Furijeova Transformacija (FT)
rezime

FT je primer promene reprezentacije signala jedne promenljive u drugu. FT je specijalan oblik fitovanja krivih u kome se podaci fituju modelom periodičnosti. Podaci u vremenskom domenu se prikazuju u smislu periodičnosti, najčešće nizom sinusoida.

		FREKVENCIJA	
		kontinualna	**diskretna**
VREME	**kontinualna**	**Furijeova Transformacija**	**Furijeovi redovi**
	diskretna	**Diskretna Furijeova Transformacija**	**FFT (Finite FT)**

1. Furijeov transformacioni par - direktna FT i inverzna FT:

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{i} \quad f(t) = \int F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

imaju kontinualne promenljive.

U MatLab-u mogu da se koriste njihovi diskretni analozi a kontinualni integral se zamenjuje sumom. Kontinualna funkcija vremena t se zamenjuje nizom vremenskih tačaka $n\tau$, gde je n broj odbirka a τ vremenski interval između dva odbirka. Usvojeno je da je prvi odbirak indeksa n=0 a poslednji n=N-1. τ je određen Nikvistovim kriterijumom čija je najčešća interpretacija sledeća: ako se signal sempluje periodom τ, onda je maksimalna frekvencija koja može da se meri $\omega<2\pi/\tau$.

2. Diskretna FT reprezentuje funkcije semplovanih vremenskih podataka u kontinualnu frekvenciju. Pošto su podaci u vremenu diskretni, integral se zamenjuje sumom, ali je frekvencija kontinualna:

$$F(\omega) = \sum f(n\tau) e^{-j\omega n\tau}$$

Inverzna diskretna FT iz kontinualne frekvencije u diskretno vreme je i dalje integral, ali su granice integracije ograničene na 2π interval:

$$f(n\tau) = \frac{\tau}{2\pi} \int F(\omega) e^{j\omega n\tau} d\omega$$

tj., od $-\pi/\tau$ do π/τ prema Nikvistovom uslovu.

Diskretna frekvencija može da bude u dve forme: osnovna i njeni harmonici, i niz frekvencija do Nikvistove.

3. Furijeov red je repezentovan funkcijom f(t) u smislu osnovne frekvencije i njenih harmonika. Direktna transformacija iz vremenskog u frekvencijski domen je:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-j\omega_o nt} dt$$

a inverzna transformacija iz frekvencijskog u vremenski domen je:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j\omega_o nt}$$

gde je $\omega_o=2\pi f_o$ osnovna frekvencija. Indeks n daje harmonike, tj. multipl osnovne frekvencije. Između frekvencijskih komponenti $n\omega_o$ i $(n+1)\omega_o$ nema frekvencijskih komponenti. Rezultat transformacije signala Furijeovim nizom je da je originalni signal reprezentuje verzijom periodiciteta izvan granica integracije 0 do T.

4. FFT (Finite FT) je mapiranje funkcije u diskretnom vremenskom domenu u diskretni frekvencijski domen. Direktna transformacija je:

$$F_u = \sum_{n=0}^{N-1} f(n\tau)^{-j\omega_o nu}$$

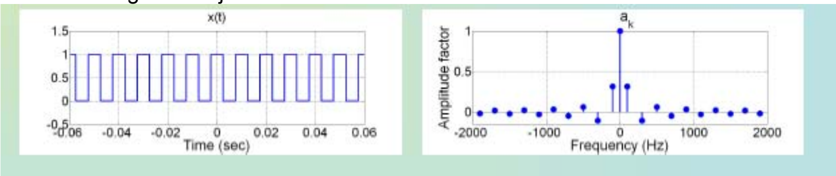
a inverzna transformacija:

$$f(n\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{j\omega_o nu} \quad \text{(u< N)}$$

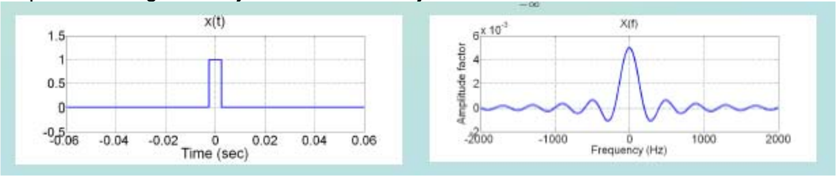
Za razliku od Furijeove serije, FFT diskretna serija frekvencija nije set osnovne frekvencije i njenih harmonika, već ciklusi na sekvenci dužine N. Vreme i frekvencija su periodični izvan granica semplovanja i sumacije.

N A P O M E N A:
Skraćenica FFT zapravo ima drugo značenje Fast FT, što je zapravo efikasan algoritam za izračunavanje Finite FT. MatLab komande `fft` i `ifft` izračunavaju FFT direktnu i inverznu. MatLab dokumentacija pogrešno naziva ove komande diskretnom FT dok je to ustvari Finite FT.

Periodičan signal: Furijeovi redovi



Naperiodični signal: Furijeova transformacija



Linerani sistemi

Ulaz: siusoide	Izlaz: sinusoide
$x_1(t)$	$y_1(t)$
$x_2(t)$	$y_2(t)$
$ax_1(t)+bx_2(t)$	$ay_1(t)+by_2(t)$

$$x_1(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t + \phi_1) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y_1(t) = A_1|H(f_1)|\cos(2\pi f_1 t + \phi_1 + \angle H(f_1))$$

$$x_2(t) = A_2\cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y_2(t) = A_2|H(f_2)|\cos(2\pi f_2 t + \phi_2 + \angle H(f_2))$$

$$x_1(t) + x_2(t) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

Nelinearni sistemi

Ulaz: sinusoide

Izlaz: različite frekvencije

Input: *One sinusoid:* $x(t) = \sin(2\pi f t)$

$$y(t) = \sin^2(2\pi f t)$$

$$y(t) = 0.5(1 - \cos 4\pi f t)$$

Example:

$$y(t) = x^2(t)$$

Input: *Two sinusoids:* $x(t) = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$

$$y(t) = [\sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)]^2$$

$$y(t) = \sin^2(2\pi f_1 t) + \sin^2(2\pi f_2 t) + 2\sin(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_2 t)$$

$$y(t) = 0.5(1 - \cos 4\pi f_1 t) + 0.5(1 - \cos 4\pi f_2 t) + \underbrace{\cos[2\pi(f_1 - f_2)t]}_{\text{Difference frequency}} + \underbrace{\cos[2\pi(f_1 + f_2)t]}_{\text{Sum frequency}}$$

DC

Harmonic frequencies

Combination tones

Linearni sistemi: množenje u frekvencijskom domenu

$$\begin{matrix} x(t) \\ X(f) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow \begin{matrix} y(t) \\ Y(f) \end{matrix}$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

$$|Y(f)|e^{j\angle Y(f)} = |H(f)|e^{j\angle H(f)}|X(f)|e^{j\angle X(f)}$$

Amplitude se množe a faze se sabiraju:

$$|Y(f)| = |H(f)||X(f)|$$

$$e^{j\angle Y(f)} = e^{j\angle H(f)}e^{j\angle X(f)}$$

$$e^{j\angle Y(f)} = e^{j\angle H(f) + \angle X(f)}$$

$$\angle Y(f) = \angle H(f) + \angle X(f)$$

Primer filtra:

$$X(f) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow Y(f)=X(f)H(f)$$

Furijeova Transformacija signala i šuma