# Ganancia de Mason

## Introducción

Cuando el Diagrama de Bloques de un sistema físico a controlar (Planta), se torna demasiado complicado en cuanto a determinar su función transferencia, o bien, si estamos ante la presencia de sistemas MIMO, se puede realizar un Diagrama de Flujo y aplicar la fórmula de la Ganancia de Mason. Para ello, se va a realizar una serie de definiciones y cálculo de varios ejemplos.

## Diagrama de Flujo

### Definiciones:

- Nodos: son variables que conectan ramas
- Ramas: caminos (recorridos), que conectan nodos. Son unidireccionales y contienen ganancia y signo.
- Nodo de Entrada: Sólo tiene ramas de salida.
- Nodo de Salida: Sólo tiene ramas de entrada
- Trayecto: Unión de ramas que pasan por los nodos. Su valor es la multiplicación de cada rama.
- Trayecto directo: Camino directo entre un nodo de entrada y uno de salida que no pasa por

ningún nodo mas de una vez.

Álgebra: El valor de un nodo es igual a la suma de todos sus ramas de entrada

Lazo: Es un trayecto que comienza y termina en el mismo nodo.

Lazos que no se tocan: Lazos que no tienen NADA en común, ni trayectos ni nodos.

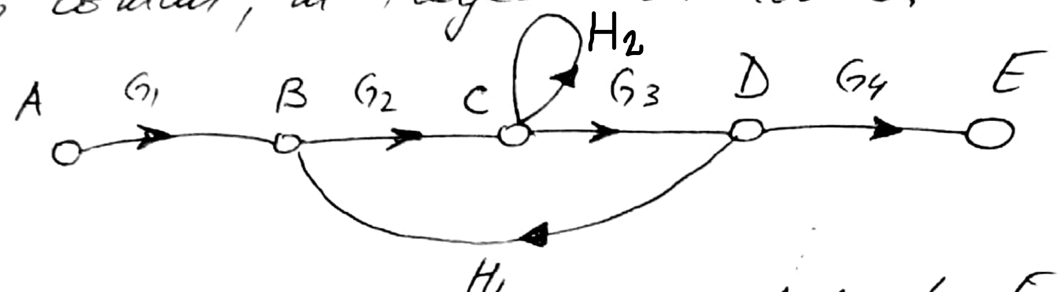



Fig. 1

A, B, C, D, E : Nodos ; A : Nodo de Entrada ; E : Nodo de Salida

$G_1, G_2, G_3, G_4, H_1, H_2$ : Ramas.

$G_1G_2G_3G_4$ : Trayecto Directo (unión de ramas) que a su vez conecta nodo de entrada y salida

$G_2G_3H_1$ y $H_2$ : Lazos

En la figura anterior, pueden apreciarse los nodos, ramas (futuros ganancias de Bloques) trayectos y lazos.

Ejemplo # 1 Realice el Diagrama en Bloques del siguiente circuito y luego traduzca el mismo a diagrama de flujo.

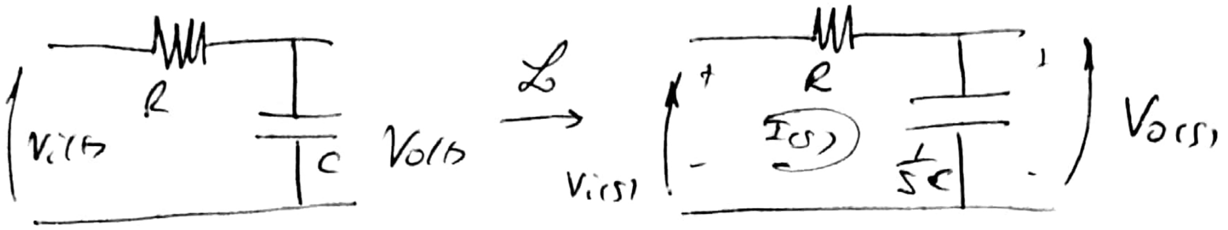



Fig. 2

$$V_{o}(s) = I(s)\cdot\frac{1}{SC}\ ; \quad I(s) = \frac{V_i(s) - V_o(s)}{R} \Rightarrow$$

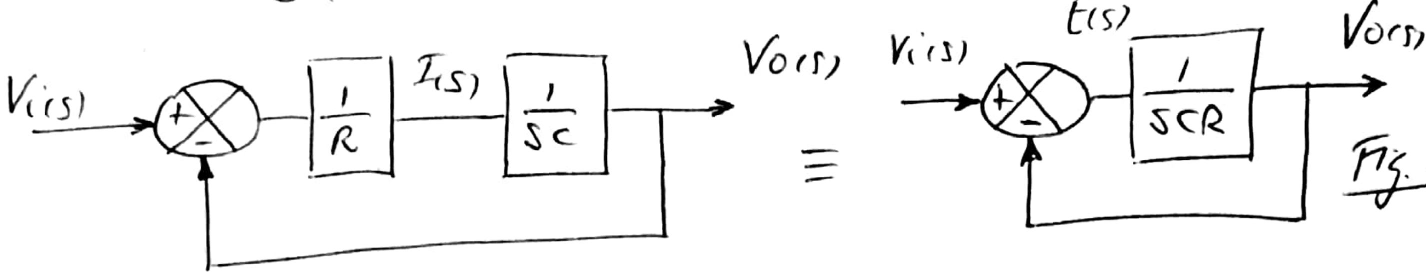



Fig. 3

$\Rightarrow$

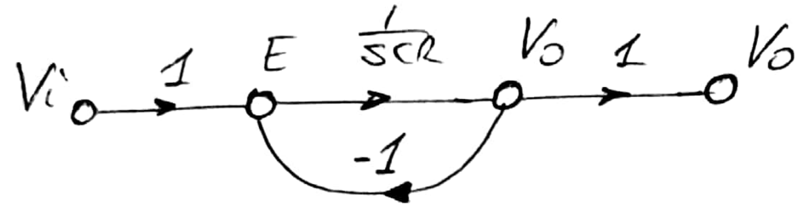



Fig. 4

Como se aprecia de la Fig. 4, se tienen los Nodos $V_i$, $E$ y $V_o$; $V_i$ y $V_o$ Nodos de Entrada y Salida respectivamente, $1\cdot\frac{1}{SCR}\cdot 1$ Trayecto Directo y $-1\cdot\frac{1}{SCR}$ Lazo. Se omite la variable "S" en los diagramas de Flujo por simplicidad.

**Ejemplo#2**: Obtenga el diagrama de Flujo.

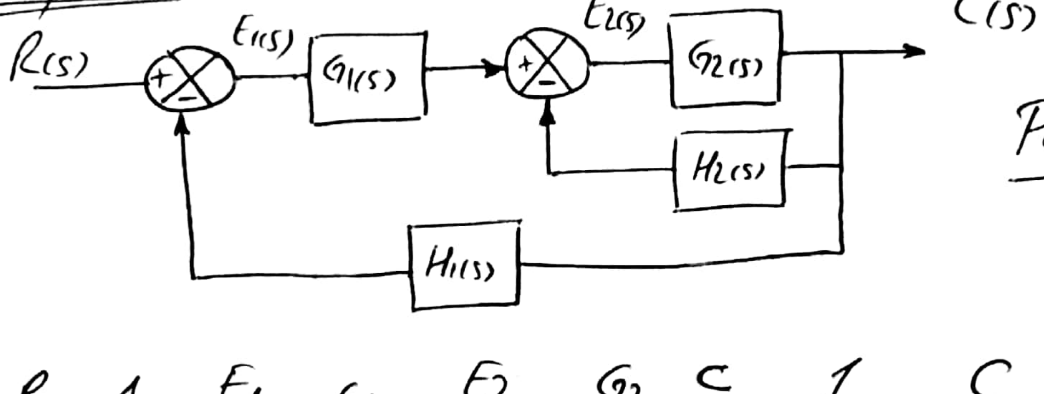
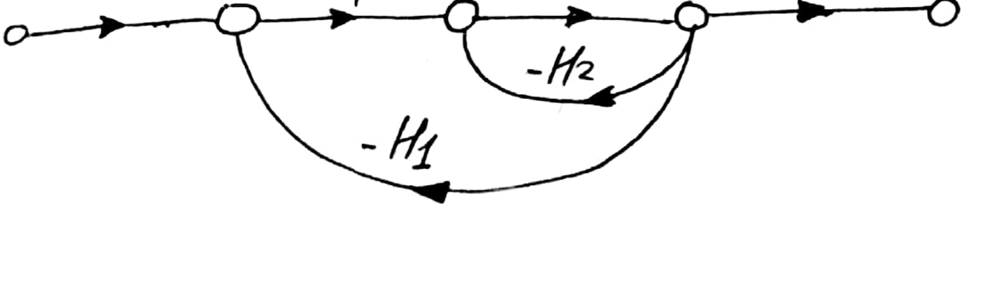



Fig. 5



A partir de los 2 ejemplos anteriores, se observa que es muy simple encontrar el diagrama de flujo a partir del diagrama de bloques de un sistema. Deben identificarse las variables (Nodos) y las ganancias (Ramas) para armar el diagrama.

## Fórmula de la Ganancia de Mason

Si se supone que entre el Nodo de salida C y de entrada R hay N caminos directos, la función transferencia $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{C}{R}$ se puede calcular con la fórmula de la Ganancia de Mason:

$$\frac{C}{R} = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_k}{\Delta} \qquad (1)$$

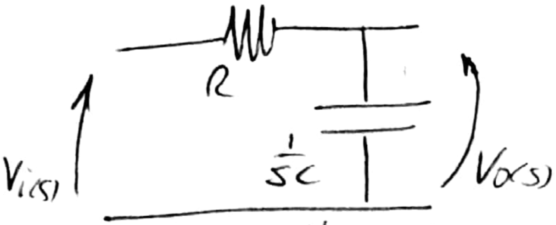
Siendo:

$\Delta$ = 1 - (suma de todas las ganancias de lazo) + (suma de productos de ganancias de todos los pares de lazos que no se tocan) - (suma de los productos de todas las combinaciones que no ganancias de lazo de todas las combinaciones que no se tocan, tomados de a tres) + (suma de los productos de todas las ganancias de lazo que no se tocan tomados de a cuatro) - ...

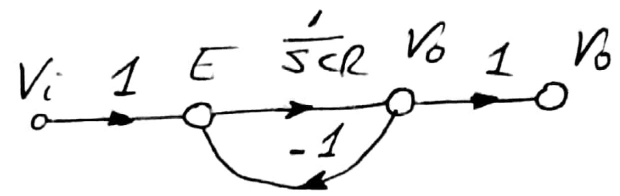
$P_k$ = Ganancia total del Trayecto directo k-ésimo

$\Delta_k$: $\Delta$ evaluado considerando solamente a los lazos que no tocan el camino directo k-ésimo.

## Ejemplo # 3 Obtengo la transferencia del siguiente circuito : Fig. 6




De Fig. 4 →




$$\frac{C}{R}=\frac{\sum_{k=1}^{N}P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{1\cdot\frac{1}{sCR}\cdot 1\,(1-0)}{1-\left(-\frac{1}{sCR}\right)}=\frac{\frac{1}{sCR}}{1+\frac{1}{sCR}}=\frac{1}{sCR+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{C}{R}=\frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}} \qquad (2)$$

## Ejemplo # 4 Calcule la transferencia

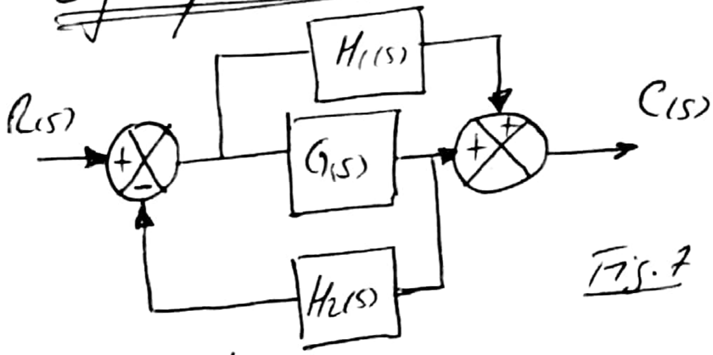
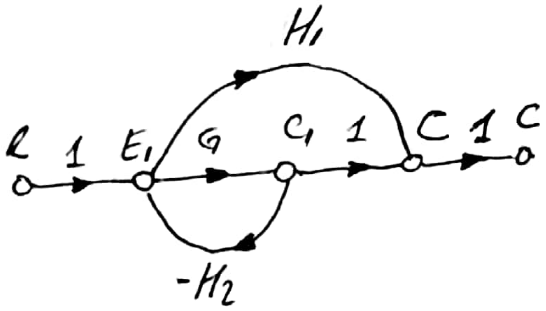



Fig. 7

≡




$$\frac{C}{R}=\frac{\sum_{k=1}^{N}P_k\Delta_k}{\Delta}=\frac{P_1\Delta_1+P_2\Delta_2}{\Delta}=\frac{G.1+H_1.1}{1\ (-GH_2)}\ ;\quad \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{G+H_1}{1+GH_2}$$

$$\text{Es decir: } \frac{C_{(s)}}{R_{(s)}}=\frac{G_{(s)}+H_{1(s)}}{1+G_{(s)}H_{2(s)}} \qquad (3)$$

## Ejemplo # 5

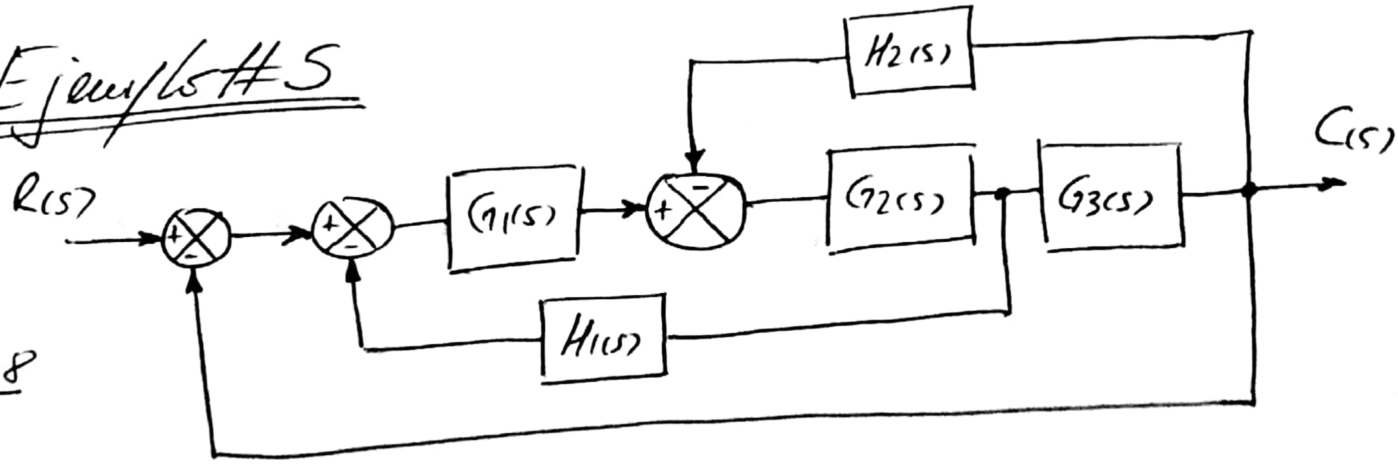



Fig. 8

A partir de la Fig. 8, se obtiene el diagrama de flujo:

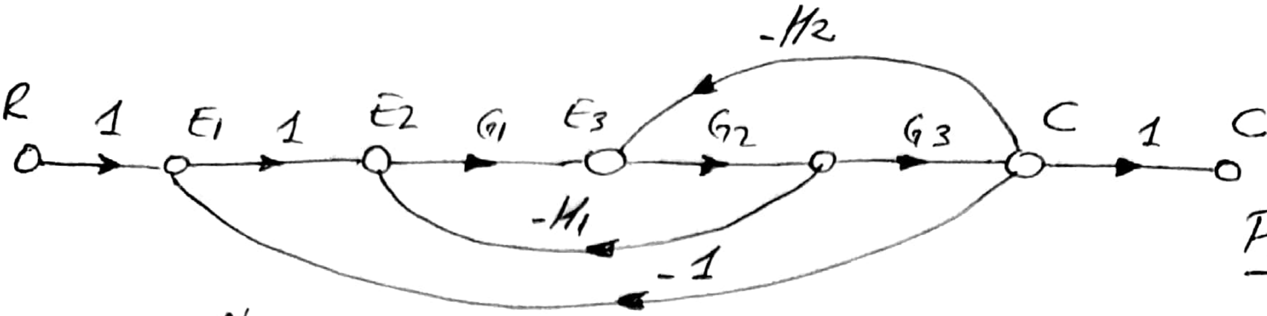



Fig. 9

$$\frac{C}{R} = \frac{\sum_{k=1}^{N} P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1-(-G_1 G_2 H_1 - G_1 G_2 G_3 - G_2 G_3 H_2)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) G_2(s) G_3(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) G_3(s) + G_1(s) G_2(s) H_1(s) + G_2(s) G_3(s) H_2(s)} \quad (4)$$

Ejemplo #6 Obtenga la transferencia $\frac{I_o(s)}{I_e(s)}$

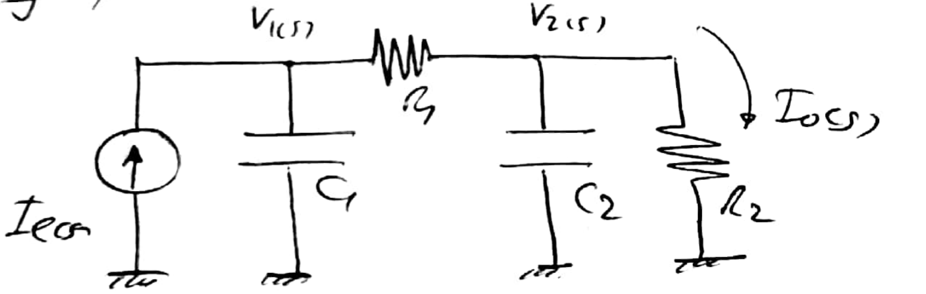



Fig. 10

Recordando el Diagrama de Bloques de este circuito:

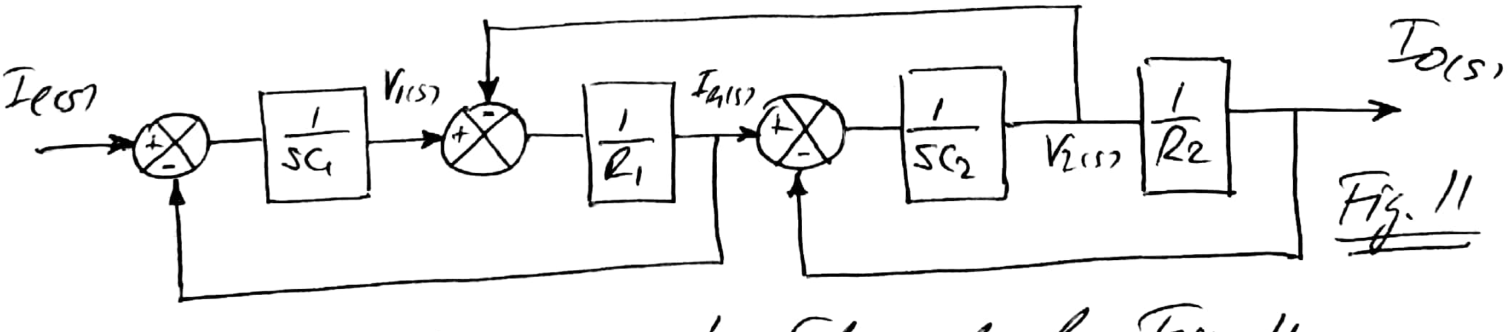



Fig. 11

Realizando el Diagrama de Flujo de la Fig. 11:

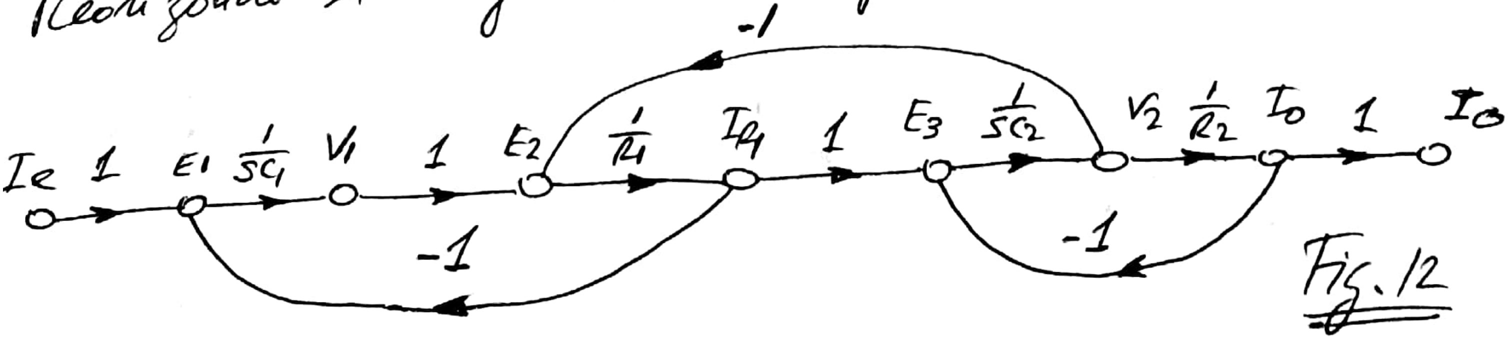



Fig. 12

De la Fig. 12, se tiene que:

$$\frac{I_o}{I_e}=\frac{\frac{1}{sC_1}\cdot\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{sC_2}\cdot\frac{1}{R_2}(1-0)}{1-\left(-\frac{1}{sC_1R_1}-\frac{1}{sC_2R_1}-\frac{1}{sC_2R_2}\right)+\left(-\frac{1}{sC_1R_1}\left(-\frac{1}{sC_2R_2}\right)\right)}$$

$$\frac{I_o(s)}{I_e(s)}=\frac{\frac{1}{s^2C_1C_2R_1R_2}}{1+\frac{1}{sC_1R_1}+\frac{1}{sC_2R_1}+\frac{1}{sC_2R_2}+\frac{1}{s^2C_1C_2R_1R_2}}$$

$$\frac{I_o(s)}{I_e(s)}=\frac{\cancel{\frac{1}{s^2C_1C_2R_1R_2}}}{\frac{s^2C_1C_2R_1R_2+sC_2R_2+sC_1R_2+sC_1R_1+1}{\cancel{s^2C_1C_2R_1R_2}}}=\frac{1}{s^2C_1C_2R_1R_2+(C_2R_2+C_1R_2+C_1R_1)s+1}$$

$$\frac{I_o(s)}{I_e(s)}=\frac{\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2+\left(\frac{1}{C_1R_1}+\frac{1}{C_2R_2}+\frac{1}{C_2R_1}\right)s+\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}} \qquad (5)$$

**Ejemplo #7** Calcule $\frac{C(s)}{R(s)}$; $\frac{C(s)}{D(s)}$ y $C(s)$

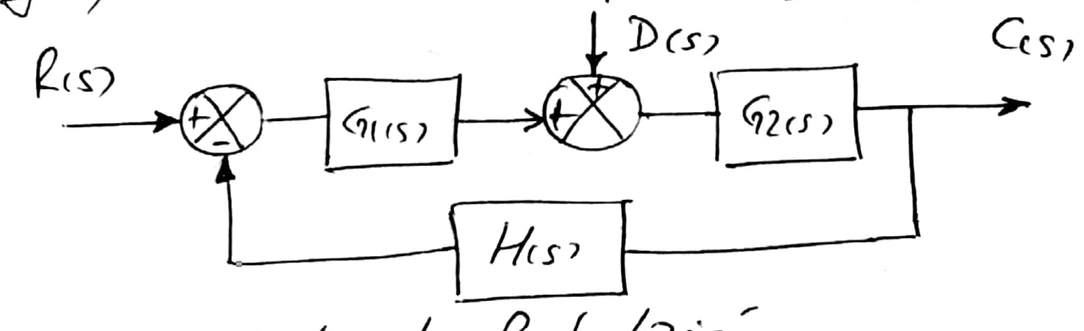



Fig. 13

D(s): Entrada de Perturbación.

A partir de la Fig. 13, se obtiene el Diag. Flujo:

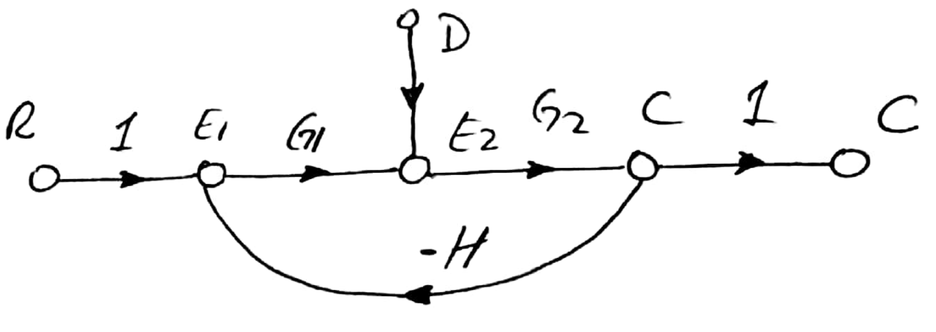



Fig. 14

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1-(-G_1G_2H)} \longrightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (6)$$

$$\frac{C}{D} = \frac{G_2}{1-(-G_1G_2H)} \longrightarrow \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (7)$$

De (6) y (7), se tiene que:

$$C(s) = C(s)\Big|_{R(s)} + C(s)\Big|_{D(s)} \quad \text{(Por linealidad)}$$

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)R(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} + \frac{G_2(s)D(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}\left(G_1(s)R(s) + D(s)\right) \quad (8)$$

**Ejemplo #8** Calcule $\frac{Y_2(s)}{Y_1(s)}$; $\frac{Y_4(s)}{Y_1(s)}$; $\frac{Y_7(s)}{Y_1(s)}$; $\frac{Y_7(s)}{Y_4(s)}$

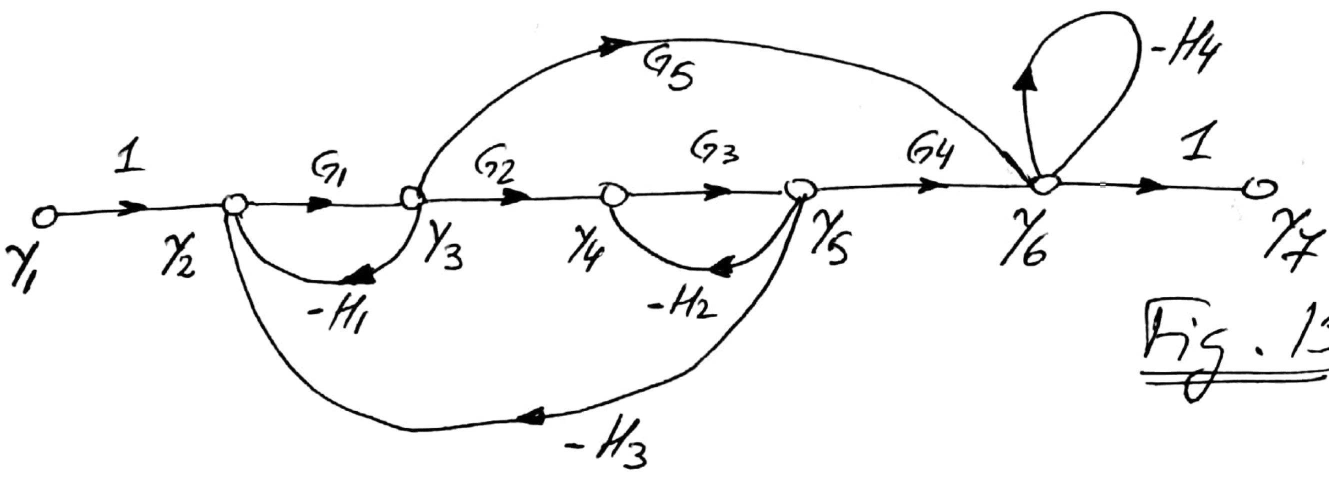



Fig. 15

$$\Delta = 1-(-G_1H_1 - G_3H_2 - G_1G_2G_3H_3 - H_4) + (G_1H_1G_3H_2 + G_1H_1H_4 + G_3H_2H_4 +$$
$$+ G_1G_2G_3H_3H_4) - (-G_1H_1G_3H_2H_4)$$

$$\Delta = 1 + G_1H_1 + G_3H_2 + G_1G_2G_3H_3 + H_4 + G_1G_3H_1H_2 + G_1H_1H_4 + G_3H_2H_4 +$$
$$+ G_1G_2G_3H_3H_4 + G_1G_3H_1H_2H_4 \quad (9)$$

Scanned with CamScanner

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1\left(1-(-G_3H_2 - H_4) + (-G_3H_2(-H_4))\right)}{\Delta}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1 + G_3H_2 + H_4 + G_3H_2H_4}{\Delta} \qquad (10)$$

$$\frac{y_4}{y_1} = \frac{G_1G_2(1-(-H_4))}{\Delta}; \qquad \frac{y_4}{y_1} = \frac{G_1G_2(1+H_4)}{\Delta} \qquad (11)$$

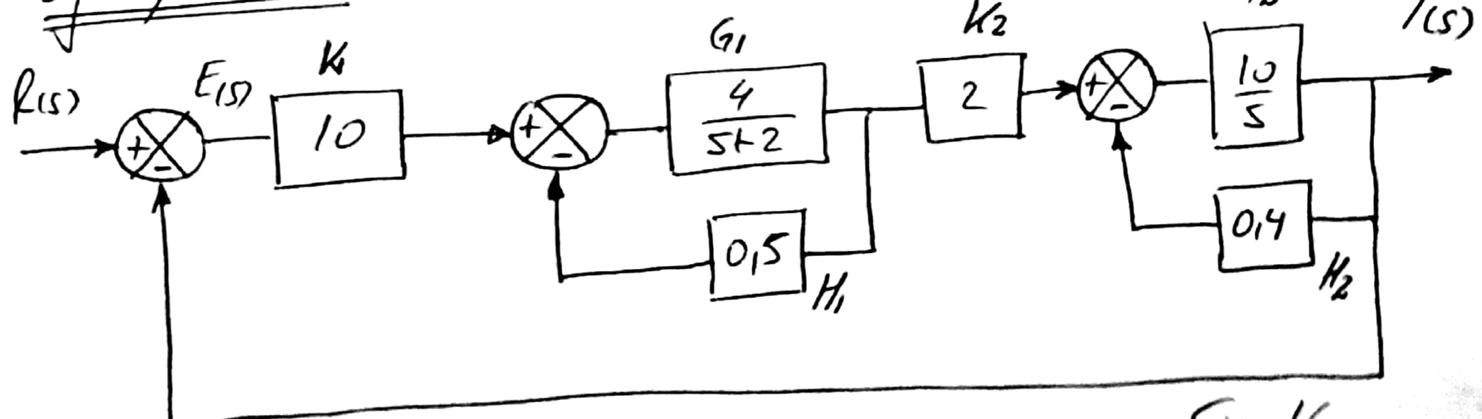
$$\frac{y_7}{y_1} = \frac{G_1G_2G_3G_4(1-0) + G_1G_5(1-(-G_3H_2))}{\Delta}$$

$$\frac{y_7}{y_1} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1+G_3H_2)}{\Delta} \qquad (12)$$

$$\frac{y_7}{y_4} = \frac{y_7/y_1}{y_4/y_1} = \frac{\dfrac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1+G_3H_2)}{\cancel{\Delta}}}{\dfrac{G_1G_2(1+H_4)}{\cancel{\Delta}}}$$

$$\frac{y_7}{y_4} = \frac{G_1G_2G_3G_4 + G_1G_5(1+G_3H_2)}{G_1G_2(1+H_4)} \qquad (13)$$

<u>Ejemplo # P</u> Calcule $\frac{Y(s)}{R(s)}$ y $\frac{E(s)}{R(s)}$




<u>Fig. 16</u>

A partir de la Fig. 16, se tiene que:

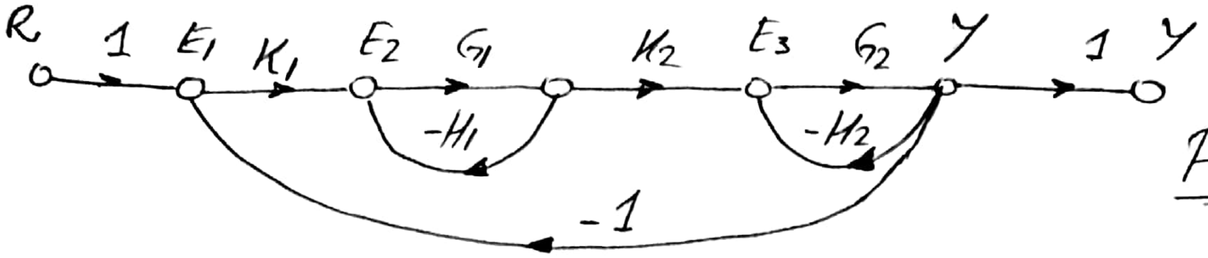



Fig. 17

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_1K_2G_1G_2}{1-(-G_1H_1-G_2H_2-K_1K_2G_1G_2)+(G_1H_1G_2H_2)}$$

$$\frac{Y}{e} = \frac{K_1K_2G_1G_2}{1+G_1H_1+G_2H_2+K_1K_2G_1G_2+G_1G_2H_1H_2} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} \quad (14)$$

$$\frac{E}{R} = \frac{E_1}{R} = \frac{1(1-(-G_1H_1-G_2H_2)+(G_1H_1G_2H_2))}{\Delta}$$

$$\frac{E}{R} = \frac{P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{1+G_1H_1+G_2H_2+G_1G_2H_1H_2}{1+G_1H_1+G_2H_2+K_1K_2G_1G_2+G_1G_2H_1H_2} \quad (15)$$

$$\Delta = 1+\frac{4}{s+2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\cancel{10}}{s}\cdot\frac{4}{\cancel{10}}+10.2\cdot\frac{4}{s+2}\cdot\frac{10}{s}+\frac{\cancel{4}^{2}}{s+2}\cdot\frac{10}{s}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}\cdot\frac{4}{\cancel{10}}$$

$$\Delta = 1+\frac{2}{s+2}+\frac{4}{s}+\frac{800}{s(s+2)}+\frac{8}{s(s+2)}$$

$$\Delta = \frac{s(s+2)+2s+4(s+2)+800+8}{s(s+2)} = \frac{s^2+2s+2s+4s+8+800+8}{s(s+2)}$$

$$\Delta = \frac{s^2+8s+816}{s(s+2)} \quad (16) \; ; \; P_1\Delta_1 = K_1K_2G_1G_2 = 10.2\cdot\frac{4}{s+2}\,\frac{10}{s}$$

$$P_1\Delta_1 = \frac{800}{s(s+2)} \quad (17) \; ; \; P_2\Delta_2 = 1+\frac{4}{s+2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\cancel{10}}{s}\,\frac{4}{\cancel{10}}+\frac{\cancel{4}^{2}}{s+2}\cdot\frac{10}{s}\,\frac{1}{2}\,\frac{4}{\cancel{10}}$$

$$P_2\Delta_2 = 1+\frac{2}{s+2}+\frac{4}{s}+\frac{8}{s(s+2)} = \frac{s(s+2)+2s+4(s+2)+8}{s(s+2)}$$

$$P_2\Delta_2 = \frac{s^2+2s+2s+4s+8+8}{s(s+2)} \; ; \; P_2\Delta_2 = \frac{s^2+8s+16}{s(s+2)} \quad (18)$$

A partir de (14), (15), (16), (17) y (18) se tiene que:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cancel{\frac{800}{s(s+2)}}}{\cancel{\frac{s^2+8s+816}{s(s+2)}}} \; ; \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{800}{s^2+8s+816} \quad (19)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cancel{\frac{s^2+8s+16}{s(s+2)}}}{\cancel{\frac{s^2+8s+816}{s(s+2)}}} \; ; \quad \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s^2+8s+16}{s^2+8s+816} \quad (20)$$

**Ejemplo #10.** Encuentre las transferencias $\frac{V_1(s)}{F(s)}$; $\frac{V_2(s)}{F(s)}$; $\frac{X_1(s)}{F(s)}$ y $\frac{X_2(s)}{F(s)}$ del siguiente sistema mecánico.

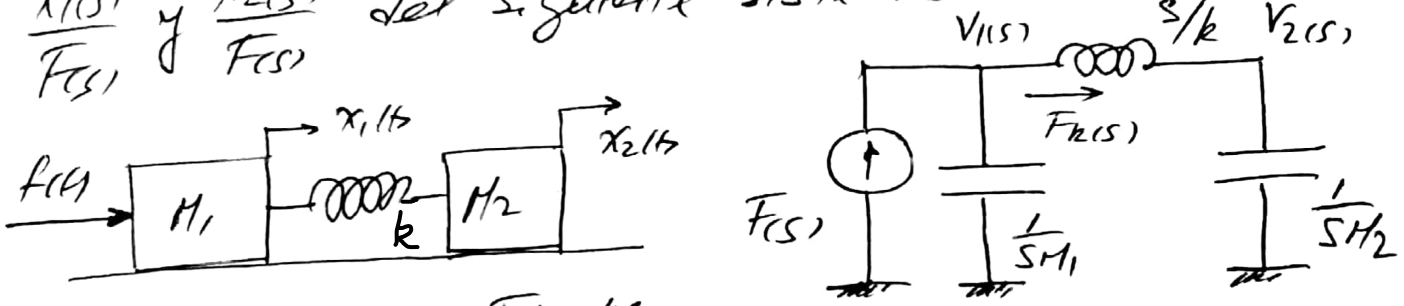



Fig. 18

$$F(s) = sM_1V_1(s) + F_k(s) \rightarrow V_1(s) = \frac{1}{sM_1}\left(F(s) - F_k(s)\right) \; ; \quad F_k(s) = \frac{V_1(s) - V_2(s)}{s/k}$$

$$F_k(s) = \frac{k}{s}\left(V_1(s) - V_2(s)\right) \; ; \quad V_2(s) = \frac{1}{sM_2}F_k(s) \qquad (21)$$

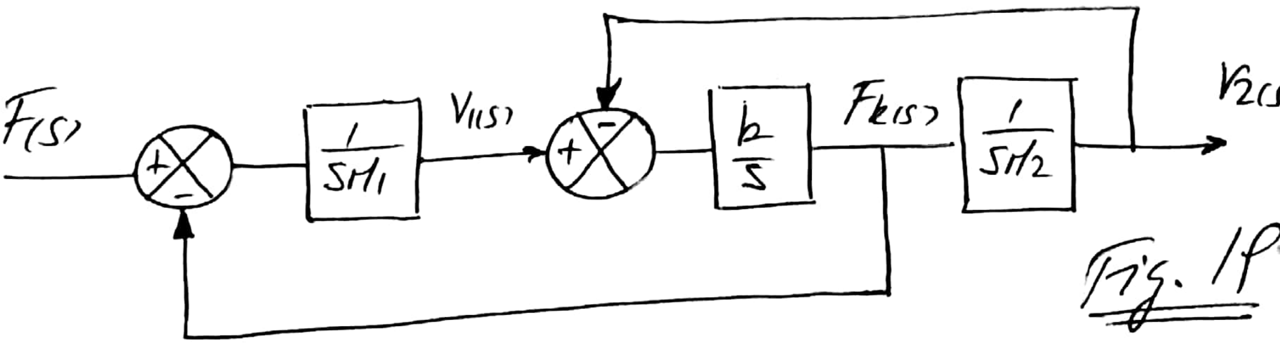



Fig. 19

La Fig. 19 se lleva a diagrama de Flujo como se muestra en la Fig. 20:

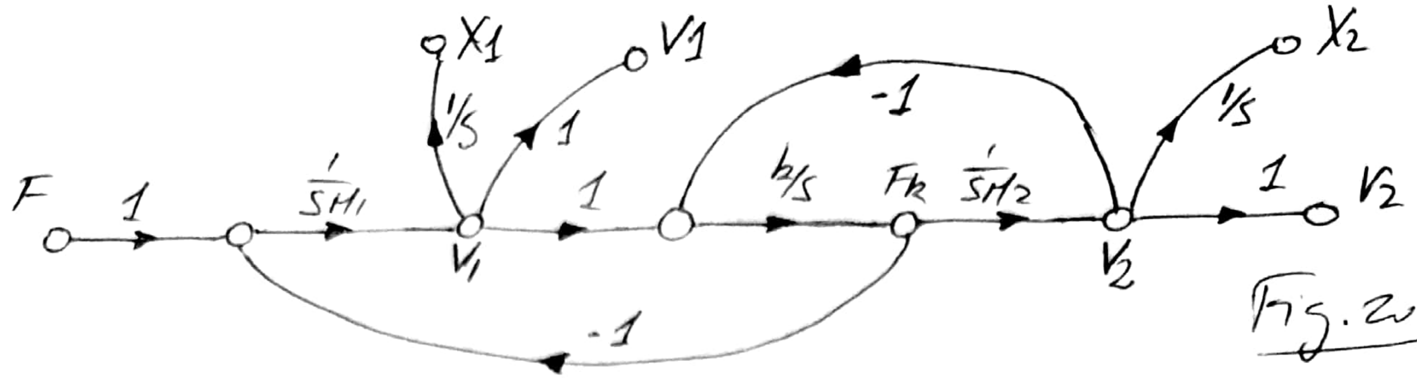



Fig. 2

$$\frac{V_1}{F} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta}\ ; \quad \Delta = 1 + \frac{k}{s^2M_1} + \frac{k}{s^2M_2} = \frac{s^2M_1M_2 + kM_2 + kM_1}{s^2M_1M_2}$$

$$\frac{V_1}{F} = \frac{\frac{1}{sM_1}\left(1+\frac{k}{s^2M_2}\right)}{\Delta} = \frac{\dfrac{s^2M_2+k}{\cancel{s^3M_1M_2}}}{\dfrac{s^2M_1M_2+k(M_1+M_2)}{\cancel{s^2M_1M_2}}} = \frac{s^2M_2+k}{\left(s^2M_1M_2+k(M_1+M_2)\right)s}$$

$$\frac{V_{1(s)}}{F_{(s)}} = \frac{s^2M_2+k}{s\left[s^2M_1M_2+k(M_1+M_2)\right]} \qquad (22)$$

$$\frac{X_1}{F} = \frac{\frac{1}{s^2M_1}\left(1+\frac{k}{s^2M_2}\right)}{\Delta} \longrightarrow \frac{X_{1(s)}}{F_{(s)}} = \frac{s^2M_2+k}{s^2\left[s^2M_1M_2+k(M_1+M_2)\right]} \qquad (23)$$

$$\frac{V_2}{F} = \frac{\dfrac{k}{\cancel{s^3M_1M_2}}}{\dfrac{s^2M_1M_2+k(M_1+M_2)}{\cancel{s^2M_1M_2}}} \longrightarrow \frac{V_{2(s)}}{F_{(s)}} = \frac{k}{s\left[s^2M_1M_2+k(M_1+M_2)\right]} \qquad (24)$$

$$\frac{X_2}{F} = \frac{\dfrac{k}{\cancel{s^4M_1M_2}}}{\dfrac{s^2M_1M_2+k(M_1+M_2)}{\cancel{s^2M_1M_2}}} \longrightarrow \frac{X_{2(s)}}{F_{(s)}} = \frac{k}{s^2\left[s^2M_1M_2+k(M_1+M_2)\right]} \qquad (25)$$