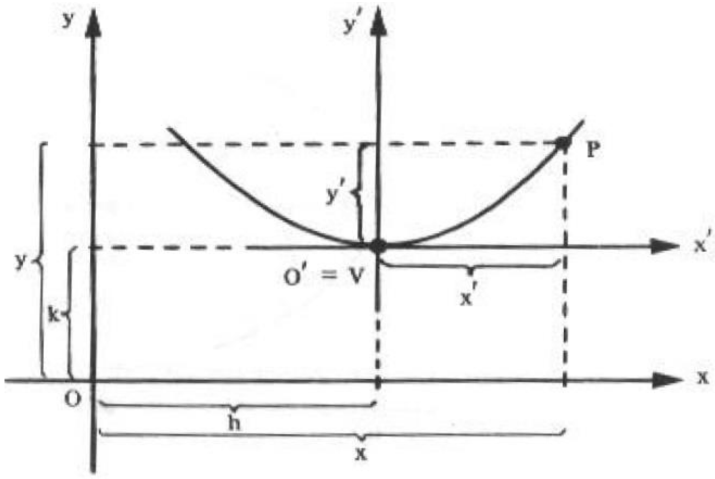
Como $A = (-2,5)$ é um ponto da parábola, suas coordenadas satisfazem a equação da parábola. Portanto:

$$(-2)^2 = 2p(5) \Leftrightarrow 4 = 10p \Leftrightarrow 2p = \frac{4}{5}.$$

E a equação desta parábola é $x^2 = \frac{4}{5}y$ ou $5x^2 - 4y = 0$.

13.3.3 Equação da Parábola com Vértice fora da Origem do Sistema: Consideramos os seguintes casos:

Caso 01: Parábola com vértice no ponto $V = (h, k)$ e eixo paralelo ao eixo Y.



Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola.

Consideramos um novo sistema, de acordo com a figura, com origem O' em V e eixos X' e Y'. Com relação a este novo sistema, temos $P = (x', y')$ e a equação da parábola é:

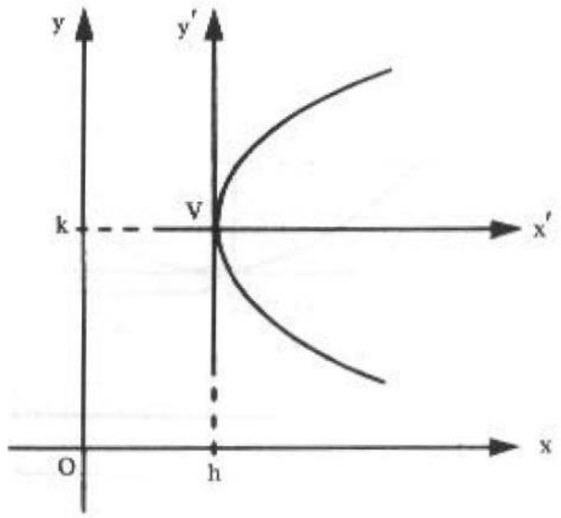
$$(x')^2 = 2py'$$

Mas, sabe-se que $x' = x - h$ e $y' = y - h$. Portanto:

$$\boxed{(x-h)^2 = 2p(y-k)}.$$

Esta é a equação da parábola com eixo paralelo ao eixo Y e vértice em $V = (h, k)$.

Caso 02: Parábola com vértice no ponto $V = (h, k)$ e eixo paralelo ao eixo X.



De forma análoga ao caso anterior, obtemos a equação:

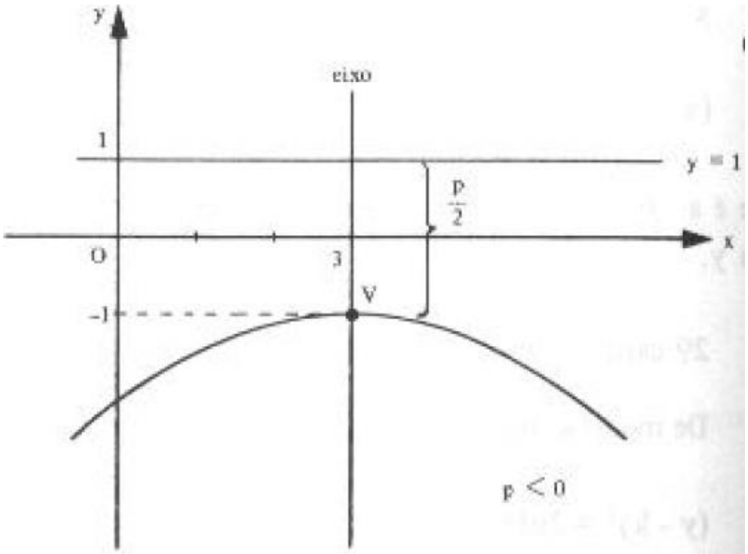
$$\boxed{(y - k)^2 = 2p(x - h)}.$$

Esta é a equação da parábola com eixo paralelo ao eixo X e vértice em $V = (h, k)$.

Exemplos:

01. Determinar a equação da parábola com vértice em $V = (3, -1)$, sabendo que a equação de sua diretriz é $y - 1 = 0$.

Note que, a equação da diretriz $y = 1$ nos diz que a parábola tem eixo paralelo ao eixo Y e, como $V = (3, -1)$, sua equação é da forma $(x - 3)^2 = 2p(y + 1)$. Além disso, a concavidade da parábola é voltada para baixo. Observe:

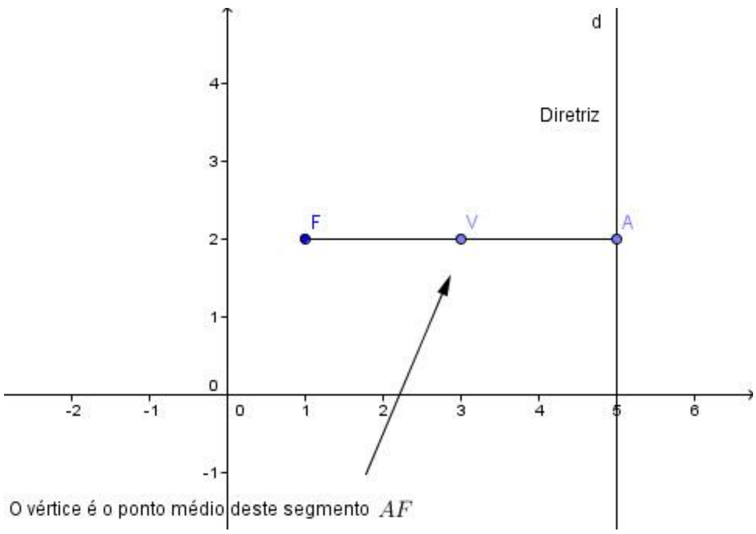


Note que, $\frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow 2p = -8$. Portanto, a equação desta parábola é:

$$(x-3)^2 = -8(y+1) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -8y - 8 \Leftrightarrow \boxed{x^2 - 6x + 8y + 17 = 0}.$$

02. Determinar a equação da parábola com foco em $F = (1,2)$, sendo $x = 5$ a equação de sua diretriz.

Como a equação da diretriz é $x = 5$, o eixo da parábola será paralelo ao eixo x. Graficamente, temos:



Perceba que para determinar o vértice, basta determinar o ponto médio entre o segmento AF. Como $F = (1,2)$ e $A = (5,2)$, temos $V = (3,2)$ e, sua equação é da forma $(y-2)^2 = 2p(x-3)$. Como a concavidade tem abertura no sentido contrário da diretriz, a concavidade será para a esquerda, logo $p < 0$. Temos $\frac{p}{2} = -2 \Leftrightarrow 2p = -8$. Portanto:

$$(y-2)^2 = -8(x-3) \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = -8x + 24 \Leftrightarrow \boxed{y^2 - 4y + 8x - 20 = 0}.$$

E esta é a equação da parábola com diretriz de equação $x = 1$ e foco $F = (1,2)$.

13.3.4 Equação da Parábola na Forma Explicita: Sabe-se que a equação da uma parábola com vértice em $V = (h, k)$ pode ser da forma $(x-h)^2 = 2p(y-k)$ no caso em que o eixo da parábola é paralelo ao eixo Y e $(y-k)^2 = 2p(x-h)$ no caso em que o eixo da parábola é paralelo ao eixo X.

Podemos desenvolver estas equações:

$$(x-h)^2 = 2p(y-k) \Leftrightarrow x^2 - 2hx + h^2 = 2py - 2pk$$

$$\Leftrightarrow 2py = x^2 - 2hx + h^2 + 2pk \Leftrightarrow y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{h}{p}x + \frac{h^2 + 2pk}{2p} \ldots (I)$$

Fazendo $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{h}{p}$ e $c = \frac{h^2+2pk}{2p}$, (I) fica:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}.$$

Esta é a equação explicita da parábola com eixo paralelo ao eixo Y.

Analogamente, obtemos:

$$\boxed{x = \alpha y^2 + \beta y + \gamma}.$$

Esta é a equação explicita da parábola com eixo paralelo ao eixo X.

A partir de uma equação na forma explicita como proceder para determinar o vértice da parábola? Como determinar a equação da diretriz?

Como determinar o foco? A seguir, vejamos como responder estas perguntas através de um exemplo.

Exemplo:

Considere a parábola com equação $y = 4x^2 - 16x + 15$. De alguma maneira, devemos deixar esta equação na forma $(x-h)^2 = 2p(y-k)$. Vejamos:

$$y = 4x^2 - 16x + 15 \Leftrightarrow 4x^2 - 16x = y - 15 \ldots (*)$$

Perceba que $4x^2 - 16x = 4(x^2 - 4x)$. O que devemos fazer para "transformar" a expressão $x^2 - 4x$ em um quadrado perfeito? Vejamos:

$$x^2 - 4x = \boldsymbol{x^2 - 4x + 4} - 4 = \boldsymbol{(x-2)^2} - 4.$$

Logo $4x^2 - 16x = 4(x^2 - 4x) = 4[(x-2)^2 - 4]$. Substituindo em (*):

$$4[(x-2)^2 - 4] = y - 15 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 = \frac{1}{4}y - \frac{15}{4} \Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{4}y - \frac{15}{4} + 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{1}{4}y + \frac{-15+16}{4} = \frac{1}{4}y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(y+1) \Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2 = \frac{1}{4}(y+1)}.$$

Chegamos na forma desejada e a equação nos diz que a parábola tem vértice em $V = (2,-1)$ e $2p = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{16}$.

Como $p > 0$, a concavidade da parábola esta voltada para cima, logo seu foco é o ponto $F = \left(2, -1 + \frac{p}{2}\right) = \left(2, -1 + \frac{1}{16}\right) = \left(2, -\frac{15}{16}\right) \Rightarrow \boxed{F = \left(2, -\frac{15}{16}\right)}$.

A equação da diretriz é $y = -1 - \frac{p}{2} = -1 - \frac{1}{16} = -\frac{17}{16} \Rightarrow y = -\frac{17}{16} \Leftrightarrow \boxed{16y + 17 = 0}$.

13.3.5 Determinação de Foco e Diretriz (caso geral): Considere a tabela abaixo como um "esquema" para lembrar. Abaixo da tabela segue a explicação lógica.

Equação	**Vértice**	**Foco**	**Eq. da Diretriz**
$(x-\boldsymbol{h})^2 = 2\boldsymbol{p}(y-\boldsymbol{k})$	$V = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$	$F = \left(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} + \frac{\boldsymbol{p}}{2}\right)$	$y = \boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{p}}{2}$
$(y-\boldsymbol{k})^2 = 2\boldsymbol{p}(x-\boldsymbol{h})$	$V = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$	$F = \left(\boldsymbol{h} + \frac{\boldsymbol{p}}{2}, \boldsymbol{k}\right)$	$x = \boldsymbol{h} - \frac{\boldsymbol{p}}{2}$

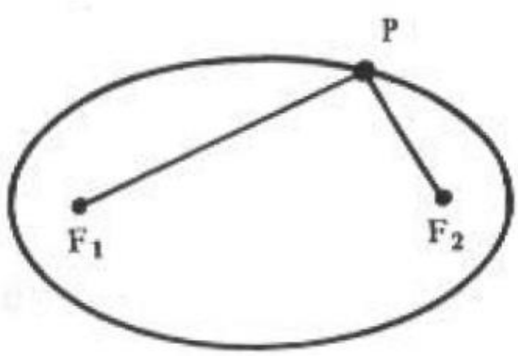
Quando a parábola possui eixo paralelo ao eixo Y (1ª linha da tabela), o vértice e o foco terão mesmas coordenadas em X e a coordenada em Y do foco é obtida a partir da coordenada em Y do vértice somando a constante $\frac{p}{2}$ que é a distância entre o foco e o vértice. Logo para obter a diretriz, basta encontrar o ponto que dista $\frac{p}{2}$ do vértice no sentido contrário do foco, que seria o ponto $\left(h, k-\frac{p}{2}\right)$, e traçar a reta perpendicular ao eixo da parábola que passa pelo ponto $\left(h, k-\frac{p}{2}\right)$, ou seja, a reta de equação $y = k - \frac{p}{2}$.

Quando a parábola possui eixo paralelo ao eixo X (2ª linha da tabela), o vértice e o foco terão mesmas coordenadas em Y e a coordenada em X do foco é obtida a partir da coordenada em X do vértice somando a constante $\frac{p}{2}$ que é a distância entre o foco e o vértice.

Logo para obter a diretriz, basta encontrar o ponto que dista $\frac{p}{2}$ do vértice no sentido contrário do foco, que seria o ponto $\left(h-\frac{p}{2}, k\right)$ e traçar a reta perpendicular ao eixo da parábola que passa pelo ponto $\left(h-\frac{p}{2}, k\right)$, ou seja, a reta de equação $x = h - \frac{p}{2}$.

13.4 A ELIPSE

Considere dois pontos fixos F_1 e F_2 em um plano. Define-se *elipse* como sendo o conjunto dos pontos P do plano, tais que, a distância de P a F_1 somada com a distância de P a F_2 é sempre constante.



Digamos que F_1 e F_2 são tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. Considere um número $a \in \Re_+$ tal que $2a > 2c$.

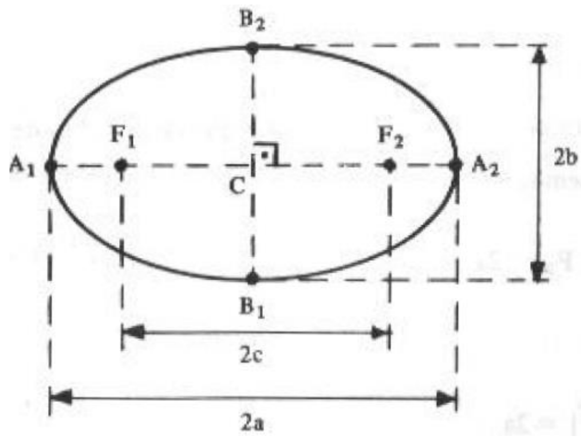


Figura 2

De acordo com a definição, a elipse será o conjunto de todos os pontos P tais que:

$$\boxed{d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a}.$$

13.4.1 Elementos da Elipse: Considerando a elipse da "figura 2", definimos:

a) *Focos*: São os pontos F_1 e F_2;

b) *Distância Focal*: É a distância entre os focos;

c) *Centro*: É o ponto médio C do segmento F_1F_2;

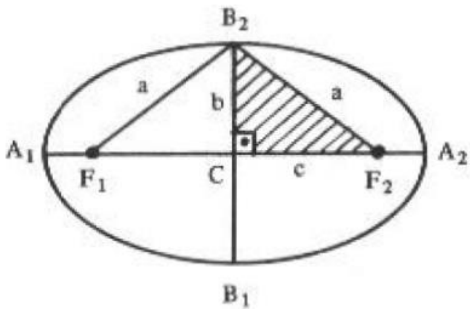
d) *Eixo maior*: É o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ que contém os focos da elipse;

e) *Eixo menor*: É o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, perpendicular ao eixo menor e passando pelo centro C;

f) *Vértices*: São os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2;

g) *Excentricidade*: É o número $e = \frac{c}{a}$. Note que $0 < e < 1$.

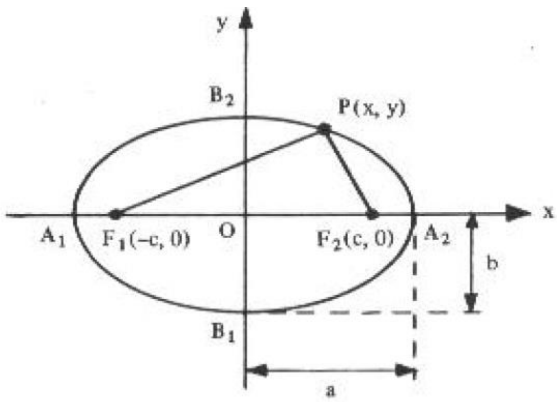
<u>Observação</u>: Em toda elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Observe:



Tal relação é obtida a partir do triângulo B_2CF_2 retângulo em C.

13.4.2 Equação da Elipse centrada na Origem do Sistema: Consideremos os seguintes casos:

Caso 01: O eixo maior está sobre o eixo X.



Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da elipse e os focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Se P é um ponto da elipse, por definição:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2cx$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 4cx = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Novamente, elevamos ambos os membros ao quadrado:

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \ldots (*)$$

Mas, temos $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2$ e substituindo em (*):

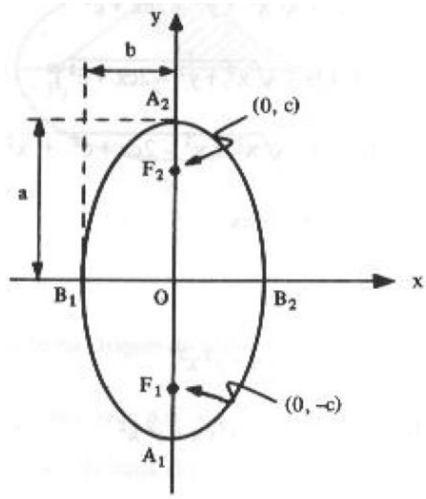
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Multiplicando a igualdade por $\frac{1}{a^2b^2}$, temos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Esta é a *equação reduzida* da elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo X.

Caso 02: O eixo maior esta sobre o eixo Y.



Observe que $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$. Com um procedimento análogo ao caso anterior, obtemos:

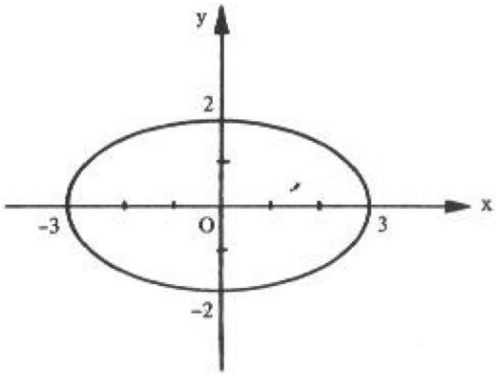
$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}.$$

Esta é a *equação reduzida* da elipse centrada na origem e eixo maior sobre o eixo Y.

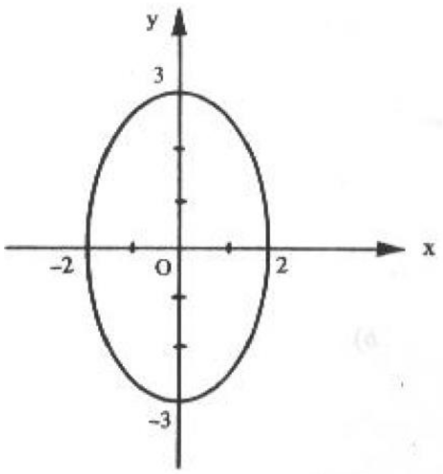
Observação: Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $a^2 > b^2$, logo $a > b$.
Perceba que, se o termo a^2 aparecer no denominador de x^2 na equação reduzida, isto quer dizer que o eixo maior está sobre o eixo X. Da mesma forma, se a^2 aparecer no denominador de y^2 na equação reduzida, isto quer dizer que o eixo maior está sobre o eixo Y.

Exemplos:

01. Perceba que, na figura abaixo, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.



02. Enquanto a elipse abaixo tem equação $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.



03. Encontre a equação reduzida da elipse $9x^2+25y^2=225$, determine seus focos, vértices e conclua qual é o eixo maior.

Para isto, façamos:

$$9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \frac{1}{225}(9x^2+25y^2)=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1.$$

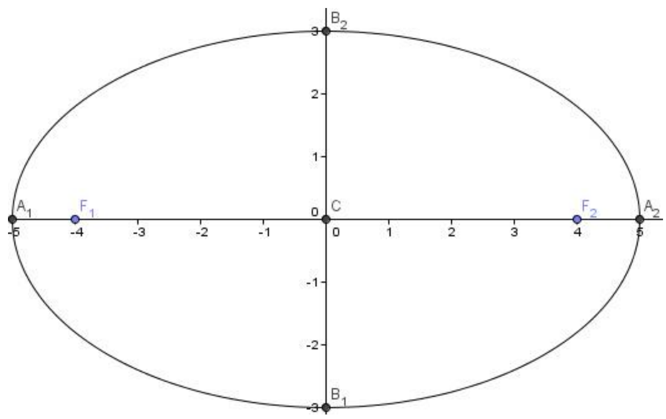
A equação reduzida nos diz que $a=5$ e $b=3$, logo a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo X. Além disso, esta elipse está centrada na origem.

Os vértices são os pontos $A_1 = (-a, 0) = (-5,0)$, $A_2 = (a, 0) = (5,0)$, $B_1 = (0, -b) = (0, -3)$ e $B_2 = (0, b) = (0,3)$.

Para determinar os focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, usamos a relação $a^2 = b^2 + c^2$. Como $a = 5$ e $b = 3$:

$$25 = 9 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4.$$

Logo $F_1 = (-4,0)$ e $F_2 = (4,0)$ e graficamente, temos:



04. Uma elipse tem centro na origem do sistema, um dos focos em $(0,3)$ e a medida do eixo maior é 8. Determine sua equação.

Como um dos focos é $(0,3)$, o outro foco será o ponto $(0, -3)$, isto é, $F_1 = (0, -3)$ e $F_2 = (0,3)$. Além disso, como os focos estão sobre o eixo Y, consequentemente o eixo maior também está. Assim, a equação da elipse é da forma $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Sabe-se que a medida do eixo maior é $8 = 2a$, então $a = 4$ e, das coordenadas do foco, temos que $c = 3$. Desta forma:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4^2 = b^2 + 3^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 - 9 = 7 \Leftrightarrow b^2 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}.$$

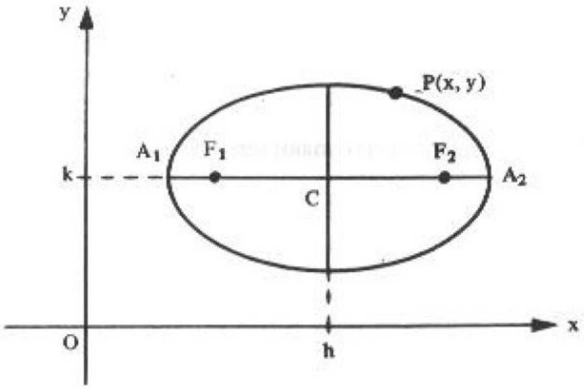
A equação reduzida da elipse é:

$$\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

13.4.3 Equação da Elipse de Centro fora da Origem do Sistema: Consideramos os seguintes casos:

Caso 01: Eixo maior paralelo ao eixo X.

Consideramos a elipse centrada em $C = (h, k)$.



Sendo $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da elipse, se fixarmos um novo sistema de coordenadas com origem em $C = (h, k)$ e considerarmos $P = (x', y')$ em relação a este novo sistema, temos:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

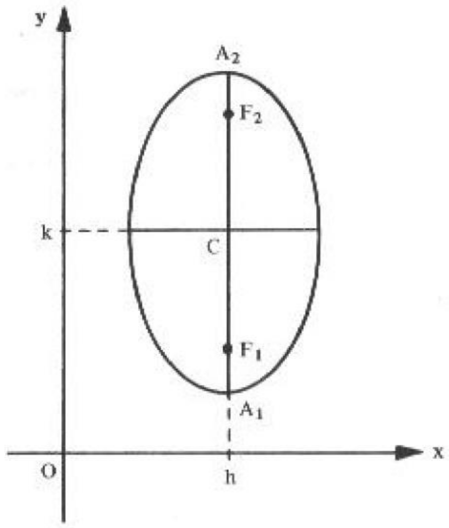
Mas, usando a formula de translação de eixos, sabemos que $x' = x - h$ e $y' = y - k$, logo:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}.$$

Esta é a *equação reduzida* da elipse centrada em $C = (h, k)$ e eixo paralelo ao eixo X.

Caso 02: Eixo maior paralelo ao eixo Y.

Consideramos a elipse centrada em $C = (h, k)$.



Sendo $P = (x, y) = (x', y')$ um ponto arbitrário da elipse, analogamente ao caso anterior obtemos:

$$\frac{(x')^2}{b^2} + \frac{(y')^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}.$$

Esta é a *equação reduzida* da elipse centrada em $C = (h, k)$ e eixo maior paralelo ao eixo Y.

Para determinar vértices e focos, lembrando que $\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$, considere a seguinte tabela:

Equação	Centro	Vértices	Focos
$\frac{(x-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{a}^2} + \frac{(y-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{b}^2} = 1$	$C = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$	$A_1 = (\boldsymbol{h} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{k})$ $A_2 = (\boldsymbol{h} + \boldsymbol{a}, \boldsymbol{k})$ $B_1 = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{b})$ $B_2 = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{b})$	$F_1 = (\boldsymbol{h} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{k})$ $F_2 = (\boldsymbol{h} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{k})$
$\frac{(x-\boldsymbol{h})^2}{\boldsymbol{b}^2} + \frac{(y-\boldsymbol{k})^2}{\boldsymbol{a}^2} = 1$	$C = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$	$A_1 = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{a})$ $A_2 = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{a})$ $B_1 = (\boldsymbol{h} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{k})$ $B_2 = (\boldsymbol{h} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{k})$	$F_1 = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} - \boldsymbol{c})$ $F_2 = (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k} + \boldsymbol{c})$

<u>Exemplos</u>:

01. Uma elipse cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos Y, tem centro no ponto $(4, -2)$, excentricidade $e = \frac{1}{2}$ e eixo menor medindo 6. Determine sua equação.

A equação desta elipse será da forma $\frac{(x-4)^2}{b^2} + \frac{(y+2)^2}{a^2} = 1$, pois seu eixo é paralelo ao eixo Y. Resta determinar as constantes positivas a e b.

Sabe-se que $e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a}$, logo $\frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \boxed{a = 2c}$. Também, temos que o eixo menor mede 6, isto é, $2b = 6 \Leftrightarrow \boxed{b = 3}$. Usando a relação $a^2 = b^2 + c^2$:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow (2c)^2 = 3^2 + c^2 \Leftrightarrow 4c^2 = 9 + c^2 \Leftrightarrow 3c^2 = 9 \Leftrightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}.$$

Consequentemente $a = 2c = 2\sqrt{3}$. Então $a^2 = 12$ e $b^2 = 9$ e a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1.$$

Ainda podemos desenvolver a equação $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12} = 1$. Primeiramente, multiplicamos a igualdade por 36:

$$36\left[\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{12}\right] = 36 \Leftrightarrow 4(x-4)^2 + 3(y+2)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 8x + 16) + 3(y^2 + 4y + 4) = 36$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 32x + 64 + 3y^2 + 12y + 12 = 36 \Leftrightarrow \boxed{4x^2 - 32x + 3y^2 + 12y + 40 = 0}.$$

Dizemos que esta é a equação explicita da elipse.

02. Dada a elipse de equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$, vamos determinar o centro, os focos, os vértices e a excentricidade da mesma.

Para obtermos o centro, devemos fazer manipulações algébricas em sua equação explicita. Observe:

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 9y^2 - 36y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0 \Leftrightarrow 4[(x-1)^2 - 1] + 9[(y-2)^2 - 4] + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)^2 - 4 + 9(y-2)^2 - 36 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y-2)^2}{36} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$$

A equação nos diz que o centro da elipse é $C = (1,2)$, $a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a = 3}$ e $b^2 = 4 \Rightarrow \boxed{b = 2}$. Além disso, o eixo maior é paralelo ao eixo X.

Os vértices são os pontos $A_1 = (1 - a, 2)$, $A_2 = (1 + a, 2)$, $B_1 = (1, 2 - b)$ e $B_2 = (1, 2 + b)$, logo:

$$A_1 = (-2,2), A_2 = (4,2), B_1 = (1,0) \; e \; B_2 = (1,4).$$

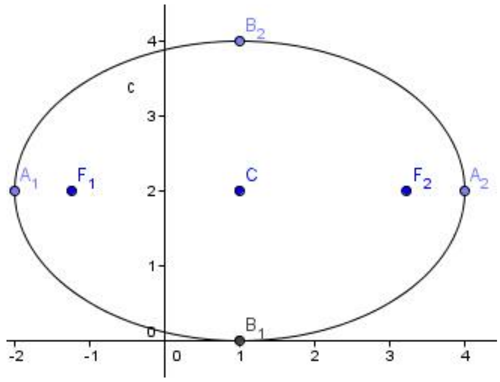
Seus focos, são os pontos $F_1 = (1 - c, 2)$ e $F_2 = (1 + c, 2)$. Vamos determinar c:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5 \Leftrightarrow c^2 = 5 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{5}}.$$

Logo $F_1 = \left(1 - \sqrt{5}, 2\right)$ e $F_2 = \left(1 + \sqrt{5}, 2\right)$.

A excentricidade é $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

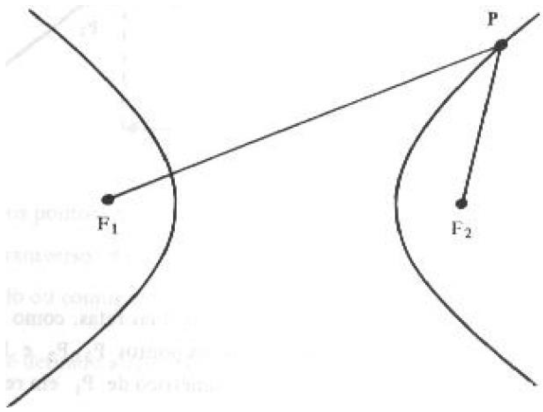
Graficamente, temos:



13.5 A HIPÉRBOLE

A *hipérbole* é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja a diferença das distâncias, em módulo, a dois pontos fixos desse plano é sempre constante.

Se considerarmos F_1 e F_2 dois pontos de um plano, a hipérbole é formada pelos pontos P tais que a o módulo da distância de P a F_1 menos a distância de P a F_2 é sempre constante.



Digamos que F_1 e F_2 são tais que $d(F_1, F_2) = 2c$. Considere um número $a \in \Re_+$ tal que $2a < 2c$.

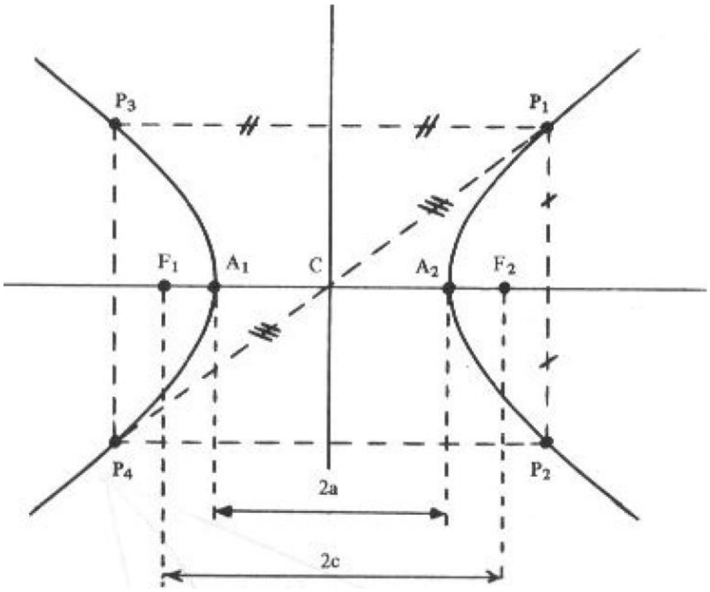


Figura 3

De acordo com a definição, hipérbole é o conjunto dos pontos P tais que:

$$\boxed{|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a}.$$

Observe que a hipérbole é uma curva composta por dois ramos. A equação acima nos diz que um ponto P pertence à hipérbole se, e somente se:

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a.$$

Quando P estiver no ramo da direita, tomamos a diferença como sendo $+2a$. Se P estiver no ramo da esquerda, a diferença é $-2a$. Devido ao fato de que:

Se P está no ramo da direita, temos que $d(P,F_1) > d(P,F_2) \Leftrightarrow d(P,F_1) - d(P,F_2) > 0$, ou seja, tomamos a diferença como sendo $+2a$.

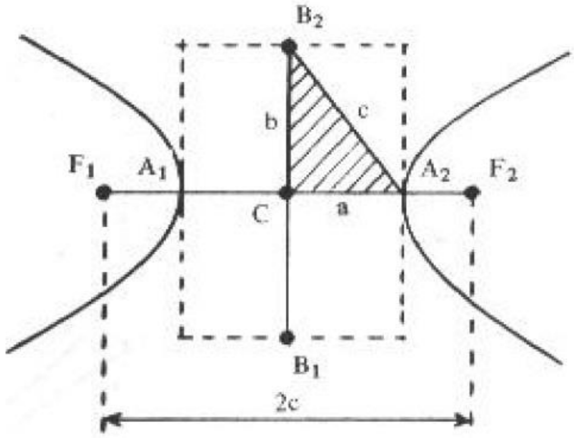
Se P está no ramo da esquerda, temos que $d(P,F_1) < d(P,F_2) \Leftrightarrow d(P,F_1) - d(P,F_2) < 0$, ou seja, tomamos a diferença como sendo $-2a$.

Na "figura 3", considere a reta que passa por F_1 e F_2, sendo A_1 e A_2 os pontos de interseção entre esta reta e a hipérbole. Consideramos ainda outra reta passando pelo ponto médio C do segmento F_1F_2 perpendicular à reta que contém F_1 e F_2. Percebe-se que a hipérbole é simétrica em relação a estas duas retas. Devido à simetria, temos:

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$$

$$d(A_1, A_2) = 2a.$$

13.5.1 Elementos da Hipérbole: Considerando a figura abaixo, temos:



a) *Focos*: São os pontos F_1 e F_2;

b) *Distância Focal*: É a distância $2c$ entre os focos;

c) *Centro*: É o ponto médio C do segmento F_1F_2;

d) *Vértices*: São os pontos A_1 e A_2;

e) *Eixo Real*: É o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;

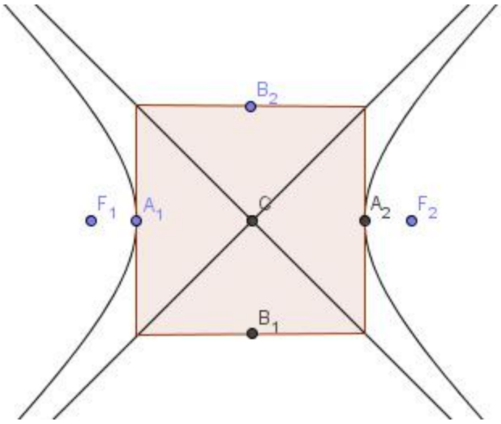
f) *Eixo Imaginário*: É o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$.

g) *Excentricidade*: É o número $e = \frac{c}{a}$. Note que $e > 1$.

<u>Observação</u>: O valor de b é obtido através da relação $c^2 = a^2 + b^2$, onde a, b e c são as medidas do triângulo A_2B_2C retângulo em C.

Na figura acima, note que construímos um retângulo com dimensões $2a$ e $2b$ tomando retas passando por B_1 e B_2 paralelas ao segmento F_1F_2 e retas passando por A_1 e A_2 perpendiculares ao segmento F_1F_2.

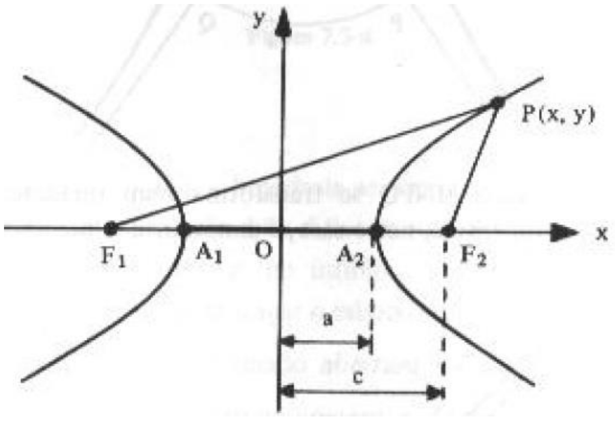
As retas r e s que contém as diagonais deste retângulo são chamadas de *assíntotas da hipérbole*.



A excentricidade é o que influencia na abertura de uma hipérbole.

13.5.2 Equação da Hipérbole centrada na Origem do Sistema: Consideramos os seguintes casos:

Caso 01: Eixo real sobre o eixo X.



Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário. Considere a hipérbole com focos em $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Temos, por definição que, P pertence a hipérbole se:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{[x-(-c)]^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a$$

$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}-\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right| = 2a \dots (*)$$

Podemos ter os seguintes casos para (*):

a) $\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}-\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = 2a$:

$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}-\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = 2a+\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow 4cx-4a^2 = 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \Leftrightarrow cx-a^2 = a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}.$$

Elevando novamente ambos os membros ao quadrado:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2+a^4 = a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 \Leftrightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4$$

$$\Leftrightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \dots (I)$$

Mas temos, $c^2 = a^2+b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2-a^2$ e substituindo em (I):

$$b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2.$$

Multiplicando a igualdade por $\frac{1}{a^2b^2}$, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

b) $\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = -2a$:

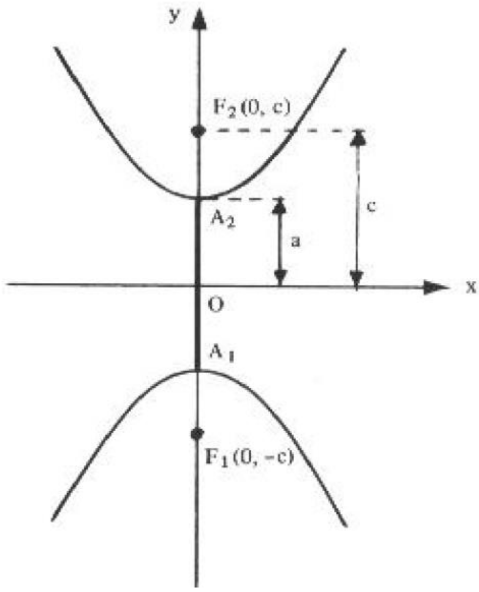
De forma análoga, também obtemos para este caso $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Portanto:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Esta é a equação reduzida da hipérbole centrada na origem com eixo real sobre o eixo X.

Caso 02: Eixo real sobre o eixo X.



Observe que $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$ e sendo $P = (x, y)$ um ponto da elipse, obtemos de forma análoga ao caso anterior:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}.$$

Esta é a *equação reduzida* da hipérbole centrada na origem com eixo real sobre o eixo Y.

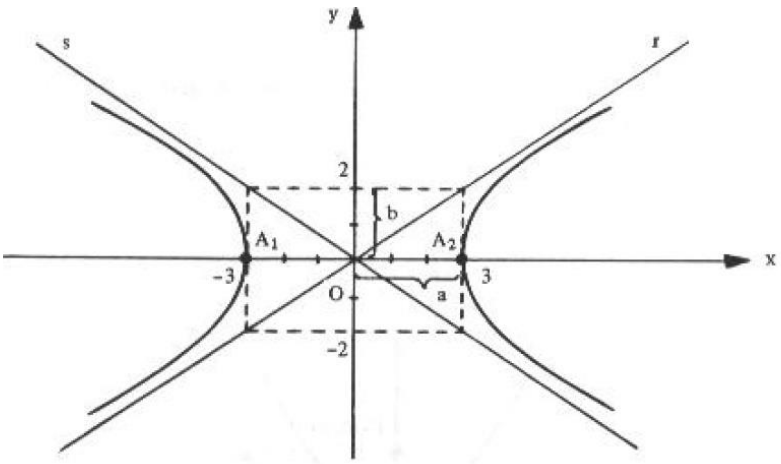
Observações:

01. Perceba que, se a^2 aparecer no denominador de x^2, a equação nos diz que o eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo X. Caso a^2 apareça no denominador de y^2, a hipérbole terá eixo real paralelo ao eixo Y.

02. O termo que acompanha a^2 sempre terá sinal positivo.

Exemplos:

01. A hipérbole de equação $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ está representada na figura abaixo:



Note que $a = 3$ e $b = 2$, logo $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$. Desta forma, seus vértices são $A_1 = (-3{,}0)$ e $A_2 = (3{,}0)$ e os focos são $F_1 = \left(-\sqrt{13}, 0\right)$ e $F_2 = \left(\sqrt{13}, 0\right)$. Como $b = 2$, temos os pontos $B_1 = (-2{,}0)$ e $B_2 = (2{,}0)$.

As assíntotas da hipérbole são as retas que passam pela origem e pelos pontos $(3,2)$ e $(3,-2)$. Vamos construir suas equações.

A assíntota que passa pela origem $(0,0)$ e pelo ponto $(3,2)$ terá sua equação dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow \boxed{2x - 3y = 0}.$$

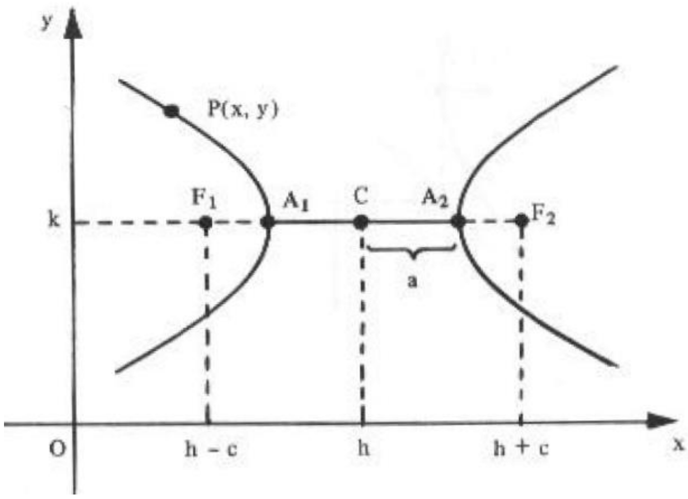
A assíntota que passa pela origem e pelo ponto $(3,2)$ terá sua equação dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x - 3y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x \Leftrightarrow \boxed{2x + 3y = 0}.$$

13.5.3 Equação da Hipérbole centrada fora da Origem do Sistema: Consideramos os seguintes casos:

Caso 01: Eixo real paralelo ao eixo X.

Considere a hipérbole centrada em $C = (h, k)$.



De forma análoga aos casos da parábola e da elipse, obtemos:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}.$$

Os vértices serão os pontos $A_1 = (h-a,k)$ e $A_2 = (h+a,k)$;

Os focos serão os pontos $F_1 = (h-c,k)$ e $F_2 = (h+c,k)$;

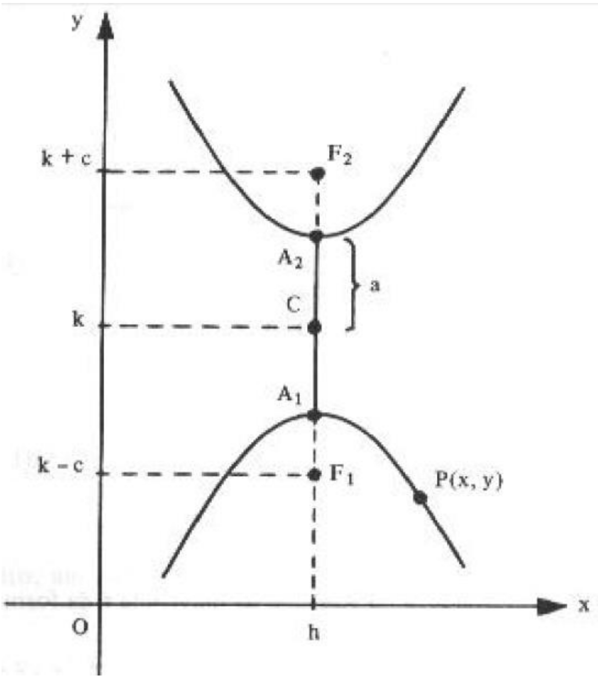
Temos também pontos $B_1 = (h,k-b)$ e $B_2 = (h,k+b)$;

Assíntota 1: Reta que passa por $C = (h,k)$ e $(h+a,k+b)$;

Assíntota 2: Reta que passa por $C = (h,k)$ e $(h+a,k-b)$.

Caso 02: Eixo real paralelo ao eixo Y.

Considere a hipérbole centrada em $C = (h,k)$.



Obtemos:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1}.$$

Os vértices serão os pontos $A_1 = (h,k-a)$ e $A_2 = (h,k+a)$;

Os focos serão os pontos $F_1 = (h,k-c)$ e $F_2 = (h,k+c)$;

Temos também pontos $B_1 = (h-b,k)$ e $B_2 = (h+b,k)$;

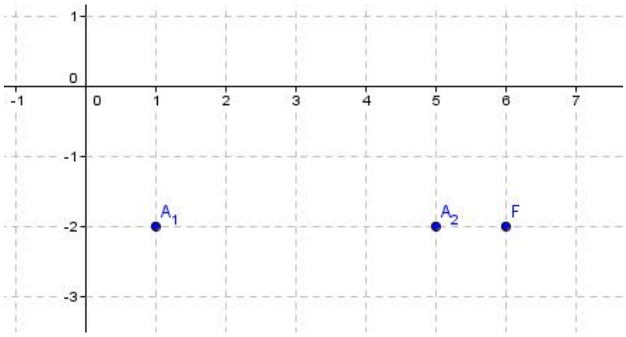
Assíntota 1: Reta que passa por $C = (h, k)$ e $(h + b, k + a)$;

Assíntota 2: Reta que passa por $C = (h, k)$ e $(h + b, k - a)$.

Exemplos:

01. Determinar a equação da hipérbole que tem vértices em $A_1 = (1, -2)$ e $A_2 = (5, -2)$, sabendo que um de seus focos é o ponto $(6, -2)$.

Percebemos que esta hipérbole terá eixo real paralelo ao eixo X, pois as coordenadas de seus vértices variam em X. Observe:



Para determinar o centro da hipérbole, basta encontrar o ponto médio do segmento A_1A_2 que é $C = (3, -2)$. Podemos ainda determinar a e c, sabendo que:

$$a = d(C, A_1) = 2 \Rightarrow \therefore a = 2$$

$$c = d(C, F) = 3 \Rightarrow \therefore c = 3.$$

O outro foco será $F_1 = (3 - c, -2) = (3 - 3, -2) = (0, -2) \Rightarrow F_1 = (0, -2)$. Assim, os focos serão $F_1 = (0, -2)$ e $F_2 = (6, -2)$.

Como vale a relação $c^2 = a^2 + b^2$:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5}.$$

Assim, a equação da hipérbole é $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$.

Podemos desenvolver a equação:

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{5}=1 \Leftrightarrow 20\left[\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{5}\right]=20$$

$$\Leftrightarrow 5(x-3)^2-4(y+2)^2=20 \Leftrightarrow 5(x^2-6x+9)+4(y^2+4y+4)=20$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-30x+45+4y^2+16y+16=20$$

$$\Leftrightarrow \boxed{5x^2-4y^2-30x-16y+9=0}.$$

Esta é a equação explicita da hipérbole.

02. Determinar o centro, os focos, os vértices, a excentricidade e as equações das assíntotas da hipérbole $9x^2-4y^2-54x+8y+113=0$.
Devemos reduzir a equação:

$$9x^2-4y^2-54x+8y+113=0 \Leftrightarrow 9x^2-54x-4y^2+8y+113=0$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2-6x)-4(y^2-2y)+113=0$$

$$\Leftrightarrow 9[(x-3)^2-9]-4[(y-1)^2-1]+113=0$$

$$\Leftrightarrow 9(x-3)^2-81-4(y-1)^2+4+113=0$$

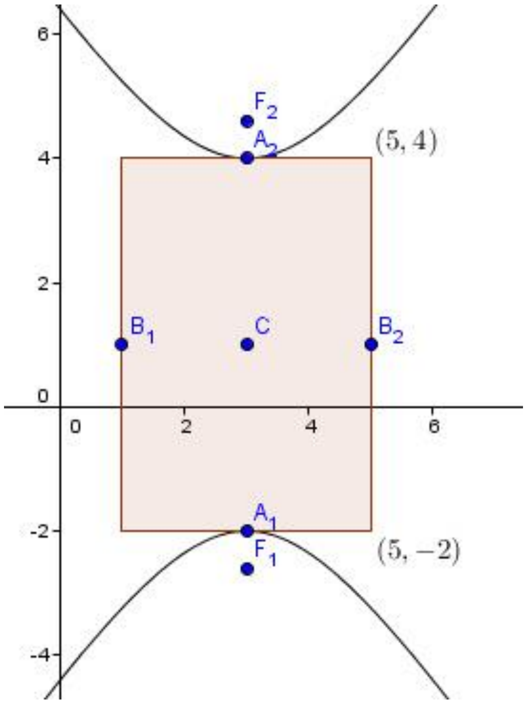
$$\Leftrightarrow 9(x-3)^2-4(y-1)^2+36=0 \Leftrightarrow 9(x-3)^2-4(y-1)^2=-36$$

$$\Leftrightarrow 4(y-1)^2-9(x-3)^2=36 \Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x-3)^2}{4}=1.$$

A equação reduzida nos indica que o centro da hipérbole é $C=(3,1)$ e seu eixo real é paralelo ao eixo Y.
Temos ainda que $a=3$ e $b=2$ e, portanto $c=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.

Seus focos serão $F_1 = (3{,}1 - c) = (3{,}1 - \sqrt{13})$ e $F_2 = (3{,}1 + c) = (3{,}1 + \sqrt{13})$, os vértices serão $A_1 = (3{,}1 - a) = (3{,}1 - 3) = (3, -2)$ e $A_2 = (3{,}1 + a) = (3{,}1 + 3) = (3{,}4)$ e a excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Temos ainda os pontos $B_1 = (3 - b, 1) = (3 - 2{,}1) = (1{,}1)$ e $B_2 = (3 + b, 1) = (3 + 2{,}1) = (5{,}1)$.

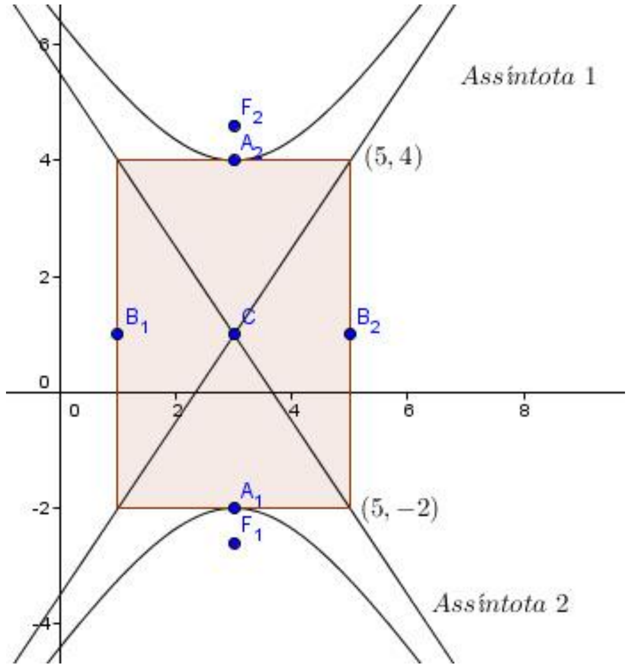


Assíntota 1: É a reta que passa pelo centro $C = (3{,}1)$ e pelo ponto $(5{,}4)$, logo sua equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3x + 2y + 7 = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x - 2y - 7 = 0}.$$

Assíntota 2: É a reta que passa pelo centro $C = (3{,}1)$ e pelo ponto $(5, -2)$, logo sua equação é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \boxed{3x + 2y - 11 = 0}.$$


Assíntota 1
F2
A2
(5, 4)
B1
C
B2
A1
F1
(5, −2)
Assíntota 2

CAPÍTULO 14: ESPAÇOS VETORIAIS

14.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, vamos iniciar a parte de Álgebra Linear presente em nossa ementa.

Iniciamos nosso estudo com uma abordagem abstrata e mais "generalizada" de vetores. Embora estejamos acostumados a representar vetores de uma forma geométrica, a partir daqui nem sempre será possível associar figuras aos vetores.

14.2 ESPAÇOS VETORIAIS

14.2.1 Definição: Sejam $(\mathbb{K},+,\cdot)$ um corpo e V um conjunto não vazio. Dizemos que o conjunto V, munido das operações soma $(+: V \times V \to V; (u,v) \mapsto u+v)$ e multiplicação por escalar $(\cdot: \mathbb{K} \times V \to V; (a,u) \mapsto a \cdot u = au)$, é um *espaço vetorial sobre o corpo* $\mathbb{K}$ se, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$, as seguintes propriedades são válidas:

S1) $(u+v)+w = u+(v+w)$;

S2) $u+v = v+u$;

S3) $\exists 0 \in V; u+0 = 0+u = u$;

S4) $\exists -u \in V; u+(-u) = (-u)+u = 0$;

M1) $a(u+v) = au+av$;

M2) $(a+b)u = au+bu$;

M3) $(ab)u = a(bu)$;

M4) $1u = u; 1 \in \mathbb{K}$.

Ainda podemos nos referir a V como sendo um *$\mathbb{K}$ espaço vetorial*. Chamamos os elementos do conjunto V de *vetores*, enquanto os elementos de $\mathbb{K}$ são chamados de *escalares*.

Observações:

01. Sempre que falarmos em espaço vetorial, devemos deixar bem claro qual é o corpo considerado. Os escalares presentes nos axiomas sempre serão elementos do corpo.

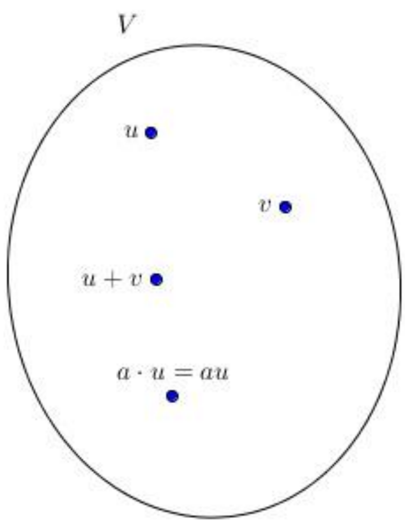
02. Não confunda as operações de $\mathbb{K}$ com as operações de V.

Em $\mathbb{K}$ temos as operações:
$+: \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ soma de escalares de $\mathbb{K}$.
$\cdot: \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ multiplicação de escalares de $\mathbb{K}$.

Em V temos as operações:
$+: V\times V \to V$ soma de vetores de V.
$\cdot: \mathbb{K}\times V \to V$ multiplicação de um escalar de $\mathbb{K}$ por um vetor de V.

Perceba que na multiplicação de escalar por vetor no conjunto V, a operação transforma um par $(a, u) \in \mathbb{K}\times V$ em um vetor $au \in V$.

Observamos na figura abaixo como as operações funcionam em um espaço vetorial:



Somando-se dois vetores de V, o vetor soma ainda pertence ao conjunto V. Multiplicando um escalar de $\mathbb{K}$ por um vetor de V, obtemos um vetor que ainda pertence ao conjunto V.

Exemplos:

01. O conjunto $\Re^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \Re\}$ onde:
Se $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \Re^3$ e $k \in \Re$, definimos:

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$kv_1 = (kx_1, ky_1, ky_2).$$

É um $\Re$ espaço vetorial, ou um espaço vetorial sobre $\Re$. Verifique!

02. Em geral, $V = \Re^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \Re\}$ com as operações (definidas abaixo) é um espaço vetorial sobre $\Re$.
Definimos as operações, para $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n), v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Re^n$ e $k \in \Re$, por:

$$v_1 + v_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$kv_1 = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n).$$

03. Denotamos o conjunto das matrizes de ordem 2 com entradas reais por $M_2(\Re)$. O conjunto $M_2(\Re)$ com as operações soma e multiplicação por escalar é um espaço vetorial sobre $\Re$. Vamos verificar!
Podemos escrever:

$$V = M_2(\Re) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \Re\right\}.$$

Tomando $v_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \in M_2(\Re)$ e $k, l \in \Re$, as operações usuais são definidas por:

$$soma: v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \; e \; mult. por \; escalar \; kv_1 = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}.$$

Agora, devemos concluir que estas operações verificam as 8 propriedades da definição. Mostremos a primeira propriedade detalhadamente, e as demais serão mais diretas.

S1) Devemos concluir que $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$. De fato:

$$(v_1 + v_2) + v_3 = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 & (b_1 + b_2) + b_3 \\ (c_1 + c_2) + c_3 & (d_1 + d_2) + d_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (v_1 + v_2) + v_3 = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 & (b_1 + b_2) + b_3 \\ (c_1 + c_2) + c_3 & (d_1 + d_2) + d_3 \end{bmatrix} \ldots (*)$$

Note que, as entradas da matriz acima são números reais e desta forma, como $\Re$ é um corpo, vale $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \Re$. Usando esta propriedade nas entradas da matriz, temos em (*):

$$(v_1 + v_2) + v_3 = \begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + a_3 & (b_1 + b_2) + b_3 \\ (c_1 + c_2) + c_3 & (d_1 + d_2) + d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + (a_2 + a_3) & b_1 + (b_2 + b_3) \\ c_1 + (c_2 + c_3) & d_1 + (d_2 + d_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 + a_3 & b_2 + b_3 \\ c_2 + c_3 & d_2 + d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) = v_1 + (v_2 + v_3)$$

$$\therefore (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3).$$

S2) Devemos concluir que $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$. De fato:

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 & b_2 + b_1 \\ c_2 + c_1 & d_2 + d_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = v_2 + v_1$$

$$\therefore v_1 + v_2 = v_2 + v_1.$$

S3) Devemos mostrar que existe $0 \in M_2(\Re)$ tal que $v_1 + 0 = v_1$. De fato, seja $0 = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \in M_2(\Re)$:

$$v_1 + 0 = v_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 + m & b_1 + n \\ c_1 + p & d_1 + q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$$

Devido à igualdade de matrizes, temos:

$$a_1 + m = a_1 \Leftrightarrow m = a_1 - a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 0}$$

$$b_1 + n = b_1 \Leftrightarrow n = b_1 - b_1 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 0}$$

$$c_1 + p = c_1 \Leftrightarrow p = c_1 - c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{p = 0}$$

$$d_1 + q = d_1 \Leftrightarrow q = d_1 - d_1 = 0 \Rightarrow \boxed{q = 0}.$$

Logo $0 = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, constatamos a existência da matriz $0 \in M_2(\Re)$ tal que $v_1 + 0 = v_1$.

S4) Devemos mostrar que existe $-v_1 \in M_2(\Re)$ tal que $v_1 + (-v_1) = 0$. De fato, seja $-v_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in M_2(\Re)$:

$$v_1 + (-v_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1+\alpha & b_1+\beta \\ c_1+\gamma & d_1+\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Devido à igualdade entre matrizes, temos:

$$a_1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -a_1}$$

$$b_1 + \beta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -b_1}$$

$$c_1 + \gamma = 0 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = -c_1}$$

$$d_1 + \delta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\delta = -d_1}.$$

Logo $-v_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ -c_1 & -d_2 \end{bmatrix}$. Portanto, constatamos a existência da matriz $-v_1 \in M_2(\Re)$ tal que $v_1 + (-v_1) = 0$.

M1) Devemos concluir que $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$. De fato:

$$k(v_1+v_2) = k\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k(a_1+a_2) & k(b_1+b_2) \\ k(c_1+c_2) & k(d_1+d_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1+ka_2 & kb_1+kb_2 \\ kc_1+kc_2 & kd_1+kd_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka_2 & kb_2 \\ kc_2 & kd_2 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = kv_1 + kv_2$$

$$\therefore k(v_1+v_2) = kv_1 + kv_2.$$

M2) Devemos concluir que $(k+l)v_1 = kv_1 + lv_1$. De fato:

$$(k+l)v_1 = (k+l)\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k+l)a_1 & (k+l)b_1 \\ (k+l)c_1 & (k+l)d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1+la_1 & kb_1+lb_1 \\ kc_1+lc_1 & kd_1+kd_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kc_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} la_1 & lb_1 \\ lc_1 & ld_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = kv_1 + lv_1$$

$$\therefore (k + l)v_1 = kv_1 + lv_1.$$

M3) Devemos concluir que $(kl)v_1 = k(lv_1)$. De fato:

$$(kl)v_1 = (kl) \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (kl)a_1 & (kl)b_1 \\ (kl)c_1 & (kl)d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(la_1) & k(lb_1) \\ k(lc_1) & k(ld_1) \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} la_1 & lb_1 \\ lc_1 & ld_1 \end{bmatrix}$$

$$= k \left(l \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \right) = k(lv_1)$$

$$\therefore (kl)v_1 = k(lv_1).$$

M4) Devemos concluir que $1v_1 = v_1$. De fato:

$$1v_1 = 1 \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a_1 & 1b_1 \\ 1c_1 & 1d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = v_1$$

$$\therefore 1v_1 = v_1.$$

Como as 8 propriedades foram satisfeitas, concluímos que $V = M_2(\Re)$ é um $\Re$ espaço vetorial.

04. O conjunto $V = M_{m \times n}(\Re)$ das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas reais é um espaço vetorial sobre $\Re$.

$$V = M_{m\times n}(\Re) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; a_{ij} \in \Re, 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n \right\}.$$

05. O conjunto $P_2(\Re)$ é o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais. $P_2(\Re)$ é um espaço vetorial sobre $\Re$ (**verifique**).

$$P_2(\Re) = \{a_0 + a_1x + a_2x^2; a_i \in \Re\}.$$

Sendo $p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2(\Re)$ e $\lambda \in \Re$, definimos as operações em $P_2(\Re)$:

$$(p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

$$(kp_1)(x) = kp_1(x) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2.$$

06. O conjunto $V = P_n(\Re) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^2; a_i \in \Re\}$ dos polinômios de grau menor ou igual a n (incluindo o grau zero) é um $\Re$ espaço vetorial.

Observação: Para nosso curso, vamos assumir que os espaços vetoriais são considerados espaços sobre $\Re$.

14.3 SUBESPAÇOS VETORIAIS

Muitas vezes, conseguimos identificar, dentro de um espaço vetorial V, subconjuntos $W \in V$ tal que W ainda é um espaço vetorial. Chamamos estes conjuntos de *subespaços* de V.

14.3.1 Definição: Sejam V um espaço vetorial sobre $\Re$ e $W \neq \emptyset$ tal que $W \subset V$. Dizemos que W é um *subespaço vetorial* de V se:

i. Para quaisquer $u, v \in W$, tem-se $u + v \in W$;

ii. Para quaisquer $a \in \Re$ e $u \in W$, tem-se $au \in W$.

A definição acima nos diz que, operando dois elementos de W com a soma de V, o elemento resultante ainda será um elemento de W e, operando um escalar de $\Re$ com um elemento de W usando-se a multiplicação escalar definida em V, o elemento resultante ainda será um elemento de W. Em outras palavras, dizemos que W é um *conjunto fechado* em relação às operações soma e multiplicação escalar e, estas operações estão bem definidas em W. Além disso, não há a necessidade de verificar as 8 propriedades de espaço vetorial para W, pois se as operações são fechadas, operando quaisquer dois elementos de W o resultado ainda é elemento de W. Ora, sabemos que $W \subset V$, ou seja, qualquer elemento de W é elemento de V e, como V é espaço vetorial, sabe-se que as 8 propriedades de espaço vetorial são satisfeitas.

IMPORTANTE: Qualquer subespaço W de V contém o vetor nulo de V, pois na condição ii da definição de subespaço, tomando $a = 0$ temos $a \cdot 0 = 0$ que ainda é vetor de W. O fato de que $0 \in W$, se $W \subset V$ é subespaço de V é muito utilizado para verificar se um subconjunto não é subespaço de certo conjunto.

Se tivermos $A \subset B$, onde B é espaço vetorial, e ocorrer $0 \notin A$ concluímos imediatamente que A NÃO é subespaço de B. Tome cuidado, se concluirmos que $0 \in A$, não podemos dizer de imediato que A é subespaço de B, pois $0 \in A$ é uma condição necessária para que A seja subespaço de B, mas não é suficiente. Logo devemos verificar também i e ii da definição.

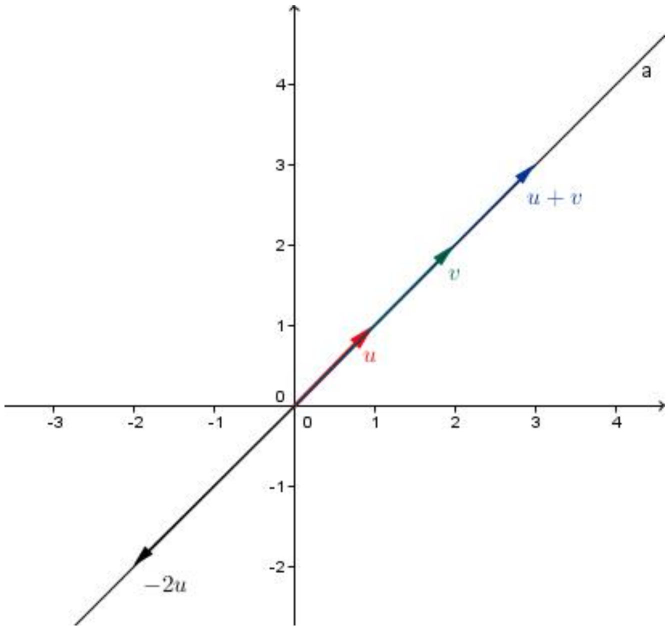
14.3.2 Subespaços Triviais: Seja V um espaço vetorial. Os subconjuntos de V $W_1 = \{0\}$ (conjunto formado pelo vetor nulo) e $W_2 = V$ são subespaços de V e os chamamos de *subespaços triviais* de V.

Em outras palavras, qualquer conjunto formado pelo vetor nulo de V é subespaço de V. E o próprio conjunto V é subespaço de V.

Observação: Sempre que quisermos verificar se $W \subset V$ é um subespaço de V, devemos verificar se $0 \in W$ e as propriedades i e ii da definição.

Exemplos:

01. Seja $V = \Re^2 = \{(x, y); x, y \in \Re\}$ espaço vetorial sobre $\Re$. Seja $W \subset V$ o conjunto de pontos de $\Re^2$ contidos na reta $y = x$, desta forma $W = \{(x, x); x \in \Re\}$. W é subespaço de V.



Para quaisquer $u, v \in W$ e $a \in \Re$, tem-se $u + v \in W$ e $au \in W$. Vejamos:
Se $u = (x_1, y_1) \in W$, então $x_1 = y_1$. Logo $u = (x_1, x_1)$. Se $v = (x_2, y_2) \in W$, então $x_2 = y_2$. Logo $v = (x_2, x_2)$. Assim:

$$u + v = (x_1, x_1) + (x_2, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2).$$

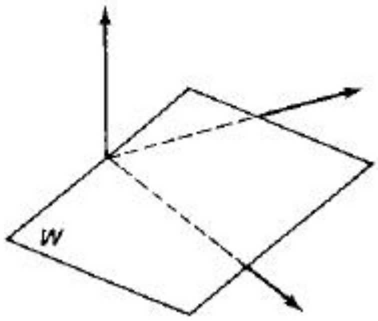
As coordenadas de $u + v$ satisfazem $y = x$, logo $u + v \in W$. E também:

$$au = a(x_1, x_1) = (ax_1, ax_1).$$

As coordenadas de au satisfazem $y = x$, logo $au \in W$.
Como i e ii são satisfeitas, concluímos que W é subespaço vetorial de $V = \Re^2$.

02. Qualquer reta que passa pela origem é subespaço de $V = \Re^2$.

03. Sejam $V = \Re^3$ e $W \subset \Re^3$ um plano passando pela origem. Note que W é um subespaço de $V = \Re^3$, pois quaisquer que sejam $u, v \in W$ e $a \in \Re$ tem-se $u + v, av \in W$ e além disso, como o plano passa pela origem, o vetor nulo de $\Re^3$ $0 = (0,0,0)$ pertence à W.



04. Sejam $V = \Re^5$ e $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5); x_i \in \Re\} \subset V$ o conjunto dos vetores de $\Re^5$ com primeira coordenada nula.
Tomando $k \in \Re$ e $u = (0, x_2, x_3, x_4, x_5), v = (0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$, temos:

$$u + v = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5) \in W.$$

Pois a primeira coordenada de $u + v$ é nula e as demais são números reais $x_i + y_i$, isto é, a propriedade de W é satisfeita. Temos também:

$$ku = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5) \in W.$$

Pois a primeira coordenada de ku é nula e as demais são $kx_i \in \Re$.
Portanto, concluímos que W é um subespaço de $V = \Re^3$.

05. O conjunto W das matrizes triangulares superiores é um subespaço de $V = M_n(\Re)$, pois a soma de duas matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior e a multiplicação de um escalar por uma matriz triangular superior ainda é uma matriz triangular superior.

06. Consideramos o sistema homogêneo de equações lineares $\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$

na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ldots.(*)$$

Note que a solução do sistema é encontrada no conjunto $M_{3\times1}(\Re)$ das matrizes de ordem 3×1 com coeficientes reais e, desta forma, vamos mostrar que o conjunto W de soluções do sistema (*) é um subespaço de $M_{3\times1}(\Re)$.

Tomando $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$ e $k \in \Re$, resta verificar que $u + v$ e ku são soluções do sistema, isto é, devemos mostrar que $u + v, ku \in W$, daí concluímos que W é subespaço de $M_{3\times1}(\Re)$. De fato:

$$u + v = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

i. Mostremos que $u + v$ é solução do sistema (*):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \ldots (**)$$

Como $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \in W$, u é solução do sistema, logo $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e, de forma análoga, como $v = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$, v é solução do sistema, logo $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Desta forma, voltando em (**), temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $u+v=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix}$ é solução de (*), logo $u+v\in W$.

Temos também:

$$ku=k\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}.$$

ii. Mostremos que ku é solução do sistema (*):

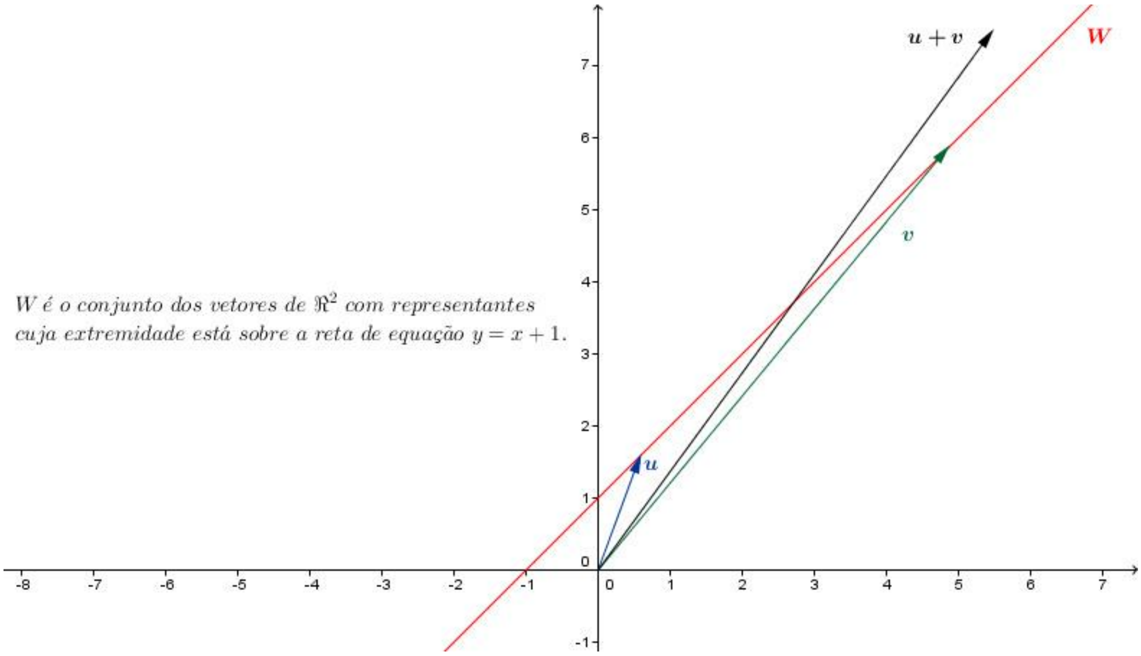
$$\begin{bmatrix}2&4&1\\1&1&2\\1&3&-1\end{bmatrix}\left(k\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\right)=k\left(\begin{bmatrix}2&4&1\\1&1&2\\1&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\right)=k\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2&4&1\\1&1&2\\1&3&-1\end{bmatrix}\left(k\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Portanto ku é solução do sistema (*), logo $ku\in W$.
Como i e ii são satisfeitas, temos que W é subespaço vetorial de $M_{3\times 1}(\Re)$.

Contra Exemplos:

01. Sejam $V=\Re^2$ e $W=\{(x,y)\in\Re^2; y=x+1\}$. W não é um subespaço vetorial de V.



Observe que a soma de $u, v \in W$ é o vetor $u + v \notin W$, para que $u + v$ seja um vetor de W, este deveria possuir extremidade sobre a reta de equação $y = x + 1$. Em outras palavras, a propriedade i da definição de subespaço não é satisfeita, logo W não é subespaço vetorial de $V = \Re^2$.

Também podemos concluir algebricamente que W não é um subespaço de $V = \Re^2$. Basta observar que o vetor nulo $0 = (0,0) \in \Re$ não satisfaz a propriedade de W, isto é, as coordenadas do vetor nulo são $x = 0$ e $y = 0$, logo $y = 0 \neq 0 + 1 = x + 1 \Rightarrow y \neq x + 1$. Portanto $0 \notin W$ e isto já é o suficiente para concluir que W NÃO é subespaço de $V = \Re^2$.

02. Seja $V = \Re^2$, se W for qualquer reta que não passa pela origem, então W não é subespaço de V.

03. Sejam $V = \Re^2$ e $W = \{(x, y) \in \Re^2; y = x^2\}$. W não é subespaço de V. Observe que $0 = (0,0) \in W$, pois em $0 = (0,0)$, as coordenadas são $x = 0$ e $y = 0$, logo $y = 0 = 0^2 = x \Rightarrow y = x^2$, isto é, $0 = (0,0)$ satisfaz a propriedade de W. Podemos concluir que W é subespaço de V? Não! Ainda devemos verificar as propriedades i e ii da definição.

Tomando $u_1 = (x_1, y_1), u_2 = (x_2, y_2) \in W$, temos que $y_1 = x_1^2$ e $y_2 = x_2^2$, logo:

$$u_1 = (x_1, x_1^2)$$

$$u_2 = (x_2, x_2^2).$$

Vamos verificar i da definição, isto é, queremos verificar se $u_1 + u_2 \in W$. Temos:

$$u_1 + u_2 = (x_1, x_1^2) + (x_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2) \Rightarrow \boxed{u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2)}.$$

Perceba que o vetor $u_1 + u_2$ não satisfaz a propriedade de W, pois deveríamos ter $(x_1 + x_2)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ na coordenada em y (lembrando que para que um vetor (x, y) pertença a W, suas coordenadas devem satisfazer $y = x^2$), ou seja, o vetor $u_1 + u_2$ não é da forma (x, x^2). Portanto $u_1 + u_2 \notin W$, e assim W não é subespaço de $V = \Re^2$.

14.3.3 Teorema (Interseção de subespaços): Dados W_1 e W_2 subespaços de V, a *interseção* $W_1 \cap W_2$ ainda é um subespaço de V.

Prova: Para provar que o conjunto $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V, devemos mostrar:

i. Se $v_1 \in W_1 \cap W_2$ e $v_2 \in W_1 \cap W_2$, então $v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$;

ii. Se $\lambda \in \Re$ e $v \in W_1 \cap W_2$, então $\lambda v \in W_1 \cap W_2$.

i. Se $v_1 \in W_1 \cap W_2$ e $v_2 \in W_1 \cap W_2$, então $v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2$. De fato:

a) Como $v_1 \in W_1 \cap W_2$, temos que $\boldsymbol{v_1 \in W_1}$ e $\boldsymbol{v_1 \in W_2}$.

b) Como $v_2 \in W_1 \cap W_2$, temos que $\boldsymbol{v_2 \in W_1}$ e $\boldsymbol{v_2 \in W_2}$.

Juntando as informações de a e b, como $\boldsymbol{v_1 \in W_1}$ e $\boldsymbol{v_2 \in W_1}$ e W_1 é subespaço de V, temos que $\boxed{\boldsymbol{v_1 + v_2 \in W_1}}$ ... $(*)$.

Juntando as informações de a e b, como $\boldsymbol{v_1 \in W_2}$ e $\boldsymbol{v_2 \in W_2}$ e W_2 é subespaço de V, temos que $\boxed{\boldsymbol{v_1 + v_2 \in W_2}}$ ... $(**)$.

De (*) e (**), temos que $v_1 + v_2 \in W_1$ e $v_1 + v_2 \in W_2$, logo concluímos que $\boxed{v_1 + v_2 \in W_1 \cap W_2}$.

ii. Se $\lambda \in \Re$ e $v \in W_1 \cap W_2$, então $\lambda v \in W_1 \cap W_2$. De fato:

Como $v \in W_1 \cap W_2$, temos que $\boldsymbol{v \in W_1}$ e $\boldsymbol{v \in W_2}$. Sabemos que W_1 é subespaço de V, logo $\boxed{\boldsymbol{\lambda v \in W_1}}$. Também como W_2 é subespaço de V tem-se $\boxed{\boldsymbol{\lambda v \in W_2}}$. Logo, se $\lambda v \in W_1$ e $\lambda v \in W_2$, temos que $\boxed{\lambda v \in W_1 \cap W_2}$.

Assim, concluímos que $W_1 \cap W_2$ é subespaço de V.

Exemplos:

01. Sejam $V = \Re^3$, $W_1 = \{(x,y,z) \in \Re^3; x - y = 0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z); 2x + y = 0\}$. Note que $W_1 = \{(x,x,z); x,z \in \Re\}$ e $W_2 = \{(x,-2x,z); x,z \in \Re\}$ são planos que passam pela origem e paralelos ao eixo Z e a interseção $W_1 \cap W_2$ é a reta $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ (reta sobre o eixo Z). Como W_1 e W_2 são planos que passam pela origem, sabemos que W_1 e W_2 são subespaços de $V = \Re^3$.

Perceba que $W_1 \cap W_2 = \{(x,y,z); x = y = 0\} = \{(0,0,z); z \in \Re\}$ é, de fato, um subespaço de $V = \Re^3$. Se $u \in W_1 \cap W_2$, u é da forma $u = (0,0,z_u)$ e se $v \in W_1 \cap W_2$, v é da forma $v = (0,0,z_v)$, logo, sendo $k \in \Re$:

$$u + v = (0,0,z_u + z_v) \in W_1 \cap W_2$$

$$ku = (0,0,kz_1) \in W_1 \cap W_2$$

Geometricamente, podemos pensar que quaisquer vetores sobre o eixo Z, terão sua soma ainda sobre o eixo Z e também qualquer múltiplo ainda estará sobre Z.

02. Sejam $V = M_n(\Re)$, W_1 o conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n e W_2 o conjunto das matrizes triangulares inferioresde ordem n. Obviamente W_1 e W_2 são subespaços de $V = M_n(\Re)$.

O conjunto $W_1 \cap W_2$ será o conjunto das matrizes diagonal de ordem n e este será um subespaço de $V = M_n(\Re)$.

14.3.4 Teorema (Soma de subespaços): Sejam W_1 e W_2 subespaços de V. O conjunto $W_1 + W_2 = \{v_1 + v_2 \in V; v_1 \in W_1\ e\ v_2 \in W_2\}$ ainda é subespaço de V.

Prova: Devemos mostrar que $0 \in W_1 + W_2$ e:

i. Se $u \in W_1 + W_2$ e $v \in W_1 + W_2$, então $u + v \in W_1 + W_2$;

ii. Se $\eta \in \Re$ e $u \in W_1 + W_2$, então $\eta u \in W_1 + W_2$.

Mostremos:

i. Se $u \in W_1 + W_2$ e $v \in W_1 + W_2$, então $u + v \in W_1 + W_2$. De fato, se $u \in W_1 + W_2$, existem $\boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{W_1}$ e $\boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{W_2}$ tais que $u = u_1 + u_2$ e, analogamente, se $v \in W_1 + W_2$, existem $\boldsymbol{v_1} \in \boldsymbol{W_1}$ e $\boldsymbol{v_2} \in \boldsymbol{W_2}$ tais que $v = v_1 + v_2$. Assim:

$$u + v = (\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}) + (\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}).$$

Como W_1 e W_2 são subespaços de V, todas as propriedades de espaços vetoriais são válidas para suas operações. Assim:

$$u + v = (\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}) + (\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}) = (\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{v_1}) + (\boldsymbol{u_2} + \boldsymbol{v_2}) \in W_1 \cap W_2.$$

Portanto $u + v \in W_1 + W_2$, pois é formado pela soma de elementos de W_1 e W_2.

ii. Se $\eta \in \Re$ e $u \in W_1 + W_2$, então $\eta u \in W_1 + W_2$. De fato, Se $u \in W_1 + W_2$, existem $\boldsymbol{u_1} \in \boldsymbol{W_1}$ e $\boldsymbol{u_2} \in \boldsymbol{W_2}$ tais que $u = u_1 + u_2$. Assim:

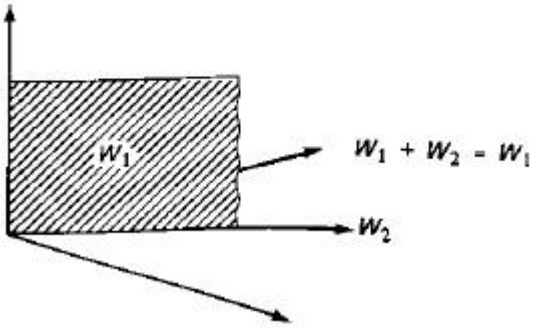
$$ku = k(\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}) = \boldsymbol{ku_1} + \boldsymbol{ku_2} \in W_1 + W_2.$$

Portanto $ku \in W_1 + W_2$, pois é formado pela soma de elementos de W_1 e W_2.

Desta forma, concluímos que $W_1 + W_2$ é subespaço vetorial de V.

<u>Exemplos</u>:

01. Sejam $V = \Re^3$, W_1 um plano passando pela origem e W_2 uma reta passando pela origem contida neste plano, $W_1 + W_2 = W_1$. Observe:



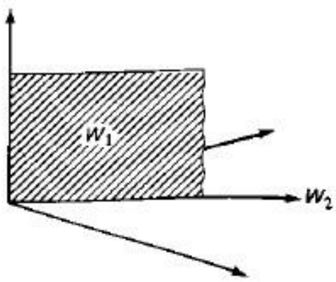
02. Se tivermos $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \Re \right\}$ e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}; c, d \in \Re \right\}$, então $W_1 + W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \Re \right\} = M_2(\Re)$.

Neste caso, W_1 e W_2 são subespaços de $M_2(\Re)$, assim a soma $W_1 + W_2$ ainda é subespaço de $M_2(\Re)$ devido ao Teorema da soma de subespaços. Além disso, a soma dos subespaços resultou no próprio espaço vetorial $M_2(\Re)$.

14.3.5 Definição: Seja V espaço vetorial e W_1 e W_2 subespaços de V. Quando $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, dizemos que $W_1 + W_2$ é *soma direta* de W_1 com W_2 e denotamos $W_1 \oplus W_2$. Em outras palavras, se a interseção entre W_1 e W_2 for o conjunto composto pelo vetor nulo.

Exemplos:

01. O exemplo 01 anterior é um caso onde $W_1 + W_2$ não é soma direta de W_1 com W_2, pois $W_1 \cap W_2 = W_2$, isto é, a interseção é a reta $W_2 \neq \{0\}$.



02. No exemplo 02 anterior, $W_1 + W_2$ é soma direta de W_1 com W_2, pois $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a = b = c = d = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \{0\}$. A única matriz que satisfaz as

propriedades de W_1 e W_2 simultaneamente é a matriz nula de $M_2(\Re)$. Logo $W_1 \oplus W_2 = M_2(\Re)$.

14.4 COMBINAÇÃO LINEAR

14.4.1 Definição: Sejam V um espaço vetorial sobre $\Re$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Re$. Chamamos de *combinação linear* de $v_1, \ldots v_n$ o vetor $v \in V$ tal que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n.$$

14.4.2 Subespaço Gerado: Sejam V um espaço vetorial sobre $\Re$, $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Re$ e:

$$W = \{v \in V; v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n\}.$$

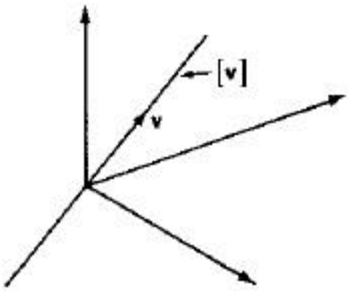
W é um subespaço de V e chamamos W de *subespaço gerado* por $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Em outras palavras, W é o conjunto dos vetores de V tais que estes vetores são combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$. Ainda podemos usar a notação $W = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ que indica que W é o subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_n$.

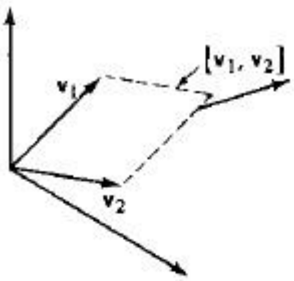
Observação: O conjunto $W = [v_1, \ldots, v_n]$ deve ser o subespaço de V que possui a menor quantidade de vetores e que contenha $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
Por exemplo, se W' conter $\{v_1, \ldots, v_n\}$, este deve satisfazer $W \subset W'$.

Exemplos:

01. Considere $V = \Re^3$ e $v \in V; v \neq 0$. Observe que $[v] = \{av; a \in \Re\}$, isto é, o conjunto gerado por v é a reta que contém o vetor v e passa pela origem do sistema.



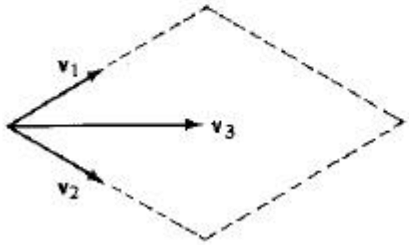
02. Sejam $V = \Re^3$ e $v_1, v_2 \in V; v_1 \neq \beta v_2$. Temos $[v_1, v_2] = \{a_1v_1 + a_2v_2; a_1, a_2 \in \Re\}$ é o plano que passa pela origem e contém os vetores v_1 e v_2.



Se tivermos $v_3 \in [v_1, v_2]$, então $v_3 = b_1v_1 + b_2v_2$, logo $[v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_3]$ pois todo vetor que é escrito como combinação linear de v_1, v_2, v_3 pode ser escrito como combinação de v_1 e v_2, pois, se $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \in [v_1, v_2, v_3]$ foi visto que $v_3 = b_1v_1 + b_2v_2$, logo:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3(b_1v_1 + b_2v_2) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3b_1v_1 + a_3b_2v_2$$

$$= (a_1 + a_3b_1)v_1 + (a_2 + a_3b_2)v_2 \in [v_1, v_2].$$



03. Sejam $V = \Re^2$ e $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1) \in V$. Então

$$[v_1, v_2] = [(1,0), (0,1)] = \{a_1 v_1 + a_2 v_2; a_1, a_2 \in \Re\}$$

$$= \{a_1(1,0) + a_2(0,1); a_1, a_2 \in \Re\} = \{(a_1, 0) + (0, a_2); a_1, a_2 \in \Re\}$$

$$= \{(a_1, a_2); a_1, a_2 \in \Re\} = \Re^2 = V.$$

Neste caso, $V = [v_1, v_2]$. Dizemos que o subespaço gerado por v_1, v_2 $[v_1, v_2]$ é gerador do espaço vetorial V. Em outras palavras, qualquer que seja $(x, y) \in \Re^2$, $(x, y) = x(1,0) + y(0,1)$, ou seja, $(x, y) \in [(1,0), (0,1)]$, logo v_1, v_2 gera todos os vetores de $\Re^2$.

04. Sejam $V = M_2(\Re)$ e $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\Re)$. Temos:

$$[v_1, v_2] = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right] = \{a v_1 + b v_2; a, b \in \Re\}$$

$$= \left\{a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \Re\right\} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \Re\right\}$$

$$\Rightarrow [v_1, v_2] = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a, b, \in \Re\right\}.$$

05. Quais são os vetores geradores do subespaço $W = \{(x, y, z) \in \Re^3; x = -3z\}$ de $V = \Re^3$? Para determinar $v_1, v_2 \in \Re^3$ tais que $W = [v_1, v_2]$, façamos:

$$W = \{(x, y, z) \in \Re^3; x = -3z\} = \{(-3z, y, z); y, z \in \Re\}$$

$$= \{(0, y, 0) + (-3z, 0, z); y, z \in \Re\} = \{y(0,1,0) + z(-3,0,1); y, z \in \Re\}$$

$$= [(0,1,0), (-3,0,1)] \Rightarrow W = [(0,1,0), (-3,0,1)].$$

Logo $v_1 = (0,1,0)$ e $v_2 = (-3,0,1)$.

06. O conjunto solução da equação linear $x - 2y + 4z = 0$ é um subespaço de $V = \Re^3$. Observe que:

$$x - 2y + 4z = 0 \Leftrightarrow x = 2y - 4z.$$

O conjunto de soluções é:

$$W = \{(2y - 4z, y, z); y, z \in \Re\} = \{(2y, y, 0) + (-4z, 0, z); y, z \in \Re\}$$

$$= \{y(2,1,0) + z(-4,0,1); y, z \in \Re\} = [(2,1,0), (-4,0,1)] \Rightarrow \boxed{W = [(2,1,0), (-4,0,1)]}.$$

O conjunto de soluções de $x - 2y + 4z = 0$ é o subespaço gerado por (2,1,0) e (−4,0,1).

14.5 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Como vimos no Exemplo 02 anterior, o subespaço gerado por v_1, v_2, v_3 é o mesmo subespaço gerado por v_1, v_2 e, desta forma, podemos pensar no vetor v_3 como sendo supérfluo para descrever tal subespaço, pois este é uma combinação linear de v_1 e v_2.

Em geral, considerando $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, nossa preocupação é determinar se existe algum vetor que não exista a necessidade de estar no conjunto no caso em que desejamos descrever $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$.

14.5.1 Definição: Seja V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é *linearmente independente* (LI) se:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

14.5.2 Definição: Seja V um espaço vetorial e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é *linearmente dependente* (LD) se:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_i \neq 0, para\ algum\ i \in \{1, \dots, n\}.$$

14.5.3 Teorema: O conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um dos vetores do conjunto for combinação linear dos demais.

Prova: ($\Rightarrow$) Queremos mostrar que se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD, então um dos vetores é combinação linear dos demais. De fato:

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD, temos por definição que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ implica que algum dos $a_k; 1 \leq k \leq n$ é não nulo. Suponha que em $a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + \boldsymbol{a_i}v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n = 0$, tem-se $\boldsymbol{a_i \neq 0}$. Então:

$$a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + \boldsymbol{a_i}v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n = 0$$

$$\Rightarrow a_iv_i = -(a_1v_1 + \cdots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \cdots + a_nv_n) \dots (*)$$

Como $a_i \neq 0$, existe a_i^{-1} tal que $a_ia_i^{-1} = 1$. Multiplicando (*) por a_i^{-1}:

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i}v_1 - \frac{a_2}{a_i}v_2 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i}v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}v_{i+1} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_i}v_{n-1} - \frac{a_n}{a_i}v_n.$$

A igualdade acima, nos diz que v_i é combinação linear de $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$, ou seja, um vetor do conjunto é combinação linear dos demais, que é o que queríamos demonstrar.

($\Leftarrow$) Queremos mostrar que se um dos vetores de $\{v_1, \dots, v_n\}$ é combinação linear dos demais, então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD. De fato, se um dos vetores de $\{v_1, \dots, v_n\}$ é combinação linear, digamos que v_n seja combinação linear de $v_1, \dots, v_{n-1}$, então:

$$v_n = b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_{n-1}v_{n-1} \dots (*)$$

Somando $\boldsymbol{-v_n}$ em ambos os membros de (*):

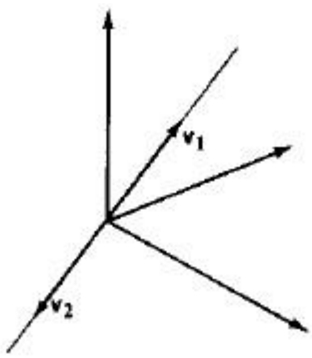
$$b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_{n-1}v_{n-1} \boldsymbol{- 1v_n} = 0.$$

Note que, na equação cima, temos uma combinação linear de $v_1, \dots, v_n$ igual ao vetor nulo, onde o coeficiente de v_n é $b_n = -1 \neq 0$, ou seja, a equação implicou um dos b_i não nulo. Logo, por definição, concluímos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD, que é o que queríamos demonstrar.

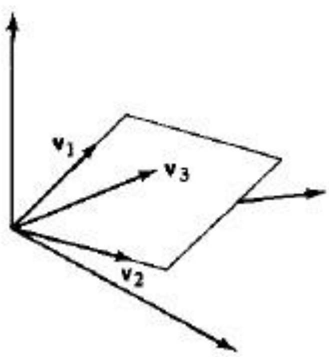
Equivalente à proposição acima: Um conjunto de vetores é LI se, e somente se, nenhum dos vetores for combinação linear dos demais.

Exemplos:

01. Sejam $V = \Re^3$ e $v_1, v_2 \in V$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LD se, e somente se v_1 e v_2 estiverem na mesma reta que passa pela origem, ou ainda se $v_1 = \lambda v_2$.



02. Sejam $V = \Re^3$ e $v_1, v_2, v_3 \in \Re$. O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD se, e somente se v_1, v_2 e v_3 estiverem no mesmo plano que passa pela origem



03. Sejam $V = \Re^2$ e $v_1 = (1{,}0), v_2 = (0{,}1)$. O conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI.

Vamos mostrar que este conjunto é LI usando o Teorema anterior, ou seja, façamos uma combinação de v_1 e v_2 igual ao vetor nulo e, se esta implicar que os coeficientes da combinação são nulos, concluímos que $\{v_1, v_2\}$ é LI. Então:

$$a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Leftrightarrow a_1(1,0) + a_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (a_1, 0) + (0, a_2) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $a_1v_1 + a_2v_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$ e, pelo Teorema 14.5.3 segue que $\{(1,0), (0,1)\}$ é LI.

04. Sejam $V = \Re^3$ e $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1) \in V$, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI. De fato:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Leftrightarrow a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (a_1, 0,0) + (0, a_2, 0) + (0,0, a_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0. \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Como $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ implicou $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, temos que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é LI.

05. Sejam $V = \Re^2$ e $v_1 = (1, -1), v_2 = (1,0), v_3 = (1,1) \in V$. O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD, pois:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0 \Leftrightarrow a(1, -1) + b(1,0) + c(1,1) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow (a, -a) + (b, 0) + (c, c) = (0,0) \Leftrightarrow (a + b + c, -a + c) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -a + c = 0 \end{cases}.$$

Logo $c = a$ e $a + b + c = 0 \Leftrightarrow a + b + a = 0 \Leftrightarrow b = -2a$. Portanto $a \in \Re$, $b = -2a$ e $c = a$ com não não necessariamente nulo, ou seja, a equação $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ implicou em um dos coeficientes não nulo. Portanto $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,-1),(1,0),(1,1)\}$ é LD.

14.6 BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Podemos encontrar dentro de um espaço vetorial V, um conjunto finito de vetores tais que qualquer outro vetor de V é uma combinação linear dos vetores deste conjunto. Em outras palavras, queremos determinar um conjunto de vetores que gera todos os vetores do espaço vetorial V.

A ideia aqui é semelhante à vista em geometria analítica, onde todos os vetores do espaço podiam ser escritos com combinação dos vetores do conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. E dizíamos que $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ era uma base para o espaço.

14.6.1 Definição: O conjunto $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ é uma *base* de V se:

i. $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI;

ii. $V = [v_1, \dots, v_n]$.

Em outras palavras, $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ é uma base de V se este conjunto é linearmente independente e se qualquer vetor de V é escrito com combinação linear de $v_1, \dots, v_n$ (se V é igual ao subespaço gerado por $v_1, \dots, v_n$).

Exemplos:

01. Se $V = \Re^2$ e $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \in V$, $\{e_1, e_2\}$ é base de V conhecida como base canônica de $\Re^2$. Pois este conjunto é LI e qualquer que seja $v = (x, y) \in V = \Re^2$ pode ser escrito como $v = (x, y) = x(1,0) + y(0,1) = xe_1 + ye_2 \Rightarrow v = xe_1 + ye_2; x, y \in \Re$, ou seja, todo vetor de $V = \Re^2$ é combinação linear de e_1 e e_2, logo $V = \Re = [e_1, e_2] = [(1,0),(0,1)]$.

02. Se $V = \Re^2$, o conjunto $\{(1,1),(0,1)\}$ também é uma base de V. Note que:

$$a(1,1) + b(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (a, a) + (0, b) = (0,0) \Leftrightarrow (a, a + b) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \Rightarrow \{(1,1), (0,1)\} \text{ é } LI.$$

Resta mostrar que $\{(1,1), (0,1)\}$ é um conjunto gerador de V. Seja $(x, y) \in \Re^2$, temos:

$$(x, y) = (x, x) + (0, y - x) = x(1,1) + (y - x)(0,1)$$

$$\Rightarrow (x, y) = x(1,1) + (y - x)(0,1).$$

Qualquer vetor $(x, y) \in \Re^2$ pode ser escrito como combinação linear de $(1,1)$ e $(0,1)$, mas isto quer dizer que $V = \Re^2$ é gerado por $(1,1)$ e $(0,1)$, ou seja, $V = [(1,1), (0,1)]$.

Como $\{(1,1), (0,1)\}$ é LI e $V = [(1,1), (0,1)]$, temos que $\{(1,1), (0,1)\}$ é uma base de $V = \Re^2$.

03. O conjunto $\{(0,1), (0,2)\}$ não é uma base de $V = \Re^2$, pois:

$$m(0,1) + n(0,2) = (0,0) \Leftrightarrow (0, m) + (0, n) = (0,0) \Leftrightarrow (0, m + n) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow m + n = 0 \Leftrightarrow n = -m \; e \; m \in \Re.$$

Como $m(0,1) + n(0,2) = (0,0)$ implicou m ou n não necessariamente nulos, temos que $\{(0,1), (0,2)\}$ é LD, logo este conjunto não forma uma base para $\Re^2$.

04. Sendo $V = \Re^3$, o conjunto $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base para V, pois:

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \lambda(0,0,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow (\alpha, \beta, \lambda) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \text{ é } LI.$$

Além disso, qualquer que seja $(x,y,z) \in \Re^3$:

$$(x,y,z) = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Como qualquer $(x,y,z) \in \Re^3$ é escrito como combinação linear dos vetores de $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, temos que $\Re^3 = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$.
Como $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é LI e $\Re^3 = V = [(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)]$, segue que $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de $\Re^3$.

05. O conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ não é base de $V = \Re^3$. Note que $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ é LI, mas $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ não gera $V = \Re^3$, isto é, $\Re^3 \neq [(1,0,0),(0,1,0)]$. Sendo $(x,y,z) \in \Re^3$, temos:

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,1,0) = (a,b,0) \Leftrightarrow (x,y,z) = (a,b,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b. \\ \boldsymbol{z = 0} \end{cases}$$

A condição $\boldsymbol{z = 0}$ nos diz que $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ geram apenas os vetores de $\Re^3$ cujo a terceira coordenada é nula, ou seja, $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ não geram todos os vetores de $V = \Re^3$, daí tem-se $\Re^3 \neq [(1,0,0),(0,1,0)]$.

06. Sendo $V = \mathbb{C}$, o conjunto $\{1,i\}$ é base de V. Note que:

$$a \cdot 1 + b \cdot i = 0 + 0 \cdot i \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow \{1,i\} \text{ é } LI.$$

Além disso, qualquer que seja $x + yi \in \mathbb{C}$, temos:

$$x + yi = x \cdot 1 + y \cdot i.$$

Isto é, $x + yi$ é combinação linear de 1 e i, logo $V = [1,i]$.
Como $\{1,i\}$ é LI e $V = \mathbb{C} = [1,i]$, temos que $\{1,i\}$ é base de $V = \mathbb{C}$.

07. O conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base do $\Re$ espaço vetorial $V = M_2(\Re)$. De fato:

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Rightarrow A \text{ é } LI.$$

Sendo $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\Re)$, temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$$

$$= x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, qualquer vetor de $V = M_2(\Re)$ é combinação linear dos vetores de A. Portanto $M_2(\Re) = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$.

Como $A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é LI e $V = M_2(\Re) = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$, concluímos que A é base de $V = M_2(\Re)$.

Observação: Embora existam espaços vetoriais com bases possuindo infinitos elementos (por exemplo, um espaço vetorial de funções), nosso estudo engloba somente os casos de espaços vetoriais com bases contendo um número finito de vetores, ou seja, estamos trabalhando com bases finitas.

A seguir, veremos uma série de proposições fundamentais para o estudo de bases.

14.6.2 Teorema: Sejam $v_1, \dots, v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base para V.

Prova: Para construir uma base para V devemos obter um conjunto que seja LI e gerador de V.

Por hipótese, já sabemos que $v_1, \dots, v_n$ geram V e:

Caso o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ seja LI, já temos o desejado, e o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V.

Caso o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ seja LD, existe algum vetor do conjunto que é combinação linear dos demais. Suponha v_n combinação linear dos demais, assim:

$$v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_{n-1} v_{n-1}.$$

Ora, como v_n é combinação linear de $v_1, \dots, v_{n-1}$, os vetores $v_1, \dots, v_{n-1}$ ainda geram V.

Caso o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ for LI, temos o desejado, pois se $v_1, \dots, v_{n-1}$ geram V e $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é LI, isto implica $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ base de V.

Caso o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ for LD, existe algum vetor do conjunto que é combinação dos demais. Suponha v_{n-1} combinação dos demais, assim:

$$v_{n-1} = b_1 v_1 + \cdots + b_{n-2} v_{n-2}.$$

Ora, como v_{n-1} é combinação linear de $v_1, \dots, v_{n-2}$, os vetores $v_1, \dots, v_{n-2}$ ainda geram V.

Caso o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n-2}\}$ for LI, temos o desejado, pois se $v_1, \dots, v_{n-2}$ geram V e $\{v_1, \dots, v_{n-2}\}$ é LI, isto implica $\{v_1, \dots, v_{n-2}\}$ base de V.

Seguindo este processo após um número finito de iterações, sempre conseguimos um subconjunto LI $\{v_{i1}, \dots, v_{ir}\} \subset \{v_1, \dots, v_n\}$, com $r \leq n$ vetores, que ainda gera V, ou seja, que forma uma base de V.

14.6.3 Teorema: Sejam $v_1, \dots, v_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n elementos).

Prova: Como $V = [v_1, \dots, v_n]$, foi visto no Teorema 16.6.3 que podemos extrair uma base para V do conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$. Seja $\{v_1, \dots, v_r\}$, onde $r \leq n$, tal base.

Consideramos agora $w_1, \dots, w_m$ vetores de V, onde $m > n$. Existem então as constantes a_{ij}, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq r$, tais que (como $w_k \in V$, qualquer w_k pode ser escrito como combinação dos vetores da base $\{v_1, \dots, v_r\}$):

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1r}v_r \\ w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2r}v_r \\ \qquad\vdots \\ w_m = a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mr}v_r \end{cases} \dots (I)$$

Tomemos agora a combinação linear de $w_1, \dots, w_m$ e igualamos esta combinação ao vetor nulo de V:

$$x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots x_mw_m = 0 \dots (II)$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$x_1(a_{11}\boldsymbol{v_1} + a_{12}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{1r}\boldsymbol{v_r}) + x_2(a_{21}\boldsymbol{v_1} + a_{22}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{2r}\boldsymbol{v_r}) + \cdots$$
$$+ x_m(a_{m1}\boldsymbol{v_1} + a_{m2}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{mr}\boldsymbol{v_r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m)\boldsymbol{v_1} + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m)\boldsymbol{v_2} + \cdots$$
$$+ (a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_m)\boldsymbol{v_r} = 0 \dots (*)$$

Temos uma combinação linear de $v_1, \dots, v_r$ igual ao vetor nulo e, como $\{v_1, \dots, v_r\}$ é base de V, este conjunto é LI, logo a equação (*) implica que cada coeficiente da combinação é igual à zero, ou seja:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_m = 0 \end{cases} \dots (III)$$

O sistema (III) é um sistema homogêneo com m incógnitas $(x_1, \dots, x_m)$ e r equações. Lembrando que $r \le n < m \Rightarrow r < m$, ou seja, o sistema tem mais incógnitas do que equações, assim ele não admite apenas a solução trivial, isto é, existe alguma solução com um dos x_i não nulo.

Resumindo, $x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots x_mw_m = 0$ implicou algum dos $x_i \neq 0$, e por definição, isto quer dizer que o conjunto $\{w_1, \dots, w_m\}$ é LD. Portanto, qualquer conjunto com um número m de vetores, onde $m > n$, é linearmente dependente.

Também, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores.

14.6.4 Corolário: Qualquer base de um espaço vetorial V tem sempre o mesmo número de vetores. Este número é chamado de dimensão de V, e o denotamos por $\dim(V)$.

Prova: Sejam $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ bases de V.

Como $v_1, \dots, v_n$ geram V e $w_1, \dots, w_m$ é LI, pelo Teorema 16.6.3 temos que $m \le n$.

Como $w_1, \dots, w_m$ geram V e $v_1, \dots, v_n$ é LI, pelo Teorema 16.6.3 temos que $n \le m$.

Ora, como $m \le n$ e $n \le m$, a única conclusão que chegamos é a que $n = m$, ou seja, as bases possuem a mesma quantidade de vetores.

Observação: Se $V = \{0\}$, então $\dim V = 0$.

Exemplos:

01. Já vimos anteriormente que $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,1),(0,1)\}$ são bases de $V=\Re^2$. Assim $\dim(\Re^2)=2$.

02. Uma base de $V=\Re^3$ é $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ com 3 vetores, assim $\dim(\Re^3)=3$.

03. Vimos anteriormente que $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $V=M_2(\Re)$, desta forma $\dim[M_2(\Re)]=4$.

04. O conjunto $\{1,i\}$ é base de $V=\mathbb{C}$, ou seja, $\dim(\mathbb{C})=2$.

14.6.5 Teorema: Qualquer conjunto LI de vetores de um espaço vetorial V com dimensão finita pode ser completado de modo que este conjunto se torne uma base de V.

Prova: Seja V tal que $\dim(V)=n$ e $\{v_1,\dots,v_r\}$ um conjunto LI, onde $r\leq n$ (Devido ao Teorema 16.6.3). Se $V=[v_1,\dots,v_r]$, então $\{v_1,\dots,v_r\}$ forma uma base para V e temos o desejado (neste caso $n=r$).

Porém, pode acontecer $V\neq[v_1,\dots,v_r]$, assim existe $v_{r+1}\in V$ tal que $v_{r+1}\notin[v_1,\dots,v_r]$, logo v_{r+1} não é combinação linear de $v_1,\dots,v_r$ e então $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1}\}$ ainda é LI. Caso $V=[v_1,\dots,v_r,v_{r+1}]$, então $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1}\}$ forma uma base para V e temos o desejado.

Porém, pode acontecer $V\neq[v_1,\dots,v_r,v_{r+1}]$, assim existe $v_{r+2}\in V$ tal que $v_{r+2}\notin[v_1,\dots,v_r,v_{r+1}]$, logo v_{r+2} não é combinação linear de $v_1,\dots,v_r,v_{r+1}$ e então $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1},v_{r+2}\}$ ainda é LI. Caso $V=[v_1,\dots,v_r,v_{r+1},v_{r+2}]$, então $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1},v_{r+2}\}$ forma uma base de V e temos o desejado.

Usando este mesmo procedimento, sempre conseguiremos completar o conjunto LI $\{v_1,\dots,v_r\}$ até que ele tenha n elementos e seja uma base de V.

14.6.6 Corolário: Se $\dim(V)=n$, então qualquer subconjunto LI de V, com n vetores, forma uma base de V.

Prova: Suponha que o conjunto LI de n vetores não forme uma base de V. Então, pelo Teorema 16.6.5, poderíamos completar este conjunto de modo a torna-lo uma base de V. Mas aí teríamos uma base com mais de n vetores, o que é absurdo, qualquer base de V deve ter $n = \dim V$ vetores (Corolário 16.6.4).

Observação: O corolário acima é muito importante, pois, este nos diz que para verificar se um conjunto com n vetores é base de um espaço, basta constatar que este conjunto é LI, ou seja, não há a necessidade de verificar se este conjunto é gerador de V.

14.6.7 Teorema: Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V de dimensão finita, então $\dim(U) \leq \dim(V)$ e $\dim(W) < \dim(V)$. Além disso:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

14.6.8 Teorema: Dada uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear dos vetores de β.

Prova: Seja $v \in V$, então existem $a_1, \dots, a_n \in \Re$ tais que $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Suponha que existem $b_1, \dots, b_n \in \Re$ tais que $v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$.

Desta forma, como as duas igualdades valem para $v \in V$:

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0.$$

Como β é base, β é LI, logo a equação acima implica:

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = b_1} \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_n - b_n = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_n = b_n} \end{cases}.$$

Portanto, supondo que existam $b_i \in \Re$ tais que $v = \sum b_iv_i$, a única conclusão que chegamos é que $b_i = a_i$, ou seja, qualquer $v \in V$ é escrito de maneira única como combinação linear dos vetores de β.

Usando a ideia do Teorema 16.6.8 definimos coordenadas ou componentes para vetores em relação a uma base.

14.6.9 Definição: Sejam $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e $v \in V$ tal que $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Chamamos os números reais $a_1, \dots, a_n$ de *coordenadas* do vetor v em relação à base β e usamos a notação:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, quer dizer que o vetor $v \in V$ é escrito como $v = \sum a_iv_i; i \in \{1, \dots, n\}$. Escrevemos o vetor usando uma matriz coluna (matriz de ordem $n \times 1$).

Fazendo uma análise à notação, perceba que qualquer vetor de um espaço vetorial de dimensão n pode ser representado por uma matriz de ordem $n \times 1$.

<u>Exemplos</u>:

01. Sejam $V = \Re^2$ e a base $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$. Temos:

$$(4,3) = 4(1,0) + 3(0,1).$$

Portanto:

$$[(4,3)]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nota-se, quando não mencionamos qual a base considerada, qualquer vetor de $\Re^2$ é dado em relação à base canônica. Isto é, sendo $(x, y) \in \Re^2$:

$$(x, y) = x(1,0) + y(0,1) \Leftrightarrow [(x, y)]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

02. Se $V = \Re^2$ e $\beta' = \{(1,1),(0,1)\}$, vamos descobrir quais as coordenadas de $(4,3)$ em relação à β'.
Tomando uma combinação:

$$(4,3) = a(1,1) + b(0,1) = (a,a) + (0,b) = (a,a+b) \Leftrightarrow (4,3) = (a,a+b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = 4}\; e\; b = 3 - a = 3 - 4 = -1 \Leftrightarrow \boxed{b = -1}.$$

Logo $(4,3) = 4(1,1) + (-1)(0,1)$, e isto quer dizer que:

$$[(4,3)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

03. Sejam $V = \Re^3$, $U = \{(x,y,z); x + y - z = 0\}$ e $W = \{(x,y,z); x = y\}$. Note que U e W são subespaços de $V = \Re^3$ e:

$$U = \{(x,y,z); x + y - z = 0\} = \{(x,y,z); z = x + y\}$$

$$= \{(x,y,x+y); x,y \in \Re\} = \{(x,0,x) + (0,y,y); x,y \in \Re\}$$

$$= \{x(1,0,1) + y(0,1,1); x,y \in \Re\} = [(1,0,1),(0,1,1)] \Rightarrow \boxed{U = [(1,0,1),(0,1,1)]}.$$

$$W = W = \{(x,y,z); x = y\} = \{(x,x,z); x,z \in \Re\} = \{(x,x,0) + (0,0,z); x,z \in \Re\}$$

$$= \{x(1,1,0) + z(0,0,1); x,z \in \Re\} = [(1,1,0),(0,0,1)] \Rightarrow \boxed{W = [(1,1,0),(0,0,1)]}.$$

Temos ainda $U + W = [(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)]$ e dado $v = (x,y,z) \in \Re^3$:

$$(x,y,z) = p(1,0,1) + q(0,1,1) + r(1,1,0) + s(0,0,1)$$

$$= (p,0,p) + (0,q,q) + (r,r,0) + (0,0,s) = (p + r, q + r, p + q + s)$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (p+r, q+r, p+q+s) \Leftrightarrow \begin{cases} p+r = x \\ q+r = y \\ p+q+s = z \end{cases}.$$

O sistema acima possui infinitas soluções, ou seja, qualquer vetor de $V = \Re^3$ é escrito como combinação linear de vetores de $U + W$, logo, $\Re^3$ é gerado por $U + W$.

$$\Re^3 = U + W.$$

O conjunto $\{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0), (0,0,1)\}$ não fornece uma base para $\Re^3$, pois este é LD. Como $\dim(U + W) = \dim(\Re^3)$ e sabemos que $\dim(\Re^3) = 3$, temos $\dim(U + W) = 3$.

Vamos determinar $U \cap W$. Veja:

$$U \cap W = \{(x,y,z); x + y - z = 0 \ e \ x = y\} = \{(x,y,z); y = x \ e \ z = 2x\}$$

$$= \{(x,x,2x); x \in \Re\} = \{x(1,1,2); x \in \Re\} = [(1,1,2)] \Rightarrow \boxed{U \cap W = [(1,1,2)]}.$$

Logo $\dim(U \cap W) = 1$.

Perceba agora que $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ é satisfeita, pois $\dim(U + W) = 3$, $\dim(U) = 2$, $\dim(W) = 2$ e $\dim(U \cap W) = 1$, logo:

$$\dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim(U + W).$$

04. Sejam $V = M_2(\Re)$ e a base $\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$. O vetor $v = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -13 \end{bmatrix} \in V$ pode ser escrito:

$$v = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -13 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\mathbf{-2}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\mathbf{-5}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (\mathbf{-13}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [v]_\beta = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{-13} \end{bmatrix}.$$

Em geral, qualquer vetor (matriz) $u = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\Re)$ pode ser escrito:

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

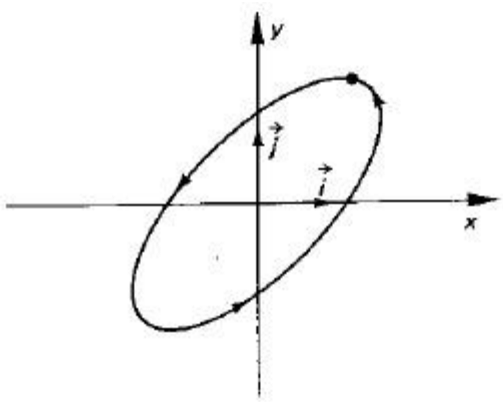
Notamos ainda que qualquer base de $M_2(\Re)$ deve possuir 4 vetores e, desta forma, qualquer vetor de $M_2(\Re)$ pode ser escrito, em relação à uma base, como uma matriz coluna 4×1.

Em geral, se $W = M_{\frac{n}{2}}(\Re); n \text{ é } par$, uma base de W terá n vetores e qualquer vetor de W é escrito, em relação à base, por uma matriz n×1.

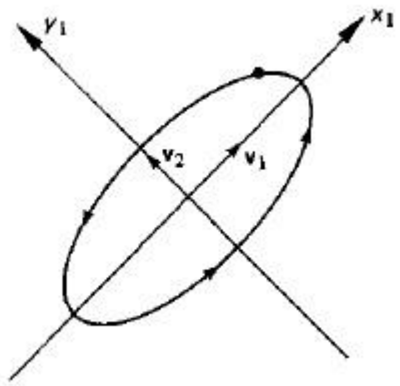
14.7 MUDANÇA DE BASE

Muitas vezes nos deparamos com algum problema em que o referencial usual pode não ser o apropriado para a resolução deste problema.

Por exemplo, suponha um problema de física em que o movimento de um corpo é descrito por uma elipse cuja equação é $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$, de acordo com a figura abaixo:



A descrição do movimento ficaria muito mais simples se ao invés de considerarmos os eixos X e Y (e a base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$), considerássemos um referencial que se apoia nos eixos principais da elipse, de acordo com a figura:



Neste novo referencial temos a base $\{v_1, v_2\}$ e os eixos X_1 e Y_1. A equação da elipse em relação a este sistema é $3x_1^2 + 2y_1^2 = 6$.

Tendo visto a situação acima, devemos nos questionar: Como escolher um novo sistema apropriado? Fixado um novo referencial, como relacionar as coordenadas de um ponto do antigo referencial com as coordenadas no novo?

14.7.1 Mudança de Base: Sejam $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases de um espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrever o mesmo em relação às duas bases, isto é:

$$\begin{cases} v = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \dots (I) \\ v = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n \dots (*) \end{cases}$$

Como relacionar as coordenadas de v em relação à β:

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Com as coordenadas de v em relação à β':

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Como $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ é base de V e os vetores w_i de β' ainda são vetores de V, podemos escrever cada w_i como combinação linear dos vetores u_j de β, isto é:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \cdots + a_{n1}u_n \\ w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \cdots + a_{n2}u_n \\ \qquad \vdots \\ w_n = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \cdots + a_{nn}u_n \end{cases} \dots (**)$$

Substituindo (**) em (*):

$$v = y_1w_1 + y_2w_2 + \cdots + y_nw_n$$

$$= y_1(a_{11}\boldsymbol{u_1} + a_{21}\boldsymbol{u_2} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{u_n}) + y_2(a_{12}\boldsymbol{u_1} + a_{22}\boldsymbol{u_2} + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{u_n}) + \cdots + y_n(a_{1n}\boldsymbol{u_1} + a_{2n}\boldsymbol{u_2} + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{u_n})$$

$$= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n)\boldsymbol{u_1} + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n)\boldsymbol{u_2} + \cdots + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n)\boldsymbol{u_n}$$

$$\Rightarrow v = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n)\boldsymbol{u_1} + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n)\boldsymbol{u_2} + \cdots + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n)\boldsymbol{u_n} \dots (\Delta)$$

Por outro lado, temos de (I) que:

$$v = x_1\boldsymbol{u_1} + x_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{u_n} \dots (\Delta\Delta)$$

Observe que as equações (Δ) e ($\Delta\Delta$) nos fornece o vetor v escrito como combinação linear dos vetores de β, e como as coordenadas em relação a uma base são univocamente determinadas, cada coeficiente correspondente é idêntico, ou seja:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}.$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Denotando $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, podemos escrever:

$$\boxed{[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'}[v]_{\beta'}}.$$

Que é a formula para mudança de base de β' para β.

A matriz $[I]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada de *matriz mudança de base* de β' para β.

Comparando $[I]_{\beta}^{\beta'}$ com (**), percebe-se que a $i-ésima$ coluna é composta pelas coordenadas de w_i em relação à base β.

Vejamos um exemplo para esclarecer melhor a ideia de mudança de base.

Exemplo:

01. Sejam $\beta = \{(2,-1),(3,4)\}$ e $\beta' = \{(1,0),(0,1)\}$ bases de $\Re^2$. Procuremos a matriz mudança de base de β' para β. Vamos reescrever as bases usando uma notação genérica para seus vetores para que possamos fazer uma analogia com a construção feita anteriormente. Sejam:

$$\beta = \{u_1, u_2\}, onde\ u_1 = (2,-1)\ e\ u_2 = (3,4).$$

$$\beta' = \{w_1, w_2\}, onde\ w_1 = (1,0)\ e\ w_2 = (0,1).$$

O próximo passo é escrever os vetores de β' como combinação linear dos vetores de β.

$$w_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \Leftrightarrow (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4)$$

$$= (2a_{11}, -a_{11}) + (3a_{21}, 4a_{21}) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(1,0) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})} \ldots (I)$$

$$w_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \Leftrightarrow (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4)$$

$$= (2a_{12}, -a_{12}) + (3a_{22}, 4a_{22}) = (2a_{12} + 3a_{22}, -a_{12} + 4a_{22})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(0,1) = (2a_{12} + 3a_{22}, -a_{12} + 4a_{22})} \ldots (II)$$

De (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 2a_{11} + 3a_{21} = 1 \\ -a_{11} + 4a_{21} = 0 \\ 2a_{12} + 3a_{22} = 0 \\ -a_{12} + 4a_{22} = 1 \end{cases}.$$

Cuja solução é $a_{11} = \frac{4}{11}$, $a_{21} = \frac{1}{11}$, $a_{12} = -\frac{3}{11}$ e $a_{22} = \frac{2}{11}$.
Portanto, temos a matriz mudança de base:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}}.$$

Agora, vamos determinar as coordenadas do vetor $v = (5, -8)$ em relação à base β'. Sabemos que $[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix}$ e usando a formula de mudança de base:

$$[v]_{\beta} = [I]_{\beta}^{\beta'}[v]_{\beta'} \Leftrightarrow [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [v]_{\beta} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ou ainda: $[v]_{\beta} = 4u_1 - u_2 = 2(2, -1) - (3,4)$.

É obvio que poderíamos simplesmente tomar uma combinação arbitrária $(5, -8) = a(2, -1) + b(3,4)$ e calcular os valores de a e b e então o vetor seria escrito $[(5,8)]_{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Porém, quando aumentamos o número de vetores, o uso da matriz se tornará vantajoso.

14.7.2 Inversão: Fazendo um processo análogo ao visto em 14.7.1, mas escrevendo u_i como combinação linear dos vetores w_j da base β' encontramos a relação:

$$\boxed{[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta}}.$$

E esta é a formula de mudança de base de β para β'.

A matriz $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é a *matriz mudança de base* de β para β'.

14.7.3 Relação Entre as Matrizes: A relação entre as matrizes mudança de base de β' para β ($[I]_{\beta}^{\beta'}$) e mudança de base de β para β' ($[I]_{\beta'}^{\beta}$) é:

$$\boxed{\left([I]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}}.$$

Exemplos:

01. No exemplo anterior, obtemos $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$, para encontrar a matriz mudança de base de β para β' basta usar a relação de 14.7.3, isto é, devemos calcular a inversa de $[I]_{\beta}^{\beta'}$. Realizando os cálculos obtemos:

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

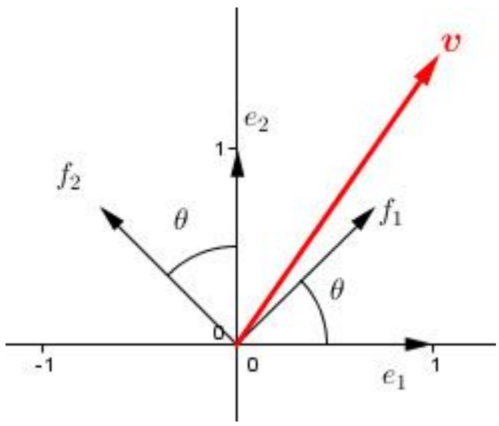
02. Considere $V = \Re^2$, as bases $\beta = \{e_1, e_2\}$ canônica e $\beta' = \{f_1, f_2\}$, obtida da base canônica pela rotação de um ângulo de medida θ. Dado um vetor $v \in \Re^2$ tal que:

$$[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Quais as coordenadas de v em relação à β', isto é, queremos determinar y_1 e y_2, em função de x_1 e x_2, tais que:

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

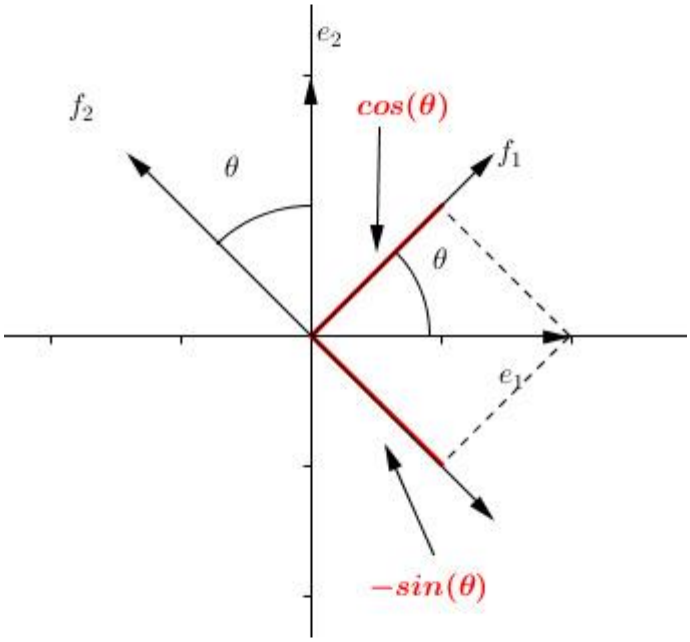
Observe:



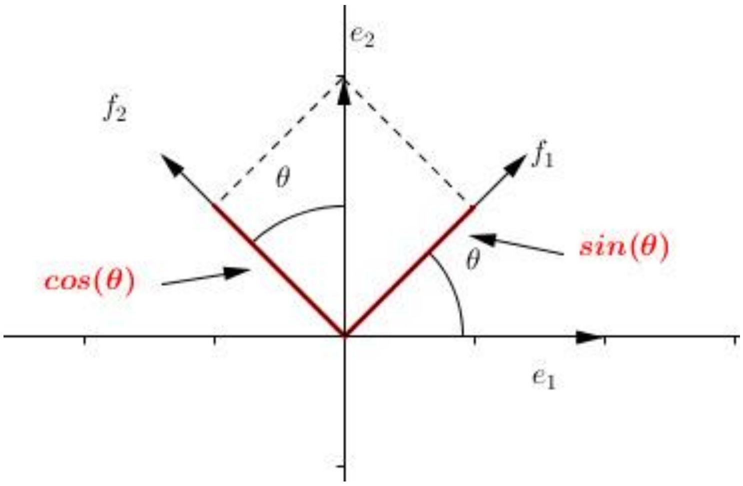
Temos $v = x_1e_1 + x_2e_2 = y_1f_1 + y_2f_2$ e queremos calcular:

$$[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta}.$$

Ou seja, queremos encontrar a matriz $[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ mudança de base de β para β'. Para isso, devemos escrever os vetores e_1 e e_2 de β em função de f_1 e f_2. Observe a figura:



Temos $e_1 = \cos\theta\, f_1 - \sin\theta\, f_2$. E:



Temos $e_2 = \sin\theta\, f_1 + \cos\theta\, f_2$.

Desta forma:

$$[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$[v]_{\beta'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \cos\theta\, x_1 + \sin\theta\, x_2 \\ y_2 = -\sin\theta\, x_1 + \cos\theta\, x_2 \end{cases}.$$

CAPÍTULO 15: TRANSFORMAÇÕES LINEARES

15.1 INTRODUÇÃO

Antes de falarmos sobre transformações (aplicações) lineares, vamos relembrar alguns conceitos básicos de funções (aplicações).

Primeiramente, o que é uma função? Sempre que nos referimos a uma função matematicamente, devemos considerar dois conjuntos A e B. Uma *função* é definida como sendo uma relação (ou regra) que associa a todo elemento de A um único elemento de B.

Por exemplo, considere os conjuntos $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e, t, r\}$ e seja f uma função que associa todo elemento de A a um único elemento de B, denotamos $f: A \to B$ (lê-se: f de A em B), tal que $a \mapsto d$, $b \mapsto e$ e $c \mapsto e$. No caso em que $a \mapsto d$, dizemos que "o elemento $a \in A$ é associado ao elemento $d \in B$" ou ainda podemos dizer que d é a imagem de a através da função f, e podemos denotar esta relação entre a e d por $f(a) = d$. De outra maneira, podemos pensar que a função f "transforma" o elemento $a \in A$ no elemento $d \in B$. Análogo à $f(a) = d$, temos $f(b) = e$ e $f(c) = e$.

Note que os elementos $b, c \in A$ são associados ao mesmo elemento $e \in B$. O que devemos tomar cuidado é que, por exemplo, o elemento $a \in A$ só pode ser associado a um único elemento de B (neste caso, d). Caso tivéssemos $f(a) = d$ e $f(a) = r$, isto implicaria que a relação f não é uma função.

Como tarefa, represente a função $f: A \to B$ descrita acima por um Diagrama de Venn.

15.1.1 Definição: Sejam V e W espaços vetoriais[5]. Uma *transformação linear* é uma função T de V em W, $T: V \to W$, tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

P1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$, quaisquer que sejam $u, v \in V$;

[5] Quando falarmos somente "tal conjunto é espaço vetorial", já estamos assumindo que este é um espaço vetorial sobre o corpo $(\Re, +, \cdot)$.

P2. $T(\lambda v) = \lambda T(v)$, quaisquer que sejam $\lambda \in \Re$ e $v \in V$.

Exemplos:

01. Vamos mostrar que a função $T: \Re \to \Re$ tal que $T(x) = 3x$ é uma aplicação linear.
Note que, neste caso os espaços vetoriais são $V = W = \Re$ e a função T transforma um número real x em seu triplo $3x$, isto é, $x \mapsto 3x = T(x)$. Mostremos que T é uma transformação linear. Para isto, devemos mostrar que:
P1. Quaisquer que sejam $p, q \in V = \Re$, a propriedade $T(p+q) = T(p) + t(q)$ deve ser verificada. De fato:

$$T(p+q) = 3(p+q) = 3p + 3q = T(p) + T(q) \Rightarrow \boxed{T(p+q) = T(p) + T(q)}.$$

P2. Quaisquer que sejam $\lambda \in \Re$ e $x \in V = \Re$, a propriedade $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ deve ser verificada. De fato:

$$T(\lambda x) = 3(\lambda x) = \lambda(3x) = \lambda(3x) \Rightarrow \boxed{T(\lambda x) = \lambda T(x)}.$$

Como P1 e P2 são válidas, temos que $T: \Re \to \Re$ é uma transformação linear.

02. A aplicação $F: \Re \to \Re$ definida por $F(t) = t^2$ NÃO é uma aplicação linear. Perceba que, tomando $t_1, t_2 \in \Re$, tem-se:

$$F(t_1 + t_2) = (t_1 + t_2)^2 = t_1^2 + 2t_1t_2 + t_2^2.$$

Por outro lado:

$$F(t_1) + F(t_2) = t_1^2 + t_2^2.$$

Desta forma:

$$F(t_1+t_2)=t_1^2+2t_1t_2+t_2^2\neq t_1^2+t_2^2=F(t_1)+F(t_2)$$

$$\Rightarrow F(t_1+t_2)\neq F(t_1)+F(t_2).$$

Ou seja, a propriedade P1 da definição não é satisfeita, o que já é suficiente para concluir que F não é uma aplicação linear.

03. Seja $T:\Re^2\rightarrow\Re^3$ definida por $T(x,y)=(2x,0,x+y)$. Vamos mostrar que T é uma transformação linear.
Note que o conjunto de "partida" é o espaço vetorial $V=\Re^2$, logo seus vetores são da forma $v=(x,y)$, enquanto o conjunto de chegada é o espaço vetorial $W=\Re^3$ com vetores da forma (p,q,r).
Mostremos que T é transformação linear:
P1. Sejam $v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2)\in V=\Re^2$. Então:

$$T(v_1+v_2)=T\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big)=T(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_1}+\boldsymbol{y_2})$$

$$=\big(2(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2}),0,(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{x_2})+(\boldsymbol{y_1}+\boldsymbol{y_2})\big)$$

$$=\big(\boldsymbol{2x_1}+\boldsymbol{2x_2},0,(\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{y_1})+(\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{y_2})\big)$$

$$=(\boldsymbol{2x_1},\boldsymbol{0},\boldsymbol{x_1}+\boldsymbol{y_1})+(\boldsymbol{2x_2},\boldsymbol{0},\boldsymbol{x_2}+\boldsymbol{y_2})=T(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})+T(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2})=T(v_1)+T(v_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)}.$$

P2. Sejam $\lambda\in\Re$ e $v=(x,y)\in V=\Re^2$. Então:

$$T(\lambda v)=T\big(\lambda(x,y)\big)=T(\lambda x,\lambda y)=(2(\lambda x),0,\lambda x+\lambda y)=\big(\lambda(2x),0,\lambda(x+y)\big)$$

$$=\lambda(2x,0,x+y)=\lambda T(x,y)=\lambda T(v)\Rightarrow\boxed{T(\lambda v)=\lambda T(v)}.$$

Como P1 e P2 são satisfeitas, temos que T é uma transformação linear.

15.1.2 Consequência da Definição: Decorre da definição de transformação linear que, sendo $T: V \to W$ uma transformação linear, o vetor nulo de V é associado ao vetor nulo de W. Em outras palavras, se T é transformação linear, a imagem do vetor nulo de V através da aplicação T é o vetor nulo de W, isto é, $T(0_V) = 0_W$ (usamos os índices V e W em 0, somente para que fique mais fácil de visualizar que um dos vetores é o vetor nulo do espaço vetorial V e o outro é o vetor nulo do espaço vetorial W).

Prova: Queremos mostrar que $T(0) = 0$, ou seja, partimos de um lado da igualdade e devemos chegar do outro lado. De fato:

$$T(0) = T(0 + 0).$$

Como, por hipótese, T é linear, $T(0 + 0) = T(0) + T(0)$. Então:

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$$

$$\Rightarrow T(0) = T(0) + T(0) \dots (*)$$

Note que, $T(0) \in W$ e, como W é espaço vetorial, sabe-se que existe $\boldsymbol{-T(0)} \in W$ tal que $T(0) + [\boldsymbol{-T(0)}] = 0$. Somando $-T(0)$ em (*):

$$T(0) + [\boldsymbol{-T(0)}] = [T(0) + T(0)] + [\boldsymbol{-T(0)}]$$

$$\Leftrightarrow 0 = T(0) + \{T(0) + [-T(0)]\} \Leftrightarrow 0 = T(0) + 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T(0) = 0}.$$

Portanto, temos o desejado, isto é, a igualdade destacada acima nos diz que o vetor nulo de V tem como imagem, através de T linear, o vetor nulo de W.

IMPORTANTE: O resultado acima nos será muito útil para concluir quais aplicações não são lineares, isto é, se $F: V \to W$ for tal que $F(0) \neq 0$, concluímos de imediato que F não é uma aplicação linear.

Porém, se ocorrer $F(0) = 0$, não podemos ainda afirmar que esta transformação é linear, ainda teremos que verificar as propriedades P1 e P2 da definição.

<u>Exemplo</u>:

Seja $T: \Re^3 \to \Re^3$ tal que $(x, y, z) \mapsto (x + 1, y, z)$, esta aplicação não é uma transformação linear, pois:

$$T(0) = T(0,0,0) = (0 + 1,0,0) = (1,0,0) \neq (0,0,0) = 0.$$

Temos $T(0) \neq 0$, ou seja, pelo resultado visto acima isto implica que T não é linear.

A seguir, veremos um resultado que nos auxiliará a detectar transformações lineares. Digamos que este resultado "resume" as propriedades P1 e P2 em apenas uma condição.

15.1.3 Proposição: Seja $T: V \to W$ uma aplicação. T é uma transformação linear se, e somente se, $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$, quaisquer que sejam $\lambda \in \Re$ e $u, v \in V$.

Prova: Devemos mostrar a "ida" e a "volta" do "se, e somente se":

$(\Rightarrow)$ Queremos provar que, se T é linear, então vale a igualdade $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$. De fato, partimos do lado esquerdo da igualdade $T(\lambda u + v)$. Mas como T é, por hipótese, linear, é válido $T(\lambda u + v) = T(\lambda u) + T(v)$ e também, devido ao fato de que T é linear, é válido $T(\lambda u) = \lambda T(u)$. Então:

$$T(\lambda u + v) = T(\lambda u) + T(v) = \lambda T(u) + T(v)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)}.$$

E temos o desejado.

($\Leftarrow$) Queremos mostrar que, a igualdade $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$ é válida, quaisquer que sejam $u, v \in V$ e $\lambda \in \Re$, então T é uma transformação linear. Em outras palavras, queremos provar que P1 e P2 da definição são válidas. De fato:

Se $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$ é válida para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \Re$, podemos tomar, em particular, $\boldsymbol{\lambda = 1}$ em $T(\boldsymbol{\lambda} u + v) = \boldsymbol{\lambda} T(u) + T(v)$, isto é:

$$T(\mathbf{1}u + v) = \mathbf{1}T(u) + T(v) \Leftrightarrow T(u + v) = T(u) + T(v).$$

Concluímos $T(u + v) = T(u) + T(v)$, quaisquer que sejam $u, v \in V$, isto é, a propriedade P1 da definição é satisfeita.

Por outro lado, se $T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$ é válida para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \Re$, podemos tomar, em particular, $\boldsymbol{v = 0}$ em $T(\lambda u + \boldsymbol{v}) = \lambda T(u) + T(\boldsymbol{v})$, isto é:

$$T(\lambda u + \mathbf{0}) = \lambda T(u) + T(\mathbf{0}) \Leftrightarrow T(\lambda u) = \lambda T(u) + 0 = \lambda T(u).$$

Concluímos que $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, quaisquer que sejam $u \in V$ e $\lambda \in \Re$, isto é, a propriedade P2 da definição é satisfeita.

Portanto, como P1 e P2 são válidas, temos que T é uma transformação linear.

<u>Exemplo</u>:

A aplicação $T: \Re^2 \to \Re^2$ tal que $(x, y) \mapsto (2x, x + y)$ ou $T(x, y) = (2x, x + y)$ é uma transformação linear. Tomando $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \Re^2$ e $\lambda \in \Re$, temos:

$$T(\lambda v_1 + v_2) = T\big(\lambda(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\big) = T\big((\lambda x_1, \lambda y_1) + (x_2, y_2)\big)$$

$$= T(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2) = (2(\lambda x_1 + x_2), \lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2)$$

$$= \big(2\lambda x_1 + 2x_2, \lambda(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\big) = \big(2\lambda x_1, \lambda(x_1 + y_1)\big) + (2x_2, x_2 + y_2)$$

$$= \lambda(2x_1, x_1 + y_1) + (2x_2, x_2 + y_2) = \lambda T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2)$$

$$\Rightarrow T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2).$$

Como $T(\lambda v_1 + v_2) = \lambda T(v_1) + T(v_2)$, segue que T é transformação linear.

No próximo exemplo, veremos que podemos associar a qualquer transformação $T: \Re^n \to \Re^m$ uma matriz de ordem $m \times n$.

Exemplos:

01. Sejam $L_M: \Re^n \to \Re^m$ uma transformação linear e M uma matriz $m \times n$ de modo L_M é definida por $v \mapsto Mv$ ou $L_M(v) = Mv$, onde $v \in \Re^n$ pode ser tomado como $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $L_M(v) \in \Re^m$ pode ser tomado como $L_M(v) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$. Assim:

$$L_M(v) = Mv \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Segue das propriedades de operações com matrizes que, dados $u, v \in \Re^n$ e $\lambda \in \Re$, tem-se:

$$L_M(u + v) = M(u + v) = Mu + Mv = L_M(u) + L_M(v).$$

$$L_M(\lambda u) = M(\lambda u) = \lambda(Mu) = \lambda L_M(u).$$

Logo L_M é transformação linear.

02. Tomando $L_M: \Re^2 \to \Re^3$ tal que $L_M(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2)$, como identificar a matriz M? Note que $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $L_M(v) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, e observando a lei de L_M, temos:

$$L_M(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = y_1 \\ 0 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \end{cases}$$

O sistema na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Ora, podemos identificar $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, desta forma a igualdade acima é escrita como $Mv = L_M(v)$, ou ainda, $v \mapsto Mv$.

$$L_M(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

15.2 RESULTADOS E CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Agora veremos uma série de resultados e algumas definições de elementos presentes em transformações lineares.

O primeiro resultado nos diz que para determinar uma transformação linear, basta saber como esta transformação "funciona" nos elementos de uma base.

15.2.1 Teorema: Sejam V e W espaços vetoriais, o conjunto $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V e os vetores $w_1, \dots, w_n \in W$. Existe uma única transformação linear $T: V \to W$ tal que $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \dots, T(v_n) = w_n$. Sendo $v \in V$, podemos escrever $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ e a aplicação T é dada por $T(v) = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \cdots a_n T(v_n) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$.

Prova: Suponha que, além de $T: V \to W$ existe outra aplicação $R: V \to W$ tal que $R(v_1) = w_1, \dots, R(v_n) = w_n$ (a ideia então é concluir que $R(v) = T(v), \forall v \in V$, para mostrar a unicidade de T).

Sendo $v \in V$, $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, pois $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base de V e, além disso, os coeficientes $a_1, \dots, a_n \in \Re$ são únicos.

Aplicando a função R em $v \in V$, temos:

$$R(v) = R(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = R(a_1 v_1) + \cdots + R(a_n v_n) = a_1 R(v_1) + \cdots + a_n R(v_n)$$

$$= a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$$

$$\Rightarrow R(v) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$$

Temos por hipótese também que $w_1 = T(v_1), \dots, w_n = T(v_n)$, logo:

$$R(v) = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = a_1 T(v_1) + \cdots + a_n T(v_n) = T(a_1 v_1) + \cdots + T(a_n v_n)$$

$$= T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = T(v) \Rightarrow R(v) = T(v).$$

Logo, para qualquer $v \in V$, temos $T(v) = R(v)$. Portanto, concluímos que $R = T$, e desta forma T é única.

Exemplos:

01. Qual é a transformação linear $T: \Re^2 \to \Re^3$ tal que $T(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = (2, -1, 0)$ e $T(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (0,0,1)$? Sabemos que $\boldsymbol{e_1} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}), \boldsymbol{e_2} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \in \Re^2$ formam uma base para $\Re^2$. Assim, tomando $v = (x, y) \in \Re^2$ um vetor arbitrário, este pode ser escrito como $(x, y) = x(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + y(\mathbf{0}, \mathbf{1}) = x\boldsymbol{e_1} + y\boldsymbol{e_2}$ e, aplicando T nesta igualdade:

$$T(x, y) = T(xe_1 + ye_2) = T(xe_1) + T(ye_2) = xT(e_1) + yT(e_2).$$

Como $T(e_1) = (2, -1, 0)$ e $T(e_2) = (0,0,1)$, temos:

$$T(x,y) = xT(e_1) + yT(e_2) = x(2,-1,0) + y(0,0,1) = (2x,-x,0) + (0,0,y)$$

$$= (2x,-x,y) \Rightarrow \boxed{T(x,y) = (2x,-x,y)}.$$

Portanto, de acordo com o resultado anterior, a transformação linear procurada é $T(x,y) = (2x,-x,y)$ e esta é a única que satisfaz as "exigências" iniciais.

02. Qual é a transformação $T: \Re^2 \rightarrow \Re^3$ tal que $T(1,1) = (3,2,1)$ e $T(0,-2) = (0,1,0)$? O conjunto $\{(1,1),(0,-2)\}$ é uma base para $\Re^2$, logo conhecendo a imagem de cada vetor desta base, conseguimos determinar a transformação linear T, de acordo com o teorema acima. Para isto, tomemos $(x,y) \in \Re^2$ que pode ser escrito como:

$$(x,y) = (x,x) + \left(0,-2\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)\right) = x(1,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(0,-2)$$

$$\Rightarrow (x,y) = x(1,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(0,-2).$$

Aplicando T na igualdade acima:

$$T(x,y) = T\left(x(1,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(0,-2)\right) = T\big(x(1,1)\big) + T\left(\left(\frac{x-y}{2}\right)(0,-2)\right)$$

$$= xT(1,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)T(0,-2) = x(3,2,1) + \left(\frac{x-y}{2}\right)(0,1,0)$$

$$= (3x,2x,x) + \left(0,\frac{x-y}{2},0\right) = \left(3x,2x + \frac{x-y}{2},x\right) = \left(3x,\frac{4x+x-y}{2},x\right)$$

$$\Rightarrow T(x,y) = \left(3x,\frac{5x-y}{2},x\right).$$

15.2.2 Definição: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. A *imagem* de T é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe algum vetor $v \in V$ para o qual $T(v) = w$. Denotamos a imagem de T por $T(V)$, ou seja:

$$T(V) = \{w \in W; w = T(v), onde\ v \in V\}.$$

15.2.3 Definição: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O conjunto dos vetores $v \in V$ que são associados ao vetor $0 \in W$ é chamado de *núcleo* de T. Em outras palavras, o núcleo de T é o conjunto dos vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$. Denotamos o núcleo de T por $\ker(T)$, ou seja:

$$\ker(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}.$$

15.2.4 Consequências da Definição: Os conjuntos $T(V) \subset W$ e $\ker(T) \subset V$ são, respectivamente, subespaços de W e V.

Prova: Faça! ☺

Exemplos:

01. Seja $T: \Re^2 \to \Re$ tal que $(x, y) \mapsto x + y$ ou $T(x, y) = x + y$. Vamos determinar o núcleo e a imagem de T.

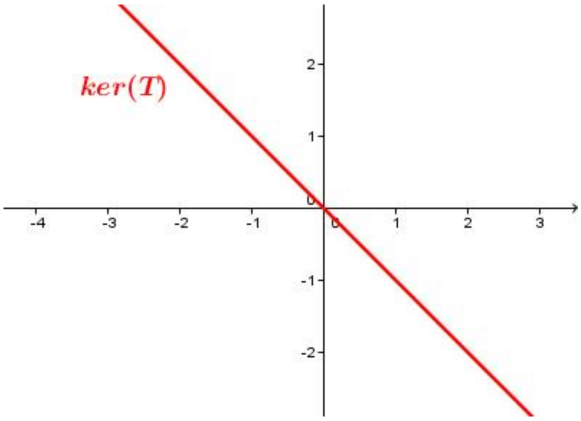
Por definição, $\ker(T) = \{v \in \Re^2; T(v) = 0\}$. Tomando $v = (x, y) \in \Re^2$, temos:

$$\ker(T) = \{(x, y) \in \Re^2; T(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \Re^2; x + y = 0\}$$

$$= \{(x, y) \in \Re^2; y = -x\} = \{(x, -x); x \in \Re\} = \{x(1, -1); x \in \Re\} = [(1, -1)]$$

$$\Rightarrow \ker(T) = [(1, -1)].$$

Note que o núcleo de T é o subespaço gerado por $(1, -1) \in \Re^2$ e , geometricamente, o núcleo de T é o conjunto de vetores de $\Re^2$ que estão sobre a reta $y = -x$. Observe:



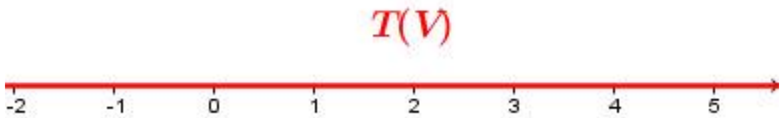
Por definição, temos que $T(V) = \{w \in \Re; w = T(u), onde\ u \in \Re^2\}$. Tomando $u = (x, y) \in \Re^2$:

$$T(V) = \{w \in \Re; T(x, y) = w, onde\ (x, y) \in \Re^2\} = \{w \in \Re; x + y = w\}$$

$$= \{x + y; x, y \in \Re\} = \{(x + y) \cdot 1; x + y \in \Re\} = [1]$$

$$\Rightarrow T(V) = [1].$$

Ou seja, a imagem de T é o subespaço gerado pelo vetor $1 \in \Re$.



02. Seja $T: \Re^3 \to \Re^3$ tal que $(x, y, z) \mapsto (x, 2y, 0)$ ou $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$. Temos que, o núcleo de T é:

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \in \Re^3; T(x, y, z) = (0,0,0)\} = \{(x, y, z) \in \Re^3; (x, 2y, 0) = (0,0,0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \Re^3; x = 0, 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0\ e\ z \in \Re\} = \{(0,0, z) \in \Re^3; z \in \Re\}$$

$$= \{z(0,0,1); z \in \Re\} = [(0,0,1)] \Rightarrow \ker(T) = [(0,0,1)].$$

Ou seja, o núcleo de T é o subespaço de $\Re^3$ gerado por $(0,0,1)$. Além disso, observe que $\dim(\ker(T)) = 1$.

A imagem de T é:

$$T(V) = \{(a,b,c) \in \Re^3; T(x,y,z) = (a,b,c), onde\ (x,y,z) \in \Re^3\}$$

$$= \{(a,b,c) \in \Re^3; (x,2y,0) = (a,b,c)\} = \{(a,b,c) \in \Re^3; a = x, b = 2y\ e\ c = 0\}$$

$$= \{(x,2y,0); x,y \in \Re\} = \{(x,0,0) + (0,2y,0); x,y \in \Re\}$$

$$= \{x(1,0,0) + y(0,2,0); x,y \in \Re\} = [(1,0,0),(0,2,0)] \Rightarrow T(V) = [(1,0,0),(0,2,0)].$$

Ou seja, $T(V)$ é o subespaço gerado de $\Re^3$ por $(1,0,0)$ e $(0,2,0)$. Além disso, observe que $\dim\big(T(V)\big) = 2$.

15.2.5 Definição: Seja $T: V \to W$ uma função (não necessariamente aplicação linear). T é uma função *injetora* se dados $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$ implica em $u = v$. Ou equivalentemente, se dados $u, v \in V$ tais que $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$.

Em outras palavras, uma função $T: V \to W$ é injetora, se dois elementos com mesma imagem são iguais, ou equivalente a isso, a função é injetora se quaisquer dois elementos distintos sempre possuem imagens distintas.

15.2.6 Definição: Seja $T: V \to W$ uma função (não necessariamente aplicação linear). T é uma função *sobrejetora* se $T(V) = W$.

Em outras palavras, dizemos que uma função é sobrejetora se o conjunto imagem desta função coincidir com seu contradomínio, ou ainda, T é sobrejetora se $\forall w \in W, \exists v \in V; w = T(v)$.

<u>Exemplo</u>:

Seja $T: \Re \rightarrow \Re^2$ tal que $T(x) = (x, 0)$. Note que, se tomarmos $x, y \in \Re$ tais que $T(x) = T(y)$, temos:

$$T(x) = T(y) \Leftrightarrow (x, 0) = (y, 0) \Leftrightarrow x = y.$$

Como $T(x) = T(y)$ implicou $x = y$, temos por definição que T é injetora. Vejamos que T não é uma função sobrejetora. De fato:

$$T(V) = \{(a, b) \in \Re^2; T(x) = (a, b), onde\ x \in \Re\} = \{(a, b) \in \Re^2; (x, 0) = (a, b)\}$$

$$= \{(a, b) \in \Re^2; a = x\ e\ b = 0\} = \{(x, 0); x \in \Re\} = \{x(1,0); x \in \Re\} = [(1,0)]$$

$$\Rightarrow T(V) = [(1,0)].$$

Ou seja, a imagem de T é o subespaço gerado por $(1,0) \in \Re^2$ e este vetor não gera $\Re^2$, logo $\Re^2 \neq [(1,0)] = T(V)$. Logo $T(V) \neq \Re^2$, o que implica que T não é sobrejetora.

A seguir, veremos um resultado que nos será muito útil para identificar transformações lineares injetoras. O teorema diz, basicamente, que uma condição necessária e suficiente para que uma transformação linear seja injetora é que seu núcleo contém somente o vetor nulo.

15.2.7 Teorema: Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. $\ker(T) = \{0\}$ se, e somente se T é injetora.

Prova: Devemos mostrar a dupla implicação.

$(\Rightarrow)$ Queremos mostrar que se $\ker(T) = \{0\}$, então T é injetora. Para mostrar que T é injetora, devemos concluir que, tomando $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$ isto implica em $u = v$.

De fato, sejam $u, v \in V$ tais que $T(u) = T(v)$, então:

$$T(u) = T(v) \Leftrightarrow T(u) - T(v) = 0 \ldots (*)$$

Como T é linear, $-T(v) = -1T(v) = T(-1v) = T(-v)$ e também $T(u) + T(-v) = T(u - v)$. Voltando em (*):

$$T(u) = T(v) \Leftrightarrow T(u) - T(v) = 0 \Leftrightarrow T(u - v) = 0.$$

Mas, como $T(u - v) = 0$ (a imagem de $u - v$ é o vetor nulo), isto implica que $u - v \in \ker(T)$. Porém, por hipótese, temos que $\ker(T) = \{0\}$, ou seja, o único vetor do núcleo é o vetor nulo, logo $u - v = 0$. Assim:

$$u - v = 0 \Leftrightarrow \boxed{u = v}.$$

Ora, como $T(u) = T(v)$ implicou em $u = v$, temos por definição que T é uma função injetora.

($\Leftarrow$) Queremos mostrar que se T é injetora, então $\ker(T) = \{0\}$, ou seja, devemos mostrar que o único vetor do núcleo é o vetor nulo de V.

Seja $v \in \ker(T)$, então por definição:

$$T(v) = 0 \ldots (*)$$

Já foi visto que uma consequência da definição de transformação linear é $T(0) = 0$, isto é, a imagem do vetor nulo de V é o vetor nulo de W. Voltando em (*), temos:

$$T(v) = 0 = T(0) \Leftrightarrow T(v) = T(0).$$

Mas, por hipótese, temos que T é injetora, logo a igualdade $T(v) = T(0)$ implica que $v = 0$. Portanto, tomando $v \in V$ arbitrário em $\ker(T)$, concluímos que $v = 0$, logo o único vetor do núcleo de T é o vetor nulo de V. Assim $\ker(T) = \{0\}$, e temos o desejado.

<u>Exemplo</u>:

Voltando ao exemplo em que $T: \Re \to \Re^2$ tal que $T(x) = (x, 0)$, vamos usar o Teorema15.2.7 para mostrar que T é injetora. Veja:

$$\ker(T) = \{x \in \Re; T(x) = (0,0)\} = \{x \in \Re; (x, 0) = (0,0)\} = \{x \in \Re; x = 0\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \ker(T) = \{0\} \Rightarrow T \; injetora.$$

O próximo resultado relaciona a dimensão do núcleo e da imagem de uma transformação linear com a dimensão do espaço vetorial domínio.

15.2.8 Teorema: Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, A seguinte relação é válida:

$$\dim \ker(T) + \dim T(V) = \dim V.$$

Prova: Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de $\ker(T)$ (isto quer dizer que supomos $\boxed{\dim \ker(T) = n}$). Sabemos que $\ker(T) \subset V$, logo temos $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ e, desta forma, podemos completar o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ até que este seja uma base de V.

Assim, considere $w_1, \dots, w_m$, m vetores tais que $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ seja uma base de V (assim, teremos $\boxed{\dim V = m + n}$).

Já foi visto em um resultado que se T é uma transformação linear, esta associa certa quantidade de vetores da base de V à mesma quantidade de vetores de W, isto é, $\{T(w_1), \dots, T(w_m)\} \subset W$. Vamos mostrar que este conjunto $\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$ como m vetores forma uma base de $T(V)$. Em outras palavras, queremos mostrar que:

i. $T(V) = [T(w_1), \dots, T(w_m)]$;

ii. $\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$ é LI.

Mostremos:

i. Queremos mostrar que todo vetor $x \in T(V)$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de $\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$. De fato, seja $\boldsymbol{x \in T(V)}$, então existe $v \in V$ tal que $\boldsymbol{x = T(v)} \dots (*)$. Como $v \in V$, este vetor pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ de V, ou seja, $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m$. Logo, reescrevemos **(*)**:

$$x = T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m)$$

$$= T(a_1v_1) + \cdots + T(a_nv_n) + T(b_1w_1) + \cdots + T(b_mw_m)$$

$$\Rightarrow x = a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) + b_1T(w_1) + \cdots + b_mT(w_m) \ldots (I)$$

Mas, como os v_i são vetores de $\ker(T)$, tem-se $T(v_i) = 0, \forall i$, logo (I) fica:

$$x = b_1T(w_1) + \cdots + b_mT(w_m).$$

Qualquer que seja $x \in T(V)$, ou seja, qualquer vetor da imagem é combinação linear de $T(w_1), \ldots, T(w_m)$, logo $T(V)$ é o subespaço gerado por $T(w_1), \ldots, T(w_m)$. Assim $T(V) = [T(w_1), \ldots, T(w_m)]$.

ii. Queremos mostrar que o conjunto $\{T(w_1), \ldots, T(w_m)\}$ é LI. De fato, tomemos a equação:

$$k_1T(w_1) + \cdots + k_mT(w_m) = 0 \Leftrightarrow T(k_1w_1) + \cdots + T(k_mw_m) = 0$$

$$\Leftrightarrow T(k_1w_1 + \cdots + k_mw_m) = 0.$$

A igualdade acima, nos diz que o vetor $k_1w_1 + \cdots + k_mw_m$ é um vetor de $\ker(T)$, pois este tem como imagem o vetor nulo de W. Logo, como $k_1w_1 + \cdots + k_mw_m \in \ker(T)$, este vetor pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\ker(T)$, isto é:

$$k_1w_1 + \cdots + k_mw_m = p_1v_1 + \cdots + p_nv_n$$

$$\Leftrightarrow k_1w_1 + \cdots + k_mw_m - p_1v_1 - \cdots - p_nw_n = 0.$$

A igualdade acima é uma combinação linear dos vetores de $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ igual ao vetor nulo e sabe-se que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$ é uma base de V, logo este conjunto é LI, e assim a igualdade acima implica:

$$k_1 = \cdots = k_m = p_1 = \cdots = p_n = 0.$$

Desta forma, tomando $k_1 T(w_1) + \cdots + k_m T(w_m) = 0$, concluímos que $k_1 = \cdots = k_m = 0$, logo, por definição, temos que $\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$ é LI.

Como i e ii são válidos, concluímos que $\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$ é uma base de $T(V)$, e este conjunto possui m vetores, logo $\boxed{\dim T(V) = m}$.

Portanto $\dim T(V) + \dim \ker(T) = m + n = \dim V$, que é o desejado.

15.2.9 Corolário: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear tal que $\dim V = \dim W$. A aplicação T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora.

Prova: De fato:

T é *injetora* $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow \dim \ker(T) = 0 \Leftrightarrow \dim \ker(T) + \dim T(V)$

$$= 0 + \dim T(V) = \dim T(V) = \dim V = \dim W \Leftrightarrow \dim T(V) = \dim W$$

$$\Leftrightarrow T \text{ é } sobrejetora.$$

15.2.10 Corolário: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva uma base de V em uma base de W.

Prova: Queremos mostrar que, se considerarmos $\{v_1, \dots, v_n\}$, ao aplicarmos T aos n vetores deste conjunto, o conjunto formado pelos $T(v_i)$ será uma base para W. De fato:

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Façamos:

$$k_1 T(v_1) + \cdots + k_n T(v_n) = 0 \Leftrightarrow T(k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n) = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0.$$

Mas como $\{v_1, \dots, v_n\}$ é base, em particular é LI, logo $k_1 = \cdots = k_n = 0$. Desta forma, a equação $k_1 T(v_1) + \cdots + k_n T(v_n) = 0$ implicou $k_1 = \cdots = k_n = 0$, ou seja, $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é LI.

Como $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é um conjunto LI com n vetores e $\dim W = \dim V = n$, temos que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é base de W.

15.2.11 Definição: Se $T: V \to W$ é injetora e sobrejetora (bijetora) dizemos que T é um *isomorfismo*.

Se existe um isomorfismo de V em W dizemos que V e W são *espaços isomorfos*.

Se $T: V \to W$ é um isomorfismo (obviamente $\dim V = \dim W$), existe uma única aplicação $T^{-1}: W \to V$, que também é um isomorfismo. A transformação T^{-1} recebe o nome de *aplicação inversa* de T.

Exemplo:

Seja $T: \Re^3 \to \Re^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$. Vamos mostrar que T é um isomorfismo e em seguida calcular T^{-1}.

Como $V = W = \Re^3$, temos que $\dim V = \dim W$, logo para mostrar que T é isomorfismo, basta mostrar que esta transformação é injetora, ou seja, basta mostrar que $\ker(T) = \{(0,0,0)\}$. De fato:

$$\ker(T) = \{(x, y, z) \in \Re^3; T(x, y, z) = (0,0,0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \Re^3; (x - 2y, z, x + y) = (0,0,0)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \Re^3; x - 2y = 0, z = 0 \ e \ x + y = 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \Re^3; x = y = z = 0\} = \{(0,0,0)\} \Rightarrow \ker(T) = \{(0,0,0)\}.$$

Portanto, T é isomorfismo.

Como T é injetora e $\dim V = \dim W$, sabemos que T leva uma base de $V = \Re^3$ em uma base de $W = \Re^3$. Tomando a base $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $V = \Re^3$, o conjunto $\{T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)\}$ será uma base de $W = \Re^3$.

$$T(1,0,0) = (1 - 2 \cdot 0,0,1 + 0) = (1,0,1)$$

$$T(0,1,0) = (0 - 2 \cdot 1,0,0 + 1) = (-2,0,1)$$

$$T(0,0,1) = (0 - 2 \cdot 0,1,0 + 0) = (0,1,0).$$

Logo $\{(1,0,1), (-2,0,1), (0,1,0)\}$ é base de $W = \Re^3$.
Agora calculamos $T^{-1}: W \to V$ a inversa de T. Sabemos que $T(1,0,0) = (1,0,1)$, $T(0,1,0) = (-2,0,1)$ e $T(0,0,1) = (0,1,0)$, logo:

$$T^{-1}(1,0,1) = (1,0,0)$$

$$T^{-1}(-2,0,1) = (0,1,0)$$

$$T^{-1}(0,1,0) = (0,0,1).$$

Queremos calcular $T^{-1}(x, y, z)$, para isto tomemos $(x, y, z) \in W = \Re^3$, e como $\{(1,0,1), (-2,0,1), (0,1,0)\}$ é base de $W = \Re^3$, escrevemos o vetor (x, y, z) como combinação dos vetores desta base, isto é:

$$(x, y, z) = a_1(1,0,0) + a_2(-2,0,1) + a_3(0,1,0).$$

Realizando os cálculos obtemos:

$$(x, y, z) = \frac{x + 2z}{3}(1,0,1) + \frac{z - x}{3}(-2,0,1) + y(0,1,0).$$

Aplicando T^{-1}:

$$T^{-1}(x, y, z) = \frac{x + 2z}{3}T^{-1}(1,0,1) + \frac{z - x}{3}T^{-1}(-2,0,1) + yT^{-1}(0,1,0)$$

$$= \frac{x+2z}{3}(1,0,0) + \frac{z-x}{3}(0,1,0) + y(0,0,1) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y\right)}.$$

Portanto a regra da transformação $T^{-1}: W \to V$ inversa de $T: V \to W$ é $T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+2z}{3}, \frac{z-x}{3}, y\right)$.

15.3 MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Já foi visto anteriormente, em um exemplo, que conseguíamos associar uma matriz de ordem $m \times n$ a uma transformação linear $T: \Re^n \to \Re^m$. Nesta seção, vamos formalizar este resultado para espaços vetoriais quaisquer, conhecendo suas bases.

Exemplo:

Sejam $V = \Re^2$, as bases $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,1),(-1,1)\}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Queremos determinar a transformação linear $T_A: \Re^2 \to \Re^2$ tal que $T_A(v) = Av$ depende de A, β e β'.

Seja $v = (x,y) \in \Re^2$ e X tal que $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (ou seja, X é a matriz das coordenadas de v em relação à base β), $AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = [T_A(v)]_{\beta'}$ (ou seja, AX é a matriz das coordenadas de $T_A(v)$ em relação à base β').

Como $[T_A(v)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix}$, temos:

$$T_A(v) = 2x(1,1) + y(-1,1) = (2x,2x) + (-y,y) = (2x-y, 2x+y)$$

$$\Rightarrow T_A(v) = (2x-y, 2x+y).$$

Se tivéssemos $\beta = \beta'$, teríamos $[T_A(v)]_\beta = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Av$.

15.3.1 Transformação através da Matriz: De modo geral, fixamos $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$, associamos $T_A: \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^m$ tal que $v \mapsto T_A(v)$, sendo $X = [v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ a:

$$AX = A[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = [T_A(v)]_{\beta'}.$$

Então $T_A(v) = y_1 w_1 + \cdots + y_m w_m$.

Em geral, dada uma matriz $A_{m \times n}$, esta pode ser abordada como uma aplicação linear $T_A: \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^m$ em relação às bases canônicas de $\mathfrak{R}^n$ e $\mathfrak{R}^m$.

<u>Exemplos</u>:

01. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$, $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, $\beta' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $T_A: \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^2$. Encontremos T_A.

Seja $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [v]_{\beta'} \in \mathfrak{R}^3$, então:

$$[T_A(v)]_\beta = A[v]_{\beta'} = AX = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 3y + 5z \\ 2x + 4y - z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T_A(v)]_\beta = \begin{bmatrix} x - 3y + 5z \\ 2x + 4y - z \end{bmatrix} \Leftrightarrow T_A(v) = (x - 3y + 5z)(1,0) + (2x + 4y - z)(0,1)$$

$$= (x - 3y + 5z, 2x + 4y - z) \Rightarrow \boxed{T_A(v) = (x - 3y + 5z, 2x + 4y - z)}.$$

02. Agora, dada $T_A: \Re^2 \to \Re^3$ tal que $T_A(x,y) = (x+y, 2x, y)$, como encontrar a matriz A tal que $T_A(v) = Av$.

Aqui, as bases consideradas são $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,0), (0,1)\}$. Tomando $X = [v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, sabemos que:

$$T_A(v) = (x+y, 2x, y) \Leftrightarrow [T_A(v)]_\beta = \begin{bmatrix} x+y \\ 2x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [v]_{\beta'}$$

$$\Rightarrow [T_A(v)]_\beta = A[v]_{\beta'}.$$

Logo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Vamos generalizar este caso de encontrar a matriz, dada certa transformação linear.

15.3.2 Matriz através da Transformação: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V e $\beta' = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Os vetores $T(v_1), \dots, T(v_n)$ são vetores de W, logo:

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m$$

A matriz transposta da matriz associada acima, denotada por $[T]^\beta_{\beta'}$, é chamada de *matriz de T em relação às bases β* e β'.

$$[T]^\beta_{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} = A.$$

Então T passa a ser a aplicação linear associada à matriz A e bases β e β', isto é, $T = T_A$.

Exemplos:

01. Considere $T: \Re^3 \to \Re^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. Sejam $\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ e $\beta' = \{(1,3), (1,4)\}$. Queremos encontrar $[T]_{\beta'}^{\beta}$. Calculamos T nos elementos da base β:

$$T(1,1,1) = (2,5) = \boldsymbol{a_{11}}(1,3) + \boldsymbol{a_{21}}(1,4) = \mathbf{3}(1,3) - \mathbf{1}(1,4)$$

$$T(1,1,0) = (3,1) = \boldsymbol{a_{12}}(1,3) + \boldsymbol{a_{22}}(1,4) = \mathbf{11}(1,3) - \mathbf{8}(1,4)$$

$$T(1,0,0) = (2,3) = \boldsymbol{a_{13}}(1,3) + \boldsymbol{a_{23}}(1,4) = \mathbf{5}(1,3) - \mathbf{3}(1,4).$$

Logo a matriz transposta da matriz associada ao sistema é a matriz de T em relação às bases β e β':

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Perceba que, se mudarmos as bases, a matriz da transformação em relação às bases também muda.

02. Seja $T: \Re^3 \to \Re^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$. Mas agora, considere $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,0), (0,1)\}$. Vamos encontrar $[T]_{\beta'}^{\beta}$:

$$T(1,0,0) = (2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$T(0,1,0) = (1,-2) = 1(1,0) - 2(0,1)$$

$$T(0,0,1) = (-1,4) = -1(1,0) + 4(0,1).$$

Logo $[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$.

<u>Observação</u>: Se para $T: \Re^n \to \Re^m$ tomarmos β e β' como sendo as bases canônicas de $\Re^n$ e $\Re^m$, respectivamente, denotamos a matriz de T em relação à β e β' simplesmente por $[T]$. Isto é:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = [T].$$

03. Seja $T: V \to V$ tal que $T(v) = v$, isto é, T é a identidade. Sendo $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ bases de V, temos:

$$\begin{gathered} T(v_1) = v_1 = a_{11}v_1' + \cdots + a_{n1}v_n' \\ \vdots \\ T(v_n) = v_n = a_{1n}v_1' + \cdots + a_{nn}v_n' \end{gathered}$$

Logo:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [I]_{\beta'}^{\beta}.$$

Que é a matriz mudança de base de β para β'.

04. Dadas as bases $\beta = \{(1,1), (0,1)\}$ de $\Re^2$ e $\beta' = \{(0,3,0), (-1,0,0), (0,1,1)\}$ de $\Re^3$, encontremos $T: \Re^2 \to \Re^3$ cuja matriz é:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Interpretando a matriz, temos:

$$T(1,1) = 0(0,3,0) - 1(-1,0,0) - 1(0,1,1) = (1,-1,-1)$$

$$T(0,1) = 2(0,3,0) + 0(-1,0,0) + 3(0,1,1) = (0,9,3).$$

Logo $T(1,1) = (1,-1,-1)$ e $T(0,1) = (0,9,3)$. Tomando $(x,y) \in \Re^2$, temos que $(x,y) = x(1,1) + (y-x)(0,1)$ e aplicando T:

$$T(x,y) = xT(1,1) + (y-x)T(0,1) = x(1,-1,-1) + (y-x)(0,9,3)$$

$$= (x,-x,-x) + (0,9y-9x,3y-3x) = (x,-10x+9y,-4x+3y)$$

$$\Rightarrow T(x,y) = (x,-10x+9y,-4x+3y).$$

15.3.3 Teorema: Sejam V e W espaços vetoriais, α uma base de V, β uma base de W e $T: V \to W$ uma aplicação linear. Para todo $v \in V$ vale:

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha.$$

Prova: Sejam $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$, $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $[T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

Interpretando a matriz $[T]_\beta^\alpha$ temos:

$$\begin{gathered} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}wm \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \end{gathered}$$

Como $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$, aplicamos T linear na igualdade:

$$T(v) = x_1T(v_1) + x_2T(v_2) + \cdots + x_nT(v_n)$$

$$= x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m) + \cdots$$
$$+ x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m)$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m$$

$$\Rightarrow T(v) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)w_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n)w_m$$

$$\Leftrightarrow [T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Mas, ainda temos $[T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ e como as coordenadas em relação à uma base são univocamente determinadas, temos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \ldots (*)$$

E (*) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{[T(v)]_\beta = [T]_\alpha^\beta [v]_\alpha}.$$

<u>Exemplo</u>:

Seja $T: \Re^2 \to \Re^3$ tal que $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ base de $\Re^2$ e $\beta = \{(1,0,1),(-2,0,1),(0,1,0)\}$ base de $\Re^3$. Queremos determinar a imagem do vetor $v = (2,-3)$ através de T. Para isto, escrevemos $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e usando a notação do teorema:

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -13 \end{bmatrix} \Leftrightarrow T(v) = 5(1,0,1) - 3(-2,0,1) - 13(0,1,0) = (11,-13,2).$$

15.3.4 Teorema: Sejam $T_1: V \to W$ e $T_2: W \to U$ aplicações lineares. A transformação $T_2 \circ T_1: V \to U$ é uma aplicação linear. Além disso, se α é base de V, β é base de W e γ é base de U, temos:

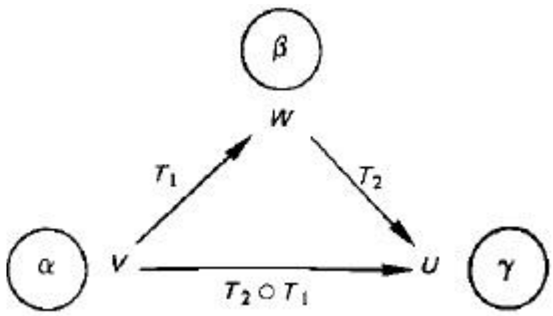
$$[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = [T_2]_\gamma^\beta [T_1]_\beta^\alpha.$$

Observe que:

i. α base de V e β base de W implicam que $[T_1]_\beta^\alpha$ é a matriz de $T_1: V \to W$ em relação às bases α e β.

ii. β base de W e γ base de U implicam que $[T_2]_\gamma^\beta$ é a matriz de $T_2: W \to U$ em relação às bases β e γ.

iii. α base de V e γ base de U implicam que $[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha$ é a matriz de $T_2 \circ T_1: V \to U$ em relação às bases α e γ.



<u>Exemplos</u>:

01. Considere as transformações $T_1: \Re^2 \to \Re^2$ tal que $T_1(x, y) = (2x, 2y)$ e $T_2: \Re^2 \to \Re^2$ tal que $T_2(x, y) = (x + 2y, y)$. Note que $V = U = W = \Re^2$, logo podemos determinar a transformação composta $T_2 \circ T_1: \Re^2 \to \Re^2$. Façamos:

$$(T_2 \circ T_1)(x, y) = T_2\big(T_1(x, y)\big) = T_2(2x, 2y) = (2x + 4y, 2y)$$

$$\Rightarrow (T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x + 4y, 2y).$$

Vamos observar as matrizes. Note que, considerando $\alpha = \{(1,0), (0,1)\}$, e $v = (x, y) \in \Re^2$, isto é, $[v]_\alpha = [(x, y)]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ temos:

$$[T_1(x, y)]_\alpha = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [T_1]_\alpha^\alpha [(x, y)]_\alpha.$$

Logo $[T_1]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz de T_1 em relação à base α. Temos também:

$$[T_2(x, y)]_\alpha = \begin{bmatrix} x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [T_2]_\alpha^\alpha [(x, y)]_\alpha.$$

Logo $[T_2]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz de T_2 em relação à base β.
O teorema nos diz que obtemos $[T_2 \circ T_1]_\alpha^\alpha$ fazendo:

$$[T_2 \circ T_1]_\alpha^\alpha = [T_2]_\alpha^\alpha [T_1]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [T_2 \circ T_1]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Veja que encontraremos a mesma matriz se analisarmos a transformação $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x + 4y, 2y)$. Seja $[v]_\alpha = [(x, y)]_\alpha$:

$$[(T_2 \circ T_1)(x, y)]_\alpha = \begin{bmatrix} 2x + 4y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [T_2 \circ T_1]_\alpha^\alpha [(x, y)]_\alpha.$$

Logo $[T_2 \circ T_1]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

02. Sejam $T_1: \Re^2 \to \Re^3$ e $T_2: \Re^3 \to \Re^2$ cujas matrizes em relação às bases $\alpha = \{(1,0),(0,2)\}$, $\beta = \left\{\left(\frac{1}{3}, 0, -3\right), (1,1,15), (2,0,5)\right\}$ e $\gamma = \{(2,0),(1,1)\}$ são, respectivamente:

$$[T_1]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ e \ [T_2]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Queremos encontrar $T_2 \circ T_1: \Re^2 \to \Re^2$, ou seja, queremos $(T_2 \circ T_1)(x, y)$. Segundo o teorema, temos que:

$$[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = [T_2]_\gamma^\beta [T_1]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainda temos que $[(T_2 \circ T_1)(v)]_\gamma = [T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha [v]_\alpha$. Seja $v = (x, y) \in \Re^2$ escrevendo este vetor na base α, temos $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix}$, logo:

$$[(T_2 \circ T_1)(v)]_\gamma = [T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha [v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [(T_2 \circ T_1)(v)]_\gamma = \begin{bmatrix} x - y \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (T_2 \circ T_1)(v) = (x - y)(2,0) + 0(1,1) = (2x - 2y, 0)$$

$$\Rightarrow (T_2 \circ T_1)(x, y) = (2x - 2y, 0).$$

15.3.5 Corolário: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear invertível com α e β bases de V e W (logo a matriz de T em relação à α e β é $[T]_\beta^\alpha$), respectivamente, então a matriz de $T^{-1}: W \to V$ tem em relação à β e α é $[T^{-1}]_\alpha^\beta$ e:

$$[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}.$$

Prova: Para mostrar que a matriz $[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta}$ é a inversa de $[T]_{\beta}^{\alpha}$, basta mostrar que o produto entre elas é a identidade.

Note que $[T]_{\beta}^{\alpha}$ é a matriz de T em relação à α e β e $[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta}$ é a matriz de T^{-1} em relação à β e α. Note que $T^{-1} \circ T: V \to V$ tem, devido ao Teorema 15.3.4, como matriz em relação à α:

$$[T^{-1} \circ T]_{\alpha}^{\alpha} = [T^{-1}]_{\alpha}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha} \dots (*)$$

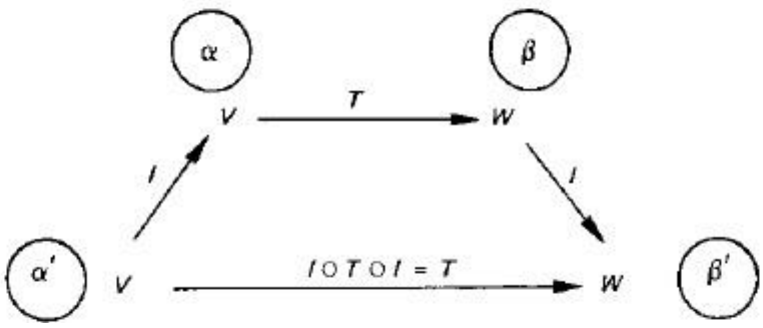
Mas $[T^{-1} \circ T]_{\beta}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\alpha}$ é a identidade, e em (*):

$$[T^{-1}]_{\alpha}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha} = [I]_{\alpha}^{\alpha} \Leftrightarrow [T^{-1}]_{\alpha}^{\beta} = \left([T]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}.$$

15.3.6 Corolário: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear, α e α' bases de V, β e β' bases de W, podemos relacionar as matrizes $[T]_{\beta}^{\alpha}$ e $[T]_{\beta'}^{\alpha'}$ por:

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}.$$

Onde $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é a matriz da transformação $I: W \to W$ identidade em relação às bases β e β', isto é, é a matriz mudança de base de β para β' e $[I]_{\alpha}^{\alpha'}$ é a matriz da transformação $I: V \to V$ identidade em relação às bases α' e α, isto é, é a matriz mudança de base de α' para α.



Observe que, temos $I: V \to V$ e $T: V \to W$, logo podemos fazer a composição $T \circ I: V \to W$, mas também tem-se $I: W \to W$ e fazemos a composição $I \circ T \circ I: V \to W$. Desta forma:

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I \circ T \circ I]_{\beta'}^{\alpha'} \ldots (*)$$

Mas, pelo Teorema 16.3.4 $[I \circ T \circ I]_{\beta'}^{\alpha'} = [I \circ T]_{\beta'}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}$ e voltando em (*):

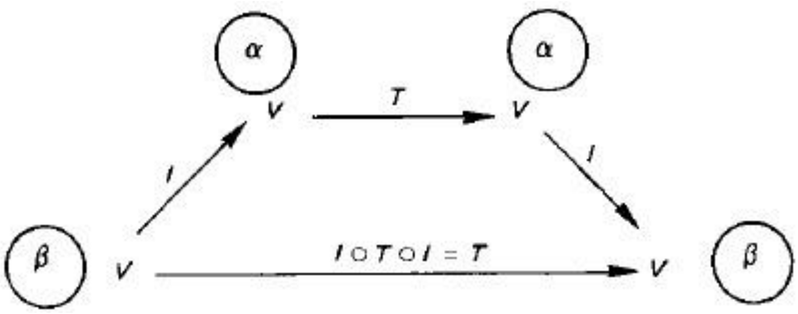
$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I \circ T \circ I]_{\beta'}^{\alpha'} = [I \circ T]_{\beta'}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}$$

$$\Rightarrow [T]_{\beta'}^{\alpha'} = [I]_{\beta'}^{\beta}[T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}.$$

15.3.7 Caso Particular: Se tivéssemos $T: V \to V$ transformação linear e as bases α e β de V, vejamos o que acontece:

Suponhamos que conhecemos $[T]_{\alpha}^{\alpha}$, vejamos como determinar $[T]_{\beta}^{\beta}$.

Tratamos α e β como bases de $V = Dom(T)$ e α e β como bases de $V = CDom(T)$. Temos o esquema:



Logo, $I: V \to V$ tem a matriz $[I]_{\alpha}^{\beta}$, $T: V \to V$ tem a matriz $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ e a composição $T \circ I: V \to V$ terá a matriz $[T \circ I]_{\alpha}^{\beta} = [T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta}$, mas também temos $I: V \to V$ com matriz $[I]_{\beta}^{\alpha}$ e fazendo a composição $I \circ T \circ I: V \to V$ temos a matriz $[I \circ T \circ I]_{\beta}^{\beta} = [I \circ T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta}$. Logo:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I \circ T \circ I]_{\beta}^{\beta} = [I \circ T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta} \Rightarrow [T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta} \ldots (I)$$

Mas, lembramos que as matrizes mudança de base de α para β e mudança de base de β para α são inversas, isto é, $[I]_{\alpha}^{\beta} = \left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}$, logo (I) fica:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}\left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}\left([I]_{\beta}^{\alpha}\right)^{-1}}.$$

CAPÍTULO 16: AUTOVALORES E AUTOVETORES

16.1 INTRODUÇÃO

Agora, vamos considerar transformações lineares cujo conjunto de partida e de chegada são um mesmo espaço vetorial V, isto é, consideramos transformações $T: V \to V$.

Quando estudávamos funções, sabíamos que os elementos $x \in D(f)$ tais que $f(x) = x$ eram chamados de *pontos fixos do domínio da função*. Analogamente, considerando $T: V \to V$ uma transformação linear, os vetores $v \in V = D(T)$ tais que $T(v) = v$ são chamados de *vetores fixos* de V.

Exemplos:

01. Seja $I: \Re^2 \to \Re^2$ tal que $(x, y) \mapsto (x, y)$ a aplicação identidade. Neste caso, todo vetor $v \in \Re^2$ é associado a ele mesmo, isto é, qualquer que seja $v = (x, y) \in \Re^2$, tem-se $I(x, y) = (x, y)$.

02. Seja $R_x: \Re^2 \to \Re^2$ tal que $(x, y) \mapsto (x, -y)$, ou na forma matricial, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Quais são os vetores de $\Re^2$ tais que $R_x(x, y) = (x, y)$? Vejamos:

$$R_x(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow (x, -y) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}.$$

Isto é, todo vetor da forma $(x, 0); x \in \Re$ é levado nele mesmo e, geometricamente, estes são os vetores que estão sobre o eixo X.

Agora, vamos considerar o seguinte caso: sendo $T: V \to V$, quais são os vetores $v \in V = D(T)$ tais que v é levado em algum de seus múltiplos, isto é, quais são os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = \lambda v; \lambda \in \Re$. Observe que os vetores v e $T(v)$ serão de mesma direção, o sentido depende dos valores do escalar $\lambda \in \Re$ e, ainda, estes vetores estão sobre uma mesma reta suporte.

Resumidamente, estamos procurando um vetor $v \in V$ e um escalar $\lambda \in \Re$ tais que:

$$T(v) = \lambda v \ldots (*)$$

Note que, $v = 0$ satisfaz (*), qualquer que seja λ, portanto estamos interessados somente nos vetores $v \neq 0$.

Em (*), o escalar $\lambda \in \Re$ é chamado de *autovalor* de T e o vetor $v \in V$ é o *autovetor* de T associado ao autovalor λ.

Em seguida, vamos nos referir às transformações lineares $T: V \to V$ como sendo *operador linear*.

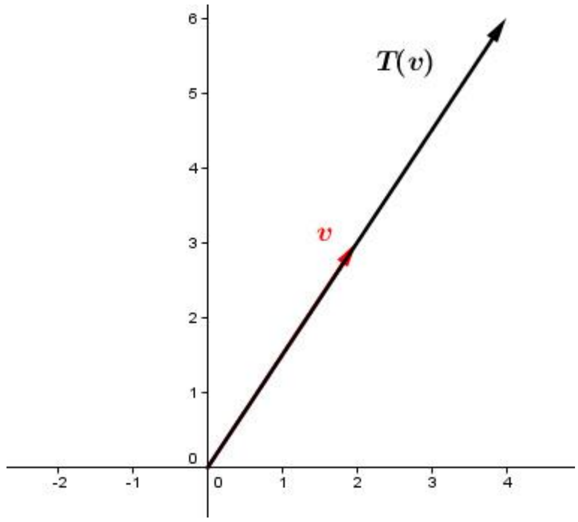
16.1.1 Definição: Seja $T: V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V; v \neq 0$ e $\lambda \in \Re$ tais que $T(v) = \lambda v$, λ é um *autovalor* de T e v é um *autovetor* de T associado a λ.

Observação: λ pode ser nulo. A única restrição que temos é que $v \neq 0$.

Exemplos:

01. Seja $T: \Re^2 \to \Re^2$ tal que $T(v) = 2v$ ou $T(x, y) = (2x, 2y)$. Na forma matricial $T(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Note que, se $\lambda = 2$, 2 é um autovalor de T e qualquer $(x, y) \neq (0,0)$ é autovetor de T associado ao autovalor 2. Geometricamente.



02. Em geral, se $T: V \to V$ é dada por $T(v) = \alpha v; \alpha \neq 0$ tem α como autovalor e qualquer $v = (x, y) \neq (0,0)$ é autovetor de T associado a α, pois $T(v)$ é sempre um vetor de mesma direção de v.

Nesta transformação, temos os seguintes casos:

i. Se $\alpha = 1$, T é a identidade;

ii. Se $|\alpha| < 1$, T contrai o vetor v;

iii. Se $|\alpha| > 1$, T dilata o vetor v;

iv. Se $\alpha < 0$, T inverte o sentido de v.

03. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $T_A: \Re^2 \to \Re^2$ é dada por $T_A(v) = Av$, isto é:

$$T_A(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{T_A(x, y) = (2x + 2y, y)}.$$

Para procurar os autovalores e autovetores de T_A fazemos $T_A(v) = \lambda v$, ou ainda:

$$T_A(x, y) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (2x + 2y, y) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 2y \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}.$$

Então, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda x \\ y = \lambda y \end{cases}.$$

Consideramos dois casos: i) $y \neq 0$ e ii) $y = 0$.

i. Se $y \neq 0$, da segunda equação temos $\lambda = \frac{y}{y} = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$. Tomando $\lambda = 1$ na primeira equação:

$$2x + 2y = x \Leftrightarrow 2y = -x \Leftrightarrow \boxed{x = -2y}.$$

Logo, para $\lambda = 1$ temos vetores da forma $(-2y, y); y \neq 0$, ou seja, qualquer vetor da forma $(-2y, y); y \neq 0$ é autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 1$. Em outras palavras:

$$T_A(-2y, y) = 1(-2y, y).$$

Geometricamente, os autovetores de T associados ao autovalor 1 são todos os vetores não nulos que estão sobre a reta $x + 2y = 0$. Logo, todos os vetores de $\Re^2$ que estão sobre a reta $x + 2y = 0$ são "transformados" por T em vetores de mesma direção.

ii. Se $y = 0$, deve ocorrer $x \neq 0$ (pois se $x = 0$, teríamos $(x, y) = (0,0)$) e, da primeira equação, temos $2x + 0 = \lambda x \Leftrightarrow 2x = \lambda x \Leftrightarrow \lambda = \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$. Portanto, qualquer vetor da forma $(x, 0); x \neq 0$ é autovetor de T associado ao autovalor $\lambda = 2$. Em outras palavras.

$$T_A(x, 0) = 2(x, 0).$$

Geometricamente, os autovetores de T associados ao autovalor 2 são todos os vetores não nulos que estão sobre a reta $y = 0$, isto é, são os vetores não nulos sobre o eixo X. Logo, todos os vetores de $\Re^2$ que estão sobre o eixo X são "transformados" por T em vetores de mesma direção.

16.1.2 Teorema: Dada $T: V \to V$ transformação linear e $v \in V$ um autovetor de T associado ao autovalor λ de T. Qualquer vetor $w = kv$ ainda é autovetor de T associado a λ.

Prova: Para mostrar que w é autovetor de T associado a λ, devemos mostrar que $T(w) = \lambda w$. De fato, como $w = kv$, temos:

$$T(w) = T(kv) \ldots (I)$$

Como T é linear, $T(kv) = kT(v)$, logo (I) fica:

$$T(w) = T(kv) = kT(v) \ldots (II)$$

Como, por hipótese, v é autovetor de T associado a λ, temos $T(v) = \lambda v$ e substituindo em (II):

$$T(w) = kT(v) = k(\lambda v) = \lambda(kv) = \lambda w \Rightarrow \boxed{T(w) = \lambda w}.$$

Logo, $w = kv$ é autovetor de T associado a λ.

16.1.3 Definição: Sendo $T: V \to V$ transformação linear e $v \in V$ autovetor de T associado ao autovalor λ. O conjunto formado pelos autovetores de T associados ao autovalor λ e o vetor nulo de V é um subespaço vetorial de V (mostre). Denotamos este subespaço por:

$$V_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v, com\ \lambda \in \Re\}.$$

Chamamos o subespaço V_λ de *subespaço associado ao autovalor* λ.

Observação: Para mostrar que V_λ é subespaço de V, basta mostrar que:
i. Para quaisquer $u, v \in V_\lambda$, tem-se $u + v \in V_\lambda$;
ii. Para qualquer $\alpha \in \Re$ e $u \in V_\lambda$, tem-se $\alpha u \in V_\lambda$.

16.2 AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA MATRIZ

O método que estávamos usando para determinar autovalores e autovetores era um tanto quanto “incerto”, pois dependendo da transformação, fica muito difícil identificar quais são os valores de λ e consequentemente os autovetores. Porém, nosso trabalho pode ser mais efetivo utilizando matrizes associadas as transformações.

Dada uma matriz A_n (quadrada, de ordem n), estaremos nos referindo a *autovalor e autovetor* de A como sendo o autovalor e autovetor da transformação linear $T_A: \Re^n \to \Re^n$ associada à matriz A em relação à base canônica, isto é, $T_A(v) = Av$.

Desta forma, para encontrar autovalores $\lambda \in \Re$ e autovetores $v \in \Re^2$ de A, devemos determinar λ e $v \neq 0$ que satisfaçam a equação:

$$\boxed{Av = \lambda v}.$$

Caso tenhamos $T: V \to V$ e fixada uma base β, veremos que para determinar os autovalores e autovetores de T basta determinar os autovalores e autovetores da matriz $[T]_\beta^\beta$.

16.2.1 Polinômio Característico: Consideramos a equação matricial $Av = \lambda v$ e sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Já vimos que, para determinar os autovalores e autovetores de A, devemos resolver a equação:

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v \Leftrightarrow Av - \lambda I v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como este sistema é homogêneo, se o determinante da matriz dos coeficientes $\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}-\lambda \end{bmatrix}$ for diferente de zero, a única solução para o sistema será a solução trivial $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ou seja, a solução é o vetor nulo e como estamos procurando autovetores, precisamos determinar vetores não nulos. Assim, deve ocorrer que o determinante da matriz dos coeficientes deve ser zero (pois, o determinante igual a zero, nos diz que uma linha é combinação linear das demais, isto é, o sistema terá mais incógnitas do que equações, o que implica que este possui infinitas soluções):

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$$

Observe que $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio de grau n em λ, isto é,

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Chamamos p de *polinômio característico* da matriz A.

Logo, para determinar os autovalores da matriz A, basta determinar as raízes do polinômio característico, pois, determinar $\lambda \in \Re$ tal que $Av = \lambda v$ é equivalente a determinar $\lambda \in \Re$ tal que $p(\lambda) = 0$.

Exemplos:

01. Sendo $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, queremos determinar $v \in \Re^3$ e $\lambda \in \Re$ tais que $Av = \lambda v$. De acordo com o que foi visto anteriormente, devemos calcular $\lambda \in \Re$ tal que:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Sendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, temos:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Logo $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - (2)\big(-(2-\lambda)\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) + 2(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)[(4-\lambda)(1-\lambda) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-\lambda=0 \ ou \ (4-\lambda)(1-\lambda)+2=0.$$

Das informações acima, já temos que um autovalor é $\boxed{\lambda_1=2}$, mas ainda falta analisar $(4-\lambda)(1-\lambda)+2=0$. Então:

$$(4-\lambda)(1-\lambda)+2=0 \Leftrightarrow 4-4\lambda-\lambda+\lambda^2+2=0 \Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2=\dfrac{5+\sqrt{1}}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \Rightarrow \lambda_2=3 \\ \lambda_3=\dfrac{5-\sqrt{1}}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \Rightarrow \lambda_3=2 \end{cases}.$$

Logo, as raízes de p são, $\lambda_1=\lambda_3=2$ e $\lambda_2=3$. Assim, os autovalores de A são $\lambda=2$ e $\lambda=3$. Conhecendo os autovalores, conseguimos determinar os autovetores correspondentes. Resolvendo a equação $Av=\lambda v$ para:

i. $\lambda=2 \Rightarrow Av=2v$, tomando $v=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ temos:

$$Av=2v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=2x \\ -x+y=2y \\ y+2z=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=0 \\ -x-y=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Substituindo $y=0$ em $-x-y=0$ tem-se $x=0$. Logo os autovetores associados ao autovalor 2 são os vetores $v=(x,y,z)\in\Re^3$ tais que $x=y=0$ e $z\neq 0$, isto é, $v=(0,0,z); z\neq 0$. Logo:

$$V_{\lambda=2}=\{(0,0,z); z\in\Re\}=\{z(0,0,1); z\in\Re\}=[(0,0,1)] \Rightarrow V_{\lambda=2}=[(0,0,1)].$$

O subespaço $V_{\lambda=2}$ associado ao autovalor 2 é o subespaço gerado por $(0,0,1)$.

ii. $\lambda=3 \Rightarrow Av=3v$, tomando $v=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ temos:

$$Av = 3v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 3x \\ -x + y = 3y \\ y + 2z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0. \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Da primeira e da segunda equação, nota-se que $x = -2y$ e da terceira, $z = y$. Logo, os autovetores de A associados ao autovalor 3 são os vetores $v = (x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$ tais que $x = -2y$, $z = y$ e $y \neq 0$, isto é, $v = (-2y, y, y); y \neq 0$. Logo:

$$V_{\lambda=3} = \{(-2y, y, y); y \in \mathfrak{R}\} = \{y(-2,1,1); y \in \mathfrak{R}\} = [(-2,1,1)]$$

$$\Rightarrow V_{\lambda=3} = [(-2,1,1)].$$

O subespaço $V_{\lambda=3}$ asociado ao autovalor 3 é o subespaço gerado por $(-2,1,1)$.

02. Seja $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, vamos determinar os autovalores de A.

Primeiramente, vamos determinar o polinômio característico que é $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Para isto:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 = -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Sabemos que os autovalores de A serão as raízes de p, assim:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}.$$

As raízes de p são $\lambda = 1$ e $\lambda = -2$. Então os autovalores de A serão 1 e -2. Agora, procuramos os autovetores associados a estes autovalores, para isto, devemos resolver a equação $Av = \lambda v$ para:

i. $\lambda = 1 \Rightarrow Av = 1v$ e tomando $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$Av = 1v = v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}.$$

Das duas equações, temos $x = y$ e, portanto, os vetores associados ao autovalor 1 são os vetores $v = (x, y) \in \mathfrak{R}^2$ tais que $x = y$ e $x \neq 0$, ou seja, temos que $v = (x, x); x \neq 0$. Logo:

$$V_{\lambda=1} = \{(x, x); x \in \mathfrak{R}\} = \{x(1,1); x \in \mathfrak{R}\} = [(1,1)]$$

$$\Rightarrow V_{\lambda=1} = [(1,1)].$$

ii. $\lambda = -2 \Rightarrow Av = -2v$ e tomando $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:

$$Av = -2v \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix}$$

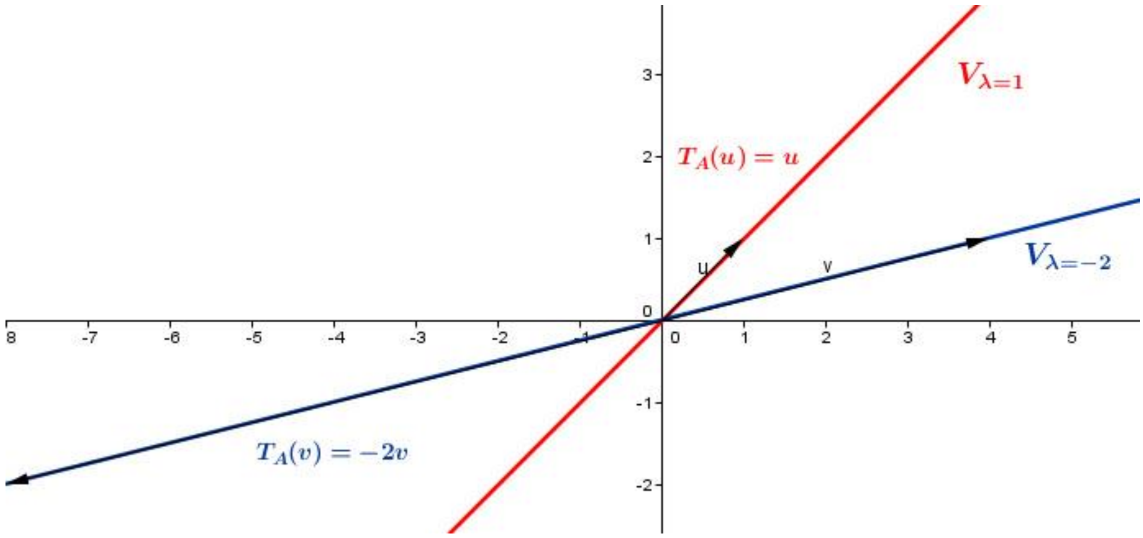
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -2x \\ -x + 2y = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Em ambas as equações $x = 4y$ e, portanto, os autovetores associados ao autovalor -2 são os vetores $v = (x, y) \in \mathfrak{R}; x = 4y \; e \; y \neq 0$, ou seja, $v = (4y, y); y \neq 0$. Logo:

$$V_{\lambda=-2} = \{(4y, y); y \in \Re\} = \{y(4,1); y \in \Re\} = [(4,1)]$$

$$\Rightarrow V_{\lambda=-2} = [(4,1)].$$

Observe geometricamente:



03. Seja $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, vamos determinar os autovalores de A.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \sqrt{3} - \lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sqrt{3} - \lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\sqrt{3} - \lambda\right)^2 + 1 = 3 - 2\sqrt{3}\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4.$$

Note que o polinômio característico não admite raiz real, ou seja, não existe $\lambda \in \Re$ tal que $p(\lambda) = 0$, logo a matriz T não admite autovalores.
Consequentemente, a transformação linear associada à matriz A não admite autovalores nem autovetores, logo qualquer vetor $v \neq 0$ é tal que $T(v) \neq \lambda v$. Geometricamente, T não preserva a direção de nenhum vetor.

Observação: Devido ao fato de estarmos considerando somente espaços vetoriais reais, concluímos que a transformação associada a matriz acima não possui autovalores nem autovetores. Porém, se estivéssemos trabalhando com espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{C}$, qualquer polinômio admite raízes complexas, logo os autovalores seriam complexos, e assim toda transformação de um espaço vetorial complexo admite autovalores e autovetores.

Em seguida, vamos determinar o polinômio característico de uma transformação linear, isto é, basta associar a tal transformação linear sua representação matricial.

16.2.2 Polinômio Característico de uma Transformação: Seja $T: V \to V$ uma transformação linear e β uma base de V. Já foi visto anteriormente que uma transformação linear pode ser escrita por $[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\beta [v]_\beta$, logo:

$$[T(v)]_\beta = \lambda[v]_\beta \Leftrightarrow [T]_\beta^\beta [v]_\beta = \lambda[v]_\beta \Leftrightarrow [T]_\beta^\beta [v]_\beta - \lambda I [v]_\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right)[v]_\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right) = 0}.$$

A última igualdade vem do fato de que $p(\lambda) = 0$ onde p é o polinômio característico da matriz $[T]_\beta^\beta$ e este é chamado de *polinômio característico* da transformação linear T e as raízes deste polinômio serão os autovalores de T.

Para determinar um autovetor de T correspondente ao autovalor λ basta resolver a equação $[T(v)]_\beta = \lambda[v]_\beta$ ou, equivalentemente, $[T]_\beta^\beta [v]_\beta = \lambda[v]_\beta$.

Veremos que o polinômio característico de uma transformação é o mesmo, independente da base considerada. De fato, seja α outra base, sabemos que se $[T]_\beta^\beta$ é a matriz de T em relação à base β e se $[T]_\alpha^\alpha$ é a matriz de T em relação à base α estas matrizes se relacionam da seguinte maneira:

$$[T]_\alpha^\alpha = [I]_\alpha^\beta [T]_\beta^\beta \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1}.$$

Assim:

$$\det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I) = \det\left([I]_\alpha^\beta [T]_\beta^\beta \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} - \lambda [I]_\alpha^\beta I \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1}\right)$$

$$= \det\left([I]_\alpha^\beta \left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right)\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1}\right) = \det[I]_\alpha^\beta \det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right)\det\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1}$$

$$= \det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right)\left[\det[I]_\alpha^\beta \det\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1}\right] = \det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right)\cdot 1 = \det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right)$$

$$\Rightarrow \det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I) = \det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right) = p(\lambda).$$

Ou seja, o polinômio característico é o mesmo para ambas as matrizes.

Exemplos:

01. Seja $T: \Re^2 \to \Re^2$ definida por $T(x, y) = (-3x + 4y, -x + 2y)$, vamos procurar os autovalores e autovetores de T. Note que a matriz de T em relação à base canônica é:

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para determinar os autovalores de T, basta determinar os autovalores da matriz $[T]_\alpha^\alpha$, isto é, devemos encontrar as raízes do polinômio característico $p(\lambda) = \det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I)$. Veja que:

$$p(\lambda) = \det([T]_\alpha^\alpha - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(2-\lambda) + 4 = -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Agora, os autovalores serão os valores de λ tais que:

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \; e \; \lambda_2 = -2.$$

Agora, para os autovalores acima, devemos resolver a equação $T(v) = \lambda v \Leftrightarrow [T(v)]_\alpha = \lambda[v]_\alpha \Leftrightarrow [T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha = \lambda[v]_\alpha$ e como α é base canônica, tomando $v = (x, y) \in \Re^2$ temos $[v]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, assim $[T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha = \lambda[v]_\alpha \dots (*)$. Agora, resolvemos (*) para:

i. $\lambda = 1$:

$$[T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha = 1[v]_\alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}.$$

Das duas equações temos que $x = y$, logo os autovetores de T associados ao autovalor 1 são os vetores $(x, y) \in \Re^2; y = x \; e \; x \neq 0$, isto é, os autovalores de T associados a 1 são os vetores da forma $(x, x); x \neq 0$. Logo:

$$V_{\lambda=1} = \{(x, x) \in \Re^2; x \in \Re\} = \{x(1,1); x \in \Re\} = [(1,1)].$$

ii. $\lambda = -2$:

$$[T]_\alpha^\alpha [v]_\alpha = -2[v]_\alpha \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x \\ -2y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -2x \\ -x + 2y = -2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Das duas equações obtemos $x = 4y$, logo os autovalores de T associados ao autovalor -2 são os vetores $(x, y) \in \Re^2$ tais que $x = 4y$ e $y \neq 0$, isto é, são os vetores da forma $(4y, y); y \neq 0$. Logo:

$$V_{\lambda=-2} = \{(4y, y); y \in \Re\} = \{y(4,1); y \in \Re\} = [(4,1)].$$

16.2.3 Multiplicidade de um Autovalor: A multiplicidade de um autovalor de uma matriz (ou transformação) coincide com a multiplicidade da raiz correspondente do polinômio característico desta matriz (ou transformação).

CAPÍTULO 17: PRODUTO INTERNO

17.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estudaremos conceitos de comprimento e ângulo entre vetores.

Anteriormente, definimos na Geometria Analítica o produto escalar entre vetores. Com o produto escalar ainda podíamos determinar medida angular e calcular a norma de vetores do plano e do espaço. A partir daqui, vamos generalizar estas ideias para vetores de qualquer "natureza".

17.1.1 Definição: Seja V um espaço vetorial real. Definimos um *produto interno* sobre o espaço vetorial V como sendo uma função $\langle , \rangle: V \times V \to \Re$ que a cada par de vetores $v_1, v_2 \in V$ associa um número real denotado por $\langle v_1, v_2 \rangle$, isto é, $(v_1, v_2) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle$, satisfazendo:

P1. $\langle v, v \rangle \geq 0, \forall v \in V$;

P2. $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

P3. $\langle \lambda v_1, v_2 \rangle = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle, \forall v_1, v_2 \in V\ e\ \forall \lambda \in \Re$;

P4. $\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle, \forall v_1, v_2, v_3 \in V$;

P5. $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle, \forall v_1, v_2 \in V$.

17.1.1.2 Interpretando cada propriedade: Caso você tenha dificuldade para interpretar cada propriedade, seguem as explicações:

P1 nos diz que o produto interno de qualquer vetor por si mesmo sempre será um número real positivo.

P2 nos diz que se o produto interno de um vetor nulo por si mesmo será igual à zero.

P3 nos diz que o produto interno de um vetor λv_1 obtido de uma multiplicação por escalar por outro vetor v_2 é igual ao produto (usual em $\Re$) de λ pelo número $\langle v_1, v_2 \rangle$.

P4 nos diz que o produto interno entre um vetor soma $v_1 + v_2$ e um vetor v_3 é igual à soma do produto interno entre v_1 e v_3 e do produto interno entre v_2 e v_3.

P5 nos diz que podemos comutar o produto interno, ou seja, a ordem do produto interno não importa.

Exemplos:

01. Considere o espaço vetorial $V = \Re^3$. Definimos um produto interno em $\Re^3$ como sendo o produto escalar usual, visto em geometria analítica, isto é, sendo $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \Re^3$, temos:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Passamos a chamar este produto escalar de *produto interno usual* do $\Re^3$. Vejamos que, de fato, este é um produto interno. Para isto, devemos provar que as 5 propriedades da definição são satisfeitas. Então:

P1. Seja $v = (x, y, z) \in \Re^3$ não nulo. Temos:

$$\langle v, v \rangle = \langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle = x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\langle v, v \rangle \geq 0}.$$

P2. Seja $v = (0,0,0)$ o vetor nulo de $\Re^3$. Temos:

$$\langle v, v \rangle = \langle (0,0,0), (0,0,0) \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\langle v, v \rangle = 0}.$$

P3. Sejam $\lambda \in \Re$ e $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \Re^3$. Temos:

$$\langle \lambda v_1, v_2 \rangle = \langle \lambda (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = \langle (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle$$

$$= \lambda x_1 \cdot x_2 + \lambda y_1 \cdot y_2 + \lambda z_1 \cdot z_2 = \lambda (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \lambda v_1, v_2 \rangle = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle}.$$

P4. Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2), v_3 = (x_3, y_3, z_3) \in \Re^3$. Temos:

$$\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle$$

$$= \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle$$

$$= (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 + (z_1 + z_2)z_3$$

$$= x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3 + z_1z_3 + z_2z_3$$

$$= (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) + (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3) = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle v_1 + v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle}.$$

P5. Sejam $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_3) \in \Re^3$. Temos:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1$$

$$= \langle v_2, v_1 \rangle \Rightarrow \boxed{\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle}.$$

02. De modo análogo define-se o produto interno usual no $\Re^n$, isto é, sendo $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n), v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \Re^n$ definimos:

$$\langle v_1, v_2 \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Usamos o produto interno para definir os conceitos de perpendicularidade ou ortogonalidade entre vetores.

17.1.2 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Dizemos que os vetores $v, w \in V$ são *ortogonais* em relação ao produto interno $\langle , \rangle$ se $\langle v, w \rangle = 0$. Denotamos a ortogonalidade entre v e w por $v \perp w$.

17.1.2.1 Propriedades: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, as seguintes propriedades são válidas para a ortogonalidade:

i. $0 \perp v, \forall v \in V$;

ii. $v \perp w \Rightarrow w \perp v, \forall v, w \in V$;

iii. Se $v \perp w, \forall w \in V$, então $v = 0$;

iv. Se $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$, então $v_1 + v_2 \perp w, \forall v_1, v_2, w \in V$;

v. Se $v \perp w$, então $\lambda v \perp w, \forall v, w \in V\ e\ \lambda \in \Re$.

Prova: Para demonstrar cada propriedade, basta usar a definição de ortogonalidade e as propriedades de definição.

i. Note que $\langle 0, v\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle 0 \cdot v, v\rangle \stackrel{\text{def}}{=} 0\langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle 0, v\rangle = 0 \Leftrightarrow 0 \perp v, \forall v \in V$.

ii. $v \perp w \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0 \xLeftrightarrow{comutativa} \langle w, v\rangle = 0 \Leftrightarrow w \perp v$.

iii. Sabe-se que $v \perp w, \forall w \in V$, mas por i acima, o único vetor que é ortogonal a todo vetor $w \in V$ é $0 \in V$, logo $v = 0$.

iv. Note que $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$, mas por hipótese $v_1 \perp w$ e $v_2 \perp w$, logo $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \langle v_1 + v_2, w\rangle = 0$, o que equivale a $v_1 + v_2 \perp w$.

v. Note que $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$, mas por hipótese $v \perp w$, logo $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \langle \lambda v, w\rangle = 0$, o que equivale a $\lambda v \perp w$.

17.1.3 Teorema: Considerando V um espaço vetorial, se $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, isto é, $\langle v_i, v_j\rangle = 0, \forall i \neq j$, então $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI.

Prova: Para mostrar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LI, devemos mostrar que a equação $k_1 v_1 + \cdots k_n v_n = 0$ implica em $k_1 = \cdots = k_n = 0$. De fato, tomemos $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{i-1} v_{i-1} + k_i v_i + k_{i+1} v_{i+1} + \cdots + k_{n-1} v_{n-1} + k_n v_n = 0$ e façamos o produto interno dos dois membros da igualdade (que são vetores iguais) por algum dos v_i de $\{v_1, \dots, v_n\}$:

$$\langle k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{i-1} v_{i-1} + k_i v_i + k_{i+1} v_{i+1} + \cdots + k_{n-1} v_{n-1} + k_n v_n, v_i\rangle = \langle 0, v_i\rangle.$$

Usando as propriedades da definição de produto interno (observe que $\langle 0, v_i\rangle = 0$, pois o vetor nulo é ortogonal a qualquer vetor):

$$\langle k_1 v_1, v_i\rangle + \cdots + \langle k_{i-1} v_{i-1}, v_i\rangle + \langle k_i v_i, v_i\rangle + \langle k_{i+1} v_{i+1}, v_i\rangle + \cdots + \langle k_n v_n, v_i\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1\langle v_1, v_i\rangle + \cdots + k_{i-1}\langle v_{i-1}, v_i\rangle + k_i\langle v_i, v_i\rangle + k_{i+1}\langle v_{i+1}, v_i\rangle + \cdots + k_n\langle v_n, v_i\rangle = 0$$

Agora, note que em todos os produtos $\langle v_j, v_i\rangle; i \neq j$ obtém-se $\langle v_j, v_i\rangle = 0$, uma vez que os vetores de $\{v_1, \dots, v_n\}$ são dois a dois ortogonais, logo reescrevemos a igualdade acima:

$$k_1 \cdot 0 + \cdots + k_{i-1} \cdot 0 + k_i\langle v_i, v_i\rangle + k_{i+1} \cdot 0 + \cdots + k_n \cdot 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow k_i\langle v_i, v_i\rangle = 0.$$

Como $v_i \neq 0$, temos que $\langle v_i, v_i\rangle > 0$, logo a única possibilidade que torna a igualdade acima válida é $k_i = 0$.

Perceba que este processo pode ser repetido para $i = 1,2, \dots, n$ e assim cada coeficiente da equação $k_1 v_1 + \cdots + k_n v_n = 0$ será nulo, ou seja, o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, é LI.

Lembre-se que, na geometria analítica, tudo ficava muito mais simples quando trabalhávamos com a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e isto vem do fato de que os vetores desta base são dois a dois ortogonais.

A seguir veremos que, para espaços vetoriais quaisquer, é possível trabalhar com bases tão simples quanto a base canônica do $\Re^3$

17.1.4 Definição: Seja V um espaço vetorial e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ uma base de V. Diremos que β é uma *base ortogonal* se $\langle v_i, v_j\rangle = 0, i \neq j$, isto é, se seus vetores são dois a dois ortogonais.

17.2 COEFICIENTES DE FOURIER

Sendo β base ortogonal de um espaço vetorial V, veremos uma técnica para encontrar coordenadas de vetores de V em relação à β.

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortogonal de V e $w \in V$ um vetor qualquer. Vamos calcular as coordenadas de w em relação à base β, isto é, devemos determinar $x_1, \dots, x_n \in \Re$ tais que $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$. Vejamos como determinar a $i - ésima$ coordenada de w em relação à β, isto é, vamos determinar x_i. Para isto, fazemos o produto interno dos dois membros de $w = x_1 v_1 + \cdots + x_i v_i + \cdots + x_n v_n$ por v_i:

$$\langle w, v_i \rangle = \langle x_1 v_1 + \cdots + x_i v_i + \cdots + x_n v_n, v_i \rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle w, v_i \rangle = x_1 \langle v_1, v_i \rangle + \cdots + x_i \langle v_i, v_i \rangle + \cdots + x_n \langle v_n, v_i \rangle = x_i \langle v_i, v_i \rangle$$

$$\Rightarrow \langle w, v_i \rangle = x_i \langle v_i, v_i \rangle \Leftrightarrow \boxed{x_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}}.$$

Assim, obtemos a $i - ésima$ coordenada x_i de w, em relação à base ortogonal β, tomando o quociente entre o produto interno de w pelo $i - ésimo$ vetor v_i da base e o produto interno do $i - ésimo$ vetor v_i da base por si mesmo. Chamamos a coordenada $x_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}$ de *coeficiente de Fourier* de w em relação v_i.

Exemplo:

Seja $V = \Re^2$ com seu produto interno usual e $\beta = \{(1,1), (-1,1)\}$ base de V. Note que β é uma base ortogonal, pois:

$$\langle (1,1), (-1,1) \rangle = -1 + 1 = 0 \Rightarrow (1,1) \perp (-1,1).$$

Vamos determinar as coordenadas do vetor $(2,3) \in \Re^2$ em relação à β, isto é, vamos determinar $x_1, x_2 \in \Re$ tais que $(2,3) = x_1(1,1) + x_2(-1,1)$. Para isto, façamos o produto interno dos vetores de β em ambos os membros de $(2,3) = x_1(1,1) + x_2(-1,1)$:

Por $(1,1)$, temos:

$$\langle(2,3),(1,1)\rangle = \langle x_1(1,1) + x_2(-1,1),(1,1)\rangle = x_1\langle(1,1),(1,1)\rangle + x_2\langle(-1,1),(1,1)\rangle$$

$$= x_1\langle(1,1),(1,1)\rangle + x_2 \cdot 0 = x_1\langle(1,1),(1,1)\rangle \Rightarrow \langle(2,3),(1,1)\rangle = x_1\langle(1,1),(1,1)\rangle$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{\langle(2,3),(1,1)\rangle}{\langle(1,1),(1,1)\rangle} = \frac{2+3}{1+1} = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{5}{2}}.$$

Por $(-1,1)$, temos:

$$\langle(2,3),(-1,1)\rangle = \langle x_1(1,1) + x_2(-1,1),(-1,1)\rangle$$

$$= x_1\langle(1,1),(-1,1)\rangle + x_2\langle(-1,1),(-1,1)\rangle = x_1 \cdot 0 + x_2\langle(-1,1),(-1,1)\rangle$$

$$= x_2\langle(-1,1),(-1,1)\rangle \Rightarrow \langle(2,3),(-1,1)\rangle = x_2\langle(-1,1),(-1,1)\rangle$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{\langle(2,3),(-1,1)\rangle}{\langle(-1,1),(-1,1)\rangle} = \frac{-2+3}{1+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{2}}.$$

Assim, escrevemos $[(2,3)]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Perceba que o coeficiente de Fourier de $(2,3)$ em relação à $(1,1)$ é $\frac{5}{2}$ e em relação à $(-1,1)$ é $\frac{1}{2}$.

17.3 NORMA

Como já foi visto, em alguns espaços vetoriais, não conseguimos descrever geometricamente seus vetores. Assim, como podemos falar de norma (comprimento) de vetores sem uma representação geométrica? Veremos a seguir que, a partir de um produto interno podemos definir norma de vetores, independente de sua natureza.

17.3.1 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Definimos a *norma* (ou *comprimento*) de um vetor $v \in V$ em relação ao produto interno $\langle , \rangle$ como sendo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Quando $\langle v, v \rangle = 1$, dizemos que v é um *vetor unitário*.

A partir de qualquer vetor $v \in V$, não nulo, podemos determinar o vetor unitário $u = \frac{1}{\|v\|} v \in V$, chamado de *versor* de v. Note que, de fato, o vetor u é unitário, pois:

$$\|u\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \left| \frac{1}{\|v\|} \right| \|v\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1.$$

<u>Exemplos</u>:

01. Seja $V = \Re^3$ e $\langle , \rangle$ o produto interno usual de $\Re^3$, então se considerarmos $v = (x, y, z) \in \Re^3$, a norma deste vetor é dada por:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \boxed{\|v\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Tomando $w = (1,2,-1) \in \Re^3$, vamos determinar a norma deste vetor:

$$\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle} = \sqrt{\langle (1,2,-1), (1,2,-1) \rangle} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1}$$

$$= \sqrt{6} \Rightarrow \|w\| = \sqrt{6}.$$

Note que, como $\|w\| = \sqrt{6} \neq 1$, w não é um vetor unitário. Porém, foi visto que podemos determinar, a partir de w, um vetor unitário, veja:

$$u = \frac{w}{\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right) \Rightarrow u = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Veja que u é unitário, pois:

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{1+4+1}{6}} = \sqrt{\frac{6}{6}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\Rightarrow \|u\| = 1.$$

17.3.1.1 Propriedades: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$, as seguintes propriedades são válidas:

i. $\|v\| \geq 0, \forall v \in V$;

ii. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;

iii. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|, \forall \lambda \in \Re \; e \; \forall v \in V$;

iv. $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|, \forall v, w \in V$ (Desigualdade de Schwarz);

v. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Desigualdade Triangular).

Prova: De fato:

i e ii. Por definição, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ e já foi visto que $\langle v, v\rangle > 0; \forall v \in V$ e caso $v = 0$ tem-se $\langle v, v\rangle = 0$. Assim, provamos i e ii.

iii. Por definição, $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} \ldots (*)$ Mas já foi visto em propriedades anteriores que $\langle \lambda_1 u, \lambda_2 w\rangle = \lambda_1\langle u, \lambda_2 w\rangle = \lambda_1\lambda_2\langle u, w\rangle$ e usando esta propriedade em (*):

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle v, v\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle v, v\rangle} = |\lambda|\|v\| \Rightarrow \boxed{\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|}.$$

iv. Note que, se $v = 0$ ou $w = 0$ (pode ser também $v = w = 0$) temos $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| = 0$ e vale a igualdade $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\|$.

Suponha agora $u \neq 0$ e $w \neq 0$, para qualquer $t \in \Re$ sabemos que $\langle tv + w, tv + w\rangle \geq 0$, isto é:

$$\langle tv + w, tv + w\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle tv + w, tv\rangle + \langle tv + w, w\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle tv, tv\rangle + \langle w, tv\rangle + \langle tv, w\rangle + \langle w, w\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2\langle v, v\rangle + t\langle v, w\rangle + t\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle v,v\rangle t^2 + 2\langle v,w\rangle t + \langle w,w\rangle \geq 0.$$

Temos então um trinômio de grau 2 que deve ser positivo, qualquer que seja $t \in \Re$. Note que o coeficiente $\langle v,v\rangle$ de t^2 é sempre positivo, qualquer que seja $v \in V$, isto é, $\langle v,v\rangle > 0$. Se pensarmos na função positiva $f(t) = \langle v,v\rangle t^2 + 2\langle v,w\rangle t + \langle w,w\rangle$, com $\langle v,v\rangle > 0$, $\langle v,v\rangle > 0$ indica que o gráfico desta função terá concavidade para cima e como esta deve ser positiva, seu gráfico deve estar localizado acima do eixo X, ou seja, o discriminante Δ deve ser negativo ou nulo (não existência de raízes reais ou duas raízes coincidentes). Logo:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2\langle v,w\rangle)^2 - 4\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle \leq 0 \Leftrightarrow 4\langle v,w\rangle^2 - 4\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\langle v,w\rangle^2 \leq 4\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle \Leftrightarrow \langle v,w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle v,w\rangle^2 \leq (\|v\|\|w\|)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\langle v,w\rangle^2} \leq \sqrt{(\|v\|\|w\|)^2} \Leftrightarrow \boxed{|\langle v,w\rangle| \leq \|v\|\|w\|}.$$

v. Queremos mostrar que $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Vamos separar em casos:

a) Se $u = 0$, temos $\|u\| = 0$, logo:

$$\|u+v\| = \|0+v\| = \|v\| = 0 + \|v\| = \|u\| + \|v\|.$$

A igualdade é válida e, além disso, se tivéssemos $v = 0$ e também $u = v = 0$, ainda seria válida a igualdade.

b) Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, façamos:

$$\|u+v\|^2 = \left(\sqrt{\langle u+v,u+v\rangle}\right)^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u+v,u\rangle + \langle u+v,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + \langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 \ldots (*)$$

Lembrando que $x \leq |x|, \forall x \in \Re$ (um número real sempre é menor ou igual ao seu valor absoluto), assim $\langle u, v\rangle \leq |\langle u, v\rangle|$. Mas, pela desigualdade de Schwarz ainda sabe-se que $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, portanto:

$$\langle u, v\rangle \leq |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \Rightarrow \langle u, v\rangle \leq \|u\|\|v\| \Leftrightarrow 2\langle u, v\rangle \leq 2\|u\|\|v\| \ldots (**)$$

Voltando em (*) e usando (**):

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\|u+v\|^2} \leq \sqrt{(\|u\| + \|v\|)^2}$$

$$\Leftrightarrow |\|u+v\|| \leq |\|u\| + \|v\|| \Leftrightarrow \boxed{\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|}.$$

17.4 ÂNGULO ENTRE VETORES

Usando os conceitos vistos até aqui, vamos determinar o ângulo entre dois vetores quaisquer, independendo de sua natureza.

Para definir *ângulo entre dois vetores*, vamos considerar um espaço vetorial V munido de um produto interno. Considere $v, w \in V$ vetores não nulos, então a desigualdade de Schwarz pode ser manipulada da seguinte maneira:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\| \Leftrightarrow \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\|w\|} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\|w\|}\right| \leq 1 \ldots (I)$$

Agora lembremos que $\forall \phi \in [0, \pi]$ tem-se $|\cos\phi| \leq 1$, ou seja, considerando desigualdade (I), existe um ângulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$. Desta forma:

$$\theta = \arccos\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

Assim, definimos $\theta = ang(v, w)$.

Note que, da maneira como o ângulo foi definido, podemos falar naturalmente das noções de ortogonalidade, pois se $\langle v, w\rangle = 0$ temos $\cos\theta = 0$, isto é, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

<u>Exemplo</u>:

Considere $V = M_2(\Re)$ com o produto interno:

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \right\rangle = ap + 2bq + 3cr + ds.$$

Vamos calcular o ângulo entre os vetores $u = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\Re)$. Por definição, temos:

$$ang(u, v) = \arccos\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \dots (*)$$

Calculemos separadamente cada valor de (*) e depois voltamos nesta equação. Calculando $\langle u, v\rangle$:

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 2 + 2(-1 \cdot 1) + 3\big(0 \cdot (-1)\big) + 1 \cdot 1 = 2 - 2 + 1$$

$$= 1 \Rightarrow \boxed{\langle u, v\rangle = 1} \dots (I)$$

Calculando $\|u\|$:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle} = \sqrt{1^2 + 2(-1)^2 + 3(0)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{1+2+1} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|u\| = 2} \ldots (II)$$

Calculando $\|v\|$:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + 2(1)^2 + 3(-1)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4+2+3+1} = \sqrt{10} \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|v\| = \sqrt{10}} \ldots (III)$$

Substituindo (I), (II) e (III) em (*):

$$ang(u, v) = \arccos \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|} = \arccos \frac{1}{2\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{ang(u, v) = \arccos \frac{1}{2\sqrt{10}}}.$$

17.4.1 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ uma base de V. Diz-se que β é uma base *ortonormal* se β for ortogonal e cada um de seus vetores for unitário, isto é, β é ortonormal se:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, se\ i \neq j \\ 1, se\ i = j \end{cases}.$$

Observe que, se $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de V temos que $w \in V$ pode ser escrito como $w = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, se β for ortonormal, cada coordenada x_i é dada por:

$$x_i = \frac{\langle w, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle w, v_i \rangle}{1} = \langle w, v_i \rangle \Rightarrow \boxed{x_i = \langle w, v_i \rangle}.$$

Exemplo:

Seja $V = \Re^2$ e $\beta = \{e_1, e_2\}$ a base canônica, isto é, $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. Note que β é uma base ortonormal, logo se $v \in \Re^2$ escrevemos:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 \ldots (*)$$

Mas $x_1 = \langle v, e_1 \rangle$ e $x_2 = \langle v, e_2 \rangle$ e em (*) temos:

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 \Leftrightarrow [v]_\beta = \begin{bmatrix} \langle v, e_1 \rangle \\ \langle v, e_2 \rangle \end{bmatrix}.$$

17.5 PROCESSO DE ORTONORMALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Considerando uma base qualquer de um espaço vetorial, veremos que existe um processo para encontrar uma base ortonormal a partir desta base dada.

Antes de iniciarmos o processo de ortogonalização de Gram- Schmidt, veremos alguns conceitos e resultados necessários para sua determinação.

15.5.1 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e $S = \{g_1, \ldots, g_r\}$ um subconjunto de V. Dizemos que S é um *conjunto ortonormal* se seus vetores são dois a dois ortogonais ($g_i \perp g_j, i \neq j \Leftrightarrow \langle g_i, g_j \rangle = 0, i \neq j$) e todos unitários ($\|g_i\| = 1, i = 1, \ldots, r$).

Em outras palavras:

$$S \text{ é } ortonormal \Leftrightarrow \langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} 1, se\ i = j \\ 0, se\ i \neq j \end{cases}.$$

Note que, no caso $i = j$ temos $1 = \langle g_i, g_i \rangle = \|g_i\|^2 \Rightarrow \|g_i\| = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \|g_i\| = 1$ e esta é a condição de que qualquer vetor do conjunto é unitário.

Exemplo:

Considerando o espaço vetorial $\Re^3$ e seu produto interno usual, vamos mostrar que o conjunto $S = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$ é ortonormal. Chamemos os vetores de S de $g_1 = (1,0,0)$ e $g_2 = (0,0,1)$, então:

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \langle (1,0,0), (0,0,1) \rangle = 0 \Rightarrow \langle g_1, g_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow g_1 \perp g_2.$$

$$\|g_1\| = \sqrt{\langle g_1, g_1 \rangle} = \sqrt{\langle (1,0,0), (1,0,0) \rangle} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \|g_1\| = 1 \Rightarrow g_1 \; unitário.$$

$$\|g_2\| = \sqrt{\langle g_2, g_2 \rangle} = \sqrt{\langle (0,0,1), (0,0,1) \rangle} = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow \|g_2\| = 1 \Rightarrow g_2 \; unitário.$$

Como g_1 e g_2 são unitários ortogonais entre si, por definição o conjunto S é ortonormal. Note que:

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} i = j \Rightarrow \langle g_i, g_i \rangle = \|g_i\|^2 = 1 \\ i \neq j \Rightarrow \langle g_i, g_j \rangle = 0 \end{cases}.$$

15.5.2 Proposição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Todo subconjunto ortogonal de V é necessariamente LI.

Prova: Seja $S = \{g_1, \dots, g_r\} \subset V$ um conjunto ortogonal. Queremos mostrar que S é LI, isto é, devemos mostrar que:

$$x_1 g_1 + \cdots + x_r g_r = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_r = 0.$$

Tomemos $x_1 g_1 + \cdots + x_i g_i + \cdots + x_r g_r = 0$ e façamos o produto interno de g_i em ambos os membros da igualdade, isto é:

$$\langle x_1 g_1 + \cdots + x_i g_i + \cdots + x_r g_r, g_i \rangle = \langle 0, g_i \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1\langle g_1, g_i\rangle + \cdots + x_i\langle g_i, g_i\rangle + \cdots + x_r\langle g_r, g_i\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow x_i\langle g_i, g_i\rangle = 0 \Leftrightarrow x_i = 0.$$

Como $x_1g_1 + \cdots + x_rg_r = 0$ implicou em $x_i = 0$, podemos repetir este procedimento para $i = 1,2, \dots, r$ e assim obtemos que $x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0$, ou seja, $S = \{g_1, \dots, g_r\}$ é LI.

15.5.3 Proposição: Seja $S = \{g_1, \dots, g_r\}$ um subconjunto ortonormal do espaço vetorial V com produto interno $\langle , \rangle$. Então, para qualquer $u \in V$, o vetor $v = u - \langle u, g_1\rangle g_1 - \langle u, g_2\rangle g_2 - \cdots - \langle u, g_r\rangle g_r$ é ortogonal a todo vetor do subespaço gerado pelos vetores de S ($[g_1, \dots, g_r]$).

Prova: Note que, para mostrar que v é ortogonal a todo vetor do subespaço gerado $[g_1, \dots, g_r]$, basta mostrar que v é ortogonal a qualquer combinação linear de $g_1, \dots, g_r$.

Resumindo: Tomando $w = x_1g_1 + \cdots + x_rg_r \in [g_1, \dots, g_r]$, devemos mostrar que $\langle v, w\rangle = 0$.

Antes disso, vamos "conferir" que v é ortogonal a cada um dos $g_i \in S$. Veja:

$$\langle v, g_i\rangle = \langle u - \langle u, g_1\rangle g_1 - \langle u, g_2\rangle g_2 - \cdots - \langle u, g_i\rangle g_i - \cdots - \langle u, g_r\rangle g_r, g_i\rangle$$

$$= \langle u, g_i\rangle - \langle u, g_1\rangle\langle g_1, g_i\rangle - \langle u, g_2\rangle\langle g_2, g_i\rangle - \cdots - \langle u, g_i\rangle\langle g_i, g_i\rangle - \cdots - \langle u, g_r\rangle\langle g_r, g_1\rangle$$

$$= \langle u, g_i\rangle - \langle u, g_1\rangle \cdot 0 - \langle u, g_2\rangle \cdot 0 - \cdots - \langle u, g_i\rangle \cdot 1 - \cdots - \langle u, g_r\rangle \cdot 0$$

$$= \langle u, g_i\rangle - \langle u, g_i\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\langle v, g_i\rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp g_i}.$$

Podemos repetir este processo para $i = 1,2, \dots, r$ e concluímos que $v \perp g_i, i = 1, \dots, r$. Assim, v é ortogonal a qualquer vetor de S.

Agora, mostremos que v é ortogonal a qualquer combinação linear dos g_i. Tomando $w \in [g_1, \dots, g_n]$ (o mesmo vetor descrito acima) temos:

$$\langle v, w\rangle = \langle u - \langle u, g_1\rangle g_1 - \cdots - \langle u, g_r\rangle g_r, x_1 g_1 + \cdots + x_r g_r\rangle$$

$$= x_1\langle u, g_1\rangle + \cdots + x_r\langle u, g_r\rangle - x_1\langle u, g_1\rangle\langle g_1, g_1\rangle - \cdots - x_r\langle u, g_1\rangle\langle g_1, g_r\rangle - \cdots$$
$$- x_1\langle u, g_r\rangle\langle g_r, g_1\rangle - \cdots - x_r\langle u, g_r\rangle\langle g_r, g_r\rangle$$

$$= x_1\langle u, g_1\rangle + \cdots + x_r\langle u, g_r\rangle - x_1\langle u, g_1\rangle \cdot 1 - \cdots - x_r\langle u, g_1\rangle \cdot 0 - \cdots - x_1\langle u, g_r\rangle \cdot 0 - \cdots$$
$$- x_r\langle u, g_r\rangle \cdot 1$$

$$= x_1\langle u, g_1\rangle + \cdots + x_r\langle u, g_r\rangle - x_1\langle u, g_1\rangle - \cdots - 0 - \cdots - 0 - \cdots - x_r\langle u, g_r\rangle$$

$$= x_1\langle u, g_1\rangle + \cdots + x_r\langle u, g_r\rangle - x_1\langle u, g_1\rangle - \cdots - x_r\langle u, g_r\rangle$$

$$= x_1\langle u, g_1\rangle - x_1\langle u, g_1\rangle + \cdots + x_r\langle u, g_r\rangle - x_r\langle u, g_r\rangle = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \langle v, w\rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp w.$$

Assim, mostramos que para qualquer $u \in V$:

$$v = u - \sum_{i=1}^{r}\langle u, g_i\rangle g_i \perp w = \sum_{i=1}^{r} x_i g_i.$$

Ou seja, $v \in V$ é ortogonal a qualquer vetor do subespaço $[g_1, \ldots, g_r]$ (ortogonal a qualquer combinação linear de $g_1, \ldots, g_r$).

17.5.4 Teorema (ortonormalização de Gram-Schmidt): Todo espaço vetorial V de dimensão finita $n \neq 0$ admite uma base ortonormal.

Prova: Vamos demonstrar este teorema em etapas, tomando dimensões $1,2,3,\ldots,n$.

i. Se $\dim V = 1$, considere $\{u\}$ uma base de V, então o vetor $g_1 = \frac{1}{\|u\|}u$ é unitário e ainda forma um conjunto $\{g_1\} \subset V$ LI, ou seja, este conjunto forma uma base ortonormal para V.

ii. Se $\dim V = 2$, considere $\{u_1, u_2\}$ uma base de V. Façamos $\boxed{g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}}$ e este é um vetor unitário. Agora, usando a Proposição 17.5.3, podemos determinar a partir de u_2 o vetor $\boxed{v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1}$ que é ortogonal a g_1 e assim o vetor $\boxed{g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}}$ ainda é ortogonal a g_1 e é unitário. Logo $\{g_1, g_2\}$ forma uma base ortonormal de V, pois $g_1 \perp g_2$ e $\|g_1\| = \|g_2\| = 1$.

iii. Se $\dim V = 3$, considere $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de V. Façamos $\boxed{g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}}$ e este é um vetor unitário. Agora, usando a Proposição 17.5.3, podemos determinar a partir de u_2 o vetor $\boxed{v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1}$ que é ortogonal a g_1 e assim o vetor $\boxed{g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}}$ ainda é ortogonal a g_1 e é unitário. Novamente, usando a Proposição 17.5.3, podemos determinar a partir de u_3 o vetor $\boxed{v_3 = u_3 - \langle u_3, g_1 \rangle g_1 - \langle u_3, g_2 \rangle g_2}$ que é ortogonal a g_1 e g_2 e assim o vetor $\boxed{g_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}}$ ainda é ortogonal a g_1 e g_2. Desta forma, o conjunto $\{g_1, g_2, g_3\}$ é uma base ortonormal de V.

iv. Se $\dim V = n$, considere $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ uma base de V. Note que, para determinar os primeiros vetores $g_1, g_2, g_3, \ldots$ o procedimento é análogo aos outros casos e assim, ao chegarmos no $n - \acute{e}simo$ vetor g_n, devemos escolher $g_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$, onde:

$$v_n = u_n - \langle u_n, g_1 \rangle g_1 - \langle u_n, g_2 \rangle g_2 - \cdots - \langle u_n, g_{n-2} \rangle g_{n-2} - \langle u_n, g_{n-1} \rangle g_{n-1}.$$

Este processo é chamado de processo de ortonormaliazação de Gram-Schmidt que, nos permite a partir de uma base qualquer de um espaço vetorial V, determinar uma base ortonormal de V.

<u>Exemplo</u>:

Seja $V = \Re^3$ e $\beta = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,2)\}$ uma base de $\Re^3$. A partir dos vetores $u_1 = (1,2,0), u_2 = (0,1,1), u_3 = (0,1,2)$, vamos determinar uma base ortonormal de $\Re^3$.

Tomamos o primeiro vetor $g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$:

$$g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{\langle u_1, u_1\rangle}} = \frac{(1,0,0)}{\sqrt{\langle (1,0,0), (1,0,0)\rangle}} = \frac{(1,0,0)}{\sqrt{1^2}} = \frac{(1,0,0)}{\sqrt{1}} = \left(\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{g_1 = (1,0,0)}.$$

Tomamos o segundo vetor $g_2 = \frac{v_2}{\|v_1\|}$, onde:

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1\rangle g_1 = (0,1,1) - \langle (0,1,1), (1,0,0)\rangle (1,0,0) = (0,1,1) - 0 \cdot (1,0,0)$$

$$= (0,1,1) - (0,0,0) = (0,1,1) \Rightarrow v_2 = (0,1,1).$$

Logo:

$$g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{\langle v_2, v_2\rangle}} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{\langle (0,1,1), (0,1,1)\rangle}} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Tomamos o terceiro vetor $g_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}$, onde:

$$v_3 = u_3 - \langle u_3, g_1\rangle g_1 - \langle u_3, g_2\rangle g_2$$

$$= (0,1,2) - \langle (0,1,2), (1,0,0)\rangle (1,0,0) - \langle (0,1,2), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\rangle \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (0,1,2) - 0(1,0,0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,1,2) - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (0,1,2) - \left(0, \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0,1,2) - \left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(0, 1 - \frac{3}{2}, 2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow v_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Logo:

$$g_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{\sqrt{\langle v_3, v_3 \rangle}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\langle \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rangle}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{g_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

Desta forma, $\{g_1, g_2, g_3\} = \left\{(1,0,0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ é uma base ortonormal de $\Re^3$.

17.5.5 Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Dado $U \subset V$ um subespaço de V, o conjunto $U^{\perp}$ é um subespaço de V, onde:

$$U^{\perp} = \{v \in V; \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in U\} = \{v \in V; v \perp u, \forall u \in U\}.$$

$U^{\perp}$ é chamado de *complemento ortogonal* de U.

Exemplo:

Sejam $V = \Re^3$ e $U = \{(x, y, 0); x, y \in \Re\}$, vamos determinar o conjunto $U^{\perp}$.
Sabemos que:

$$U = \{(x, y, 0); x, y \in \Re\} = \{(x, 0,0) + (0, y, 0); x, y \in \Re\}$$

$$= \{x(1,0,0) + y(0,1,0); x, y \in \Re\} = [(1,0,0), (0,1,0)] \Rightarrow U = [(1,0,0), (0,1,0)].$$

Um vetor $v = (x, y, z) \in \Re^3$ pertence a $U^{\perp}$ se e somente se, $v \perp u, \forall u \in U$ e, em particular, $v \perp (1,0,0)$ e $v \perp (0,1,0)$ (v é perpendicular aos geradores de U), logo:

$$v \perp (1,0,0) \Leftrightarrow \langle v, (1,0,0) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x, y, z), (1,0,0) \rangle = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$$

$$u \perp (0,1,0) \Leftrightarrow \langle v, (0,1,0) \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (x, y, z), (0,1,0) \rangle = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 0}.$$

Logo $v = (0,0, z); z \in \Re$ e assim $U^{\perp} = \{(0,0, z); z \in \Re\} = \{z(0,0,1); z \in \Re\} = [(0,0,1)] \Rightarrow U^{\perp} = [(0,0,1)]$, e assim, uma base para $U^{\perp}$ é $\{(0,0,1)\}$.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J.L. **Álgebra Linear**. HARBRA. São Paulo, 1986.

BOULOS, P. **Geometria Analítica, Um Tratamento Vetorial**. Pearson. São Paulo, 2006.

CALLIOLI, C.A. **Álgebra Linear e Aplicações**. Atual Editora. São Paulo, ano.

WINTERLE, P. **Vetores e Geometria Analítica**. Pearson. São Paulo, 2000.