Programowanie liniowe
Asortyment produkcji

Piotr Stefanów

Przykład 1 (opis 1)

Firma VGS (Very Good Style) zajmuje się produkcją mebli. Jeden z działów tej firmy (LXIV) ma zadanie zaplanować produkcję na przyszły tydzień (7 dni, gdyż firma pracuje w soboty i niedziele) uwzględniając dostępne w magazynie części do mebli.

Dział LXIV zatrudnia tylko dwóch pracowników i zajmuje się niszowa produkcją krzeseł oraz stolików w stylu Ludwika XIV (stąd nazwa działu LXIV).

Przykład 1 (opis 2)

Na każdy produkt potrzeba poświęcić dwa dni robocze, co oznacza, że każde krzesło lub stolik może zostać wyprodukowany przez jednego pracownika przez dwa dni robocze, albo przez dwóch pracowników w ciągu jednego dnia.

Na wyprodukowanie krzesła potrzeba jeden „blat" (jednolity kawałek drewna) na oparcie, natomiast stół wymaga dwóch takich fragmentów. W magazynie znajduje się obecnie osiem „blatów"

Przykład 1 (opis 3)

Do produkcji krzesła potrzebne są cztery „nogi”, których w magazynie znajduje się 16 sztuk. Pozostałe zasoby są „nielimitowane”, co oznacza, że są dostępne bez ograniczeń.

Wytworzenie krzesła przynosi 2 tys. zł zysku, natomiast stolika – 3 tys. zł.

Jaka powinna być produkcja krzeseł i stołów w najbliższym tygodniu przez dział LXIV, aby uzyskać maksymalny zysk?

Przykład 1 (T. Trzaskalik str. 22)

Należy zaplanować produkcję zakładu w pewnym tygodniu w taki sposób, aby osiągnięty zysk był maksymalny.

Zakład może wytwarzać dwa produkty: P_1 i P_2.

Ich produkcja jest limitowana dostępnymi zasobami trzech środków: S_1, S_2 i S_3.

Zasoby tych środków wynoszą odpowiednio, 14, 8 i 16 jednostek.

Przykład 1 (Trzaskalik str. 22)

Nakład środka S_1 na wytworzenie jednostki produktu P_1 wynosi 2 jednostki, a na wytworzenie produktu P_2 – również 2 jednostki.

Nakłady środka S_2 wynoszą, odpowiednio, 1 i 2 jednostki, natomiast środka S_3 – 4 i 0 jednostek.

Zysk osiągany z wytworzenia jednostki produktu P_1 wynosi 2 jednostki, a z wytworzenia jednostki produktu P_2 – 3 jednostki.

Przykład 1 Tabela

Środki produkcji	Produkty		Zasoby
	P_1	P_2	
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Zyski	2	3	

Asortyment produkcji

Oznaczenia

a_{ij} zużycie *i*-tego środka produkcji na wytworzenie *j*-ego wyrobu

($i=1, 2, \ldots, r$; $j=1, 2, \ldots, n$),

b_i posiadany zasób *i*-tego środka produkcji,

c_j zysk jednostkowy lub cena jednostkowa uzyskana ze sprzedaży

j-ego wyrobu,

d_j minimalna ilość *j*-ego wyrobu, jaką trzeba wyprodukować,

g_j maksymalna ilość *j*-ego wyrobu, jaką można wyprodukować.

Asortyment produkcji

Zadanie (cel)

Zmaksymalizować zysk (przychód) ze sprzedaży poprzez określenie, które wyroby i w jakich ilościach produkować, nie przekraczając posiadanych zasobów (środków produkcji) i ewentualnie spełniając pewne dodatkowe ograniczenia dotyczące struktury produkcji

Asortyment produkcji

Model ogólny

Zmienne decyzyjne - wielkości produkcji wyrobów ($x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n$)

x_j wielkość produkcji *j*-ego wyrobu

Funkcja celu

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

Asortyment produkcji

Ograniczenia zasobów środków produkcji

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rn}x_n \le b_r$$

Ograniczenia popytu

$$d_j \le x_j \le g_j$$

Ograniczenia (warunki) brzegowe

$$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$$

Asortyment produkcji

Postać macierzowa

$$\mathbf{cx} \rightarrow \max$$

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Slajdy

Wykorzystałem materiały (rysunki) dołączone do książki Tadeusza Trzaskalika *Wprowadzenie do badań operacyjnych z komputerem*

Asortyment produkcji

Przykład 1.

Zadanie programowania produkcji

Środki produkcji	Produkty		Zasoby
	P_1	P_2	
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Zyski	2	3	

Należy zaplanować produkcję zakładu w taki sposób, aby osiągnięty zysk był maksymalny.

Asortyment produkcji

Składowe modelu

Zmienne decyzyjne

x_1 - planowany rozmiar produkcji produktu P_1,

x_2 - planowany rozmiar produkcji produktu P_2.

Funkcja celu

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

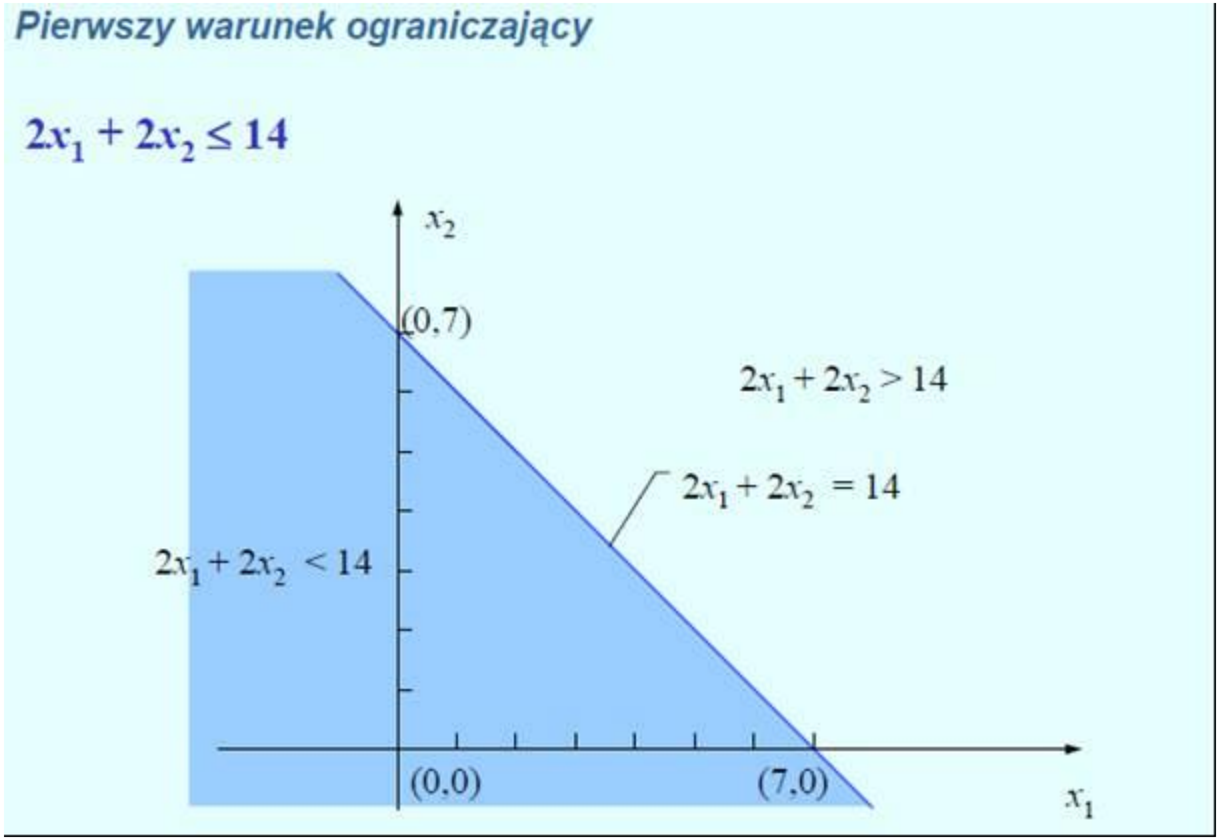
$$2x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \qquad \leq 16$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

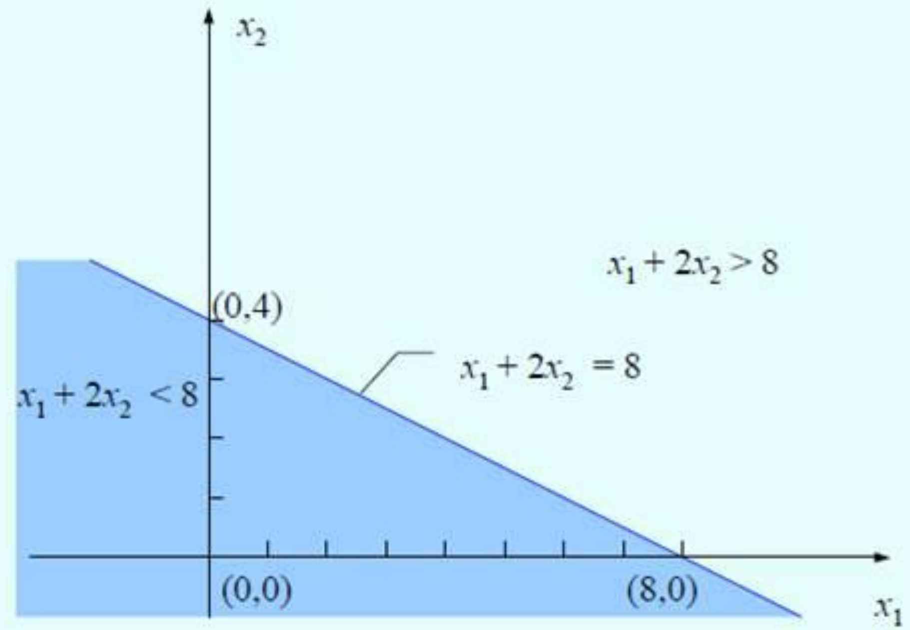
Metoda graficzna



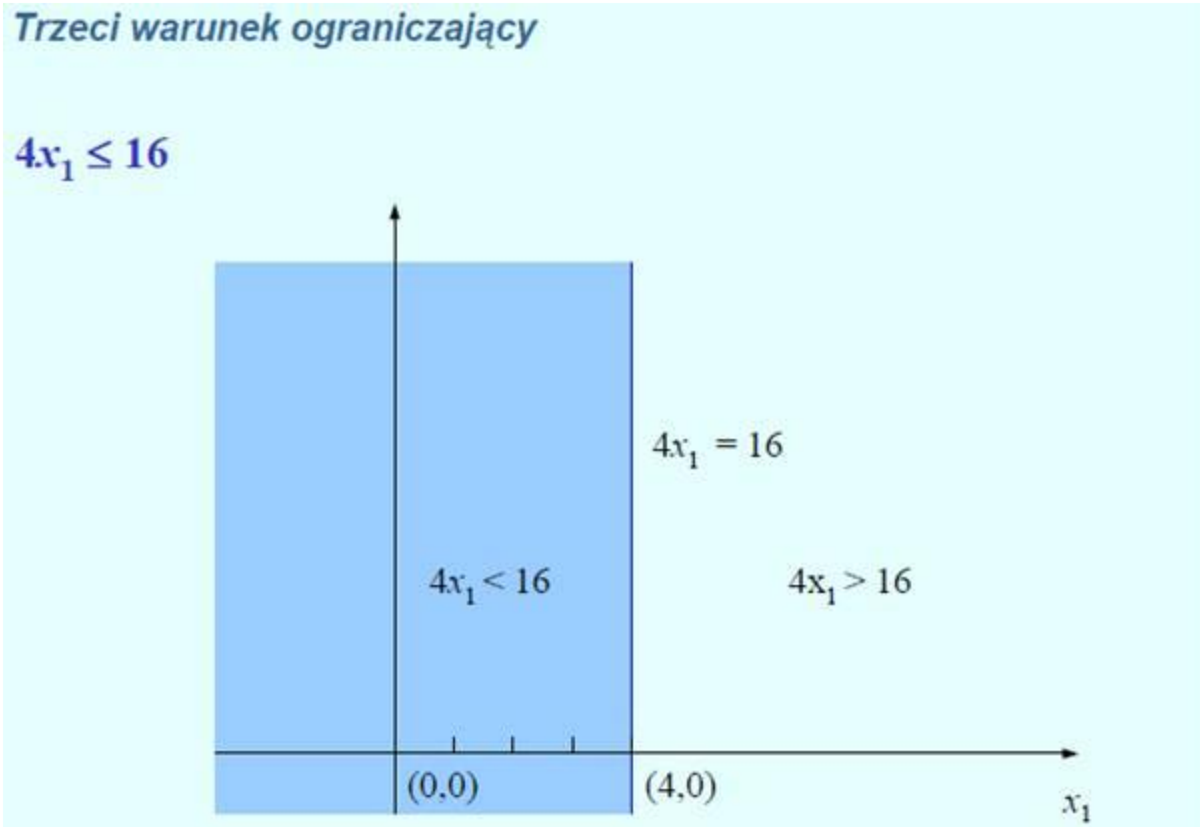
Metoda graficzna

Drugi warunek ograniczający

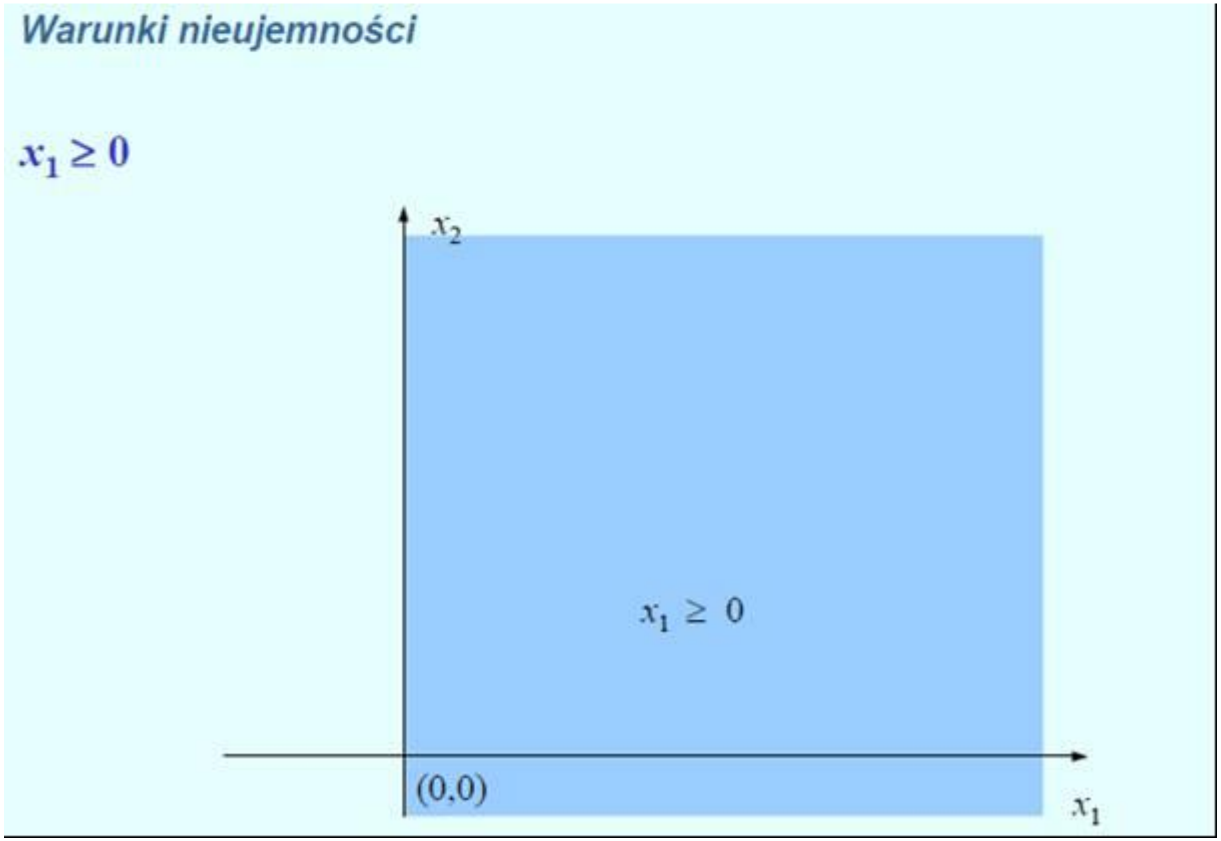
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$



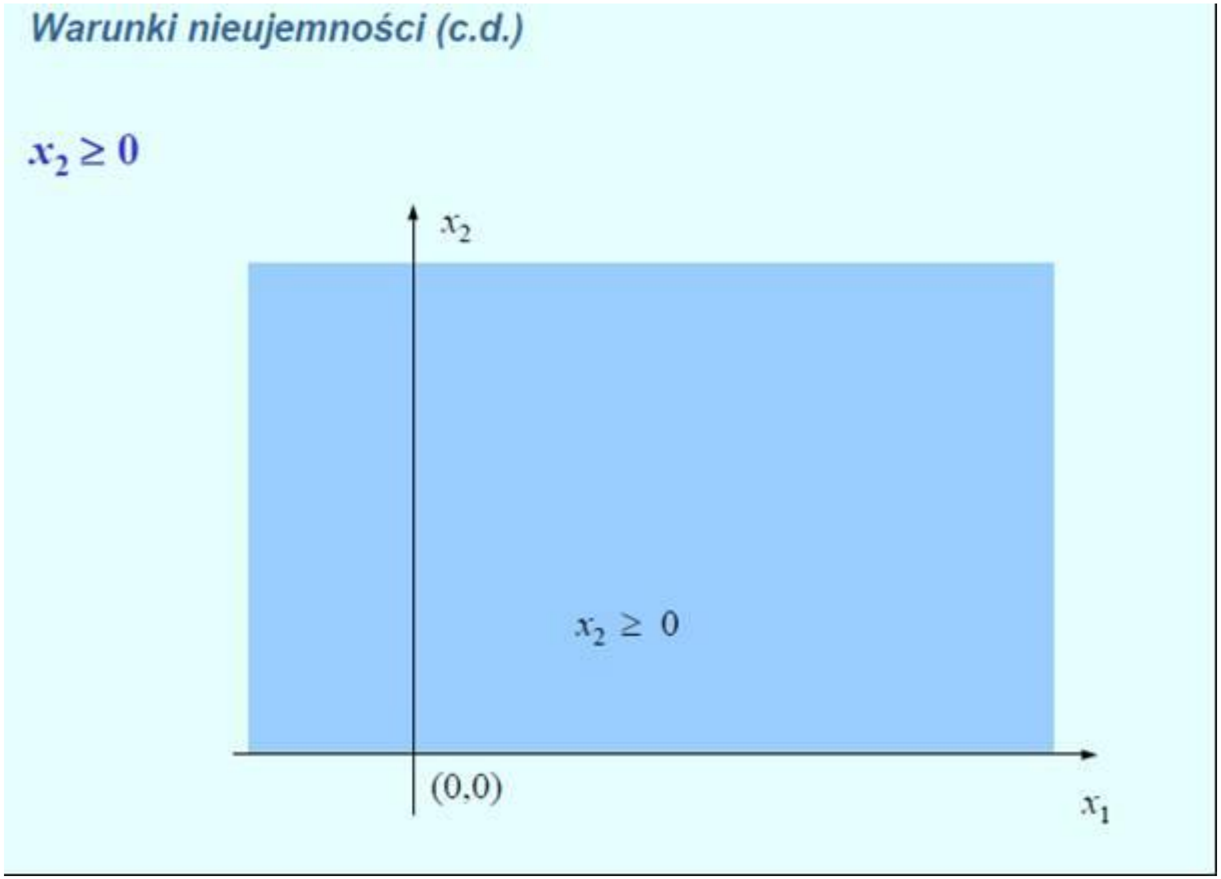
Metoda graficzna



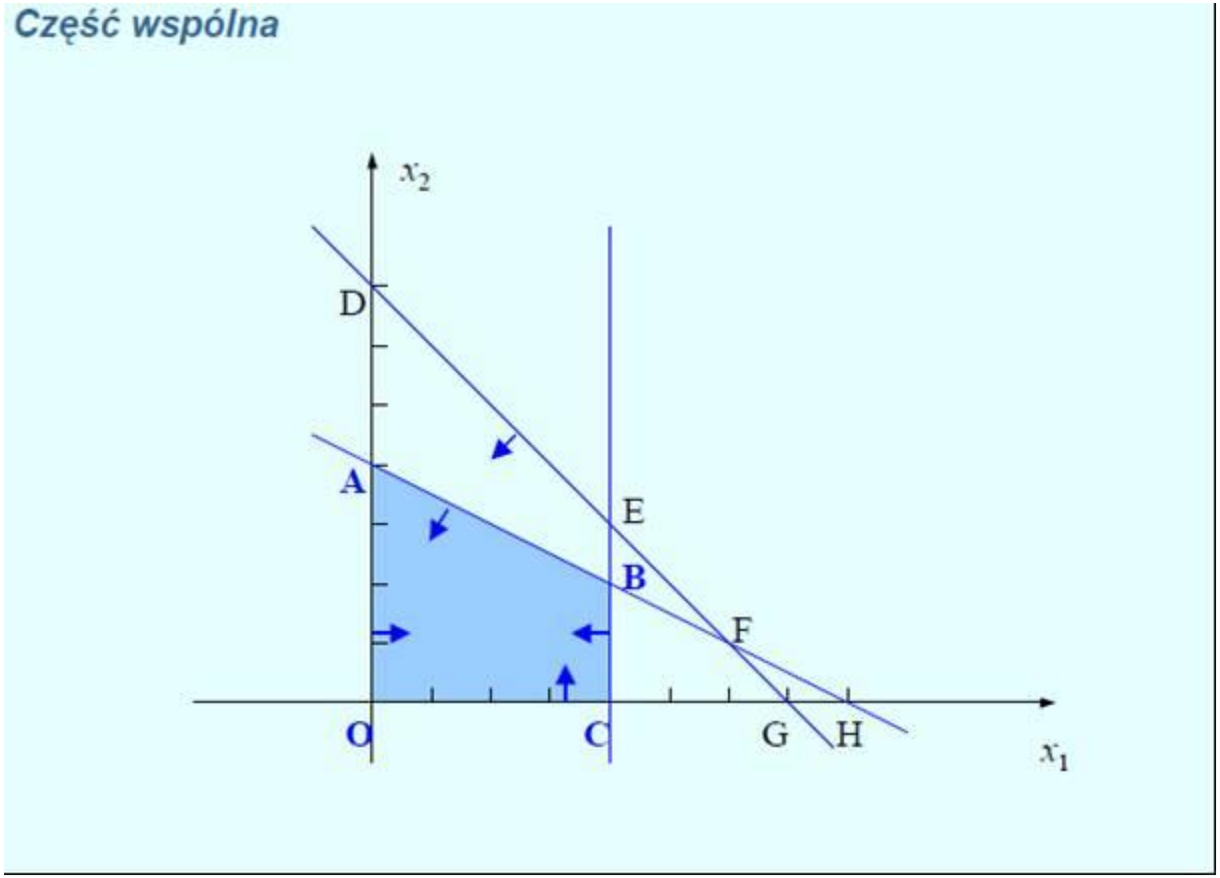
Metoda graficzna



Metoda graficzna

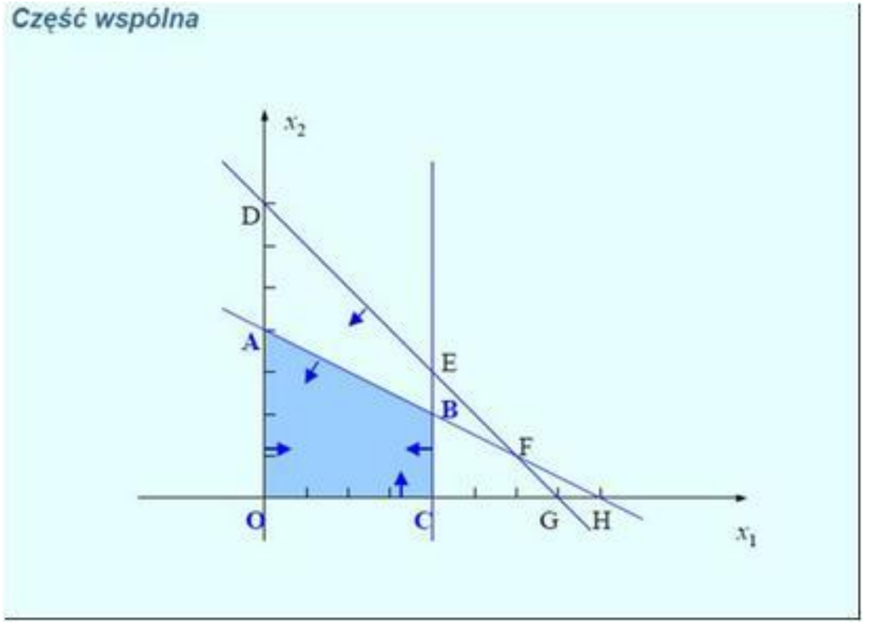


Metoda graficzna



Metoda graficzna

Cztery punkty (0, A, B, C)



Punkt 0: f(0, 0) = ?

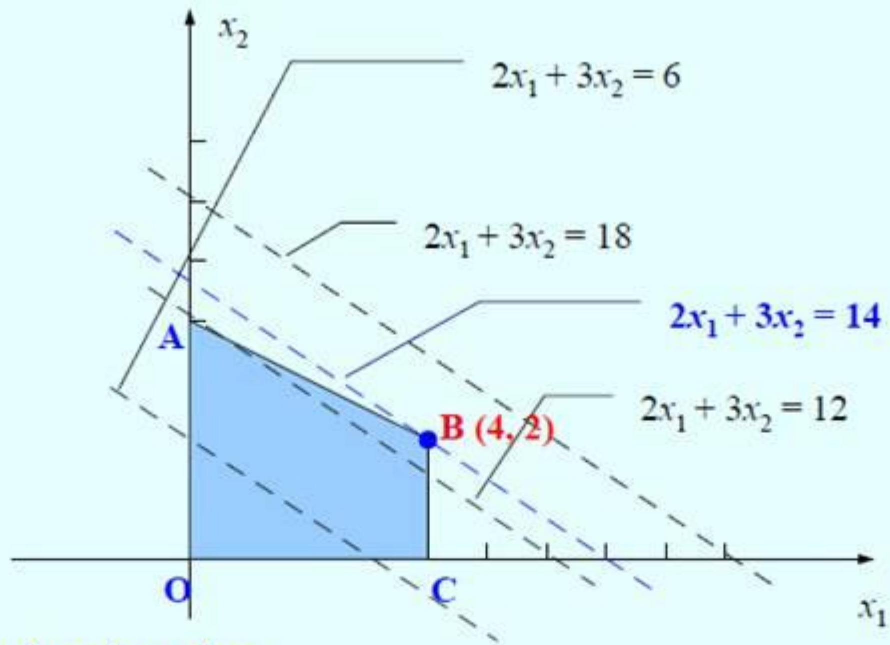
Punkt A: f(0, 4) = ?

Punkt B: f(4, 2) = ?

Punkt C: f(4, 0) = ?

Metoda graficzna

Rozwiązanie optymalne



Rozwiązanie optymalne:

$x_1 = 4$ planujemy wytworzenie 4 jednostek produktu P_1

$x_2 = 2$ planujemy wytworzenie 2 jednostek produktu P_2

$f(4,2) = 14$

UWAGA

Obowiązująca kolejność:

1. Cel
2. Zmienne decyzyjne (ZD)
3. Funkcja celu (FC)
4. Warunki ograniczające (WO)

Simplex (Symplex)

Postać standardowa

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 8 \\ 4x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

Simplex

Postać macierzowa

$\boldsymbol{c}$ - wektor funkcji celu,

$\boldsymbol{A}$ - macierz współczynników,

$\boldsymbol{b}$ - wektor warunków ograniczających,

$\boldsymbol{x}$ - wektor zmiennych.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 14 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad &= 8 \\ 4x_1 \quad\quad\quad + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0,$$

$$\boldsymbol{cx} \to \max$$
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq 0$$

$$\boldsymbol{c} = [2\ \ 3\ \ 0\ \ 0\ \ 0] \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Simplex

Postać bazowa

$$
\begin{array}{c} \\ A = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}
$$

x_3, x_4, x_5 - zmienne bazowe

x_1, x_2 - zmienne niebazowe

$$2x_1 + 3x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 8 \\ 4x_1 + x_5 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Bazowe rozwiązanie dopuszczalne

$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 14, \quad x_4 = 8, \quad x_5 = 16$

Simplex

Tablica simpleksowa

$$cx \to \max$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16

Simplex

Jeden krok algorytmu metody simpleks

Należy:

- stwierdzić, czy rozpatrywane rozwiązanie bazowe jest optymalne, czy też nie,
- w przypadku, gdy nie jest optymalne, wyznaczyć nową bazę sąsiednią,
- przekształcić za pomocą przekształceń elementarnych macierz warunków ograniczających do postaci bazowej względem bazy sąsiedniej,
- jeżeli rozpatrywane rozwiązanie jest optymalne, zakończyć postępowanie.

Simplex

Tablice simpleksowe

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	2	1	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$		2	3	0	0	0	

$cx \to max$		2	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	2	0	1	–1	0	6
x_2	3	0,5	1	0	0,5	0	4
x_5	0	4	0	0	0	1	16
$c_j - z_j$							

Simplex

Tablice simpleksowe

Pierwsza tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	2	2	1	0	0	0	0	14
x_4	0	1	2	0	1	0	0	0	8
x_5	0	4	0	0	0	1	0	0	16
x_7	–300	1	1	0	0	0	–1	1	3
$c_j - z_j$		302	303	0	0	0	–300	0	– 900

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \to max$		2	3	0	0	0	0	–300	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	0	0	2
x_6	0	0	0	0	0,5	0,125	1	–1	3
x_1	2	1	0	0	0	0,25	0	0	4
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	0	1	2
$c_j - z_j$		0	0	0	–1,5	–0,125	0	–303	14

Simplex

Algorytm

1. Uzyskanie pierwszego rozwiązania bazowego
2. Ocena optymalności rozwiązania
3. Badanie niesprzeczności zadania
4. Identyfikacja rozwiązań alternatywnych
5. Wybór zmiennej wprowadzanej do bazy
6. Badanie nieograniczoności funkcji celu i istnienia krawędzi sprawnej
7. Wybór zmiennej usuwanej z bazy
8. Sprowadzenie warunków ograniczających do postaci bazowej względem nowej bazy.

Sprzeczność

Przykład **Zadanie sprzeczne**

W rozpatrywanym w przykładzie 1. zadaniu programowania produkcji łączny rozmiar produkcji ma być nie mniejszy niż 8 jednostek.

Model matematvcznv:

Funkcja celu

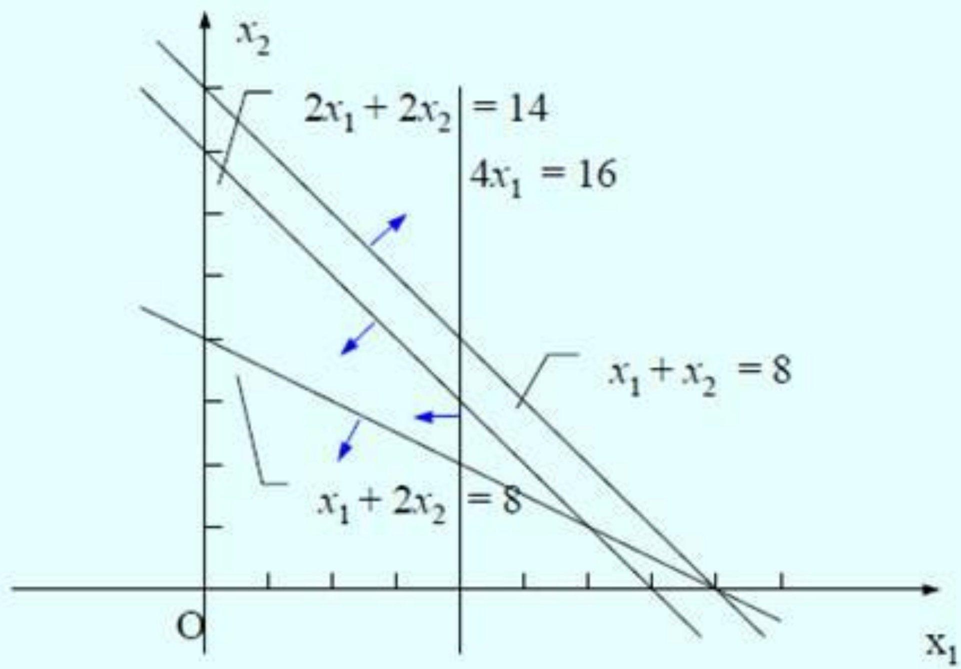
$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 \qquad &\leq 16 \\ x_1 + \ x_2 &\geq 8 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

Sprzeczność

Metoda geometryczna



Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty

Wiele rozwiązań

Przykład **Alternatywne rozwiązania optymalne**

W rozpatrywanym przykładzie 1. zadaniu programowania produkcji zysk jednostkowy dla produktu P_2 zwiększa się z 3 do 4 jednostek.

Model matematyczny:

Funkcja celu

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające

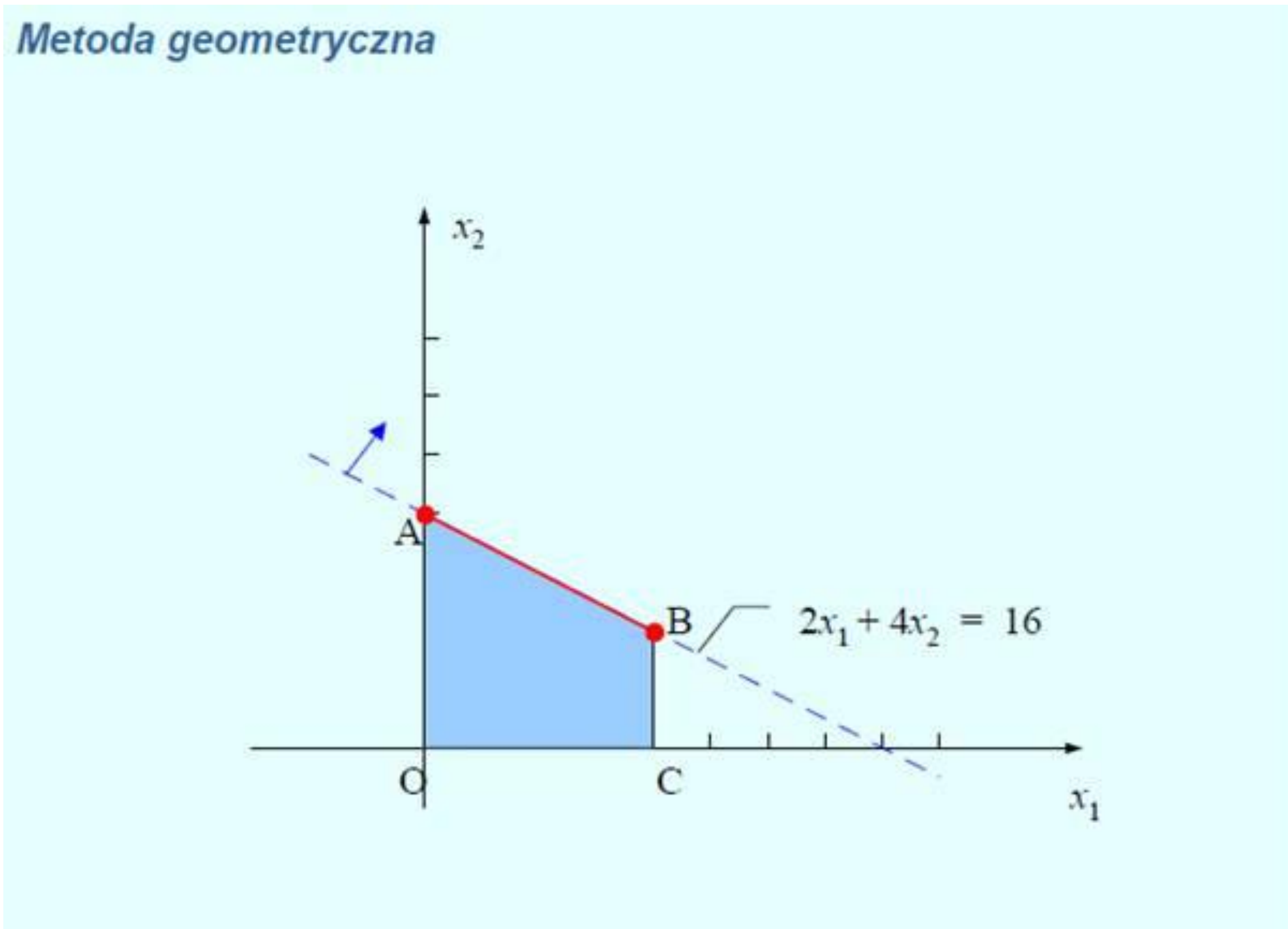
$$2x_1 + 2x_2 \le 14$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$4x_1 \le 16$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Wiele rozwiązań



Analiza wrażliwości

W rozpatrywanym w przykładzie 1. zadaniu programowania produkcji zysk z wytworzenia jednostki P_1 wynosi c_1.

Model matematyczny:

Funkcja celu:

$$c_1 x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Warunki ograniczające:

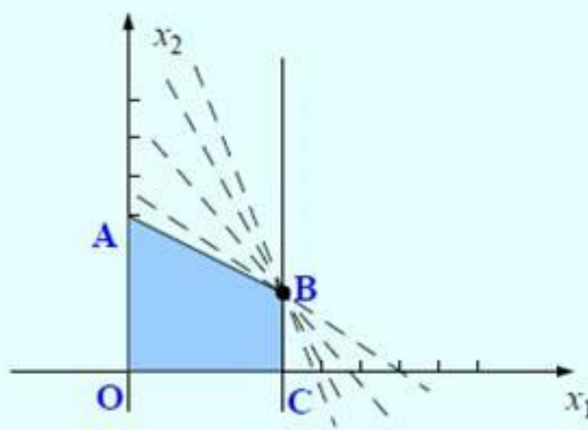
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 4x_1 \qquad &\leq 16 \\ x_1 \geq 0, \quad & x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

Analiza wrażliwości

Ostatnia tablica simpleksowa

$cx \to max$		c_1	3	0	0	0	b
Baza	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	0	0	1	–1	–0,25	2
x_2	3	0	1	0	0,5	–0,125	2
x_1	c_1	1	0	0	0	0,25	4
$c-z$		0	0	0	–1,5	$-0{,}25c_1+0{,}375$	$4c_1+6$

$$-0{,}25c_1 + 0{,}375 \le 0 \quad \text{czyli} \quad c_1 \ge 1{,}5$$



Zagadnienie dualne

Środki produkcji	Produkty		Zasoby
	P_1	P_2	
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Zyski	2	3	

Zminimalizować wartość posiadanych zasobów środków, przy czym wartość środków potrzebnych na wytworzenie jednostki każdego z produktów jest nie mniejsza od zysku jednostkowego dla tego produktu.

Zagadnienie dualne

Model matematyczny

Zmienne decyzyjne

y_1 - cena środka S_1
y_2 - cena środka S_2
y_3 - cena środka S_3

Funkcja celu

$$14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \to \min$$

Warunki ograniczające

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 4y_3 &\geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 &\geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Zagadnienie dualne

Związki między zadaniem prymalnym i dualnym

$$2x_1 + 3x_2 \to \max \qquad\qquad 14y_1 + 8y_2 + 16y_3 \to \min$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 14 \\ x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 4x_1 \quad\;\; &\le 16 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2y_1 + y_2 + 4y_3 &\ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 \quad\;\; &\ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c} = [2, 3] \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{cx} &\to \mathbf{max} \\ \boldsymbol{Ax} &\le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\ge \mathbf{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \boldsymbol{yb} &\to \mathbf{min} \\ \boldsymbol{yA} &\ge \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} &\ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

Zagadnienie dualne

Związki między zadaniem prymalnym i dualnym (c.d.)

1. Każdemu warunkowi ograniczającemu jednego z problemów odpowiada zmienna decyzyjna drugiego. Zmienną tę nazwiemy **zmienną komplementarną** do danego warunku ograniczającego.
2. Każdej nieujemnej zmiennej decyzyjnej jednego z problemów odpowiada warunek ograniczający drugiego. Warunek ten nazwiemy **warunkiem komplementarnym** do danej zmiennej decyzyjnej.
3. **Wektor współczynników funkcji celu** w jednym zadaniu staje się **wektorem wyrazów wolnych** w drugim i odwrotnie, wektor wyrazów wolnych w jednym zadaniu jest wektorem współczynników funkcji celu w drugim z nich.
4. **Kierunki optymalizacji** dla zadań: prymalnego i dualnego są przeciwne. O ile zadanie prymalne jest zadaniem maksymalizacji, to w zadaniu dualnym funkcję celu minimalizujemy.
5. **Zwroty nierówności** w warunkach ograniczających zadania prymalnego są przeciwne do zwrotów nierówności warunków ograniczających zadania dualnego.