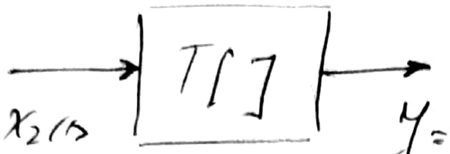
Linealización de Señales y Sistemas

Introducción

Fig. 1

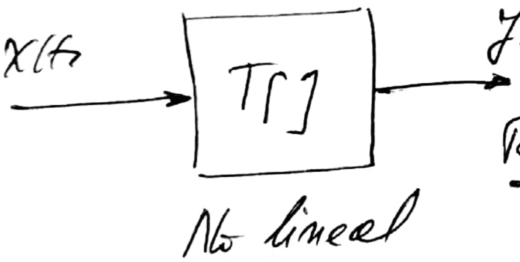


$x(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$ $\quad y = T[x(t)] = a y_1(t) + b y_2(t) \quad (1)$

No todos los sistemas físicos presentan una relación lineal entre la entrada y la salida, es decir, cumpliendo el principio de Homogeneidad y Superposición de la Ec. (1)

En consecuencia, se debe linealizar el mismo.

Primer Caso. 1 Variable Independiente



$\bar{x}, \bar{y}$: Punto de operación de equilibrio.

Fig. 2

Relación no lineal $y = f(x)$ con $\bar{y} = f(\bar{x}) \quad (2)$

Teniendo en cuenta el desarrollo en Serie de Taylor de $f(x)$:

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\bar{x})(x-\bar{x})^n}{n!} = f(\bar{x}) + \frac{f'(\bar{x})(x-\bar{x})}{1!} + \frac{f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2}{2!} + \dots$$

Considerando despreciable $(x-\bar{x})^2; (x-\bar{x})^3; (x-\bar{x})^4, \dots$

$$y \cong f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) \quad (3)$$

$y - f(\bar{x}) = f'(\bar{x})(x - \bar{x})$; $y - \bar{y} = f'(x)(x - \bar{x})$

Definiendo $\begin{cases} \Delta y = y - \bar{y} \\ \Delta x = x - \bar{x} \end{cases}$ (4), se tiene que:

$$\Delta y = f'(\bar{x}) . \Delta x \rightarrow \Delta y = k \Delta x, \quad k = f'(\bar{x}) \quad (5)$$

La Ec. (5) es lineal, siempre y cuando Δx, Δx^2, Δx^3, ... sea pequeño. Con esta aproximación, se logra una relación lineal entre la entrada y la salida, es decir, trabajando con variaciones $\Delta y = y - \bar{y}$ y $\Delta x = x - \bar{x}$.

Segundo Caso. 2 Variables Independientes

$y = f(x_1, x_2)$ con punto de equilibrio de operación en $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ y además $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ (6)

Desarrollando la Ec. (6) en serie de Taylor:

$$y = f(x_1; x_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^n f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{n!} \quad (7)$$

$$y = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}\bigg|_{\substack{\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2}} (x - \bar{x}_1) + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\bigg|_{\substack{\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2}} (x - \bar{x}_2) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}\bigg|_{\substack{\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2}} (x - \bar{x}_1)^2 + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}\bigg|_{\substack{\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2}} (x - \bar{x}_2)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\bigg|_{\substack{\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2}} (x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2) \right] + \dots$$

Si $(x_1-\bar{x}_1)^2; (x_1-\bar{x}_1)^3; \dots; (x_2-\bar{x}_2)^2; (x_2-\bar{x}_2)^3; \dots$ etc.
es decir, se desprecian los términos de orden superior y los productos cruzados, se tiene:

$$y \cong f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + \left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{\substack{\bar{x}_1\\ \bar{x}_2}} (x_1-\bar{x}_1) + \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}(x_2-\bar{x}_2)$$

$$y - \underbrace{f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}_{\bar{y}} = \left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{\substack{\bar{x}_1\\ \bar{x}_2}} (x_1-\bar{x}_1) + \left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{\substack{\bar{x}_1\\ \bar{x}_2}} (x_2-\bar{x}_2)$$

$$\Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 \quad ; \text{ siendo:}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta y &= y - \bar{y} \\ \Delta x_1 &= x_1 - \bar{x}_1 \\ \Delta x_2 &= x_2 - \bar{x}_2 \\ k_1 &= \left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\right|_{\substack{\bar{x}_1\\ \bar{x}_2}} \\ k_2 &= \left.\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right|_{\substack{\bar{x}_1\\ \bar{x}_2}} \end{aligned} \right. \qquad (8)$$

La Ec. (8) presenta una relación lineal entre la entrada y la salida.

<u>Ejemplo #1</u> Encuentre una relación lineal entre la altura de una columna de líquido de un tanque y el flujo de salida.

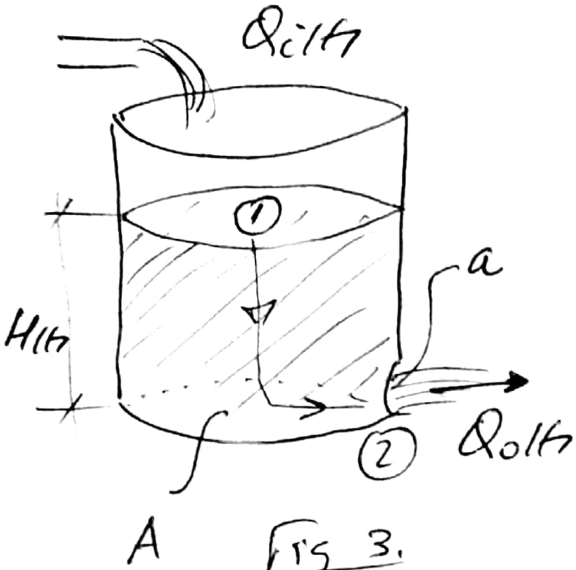


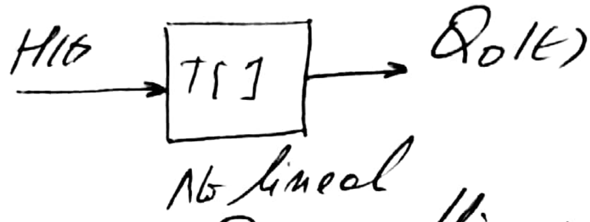
Fig 3.

Equivalencia de Notación:

$q_i(t) = \Delta Q_i(t) = Q_i(t) - \overline{Q_i}$

$q_o(t) = \Delta Q_o(t) = Q_o(t) - \overline{Q_o}$ (9)

$h(t) = \Delta H(t) = H(t) - \overline{H}$



Recordando el Teorema de Bernoullie:

$$p(t) + \frac{1}{2}\rho v^2(t) + \rho g h = cte \qquad (10)$$

El Teorema de Bernoullie relaciona la presión, energía cinética por unidad de volumen y energía potencial de un fluido en una línea de flujo. Aplicando la Ec. (10) en los puntos ① y ② de la línea de flujo:

$$P_1(t) + \frac{1}{2}\rho \cancel{V_1^2(t)} + \rho g H_1(t) = P_2(t) + \frac{1}{2}\rho V_2^2(t) + \cancel{\rho g H_2(t)} \qquad (11)$$

$P_1(t) = P_2(t) = P_{atm}(t)$; $H_2(t) = 0$ y $V_1(t) \cong 0$ ya que $A \gg H_1$ y el movimiento de flujo es pequeño.

En consecuencia, de la Ec. (11):

$$\cancel{\rho} g H_1(t) = \frac{1}{2}\cancel{\rho} V_2^2(t) \; ; \; V_2^2(t) = 2 g H_1(t) \; ; \; H_1(t) = H(t)$$

$$V_2(t) = \sqrt{2g}\sqrt{H(t)} \qquad (12)$$

Ahora bien, se tiene que:

$Q_0(t) = aV_2(t) = a\sqrt{2g}\sqrt{H(t)}$, con lo cual

$$Q_0(t) = K\sqrt{H(t)}, \quad K = a\sqrt{2g} \qquad (13)$$

La Ec. (13) representa la relación No lineal entre la entrada $H(t)$ y la salida $Q_0(t)$

Considerando el punto de operación de equilibrio del sistema $\overline{Q_0}, \overline{H}$, es decir, de (13)

$$\overline{Q_0} = f(\overline{H}) = K\sqrt{\overline{H}} \qquad (14)$$

Se tiene que:

$$Q_0(t) = \overline{Q_0} + f'(\overline{H})(H - \overline{H}) = \overline{Q_0} + \frac{K}{2}\left.(H(t))^{-1/2}\right|_{\overline{H}}(H - \overline{H})$$

$$Q_0(t) - \overline{Q_0} = \frac{K}{2\sqrt{\overline{H}}}(H - \overline{H}) \qquad (15)$$

De la Ec. (14), se tiene que:

$$\overline{Q_0} = K\sqrt{\overline{H}} \longrightarrow K = \frac{\overline{Q_0}}{\sqrt{\overline{H}}} \qquad (16)$$

Reemplazando (16) a (15) y recordando (9),

se tiene que:

$$Q_0(t) - \overline{Q_0} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{H}}} \cdot \frac{\overline{Q_0}}{\sqrt{\bar{H}}} (H - \bar{H})$$

$$q_0(t) = \frac{\overline{Q_0}}{2 \cdot \bar{H}} \cdot h(t) \qquad (17).$$

Definiendo $R = \dfrac{2 \cdot \bar{H}}{\overline{Q_0}}$, de (17) se tiene que

$$q_0(t) = \frac{1}{R} h(t) \; ; \; R = \frac{2 \cdot \bar{H}}{\overline{Q_0}} \qquad (18)$$

La Ec. (18) indica un modelo lineal entre las variaciones de flujo y altura de líquido de un tanque.

$R = \dfrac{2 \cdot \bar{H}}{\overline{Q_0}}$ se denomina resistencia hidráulica

Sus unidades $[R] = \left[\dfrac{m}{m^3/s}\right] = \left[\dfrac{s}{m^2}\right]$

Ejemplo #2

Volviendo al Ejemplo #1, se considera ahora el siguiente sistema:

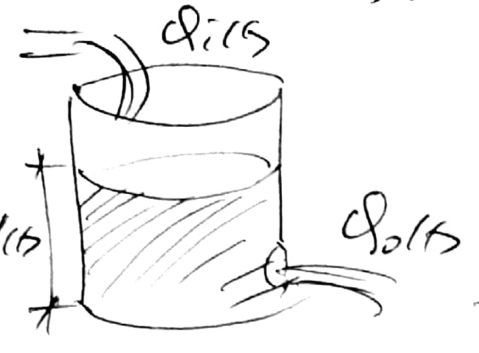
$$Q_i(t) \longrightarrow \boxed{T[\;]} \longrightarrow Q_0(t)$$

Fig. 4

No lineal

Se desea encontrar una ecuación diferencial

Y un modelo físico que represente el sistema no lineal entre flujo de entrada y salida.



Punto de Equilibrio:

$\bar{H}, \bar{Q_i}, \bar{Q_o}$

Fig. 5

De la Fig. 5, se tiene que:

$$Q_i(t) - Q_o(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(A.H(t))$$

$$Q_i(t) - Q_o(t) = A\frac{d}{dt}H(t) \quad ; \quad A\frac{d}{dt}H(t) + Q_o(t) = Q_i(t)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} + \frac{Q_o(t)}{A} = \frac{Q_i(t)}{A} \qquad (19)$$

Recordando de (13) que $Q_o = K\sqrt{H}$, se tiene

$$\frac{dH(t)}{dt} + \frac{K}{A}\sqrt{H} = \frac{1}{A}Q_i(t), \quad K = a\sqrt{2g} \qquad (20)$$

La Ec. (20) es una Ecuación Diferencial No Lineal y deberá ser linealizada. De (20):

$$\frac{dH(t)}{dt} = f(Q_i, H) = \frac{1}{A}Q_i(t) - \frac{K}{A}\sqrt{H} \qquad (21)$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = f(\bar{Q_i}, \bar{H}) + \left.\frac{\partial f(Q_i, H)}{\partial Q_i}\right|_{\bar{Q_i}, \bar{H}}(Q_i - \bar{Q_i}) + \left.\frac{\partial f(Q_i, H)}{\partial H}\right|_{\bar{Q_i}, \bar{H}}(H - \bar{H})$$

$$\frac{dH(t)}{dt} - \underbrace{f(\bar{H}, \bar{Q}_i)}_{\frac{d\bar{H}}{dt}} = \frac{1}{A}(Q_i - \bar{Q}_i) - \frac{K}{A}\frac{1}{2\sqrt{H}}\Bigg|_{\bar{Q}_i, \bar{H}} (H - \bar{H})$$

$$\frac{dH(t)}{dt} - \frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{1}{A}(Q_i - \bar{Q}_i) - \frac{K}{A\,2\sqrt{\bar{H}}}(H - \bar{H})$$

$$\frac{d}{dt}(H(t) - \bar{H}) = \frac{1}{A}(Q_i - \bar{Q}_i) - \frac{1}{2\sqrt{\bar{H}}\,A}\frac{\bar{Q}_o}{\sqrt{\bar{H}}}(H - \bar{H})$$

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{1}{A}q_i(t) - \frac{\bar{Q}_o}{A\,2\bar{H}}h(t) \;; \qquad (22)$$

A su vez $R = \frac{2\bar{H}}{\bar{Q}_o}$, con lo cual:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}q_i(t) - \frac{1}{A.R}h(t) \qquad (23)$$

Definiendo $C = A$ la capacidad hidráulica, la Ec. (23) se convierte en:

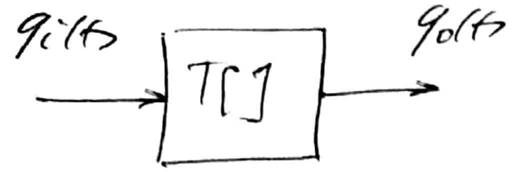
$$\frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{RC}h(t) = \frac{1}{C}q_i(t) \qquad (24)$$

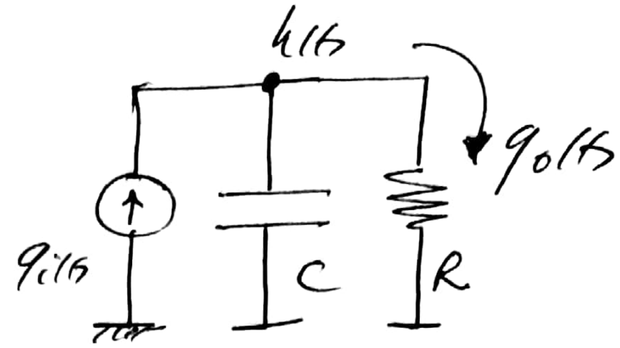
La Ec. (24) es una Ecuación Diferencial de 1ᵉʳ orden lineal a coeficientes constantes.

La unidad de la Capacidad Hidráulica es $[C] = [A] = [m^2]$

Scanned with CamScanner

Un modelo eléctrico equivalente a este modelo hidráulico será:





$[R] = \left[\frac{s}{m^2}\right]$; $[C] = [m^2]$

$$q_i(t) = C\frac{dh(t)}{dt} + \frac{h(t)}{R} \rightarrow \frac{dh(t)}{dt} + \frac{1}{RC}h(t) = \frac{1}{C}q_i(t) \quad (25)$$

Las Ec. (24) y (25) son iguales.

En la Unidad #2, Modelización de Sistemas Físicos, se trabajará con otros modelos hidráulicos, en el cual, las variables serán la presión p(t) y el flujo q(t), como se viene en ASyS.