Representación de Sistemas SISO (Parte #2)

1) Estructura Canónica Controlable (Transferencia)

A partir de la Figura 1, se pretende obtener la Transferencia del mismo. Se trabaja con la variable auxiliar $M(s)$.

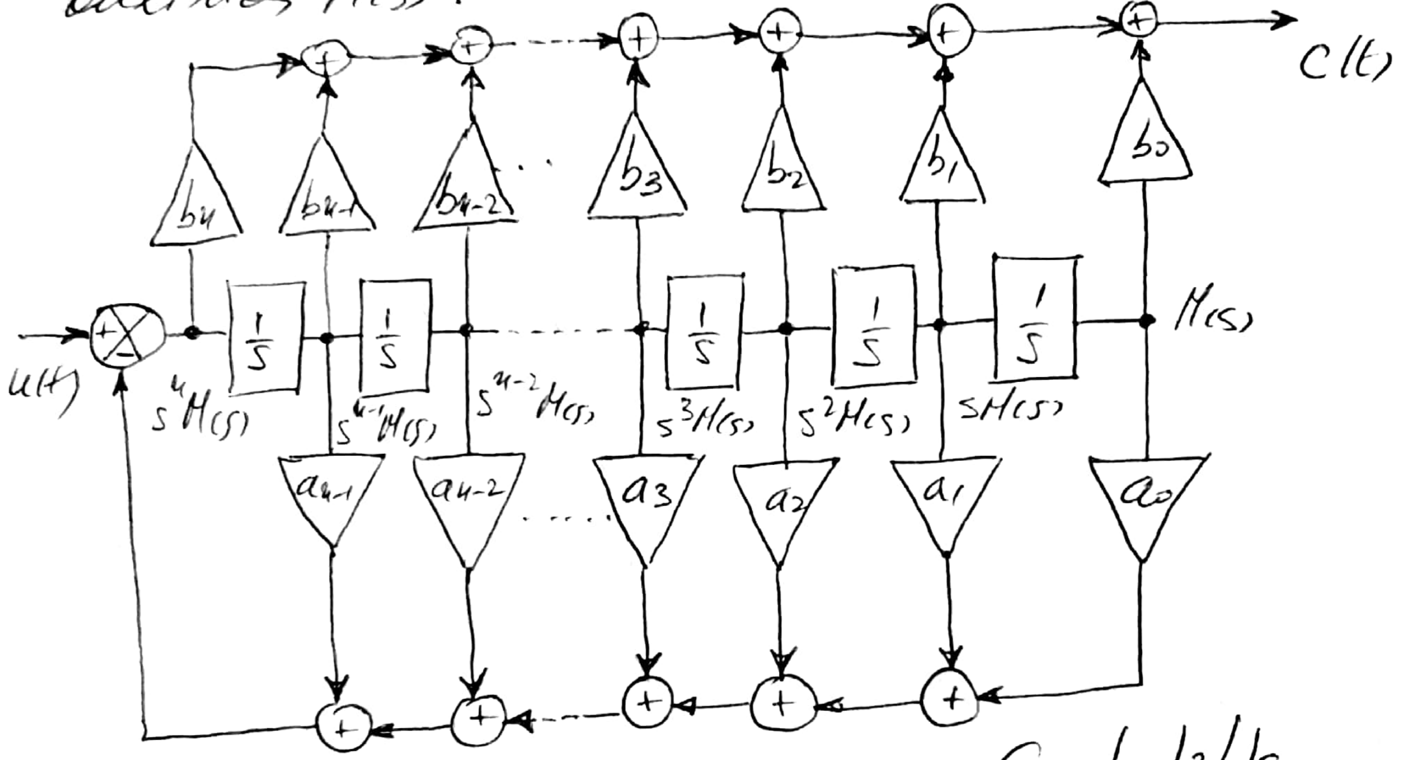


Figura 1. Estructura Canónica Controlable

De la Figura 1, se tiene que:

$$s^n M(s) = U(s) - s^{n-1} M(s) a_{n-1} - s^{n-2} M(s) a_{n-2} - \dots - s^3 M(s) a_3(s) - s^2 M(s) a_2 - s M(s) a_1 - M(s) a_0$$

$$M(s)\left(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\right) = U(s)$$

$$M(s) = \frac{U(s)}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (1)$$

$$C_{(s)} = b_n s^n M_{(s)} + b_{n-1} s^{n-1} M_{(s)} + b_{n-2} s^{n-2} M_{(s)} + \cdots +$$
$$+ b_3 s^3 M_{(s)} + b_2 s^2 M_{(s)} + b_1 s M_{(s)} + b_0 M_{(s)}$$

$$C_{(s)} = (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) M_{(s)} \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2), se tiene que

$$C_{(s)} = \frac{(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) U_{(s)}}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\frac{C_{(s)}}{U_{(s)}} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (3)$$

La Ec. (3) es la transferencia del Sistema Canónico Controlable. Puede apreciarse de la Figura 1, que las realimentaciones negativas de cada integrador, están relacionadas con los a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. En cambio, los coeficientes del numerador (que darán origen a los ceros), están relacionados con los b_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

2) Estructura Canónica Controlable (Variable Estado)

Se repetirá la Figura 1 a continuación, pues se trabajará ahora con VE. Se nombrará la salida de cada integrador, con una V.E (concepto de energía).

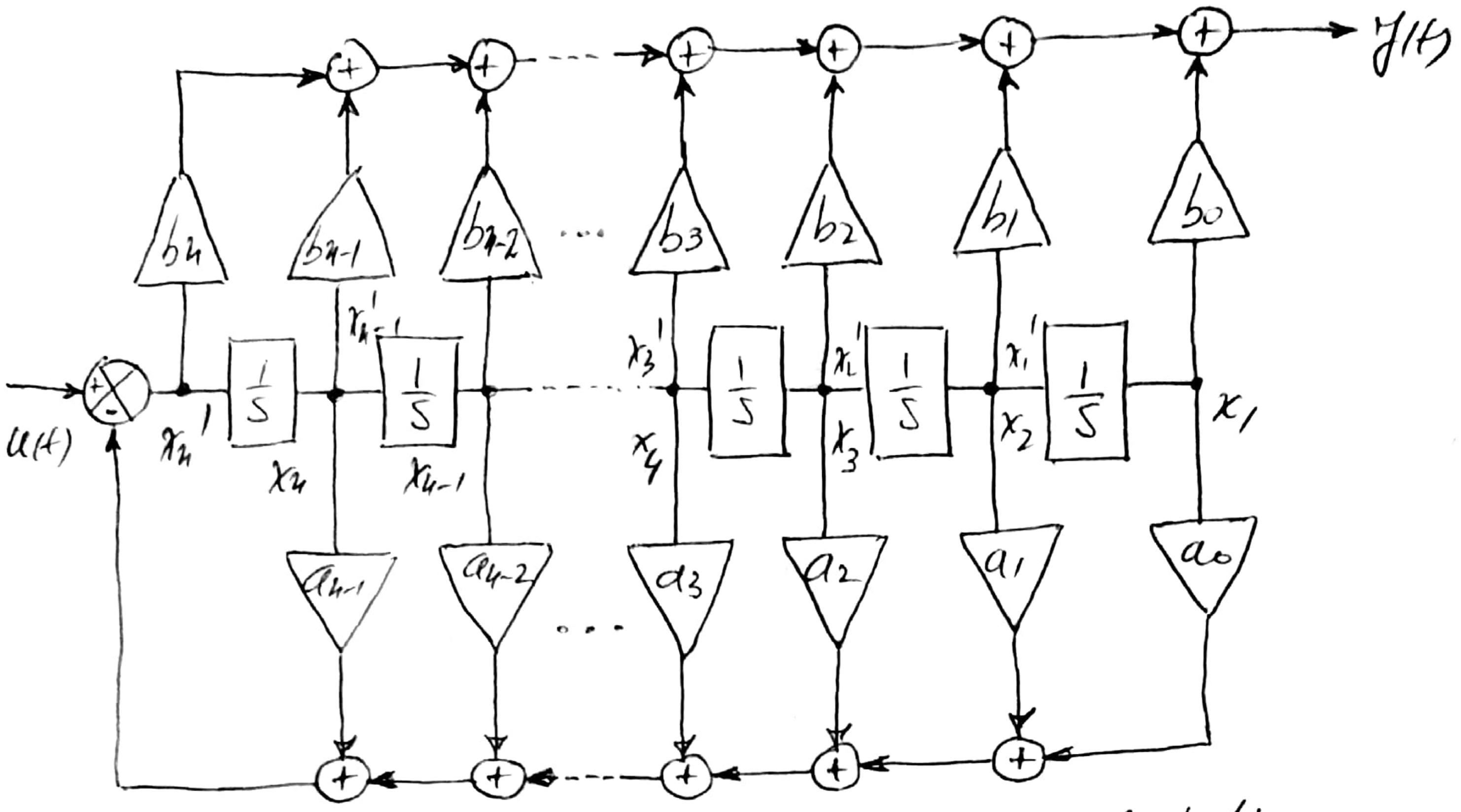


Figura 2. Estructura Canónica Controlable

De la figura anterior, se tiene que:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = x_4 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = u(t) - a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - \cdots - a_{n-2} x_{n-1} - a_{n-1} x_n \end{cases} \quad (4)$$

A su vez: (5)

$$y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2 + b_2 x_3 + b_3 x_4 + \cdots + b_{n-2} x_{n-1} + b_{n-1} x_n + b_n x_n'$$

teniendo en cuenta la última expresión de la Ec. (4) y reemplazando en la Ec. (5), se tiene que:

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + \dots + b_{n-2}x_{n-1} + b_{n-1}x_n + b_n(u - a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - \dots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n) \quad (6)$$

Reagrupando los términos de la Ec (6), se obtiene:

$$y(t) = (b_0 - b_na_0)x_1 + (b_1 - b_na_1)x_2 + (b_2 - b_na_2)x_3 + \dots + (b_{n-2} - b_na_{n-2})x_{n-1} + (b_{n-1} - b_na_{n-1})x_n + u \quad (7)$$

Tomando las Ecs (4) y (7) a formato Matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (8)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} (b_0 - b_na_0) & (b_1 - b_na_1) & (b_2 - b_na_2) & \cdots & (b_{n-1} - b_na_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [b_n]u$$

Las Ecs. matriciales (8), son el caso particular para un sistema SISO, de las Ecuaciones de Estado y salidas generales de la Ec. (9)

$$\begin{cases} \dot{X}(t)^{n,1} = A^{n,n} X(t)^{n,1} + B^{n,r} U(t)^{r,1} \\ Y(t)^{m,1} = C^{m,n} X(t)^{n,1} + D^{m,r} U(t)^{r,1} \end{cases} \quad (9)$$

Donde:

$$X(t)^{n,1} = [x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t) \cdots x_n(t)]^T$$

$$U(t)^{r,1} = [u_1(t)\ u_2(t)\ u_3(t) \cdots u_r(t)]^T$$

$$Y(t)^{m,1} = [y_1(t)\ y_2(t)\ y_3(t) \cdots y_m(t)]^T$$

Ejemplo #1 $G(s) = \frac{C(s)}{U(s)} = \frac{3s^2-2s+4}{s^2+3s+6}$. Encuentre las matrices de estado, Entrada, Salida y Transferencia Directa A, B, C y D respectivamente, en la estructura canónica controlable.

$$G(s) = \frac{\overset{b_2}{3}s^2 \overset{b_1}{-2}s + \overset{b_0}{4}}{s^2 + \underbrace{3}_{a_1}s + \underbrace{6}_{a_0}}$$

A partir de Ec. (8), se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D = [b_2] = [3]$$

$$C = [(b_0 - b_2 a_0)\ (b_1 - b_2 a_1)] = [(4-3.6)\ (-2-3.3)] = [-14\ \ -11]$$

Recordando que: $\frac{C(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}B + D$, se verificará si las matrices A, B, C y D cumplen la transferencia dada en el ejercicio.

$$(SI-A) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 6 & s+3 \end{pmatrix}$$

$$\det(SI-A) = s^2+3s+6 \quad ; \quad (SI-A)^{-1} = \frac{\text{Mat. Adj}(SI-A)}{\det(SI-A)}$$

$$(SI-A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix}}{s^2+3s+6} \quad ; \quad \frac{C(s)}{U(s)} = C(SI-A)^{-1}B + D$$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{\begin{pmatrix} -14 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{s^2+3s+6} + 3$$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{\begin{pmatrix} -14 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}}{s^2+3s+6} + 3 = \frac{-11s-14}{s^2+3s+6} + 3$$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{-11s-14+3(s^2+3s+6)}{s^2+3s+6} = \frac{-11s-14+3s^2+9s+18}{s^2+3s+6}$$

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{3s^2-2s+4}{s^2+3s+6} \qquad (11)$$

La Ec. (11), verifica la transferencia a partir de la cual se calcularon las matrices A, B, C y D del Modelo Canónico Controlable

3) Solución transitoria (Natural) y Permanente

Sea el sistema MIMO de la Figura 3:

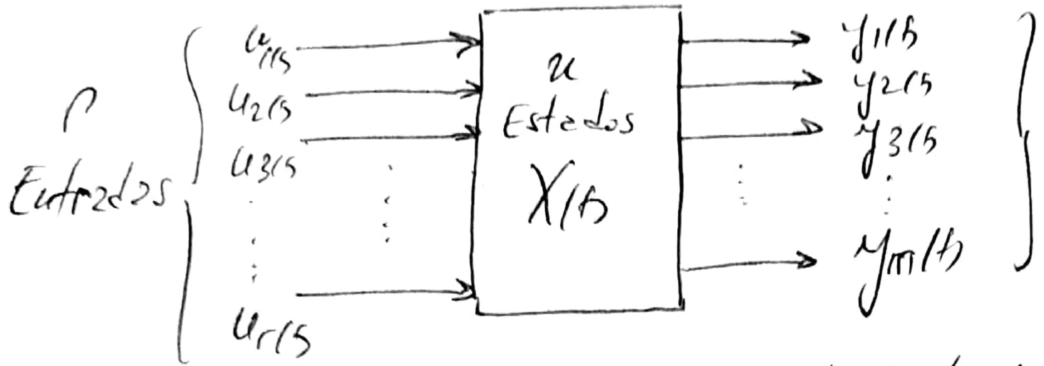


Figura 3

Vector de Entradas: Vector de Estados Vector de Salidas

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ U_r(t) \end{bmatrix}^{r,1} \qquad X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}^{n,1} \qquad Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}^{m,1}$$

Llevando el sistema MIMO a Estados:

$$\begin{cases} X'(t) = A^{n,n} X(t) + B^{n,r} U(t) \\ Y(t) = C^{m,n} X(t) + D^{m,r} U(t) \end{cases} \qquad (12)$$

Transformando por Laplace miembro a miembro la Ec. (12):

$$\begin{cases} sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) & (a) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) & (b) \end{cases} \qquad (13)$$

Operando con la Ecuación (13)(a):

Escaneado con CamScanner

$$sX_{(s)} - AX_{(s)} = X_{(0)} + BU_{(s)} \; ; \quad (sI - A)X_{(s)} = X_{(0)} + BU_{(s)}$$

$$X_{(s)} = (sI-A)^{-1}X_{(0)} + (sI-A)^{-1}BU_{(s)} \qquad (14)$$

Reemplazando la Ec (14) a la (13b):

$$Y_{(s)} = CX_{(s)} + DU_{(s)} = C\left[(sI-A)^{-1}X_{(0)} + (sI-A)^{-1}BU_{(s)}\right] + DU_{(s)}$$

$$Y_{(s)} = C(sI-A)^{-1}X_{(0)} + C(sI-A)^{-1}BU_{(s)} + DU_{(s)}$$

$$Y_{(s)} = C(sI-A)^{-1}X_{(0)} + \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U_{(s)} \qquad (15)$$

De (14) y (15), se tiene que:

$$\begin{cases} X_{(s)} = (sI-A)^{-1}X_{(0)} + (sI-A)^{-1}BU_{(s)} & (a) \\ Y_{(s)} = C(sI-A)^{-1}X_{(0)} + \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U_{(s)} & (b) \end{cases} \qquad (16)$$

Antitransformando (16b):

$$Y_{(t)} = C\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}X_{(0)} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U_{(s)}\right\}$$

$$Y_{(t)} = Y_T(t) + Y_F(t) \qquad (17)$$

De (17) se ve claramente la respuesta del sistema MIMO separado en su componente transitoria (también llamada Natural) y la respuesta forzada (o permanente).

Si $X_{(0)} = [x_{1(0)}\ x_{2(0)}\ x_{3(0)} \cdots x_{n(0)}]^T = [0\ 0 \cdots 0]^T$, es decir, condiciones iniciales nulas del vector de estado, se tiene que:

$$\overset{m,1}{Y(s)} = [C(SI-A)^{-1}B + D]\overset{r,1}{U(s)} \quad (18)$$

Se define $\overset{m,r}{F(s)} = C(SI-A)^{-1}B + D \quad (19)$

La Ec. (19) se llama MATRIZ TRANSFERENCIA del sistema MIMO. En particular, si $m = r = 1$, es decir, sistema SISO, se tiene que:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(SI-A)^{-1}B + D \quad (20)$$

La Ec. (20), se utilizó en el Ejemplo #1.

De la Ec (16a), se define a la Matriz de Transición de Estados:

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{(SI-A)^{-1}\} = e^{At} \quad (21)$$

La versión discreta de la Ec. (21) será muy importante para calcular numéricamente el vector de estado y a las salidas discretas $Y[k]$, o bien, las digitales $Y[kT]$.

4) Diagrama de Flujo de Estados.

Ya se ha tratado el pasaje de diagrama en bloques de sistemas a diagrama de Flujo para poder aplicar Fórmula de Ganancia de Mason.
Asimismo, con la Ec. (8), se puede pasar una función transferencia de un sistema SISO a su modelo de estados canónico controlable.

Ahora bien, que pasa si esa transferencia proviene de una Ecuación Diferencial con condiciones iniciales, es decir, de la Ec. (3),

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (22)$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = $$
$$= (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) =$$
$$= b_n s^n U(s) + b_{n-1} s^{n-1} U(s) + \dots + b_2 s^2 U(s) + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

Antitransformando:

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = \quad (23)$$
$$= b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + b_2 u''(t) + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

Con condiciones iniciales a la Ec. (23):

$$y(0),\ y'(0),\ y''(0),\ y'''(0),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)$$

¿Cómo se puede tratar el sistema de la Ec (22) pero teniendo en cuenta las condiciones iniciales?

Se analiza para una Ec. Dif. de 1er orden y luego se extiende para orden "n".

Supongamos la siguiente Ec. Diferencial que se desprende de la Figura 4:

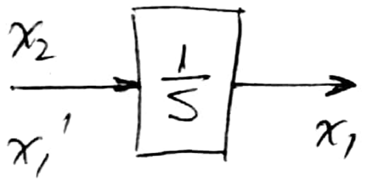


Figura 4

Con $x_1(t_0)$ condición inicial. $\Rightarrow$

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \ ; \text{ con } x_1(t_0) \quad (24)$$

Resolviendo la Ec. (24), se tiene que:

$$dx_1(t) = x_2(t)dt \ ; \quad \int_{x_1(t_0)}^{x_1(t)} dx_1(t) = \int_{t_0}^{t} x_2(t)dt \ ;$$

$$dx_1(t)\Big|_{x_1(t_0)}^{x_1(t)} = \int_{t_0}^{t} x_2(t)dt \ ; \quad x_1(t) - x_1(t_0) = \int_{t_0}^{t} x_2(t)dt \ ;$$

$$x_1(t) = \int_{t_0}^{t} x_2(t)dt + x_1(t_0) \quad (25)$$

. L. miembro Ec. (25)

$$X_1(s) = \mathcal{L}\left\{\int_{t_0}^{t} x_2(t)dt + x_1(t_0)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_{t_0}^{t} x_2(t)dt\right\} + \mathcal{L}\left\{x_1(t_0)\right\}$$

$$X_1(s) = \mathcal{L}\left\{\int_{t_0}^{t} x_2(t)\,dt\right\} + \frac{x_1(t_0)}{s} = \mathcal{L}\left\{\int_0^{t} x_2(t)\,dt - \int_0^{t_0} x_2(t)\,dt\right\} + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

$$X_1(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^{t} x_2(t)\,dt\right\} - \mathcal{L}\left\{\int_0^{t_0} x_2(t)\,dt\right\} + \frac{x_1(t_0)}{s}$$

$$X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s} - \mathcal{L}\left\{\int_0^{t_0} x_2(t)\,dt\right\} + \frac{x_1(t_0)}{s} \qquad (26)$$

De la Ec. (26) se observa que $\mathcal{L}\left\{\int_0^{t_0} x_2(t)\,dt\right\} = 0$ ya que esta Ec. Dif. (24) comienza en $t \geq t_0$.

En consecuencia:

$$X_1(s) = \frac{1}{s} X_2(s) + \frac{x_1(t_0)}{s} \qquad (27)$$

Llevando a Diagrama en Bloques a la Ec. (27)

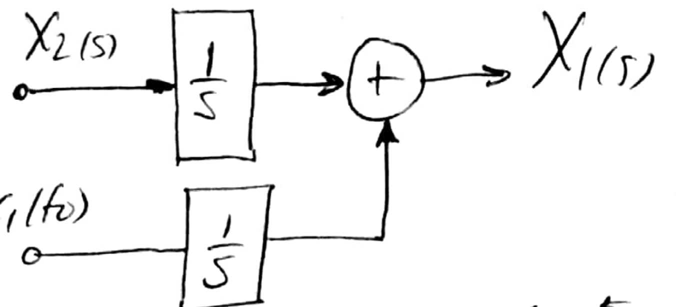


Figura 5

Esta representación de la Ec. (24) en dominio de Laplace es poco práctica y se complica cuando se tiene un Diagrama en Bloques complicado.

En su lugar, se puede trabajar con el diagrama de flujo de la Figura 5, que se ve en la Figura 6.

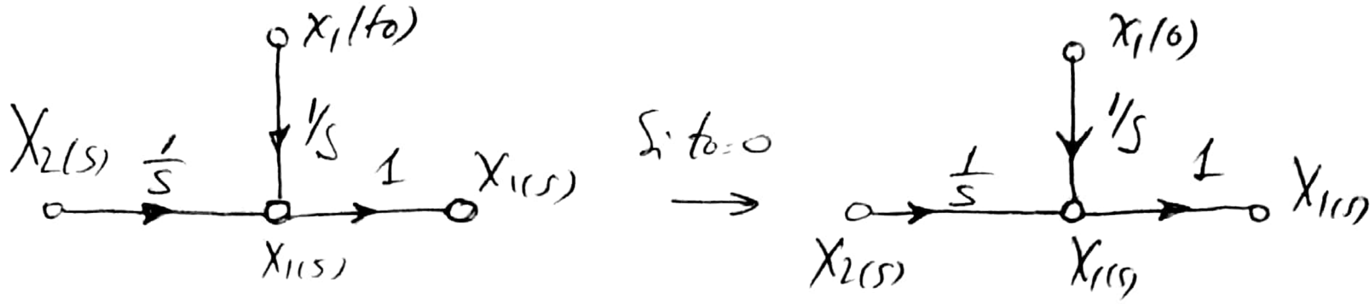


Figura 6. Diagrama de flujo de Ec (24)

Aplicando Mason, se ve que:

$$X_1(s) = X_1(s)\Big|_{X_2(s)} + X_1(s)\Big|_{x_1(t_0)} = \frac{\frac{1}{s}\cdot 1}{1} X_2(s) + \frac{\frac{1}{s}\cdot 1}{1} x_1(t_0)$$

$X_1(s) = \frac{1}{s} X_2(s) + \frac{1}{s} x_1(t_0)$ verificando la Ec. (27)

Teniendo en cuenta este análisis y realizando un diagrama de flujo canónico de la Ec. (23), teniendo en cuenta la Figura 6. se obtiene:

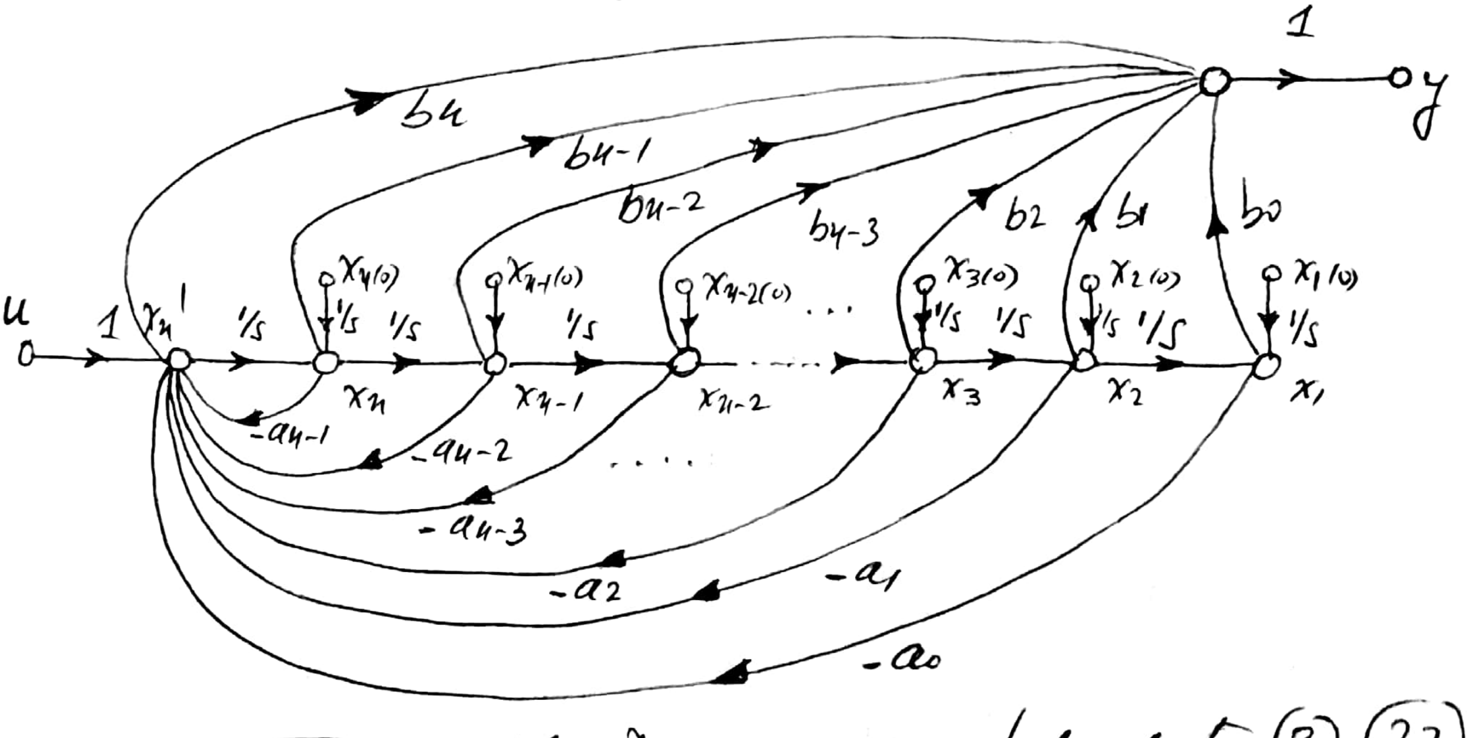


Figura 7 Diagrama de estado de Ec (3) a (27) con condiciones iniciales. t0=0

A partir de la Figura 7, se desprende fácilmente por análisis de las variables de estado, que las matrices A, B, C y D son las que se obtienen a partir de la Ec. 8

Si en la Figura 7, $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = \dots = x_n(0) = 0$, es decir, condiciones iniciales nulas, se tiene una única entrada y aplicando Mason, obtenemos

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n + \frac{b_{n-1}}{s} + \frac{b_{n-2}}{s^2} + \dots + \frac{b_2}{s^{n-2}} + \frac{b_1}{s^{n-1}} + \frac{b_0}{s^n}}{1 + \frac{a_{n-1}}{s} + \frac{a_{n-2}}{s^2} + \dots + \frac{a_2}{s^{n-2}} + \frac{a_1}{s^{n-1}} + \frac{a_0}{s^n}},$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (28)$$

La Ec 28 verifica el modelo canónico controlable de la Ec 3

Ejemplo # 2: Calcule la tensión de salida $V_o(s)$ sabiendo que $V_c(0) = V_{co}$ y que $i(0) = i_o$

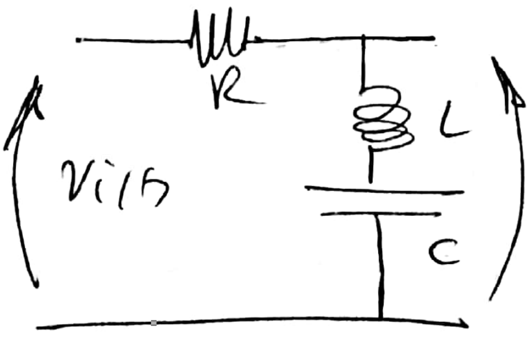


Figura 8 Circuito RLC con CI.

1ra Forma. Laplace

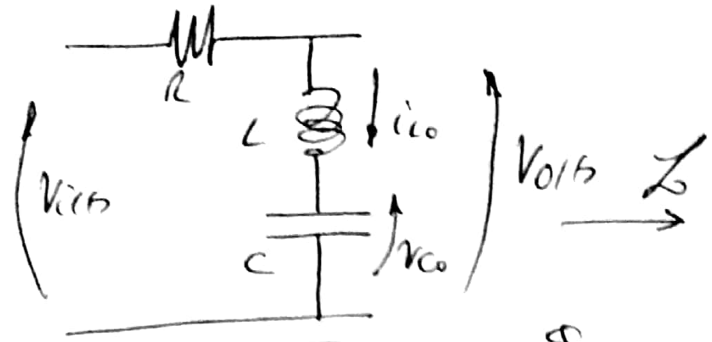
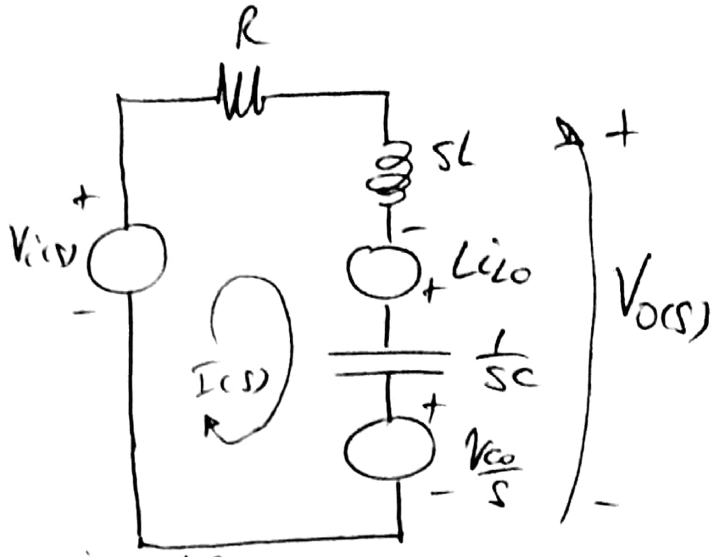


Figura 9



$$I_{(s)} = \frac{V_{i(s)} + Li_{L0} - V_{C0}/s}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{sV_{i(s)} + sLi_{L0} - V_{C0}}{\cancel{s}}}{\frac{sCR + s^2LC + 1}{\cancel{s}C}} = \frac{C\left(sV_{i(s)} + sLi_{L0} - V_{C0}\right)}{s^2LC + sCR + 1}$$

$$V_{o(s)} = \left(sL + \frac{1}{sC}\right) I_{(s)} - Li_{L0} + \frac{V_{C0}}{s} = \frac{s^2LC + 1}{sC} I_{(s)} - Li_{L0} + \frac{V_{C0}}{s}$$

$$V_{o(s)} = \frac{s^2LC + 1}{s\cancel{C}} \frac{\cancel{C}\left(sV_{i(s)} + sLi_{L0} - V_{C0}\right)}{s^2LC + sCR + 1} - Li_{L0} + \frac{V_{C0}}{s}$$

$$V_{o(s)} = \frac{(s^2LC+1)V_{i(s)}}{s^2LC + sCR + 1} + \frac{(s^2LC+1)Li_{L0}}{s^2LC + sCR + 1} - \frac{(s^2LC+1)V_{C0}}{s(s^2LC + sCR + 1)} - Li_{L0} + \frac{V_{C0}}{s}$$

$$V_{o(s)} = \frac{(s^2LC+1)V_{i(s)}}{s^2LC + sCR + 1} + Li_{L0}\left(\frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1} - 1\right) + \frac{V_{C0}}{s}\left(1 - \frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1}\right)$$

$$V_{o(s)} = \frac{(s^2LC+1)V_{i(s)}}{s^2LC + sCR + 1} + Li_{L0}\left(\frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1} - 1\right) - \frac{V_{C0}}{s}\left(\frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1} - 1\right)$$

$$V_{o(s)} = \frac{(s^2LC+1)V_{i(s)}}{s^2LC + sCR + 1} + \left(Li_{L0} - \frac{V_{C0}}{s}\right)\left(\frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1} - 1\right)$$

$$V_{o(s)} = \frac{(s^2LC+1)V_{i(s)}}{s^2LC + sCR + 1} + \left(Li_{L0} - \frac{V_{C0}}{s}\right)\frac{\cancel{s^2LC+1-s^2LC}-sCR\cancel{-1}}{s^2LC+sCR+1}$$

$$V_o(s) = \frac{(s^2LC+1)V_i(s)}{s^2LC+sCR+1} + \left(Li_{Lo} - \frac{V_{Co}}{s}\right)\frac{-sCR}{s^2LC+sCR+1}$$

$$V_o(s) = \frac{(s^2LC+1)V_i(s)}{s^2LC+sCR+1} + \left(\frac{V_{Co}}{s} - Li_{Lo}\right)\frac{sCR}{s^2LC+sCR+1}$$

$$V_o(s) = \frac{V_{Co} - sLi_{Lo}}{\cancel{s}}\,\frac{\cancel{s}CR}{s^2LC+sCR+1} + \frac{(s^2LC+1)V_i(s)}{s^2LC+sCR+1}$$

$$V_o(s) = \underbrace{\frac{RC(V_{Co}-sLi_{Lo})}{s^2LC+sCR+1}}_{V_T(s)} + \underbrace{\frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1}V_i(s)}_{V_F(s)} \quad (29)$$

Con CIN, es decir $V_{Co} = i_{Lo} = 0$, de (29):

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1} = \frac{s^2+1/LC}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \quad (30)$$

2da Forma. Diagrama de Flujo de Estados

De (30), se tiene que:

$$\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)V_o(s) = \left(s^2+\frac{1}{LC}\right)V_i(s)$$

$$s^2V_o(s)+\frac{R}{L}sV_o(s)+\frac{1}{LC}V_o(s) = s^2V_i(s)+\frac{1}{LC}V_i(s) \quad \mathcal{L}^{-1}\rightarrow$$

$$v_o''(t)+\frac{R}{L}v_o'(t)+\frac{1}{LC}v_o(t) = v_i''(t)+\frac{1}{LC}v_i(t) \quad (31)$$

con CI: $V_C(0) = V_{Co}$ y además $i_L(0) = i_{Lo}$

Se deben encontrar las condiciones iniciales en función de $V_o(t)$ para la Ec. (31)

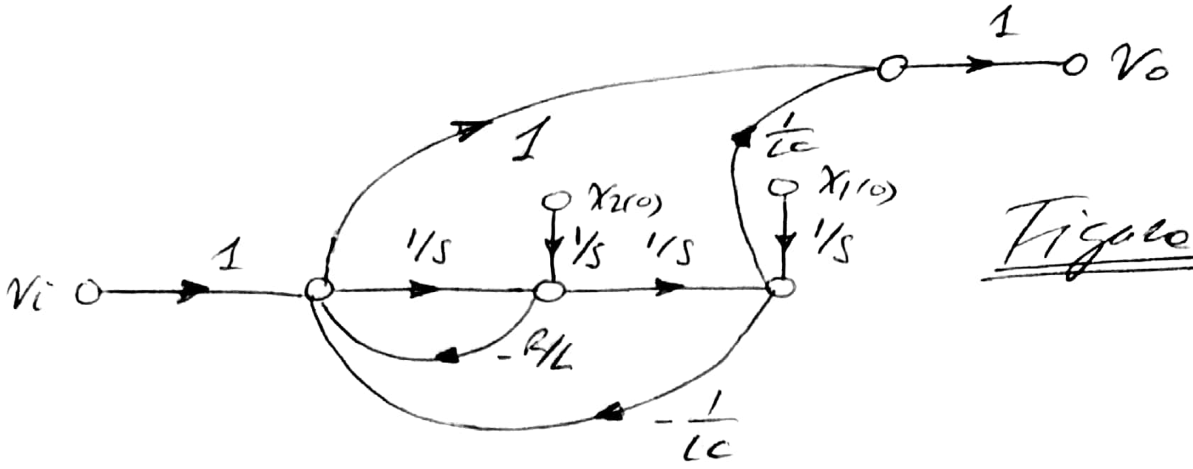


Figura 10

$$\Delta = 1 + \frac{R}{L}\frac{1}{s} + \frac{1}{LC}\frac{1}{s^2} = \frac{s^2LC + sCR + 1}{s^2LC};$$

$$\left.V_{o(s)}\right|_{V_{i(s)}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{LC}\frac{1}{s^2}\right)V_{i(s)}}{\Delta} = \frac{\frac{s^2LC+1}{\cancel{s^2LC}}}{\frac{s^2LC+sCR+1}{\cancel{s^2LC}}}V_{i(s)}$$

$$\frac{V_{o(s)}}{V_{i(s)}} = \frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1}V_{i(s)} = \frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}V_{i(s)} \quad (32)$$

La Ec. (32) coincide con la parte permanente (Forzada) de la Ec. (29)

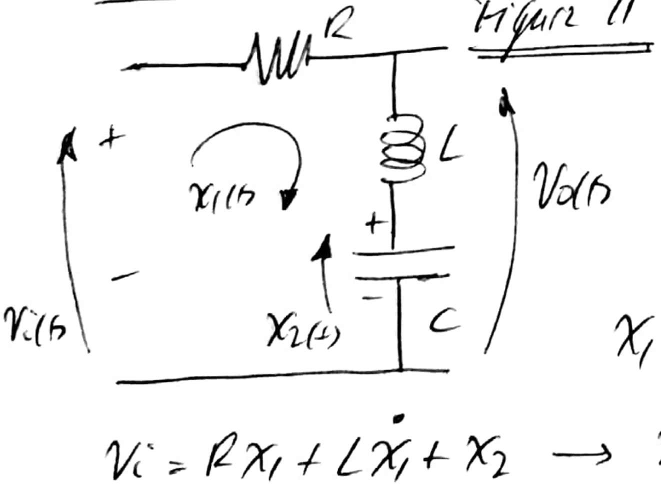
Ahora bien, para calcular $\left.V_{o(s)}\right|_{x_{2(0)}}$ y $\left.V_{o(s)}\right|_{x_{1(0)}}$ que darán la parte transitoria, necesitamos $x_{1(0)}$ y $x_{2(0)}$. ¿Pero, cómo se calculan $x_{1(0)}$ y $x_{2(0)}$ si no tienen NINGUNA relación con $V_{C(t)}$ ya que son estados lógicos, es decir, salidas de los integradores en el modelo canónico controlable? $V_{o(t)}$ es una combinación lineal de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $U(t)$, en lo cual, la relación de $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $V_{C0}=V_C(0)$ e $i_{L0}=i_L(0)$ no es trivial y dificilmente calculable.

En consecuencia, ¿cómo ponemos en práctica el Modelo de Flujo de Estados de la Figura 7 para tener acceso a las condiciones iniciales?

La SOLUCIÓN es usar los ESTADOS FÍSICOS del sistema y realizar el Diagrama de Flujo. Esto se verá en la Tercera forma de resolución del Ejemplo #2.

3.ra Forma Estados Físicos

Figura 11



$$X(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}; \quad X(0)=\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_{L0} \\ V_{C0} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = C\dot{x}_2 \rightarrow \dot{x}_2 = 1/C\, x_1$$

$$V_i = Rx_1 + L\dot{x}_1 + x_2 \rightarrow \dot{x}_1 = -R/L\, x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}V_i$$

$$V_o(t) = V_i - Rx_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} V_i$$

$$V_o(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} -R & 0 \end{bmatrix}}^{C}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{[1]}^{D} V_i$$

De lo calculado anteriormente, se puede armar el diagrama de Flujo de Estado:

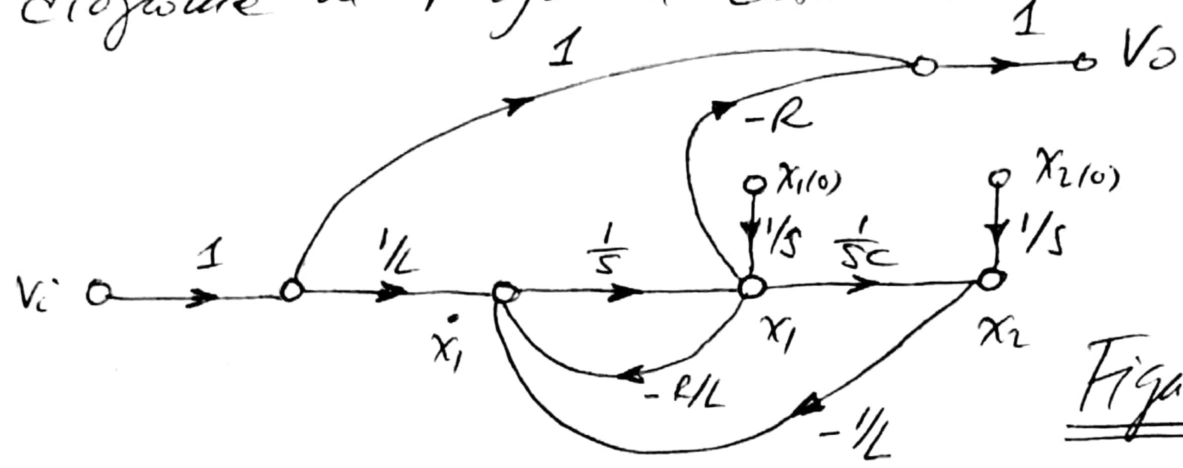


Figura 12

$$\Delta = 1 + \frac{R}{L}\frac{1}{s} + \frac{1}{LC}\frac{1}{s^2} = \frac{s^2LC + sCR + 1}{s^2LC}$$

$$\left.\frac{V_{o(s)}}{V_{i(s)}}\right. = \frac{1\left(1+\frac{R}{L}\frac{1}{s}+\frac{1}{LC}\frac{1}{s^2}\right)-\frac{R}{L}\frac{1}{s}}{\Delta}V_{i(s)} = \frac{1+\cancel{\frac{R}{L}\frac{1}{s}}+\frac{1}{LC}\frac{1}{s^2}-\cancel{\frac{R}{L}\frac{1}{s}}}{\Delta}V_{i(s)}$$

$$\left.\frac{V_{o(s)}}{V_{i(s)}}\right. = \frac{1+\frac{1}{LC}\frac{1}{s^2}}{\Delta}V_{i(s)} = \frac{\frac{s^2LC+1}{\cancel{s^2LC}}}{\frac{s^2LC+sCR+1}{\cancel{s^2LC}}}V_{i(s)} = \frac{(s^2LC+1)V_{i(s)}}{s^2LC+sCR+1} \quad (34)$$

$$\left.\frac{V_{o(s)}}{x_{1(0)}}\right. = \frac{\frac{1}{s}(-R)x_{1(0)}}{\Delta} = \frac{-\frac{R}{\cancel{s}}i_{Lo}}{\frac{s^2LC+sCR+1}{s^2LC}} = \frac{-sLCR\,i_{Lo}}{s^2LC+sCR+1} \quad (35)$$

$$\left.\frac{V_{o(s)}}{x_{2(0)}}\right. = \frac{\frac{1}{s}\left(-\frac{1}{L}\right)\cdot\frac{1}{s}(-R)x_{2(0)}}{\Delta} = \frac{\frac{R}{\cancel{s^2L}}V_{co}}{\frac{s^2LC+sCR+1}{\cancel{s^2LC}}} = \frac{RC\,V_{co}}{s^2LC+sCR+1} \quad (36)$$

De (34), (35) y (36) se tiene que:

$$V_{o(s)} = \frac{RC\,V_{co}}{s^2LC+sCR+1} - \frac{sLRC\,i_{Lo}}{s^2LC+sCR+1} + \frac{s^2LC+1}{s^2LC+sCR+1}V_{i(s)}$$

$$V_o(s) = \frac{RC(V_{Co} - sL\,i_{Lo})}{s^2LC + sCR + 1} + \frac{s^2LC + 1}{s^2LC + sCR + 1} V_i(s) \quad (37)$$

La Ec (37), coincide con la Ec. (30)

A partir de este ejemplo, a menos que un sistema de Ec. Dif. de 1er orden se formule matricialmente con $x_1(0), x_2(0), x_3(0), \dots, x_4(0)$, no es trivial y MUY DIFICIL relacionar y/o encontrar estos estados iniciales con $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$.

La solución óptima para trabajar con DIAGRAMA DE FLUJOS DE ESTADOS con condiciones iniciales, será trabajar con ESTADOS FÍSICOS con sus correspondientes CI, como es el 3er caso del Ejemplo #2. Recordar que estados físicos pueden ser por ejemplo:

- $V_C(t)$: Tensión en un capacitor
- $i_L(t)$: Corriente en un Inductor
- $V_M(t)$: Velocidad de una Masa
- $f_K(t)$: fuerza aplicada a un resorte
- $\omega_J(t)$: velocidad angular de Momento de Inercia
- $T_K(t)$: Cupla en Resorte Torsional
- $q(t)$: Flujo de Fluido
- $P(t)$: Presión de fluido. (Tanque)