

# *Independent Component Analysis – ICA*

## **- analiza signala u vremenskom domenu -**

Jedan od osnovnih problema analize elektrofizioloških signala je pronalaženje odgovarajuće reprezentacije random signala. Kako bi se izbegla računarska i konceptualna složenost, signali su najčešće predstavljeni pomoću linearne transformacije. Dve najpoznatije metode linearne transformacije su *Principal Component Analysis* i *Factor Analysis*. ICA – *Independent Component Analysis* je novija metoda koja ima za cilj da signale sa negausovskom gustinom raspodele, koji su statistički nezavisni ili nezavisni koliko god je to moguće, predstavi u linearnom obliku.

ICA je prvobitno nastala sa ciljem rešavanja problema nalik „cocktail-party“ problemu. Sa ubrzanim proučavanjem ove metode i njenom sve većem broju aplikacija, postalo je jasno da ICA ima primenu u rešavanju raznih problema. Moguće je, na primer, posmatrati električne signale dobijene površinskim elektrodama na površini glave – elektroencefalogram (EEG). EEG signali nastaju "miksovanjem" moždanih električnih aktivnosti korteksa. Cilj je da se pronađu originalne komponente moždane aktivnosti, a na raspolaganju su miksovane reprezentacije tih originalnih signala [8]. Još jedna česta primena ove metode za obradu signala je ekstrakcija šuma. Ako je šum EKG signal, a signal od interesa je EEG signal, a snimani su površinski EEG signali, onda je moguće primeniti ICA metodu za ekstrakciju šuma (EKG) iz korisnog signala (EEG), [9].

Dakle, ICA metoda predstavlja razdvajanje multivarijabilnog signala na nezavisne podkomponente. Pretpostavlja se da su izvorne komponente međusobno nezavisne i da im je raspodela negausovska. Prednost metode i pored strogo definisanih kriterijuma je da je u praksi uspešna čak i u slučajevima kada realni modeli odstupaju od idealnih pretpostavki.

*Blind Source Separation* (BSS) rešavanje problema se koristi u okviru ICA metode i za njegovu primenu nije neophodno prethodno znanje o signalima. ICA se zasniva na *Principal Component Analysis* (PCA). Razlika između ICA i PCA je u tome što ICA pretpostavlja da raspodele signala nisu gausovske, jer koristi statistiku višeg reda (najčešće je četvrti red u pitanju), dok PCA ima primenu na signalima sa gausovskom raspodelom. (Komponente gausovske raspodele višeg reda od drugog su jednake nuli).

Ako su  $x_1, x_2, \dots, x_n$  miksujući signali dobijeni sa  $n$  senzora i ako važi pretpostavka da su  $x_i$  nastali linearnom kombinacijom  $n$  izvornih signala  $s_i$  ( $s_1, s_2, \dots, s_n$ ), tada je:

$$x_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \dots + a_{in}s_n, \quad \forall i \in [1, n], \quad \text{Relacija 1}$$

gde su  $s_i$  statistički uzajamno nezavisne nepoznate, a  $a_{ij}$  su nepoznati miksujući realni koeficijenti.  $x_i$  se još zovu opservabilne promenljive (moguće ih je izmeriti senzorom), a  $s_i$  su izvorne komponente (ne možemo ih direktno odrediti tj. izmeriti i takve latentne komponente samo možemo proceniti proračunom). Problem u ICA se svodi na estimaciju nepoznatih  $a_{ij}$  i  $s_i$ . Osnovni ICA model zanemaruje prisustvo šuma i kašnjenje izvornih signala u procesu miksovanja. Relacija 1 se još može napisati i u matičnom obliku:

$$x = As, \quad x_i = x_i(t), \quad s_i = s_i(t) \quad \text{Relacija 2}$$

gde je  $A$  miksujuća (observaciona) matrica. Neka je  $W$  demiksujuća (inverzna) matrica i neka su  $\hat{s}(k)$  estimirane, izvorne, nezavisne komponente, a  $K$  broj opservacija signala, tada važi sledeća relacija:

$$\hat{s}(k) = Wx(k), k \in [0, K]$$

**Relacija 3**

U tom slučaju  $W = A^{-1}$ , odnosno: ako je  $A$  kvadratna matrica, onda je  $W$  inverzna matrica matrici  $A$ , a ako  $A$  nije kvadratna matrica, tada je  $W$  pseudo inverzna matrica matrici  $A$ .

Kriterijumi za primenu ICA metode su strogo definisani. Pretpostavke i ograničenja u primeni ICA metode su:

1. Promenljive  $s_i$  moraju biti statistički nezavisne. Promenljive su statistički nezavisne, ako na osnovu informacije o vrednosti jedne slučajne promenljive ne može se dobiti nikakva informacije o vrednostima ostalih slučajnih promenljivih.
2. Obzirom da ICA koristi u proračunima kumulante višeg reda i obzirom da su kumulanti višeg reda gausovske raspodele svi jednaki nuli, to prirodno sledi da izvorne promenljive  $s_i$  ne mogu biti gausovski raspodeljene.
3. Iz jednačine 2 problem se može uprostiti na jednačinu sa dve nepoznate čiji je proizvod nepoznat. Posledica toga je da se ne može egzaktno odrediti amplituda izvornih promenljivih  $s_i$ , ali se zato može podesiti po potrebi (usvojeno je da amplituda bude takva da je varijansa jedinična). Druga posledica je to što se ne može odrediti ni znak izvornih promenljivih, tako da se mogu proizvoljno množiti sa -1. Pogodno je što znak izvornih promenljivih u većini slučajeva nema nikakav značaj na krajnji rezultat. Najčešće se usvaja pretpostavka na osnovu ove dve posledice, a radi lakšeg računa to je pretpostavka da su srednje vrednosti izvornih komponenti i observabilnih promenljivih jednake nuli.
4. Još jedno ograničenje koje proističe iz Relacije 2 je to što se ne može odrediti poredak  $s_i$  u ICA, ali zato ovo može da se iskoristi tako što će se po potrebi proizvoljno menjati poredak  $s_i$  i  $a_{ij}$  u ICA.
5. Broj miksujućih signala  $x_i$  mora biti veći ili jednak broju nezavisnih komponenata  $s_i$ . Ako ovaj uslov nije ispunjen, matrica  $A$  neće biti punog ranga i ne može joj se naći inverzna matrica. Odnosno, postoji minimalan broj posledica ( $x_i$ ) na osnovu kojih je moguće estimirati uzroke ( $s_i$ ).
6. Najčešće je broj nezavisnih komponenata  $s_i$  nepoznat, tako da nije poznato da li je prethodna pretpostavka ispunjena ili nije. Međutim, pretpostavka se može uvesti za svaki konkretan slučaj. Kada su u pitanju EEG signali koji se snimaju sa 20 elektroda (broj  $x_i$ ), a u literaturi je dokazano da je to sasvim dovoljno (odnosno broj relevantnih nezavisnih komponenata  $s_i$  je manji ili jednak 20).

Jedna od često primenjivanih metoda predprocesiranja u cilju zadovoljenja nabrojanih pretpostavki ICA metode je beljenje.

## ***Beljenje kao predprocesirajući korak***

Prvo ograničenje u primeni ICA metode glasi da izvorne komponente  $s_i$  moraju biti međusobno nezavisne. Nažalost, međusobna nezavisnost se ne može garantovati, ali zato nekorelisanost može. Nekorelisanost nije dovoljan, ali jeste potreban uslov za međusobnu nezavisnost, tako da ona predstavlja „korak bliže“ međusobnoj nezavisnosti. Ako se uzme u obzir da je beljenje takođe povezano sa nezavisnošću, ali da je istovremeno „snažnija“ osobina od nekorelisanosti uz to se može obezbediti jednostavnim linearnim transformacijama, onda je logično zašto se beljenje najčešće koristi kao predprocesirajući korak u ICA algoritmima.

Izbeljeni slučajni vektor sa očekivanom srednjom vrednošću nula ima međusobno nekorelisane komponente, a njihove varijanse su jednake jedinici. Odnosno, kovarijaciona i korelaciona matrica vektora slučajne promenljive su jednake nuli.

Postupak beljenja vektora  $x$  je linearna transformacija (množenje vektora  $x$  nekom matricom  $V$ , Relacija 4).

$$z = Vx$$

**Relacija 4**

Vektor  $z$  je rezultat linearne transformacije date u Relaciji 4 i predstavlja „beo“ vektor. Važno je napomenuti da je proces beljenja uvek moguće izvršiti. Jedna od najpopularnijih metoda za beljenje se sastoji u primeni metode rastavljanja na sopstvene vrednosti kovarijacione matrice (EVD – *Eigen Value Decomposition*).

Ako se pretpostavi da je ICA model izbeljen matricom  $V$  kao u Relaciji 4, dobija se nova miksujuća matrica modela:

$$z = VAs = \tilde{A}s$$

**Relacija 5**

Ako se posmatra ortogonalna transformacija vektora  $z$ :  $y = Uz$ , usled ortogonalnosti  $U$  sledi:

$$E\{yy^T\} = E\{Uzz^T U^T\} = UIU^T = I$$

**Relacija 6**

Iz Relacije 6 se vidi da je vektor  $y$  takođe beo. Prema tome, ne može se zaključiti da li su nezavisne komponente predstavljene vektorom  $z$  ili vektorom  $y$ , ako se oslanjamo samo na osobinu beljenja. Zaključak je da se beljenjem dobiju samo komponente koje su međusobno nekorelisane, ali za koje se ne može tvrditi da su nezavisne. Za većinu primena, ovakva tvrdnja nije dovoljna za estimaciju modela i izvornih komponenti.

Međutim, bez obzira na ograničenja, beljenje je koristan predprocesirajući korak kod ICA metoda. Rezultat beljenja se ogleda u činjenici da je nova matrica miksovanja  $\tilde{A} = VA$  ortogonalna. Na taj način se traženje rešenja ograničava na prostor ortogonalnih matrica. Tako, umesto da se procenjuje  $n^2$  parametara ortogonalne matrice  $A$ , može se estimirati samo polovina ovih parametara, jer ortogonalna matrica sadrži samo  $\frac{n(n-1)}{2}$  stepeni slobode. Obzirom da je beljenje veoma jednostavna i standardna procedura, dobra je praksa da se na ovaj način kompleksnost problema prepolovi.

## ***Gausovski raspodeljene slučajne promenljive i ICA***

Već je pomenuto da promenljive ne smeju imati gausovsku raspodelu, ako se primenjuje ICA algoritam. Ako se pretpostavi suprotno tj. da je zajednička raspodela za dve nezavisne komponente  $s_1$  i  $s_2$  gausovska, tada je njihova zajednička gustina verovatnoće data izrazom:

$$\rho_s(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{s_1^2 + s_2^2}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|s\|^2}{2}\right) \quad \text{Relacija 7}$$

Može se pretpostaviti, na osnovu beljenja, da je matrica miksovanja  $A$  ortogonalna ( $A^{-1} = A^T$ ). Dalje, zajednička gustina verovatnoće za izmerene signale  $x_1$  i  $x_2$  je data sledećim izrazom:

$$\rho_s(x_1, x_2) = \rho_x(x) = \frac{1}{|\det A|} \rho_s(A^{-1}x) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|A^T x\|^2}{2}\right) \frac{1}{|\det A|} \quad \text{Relacija 8}$$

Usled ortogonalnosti matrice  $A$ , sledi ekvivalentnost  $\|A^T x\|^2 = \|x\|^2$  i da je  $\det|A| = 1$ , pa se Relacija 8 može napisati kao:

$$\rho_s(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2}\right) \quad \text{Relacija 9}$$

Iz Relacije 9 se vidi da matrica miksovanja  $A$  ne menja funkciju gustine verovatnoće, ako je funkcija gustine verovatnoće izvornih signala  $s$  gausovska. Nekorelisane gausovske promenljive su istovremeno i nezavisne, pa se zbog toga ortogonalna matrica miksovanja  $A$  ne može estimirati na osnovu gausovskih promenljivih.

Ako se u skupu nalazi samo jedna gausovski raspodeljena komponenta, ICA model se može estimirati. Tada će preostale nezavisne komponente biti estimirane svojim verodostojnim raspodelama. Ovo može biti veoma korisno, pogotovu ako se u sam model uvodi signal šuma (koji se najčešće modelira gausovskim belim šumom).

## ***Kvantitativna mera negausijanstva***

Da bi se uspešno koristile osobine negausijanstva u ICA metodama, neophodno je definisati meru negausijanstva izvornih signala. Jedna od najčešće korišćenih mera negausijanstva je kurtosis. Kurtosis je kumulant četvrtog reda slučajne promenljive i definisan je kao:

$$kurt(y) = E\{y^4\} - 3(E\{y^2\})^2 \quad \text{Relacija 10}$$

Relacija 10 je pojednostavljena definicija, jer je uzeta u obzir pretpostavka da je srednja vrednost slučajnih promenljivih (izvornih komponenti) jednaka nuli i da je očekivana varijansa

jedinična. Za negausovske slučajne promenljive, osim za neke veoma retke, kurtozis ima nenultu vrednost. Kurtozis može biti i pozitivan i negativan, pa se najčešće koristi apsolutna vrednost kao mera negausijanstva. Prednosti u korišćenju kurtozisa su njegova računaska (korišćenje četvrtog momenta) i teorijska jednostavnost (kurtozis ima linearna svojstva za dve slučajne promenljive).

## ***ICA algoritmi***

Osnovna ideja svih ICA algoritama je da se definisana kriterijumska funkcija optimizira. Najčešće se kao optimizacioni kriterijum koristi kurtozis, ali se kao kriterijumi koriste i *negentropy*-ja i maksimalna verovatnoća.

Različiti ICA algoritmi odgovaraju različitim problemima i rešavaju ih na različite načine. Najčešće korišćeni standardni algoritmi su:

1. RobustICA (eng. *Robust Independent Component Analysis*)
2. SOBI (eng. *Second Order Blind Identification*)
3. JADE (eng. *Joint Approximation Diagonalization of Eigen matrices*)
4. CCA (eng. *Canonical Correlation Analysis*)

## ***RobustICA***

RobustICA algoritmi su razvijeni na osnovu FastICA algoritama koji predstavljaju najpopularnije i najčešće korišćene ICA metode. Ove metode predstavljaju iterativne optimizacione algoritme koji rešavaju ICA problem pronalaženjem demiksujuće matrice  $W$ . Ove iterativne metode imaju za cilj da odrede takvu matricu  $W$  koja optimizuje nelinearnu kriterijumsku funkciju. Najčešće se primenjuje gradijentni ili Njutnov optimizacioni metod koji pronalazi ekstremnu vrednost kriterijumske funkcije. Kada algoritam dostigne optimalnu tačku kriterijumske funkcije, tj. odredi vrednost matrice  $W$ , očekuje se da će estimirane komponente  $\hat{\mathbf{s}}(k) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}(k)$  biti nezavisne.

RobustICA predstavlja jednostavnu modifikaciju FastICA algoritma. Umesto optimizacione funkcije zasnovane na kurtozisu –  $kurt(\mathbf{w})$ , u upotrebi je kriterijumska funkcija koja koristi metodu *exact line search optimization*:

$$\mu_{OPT} = \arg \max_{\mu} kurt(\mathbf{w} + \mu \mathbf{g}) \quad \text{Relacija 11}$$

Za pravac traženja  $\mathbf{g}$  najčešće se koristi pravac gradijenta:

$$\mathbf{g} = \nabla_{\mathbf{w}} kurt(\mathbf{w}) \quad \text{Relacija 12}$$

*Exact line search optimization* je poznati metod za optimizaciju. Generalno, ova metoda je računski veoma kompleksna i poseduje druge nedostatke, pa se veoma retko koristi u praksi. Međutim, za kriterijumsku funkciju koja se može izraziti u obliku racionalne funkcije ova metoda može biti veoma efikasna. Kriterijumska funkcija kod RobustICA algoritma može se izraziti kao racionalna funkcija po  $\mu$ , a veličina optimalnog koraka  $\mu_{opt}$  može se jednostavno odrediti pronalaženjem korena polinoma. Kriterijumska funkcija izražena preko kurtozisa je polinom četvrtog stepena i nule ovog polinoma se uvek mogu izračunati.

Shodno prethodnom, optimizacija kriterijumske funkcije može se izvršiti sledećim RobustICA algoritmom. Pri svakoj iteraciji, veličina optimalnog koraka—OS (*Optimal Step size*) optimizira se sledećim postupcima:

- 1) Izračunavanje OS polinomijalnih koeficijenata.

Za funkciju kurtozisa, polinomijalni OS definisan je sa:

$$p(\mu) = \sum_{k=0}^4 a_k \mu^k \quad \text{Relacija 13}$$

Koeficijenti  $a_k$  izračunavaju se pri svakoj iteraciji iz posmatranog signala i trenutnih vrednosti vektora  $w$  i  $g$ .

- 2) Nalaženje OS polinomijalnih korena  $\{\mu_k\}_{k=1}^4$

- 3) Izbor korena koji vodi do apsolutnog ekstremuma:

$$\mu_{opt} = \arg \max_k kurt(w + \mu_k g) \quad \text{Relacija 14}$$

- 4) Izračunavanje vektora  $w$ :

$$w = w + \mu_{opt} g \quad \text{Relacija 15}$$

- 5) Normalizovanje vektora  $w$ .

Dakle, RobustICA predstavlja algoritam koji metodom *exact line search* optimizacije pronalazi optimalni vektor  $w$  i na taj način se jedna po jedna (*deflation based*) izdvajaju nezavisne komponente. RobustICA se zasniva na FastICA algoritmu koji je popularan zbog svoje jednostavnosti. RobustICA predstavlja superiorniji algoritam u pogledu efikasnosti i robusnosti.

### ***SOBI algoritam***

SOBI algoritam razvijen je koristeći pristup o vremenskoj koherentnosti signala i zasniva se na stacionarnoj statistici drugog reda. Za razliku od algoritama koji se zasnivaju na temporalnoj korelaciji, očekuje se da SOBI algoritam bude robusniji pri malim odnosima signal/šum pošto koristi statistiku drugog reda. Osnovni ICA model koji se koristi u izvođenju SOBI algoritma uvodi pretpostavku da je prisutan i šum merenja:

$$x(t) = y(t) + n(t) = As(t) + n(t) \quad \text{Relacija 16}$$

Neka je opštiji slučaj takav da je matrica  $A$  kompleksna, punog ranga i dimenzija  $m \times n$  (važi  $m \geq n$ ) i ako je aditivni šum  $n(t)$  beli šum, nezavistan od signala  $s(t)$ , za koji je ispunjeno:

$$E\{n(t+\tau)n^*(t)\} = \sigma^2 \delta(\tau) I \quad \text{Relacija 17}$$

Pod ovim pretpostavkama kovarijacione matrice izlaza imaće sledeće oblike:

$$\mathbf{R}(0) = E\{x(t)x^*(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s(0)\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad \text{Relacija 18}$$

$$\mathbf{R}(\tau) = E\{x(t)x^*(t+\tau)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s(\tau)\mathbf{A}^H \quad \text{Relacija 19}$$

gde  $^H$  predstavlja konjugovano kompleksno transponovane matrice.

Kao i za sve ICA algoritme egzaktno određivanje miksujuće matrice  $A$  nije moguće. U SOBI pristupu se takođe, bez umanjena opštosti, pretpostavlja da varijanse nekorelisanih signala  $s(t)$  imaju jedinične varijanse, odnosno da je:

$$\mathbf{R}_s(0) = \mathbf{I}, \text{ pa je } \mathbf{R}_y(0) \stackrel{\text{def}}{=} E\{y(t)y^*(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{A}^H \quad \text{Relacija 20}$$

Normalizacija varijanse signala  $s(t)$  i dalje ostavlja nedefinisan raspored kolona matrice  $A$ . Stoga će se određivanje matrice  $A$  ograničiti na skup matrica koje su „esencijalno jednake“ sa matricom  $A$ . Ukoliko postoji matrica  $P$ , tako da je  $M=NP$ , kaže se da su matrice  $M$  i  $N$  esencijalno jednake i to se obeležava sa  $\mathbf{M} \sim \mathbf{N}$ .

SOBI algoritam se definiše na implementaciji sledećih koraka:

- 1) Procenjuje se kovarijaciona matrica  $\hat{\mathbf{R}}(0)$  na osnovu  $T$  odbiraka signala. Bira se prvih  $n$  najvećih sopstvenih vrednosti  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  i  $n$  odgovarajućih sopstvenih vektora  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Estimira se kovarijacione matrice  $\hat{\mathbf{R}}(0)$ .
- 2) Pod pretpostavkama o aditivnom belom šumu, procena varijanse šuma  $\hat{\sigma}^2$  određuje se kao srednja vrednost  $n-m$  najmanjih sopstvenih vrednosti matrice  $\hat{\mathbf{R}}(0)$ . Izbeljeni signali  $z_i(t)$  i matrica beljenja  $\mathbf{W}$  računaju se prema sledećim formulama:

$$z_i(t) = (\lambda_i - \hat{\sigma}^2)^{-(1/2)} \mathbf{h}_i^* \mathbf{x}(t), \text{ za } i = 1..n \quad \text{Relacija 21}$$

$$\hat{\mathbf{W}} = \left[ (\lambda_1 - \hat{\sigma}^2)^{-(1/2)} \mathbf{h}_1, \dots, (\lambda_n - \hat{\sigma}^2)^{-(1/2)} \mathbf{h}_n \right]^H \quad \text{Relacija 22}$$

- 3) Formiraju se procene  $\hat{\mathbf{R}}(\tau)$  kovarijacionih matrica signala  $\mathbf{z}(t)$  na osnovu fiksnog skupa vremenskih pomeraja  $\tau \in \{\tau_j | j = 1, \dots, K\}$ .
- 4) Unitarna matrica  $\hat{\mathbf{U}}$  se dobija združenom dijagonalizacijom skupa  $\{\hat{\mathbf{R}}(\tau_i) | i = 1, 2, \dots, K\}$
- 5) Nezavisne komponente  $s$  (source signals) i miksujuća matrica  $A$  dobijaju se iz sledećih relacija:

$$\begin{aligned} \hat{s}(t) &= \hat{\mathbf{U}}^H \hat{\mathbf{W}} \mathbf{x}(t) \\ \hat{A} &= \hat{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad \text{Relacija 23}$$

## **JADE algoritam**

JADE algoritam je ICA metoda za identifikaciju demiksujućih matrica. Ova metoda zasnovana je na dva procesa:

- 1) dijagonalizacija kovarijacione matrice (isto kao i kod PCA metode)
- 2) dijagonalizacija kurtozisne matrice opservacionog vektora.

Sam JADE algoritam može se implementirati sledećim koracima:

- 1) Inicijalna faza u kojoj se koristi PCA metoda. Prvo se kreira kovarijaciona matrica od signala  $x$ . Koristeći se metodom „rastavljanja na sopstvene vrednosti“ (*eigenvalue decomposition*–EVD) vrši se beljenje matricom:

$$W_{EVD} = D^{-\frac{1}{2}} E^T \quad \text{Relacija 24}$$

gde  $E$  predstavlja ortogonalnu matricu sopstvenih vektora  $E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$  i gde  $D$  predstavlja dijagonalnu matricu sopstvenih vrednosti,  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Dakle, dobija se da je:

$$y = W_{EVD} x \quad \text{Relacija 25}$$

- 2) Izračunavaju se kumulantske (kurtozisne) matrice četvrtog reda  $Q_i$  od formiranog signala  $y$ .
- 3) Vršiti se dijagonalizacija kurtozisnih matrica. U ovom koraku izračunava se transformaciona matrica  $V$  koja se dobija tako da su sve kumulantske matrice što je moguće više dijagonalne. Ovo se postiže pronalaženjem matrice  $V$  koja minimizuje sve elemente van glavne dijagonale matrice.
- 4) Formira se separaciona matrica  $W_{EVD} V^T$  i primenjuje se na originalni signal.

Bitno je istaći da je dijagonalizacija kumulantnih matrica komplikovaniji proces nego PCA metoda uglavnom zbog četvoro–dimenzione tenzorske prirode kumulantskih matrica. Umesto korišćenja četvoro–dimenzionih matrica, kumulantske matrice se izražavaju u obliku skupa dvodimenzijalnih matrica gde je svaki element matrice izražen kao:

$$Q_{ij} = \sum_{k,l=1}^M \text{cum}(X_i, X_j, X_k, X_l) \quad \text{Relacija 26}$$

Dakle, ukoliko postoji  $T$  odbiraka sa svakog od  $M$  senzora, skup kumulantskih matrica može se izračunati na sledeći način. Ako se pretpostavi da matrica  $X$  označava  $M \times T$  matricu koja sadrži odbirke sa svih  $M$  senzora i da vektori  $x_i$  i  $x_j$  ( $i$ -ti i  $j$ -ti red matrice  $X$ ) označavaju  $T$  odbiraka sa senzora  $i$  i  $j$  respektivno. JADE algoritam izračunava serije od  $M \times M$  kumulantnih matrica  $Q_{ij}$  kao:

$$Q_{ij} = (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{X}) \cdot \mathbf{X}^T \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq M \quad \text{Relacija 27}$$



gde je  $x_i x_j$  skalarni proizvod vektora – odnosno “element puta element” množenje dva vektora  $x_i$  i  $x_j$  dimenzija  $T \times 1$ . Rezultujući  $T \times 1$  vektor se zatim množi sa svakim redom matrice  $X$  dimenzija  $M \times T$ , a ovaj rezultat se završno množi sa matricom  $X^T$  dimenzija  $T \times M$  i na taj način se dobija matrica  $Q_{ij}$  dimenzija  $M \times M$ .

### **CCA algoritam**

Pretpostavimo da je poznat signal opservacije  $x(t)$  koji je nastao miksovanjem nezavisnih komponenta  $s(t)$  i da važi linearni ICA model:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) \quad \text{Relacija 28}$$

gde je  $A$  nepoznata miksjuća matrica. Cilj je da se odrede originalni signali  $s(t)$ . Kanonična korelaciona analiza (CCA) rešava ovaj problem tako što nameće originalnim signalima  $s(t)$  da budu uzajamno nekorelisani i maksimalno korelisani sa predefinisanim funkcijom.

Neka je signal  $x(t)$  opservirana matrica sa  $K$  signala i  $N$  odbiraka; tada se može kreirati predefinisana funkcija  $y(t)$  kao vremeski zakašnjena verzija originalne matrice podataka, da bi se nezavisne komponente  $s(t)$  uslovile da budu maksimalno autokorelisane:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t-1) \quad \text{Relacija 29}$$

Kada se srednja vrednost svakog reda oduzme u matricama  $x(t)$  i  $y(t)$ , CCA poseduje dva skupa bazičnih vektora, jedan za  $x$  i drugi za  $y$ , tako da korelacije između projekcija promenljivih na ove bazične vektore budu uzajamno maksimalne. Neka su linearne linearne kombinacije komponenta u  $x$  i  $y$ :

$$\begin{aligned} x &= w_{x1} \cdot x_1 + \dots + w_{xK} \cdot x_K = \mathbf{w}_x^T \cdot \mathbf{x} \\ y &= w_{y1} \cdot y_1 + \dots + w_{yK} \cdot y_K = \mathbf{w}_y^T \cdot \mathbf{y} \end{aligned} \quad \text{Relacija 30}$$

CCA pronalzi vektore  $w_x$  i  $w_y$  koji maksimizuju korelaciju  $\rho$  između  $x$  i  $y$  rešavajući sledeći maksimizacioni problem:

$$\max_{\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y} \rho(x, y) = \frac{E\{xy\}}{\sqrt{E\{x^2\} \cdot E\{y^2\}}} = \frac{\mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xy} \mathbf{w}_y}{\sqrt{(\mathbf{w}_x^T \mathbf{C}_{xx} \mathbf{w}_x)(\mathbf{w}_y^T \mathbf{C}_{yy} \mathbf{w}_y)}} \quad \text{Relacija 31}$$

gde su  $C_{xx}$  i  $C_{yy}$  kovarijacione matrice od  $x$  i  $y$ , respektivno, dok je  $C_{xy}$  kros-kovarijaciona matrica. Maksimizacija ovog problema se vrši tako što se izvodi po  $w_x$  i  $w_y$  izjednačavaju sa nulom, što posle nekoliko računskih koraka, rezultuje u sledeća dva problema:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \hat{\mathbf{w}}_x = \rho^2 \hat{\mathbf{w}}_x \\ \mathbf{C}_{yy}^{-1} \mathbf{C}_{yx} \mathbf{C}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xy} \hat{\mathbf{w}}_y = \rho^2 \hat{\mathbf{w}}_y \end{cases} \quad \text{Relacija 32}$$

Rešavanjem po  $\hat{\mathbf{w}}_x$  dobija se  $K$  rešenja  $\{\rho_i, \hat{\mathbf{w}}_{xi}\}$ ,  $i=1..K$ . Procene nezavisnih komponenata se, dalje dobijaju, korišćenjem relacije  $\hat{s}_i(t) = \hat{\mathbf{w}}_{xi}^T \mathbf{x}(t)$ .

## ***Primeri primene ICA algoritama u obradi signala***

### ***Ekstrakcija EKG signala iz EEG signala kod novorođenčadi***

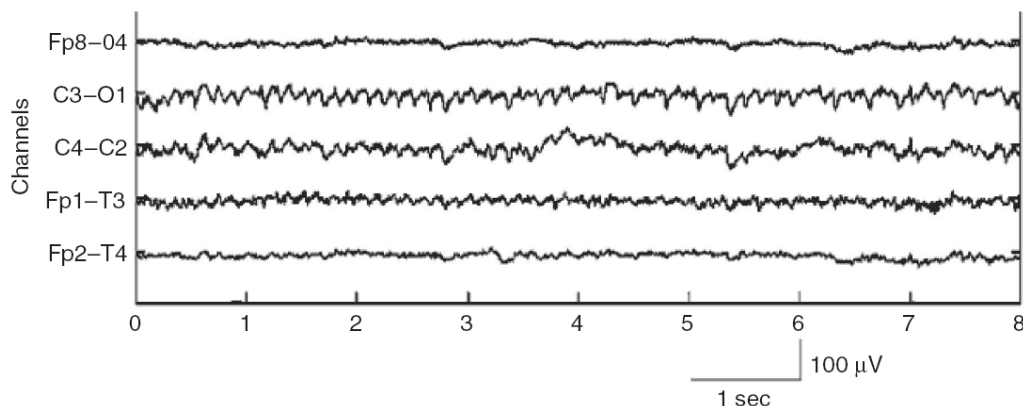
Problem prilikom merenja EEG signala kod novorođenčadi je nepoželjno prisustvo EKG signala koji elektrode detektuju zajedno sa EEG signalom usled blizine krvnih sudova. EKG signal može predstavljati veliku smetnju detekciji epileptičkog napada kod novorođenčadi usled svoje sličnosti sa epileptičnim nalazom. Primena ICA algoritma je u tome što se on koristi za izdvajanje EKG šuma i njegovo oduzimanje od EEG signala, kako bi se dobio „čist“ EEG signal. Postoji više ICA metoda za filtriranje šuma i potrebno je odabrati najpogodnu metodu za konkretnu primenu, [9].

EKG je u EEG-u stalno prisutan, ali mu je intenzitet nestacionaran (ne postoji tačno mesto na korteksu, tj. tačno definisano mesto ili mesta elektroda na kome ili kojima se može pretpostaviti postojanje EKG talasa).

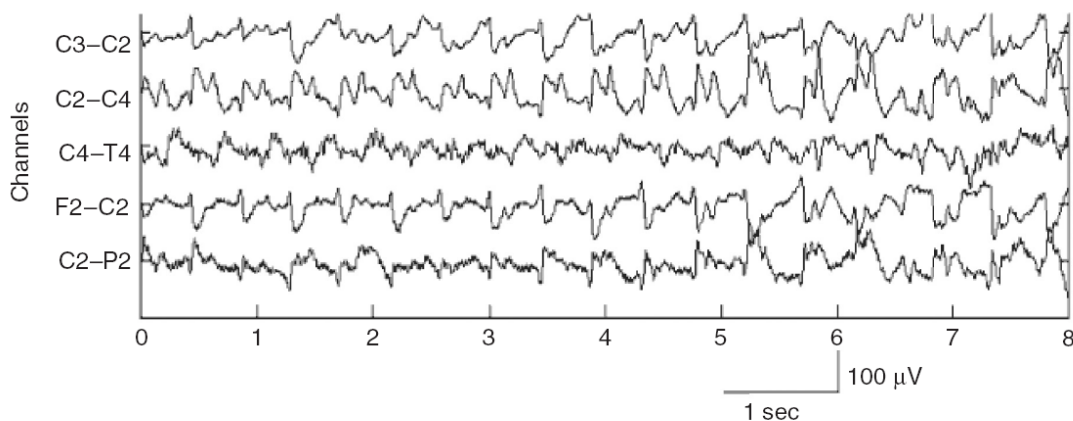
Do sada su primenjivane 3 metode za uklanjanje ovog šuma iz EEG signala: *ensemble average subtraction*, morfološki filtri i ICA (*Independent Component Analysis*).

Analiza neonatalnog EEG-a predstavlja veoma komplikovanu oblast u okviru obrade biomedicinskog signala. Klinički znaci epilepsije kod novorođenčadi nisu uvek toliko očigledni kao kod odraslih (koji su praćeni nekontrolisanim, trzajnim pokretima tela koji se učestalo ponavljaju). Kod novorođenčadi su prisutni manje očigledni simptomi, tzv. blagi napadi (eng. *subtle seizures*) i oni se mogu manifestovati neprekidno otvorenim očima sa okularnom fiksacijom, učestalim treptanjem, gutanjem, blažim pokretima tela ili facijalnim ekspresijama. Usled ovih simptoma, detekcija epileptičkih napada kod novorođenčadi je daleko kompleksnija i do sada postoji svega nekoliko razvijenih pristupa sa kojima se pokušalo rešiti ovaj problem. Svi ovi pristupi imaju veoma visok procenat lažnih detekcija, pa se stalno radi na pronalaženju novih i sofisticiranijih algoritama. Važno je istaći da rana dijagnostika epileptičkog napada kod novorođenčadi je od presudnog značaja za ishod lečenja jer se može odmah pristupiti medikalnoj terapiji. Na taj način se dalja oštećenja centralnog nervnog sistema mogu usporiti i/ili zaustaviti.

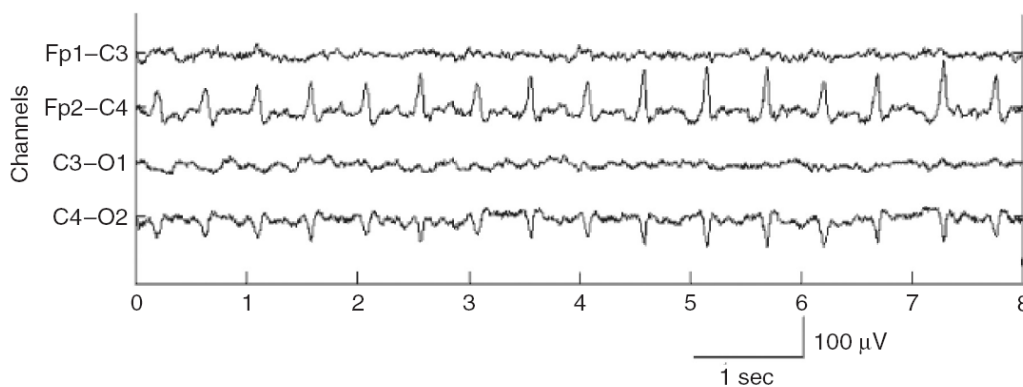
Najčešće, tokom napada, u EEG signalima su prisutni pikovi usled nerazvijenih mentalnih aktivnosti i brzih promena u metabolizmu mozga. U novijim istraživanjima i pristupima [9] pojava epilepsije kod novorođenčadi opisuje se pomoću tri kategorije morfoloških oblika signala: a) pseudosinusoidalnih, b) kompleksna morfologija i c) ritmičke pojave pikova nalik talasima. Ove tri kategorije signala predstavljene su na Sl. 1, Sl. 2 i Sl. 3, respektivno.



**Slika 1, Niskoamplitudni tip “depressed brain discharge” na kanalima C3–O1 i FP1–T3. Preuzeto iz [9]**



**Slika 2, Učestali kompleks sporih talasa sa utisnutim visokim frekvencijama na svim kanalima. Preuzeto iz [9]**



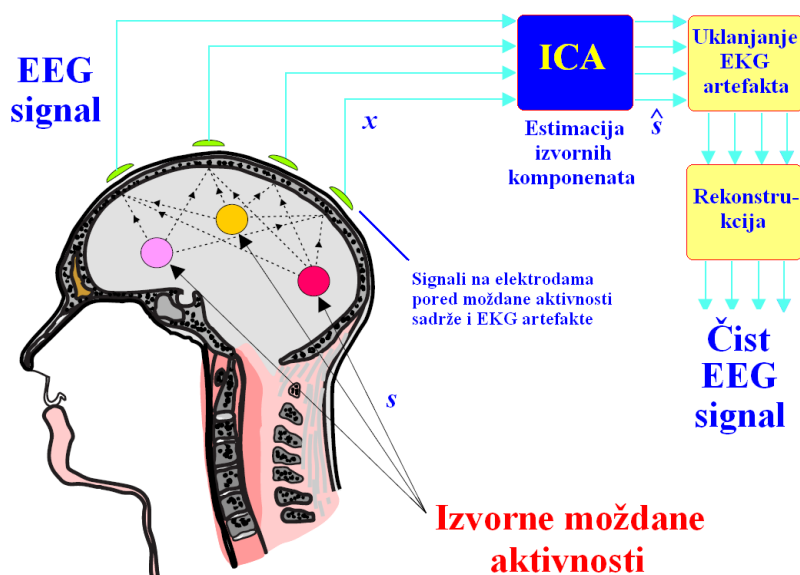
**Slika 3, Periodični brzi prelazi–pikovi na kanalima FP2–C4 i C4–O2. Preuzeto iz [9]**

Važno je da se prilikom projektovanja sistema za detekciju smanje lažne detekcije, a još važniji zahtev je da se ne dogodi eventualno propuštanje detekcije samog epileptičkog napada. Stoga se sva tri morfološka oblika EEG signala moraju precizno proveriti.

Glavni artefakti koji su utisnuti u signal EEG-a potiču od treptaja oka, pokreta tela i aktivnosti srčanog mišića (EKG). Ovi artefakti uklanjaju se najčešće primenom *Independent Component Analysis*. U cilju uklanjanja samog EKG artefakta, signal EEG-a se dekomponuje na nezavisne komponente ICA metodom. Pokazano je da je broj moždanih aktivnosti uglavnom manji od broja kanala EEG signala [10], te su osnovne pretpostavke za korišćenje ICA metode ispunjene (broj signala opservacija mora biti veći ili jednak od broja izvornih signala). Estimirane, ICA nezavisne komponente predstavljaju električnu aktivnost mozga, a među njima se nalaze i one komponente koje potiču od šuma EKG-a.

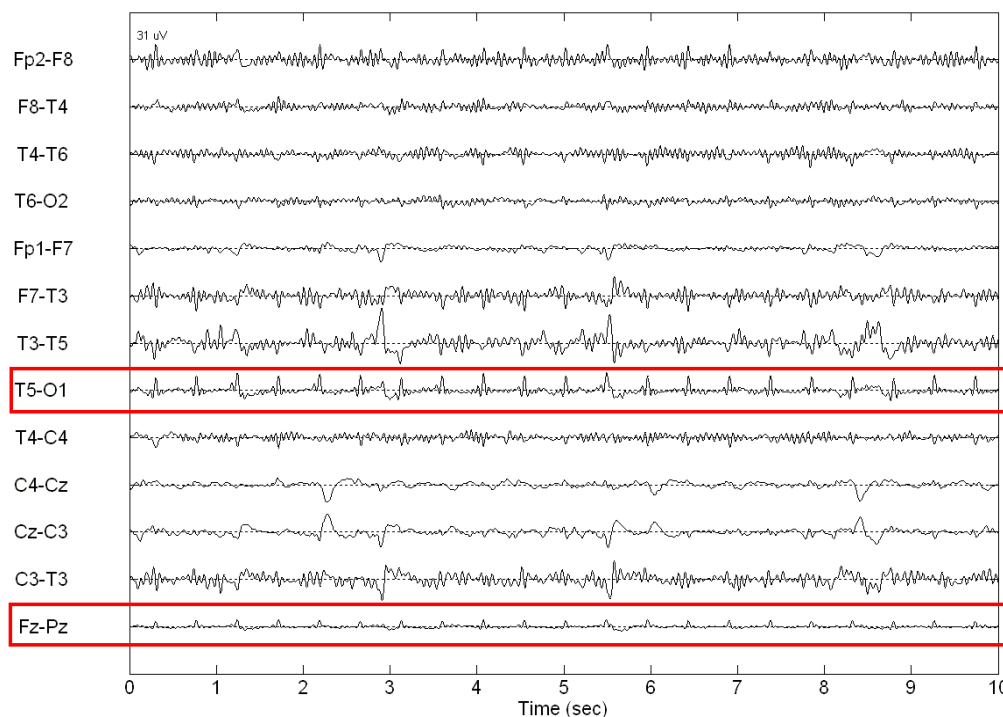
Posebnim algoritmom detektuju se komponente za koje se smatra da su artefakti EKG-a, uklanjaju se, a potom se preostale komponente rekonstruišu i tako se dobija čist EEG signal. Postupak filtriranja prikazan je na Sl. 4. S obzirom na prirodu EEG signala i artefakata, različiti ICA algoritmi koji se primenjuju na EEG signal daju različite izlazne rezultate. Veoma često rezultati se razlikuju i do te mere da je broj izlaznih signala (estimiranih nezavisnih komponentenata) različit.

Sama priroda i pravilnost EKG artefakta ostaje nepoznata i teško ih je opisati. Šum EKG-a je u toku snimanja uvek prisutan, ali njegov stepen degradacije varira. Ono što je moguće utvrditi je da određene nezavisne komponente zaista predstavljaju EKG artefakte. Ovi signali su u određenoj meri korelisani sa samim signalom EKG-a koji se snima uporedo sa EEG signalom.

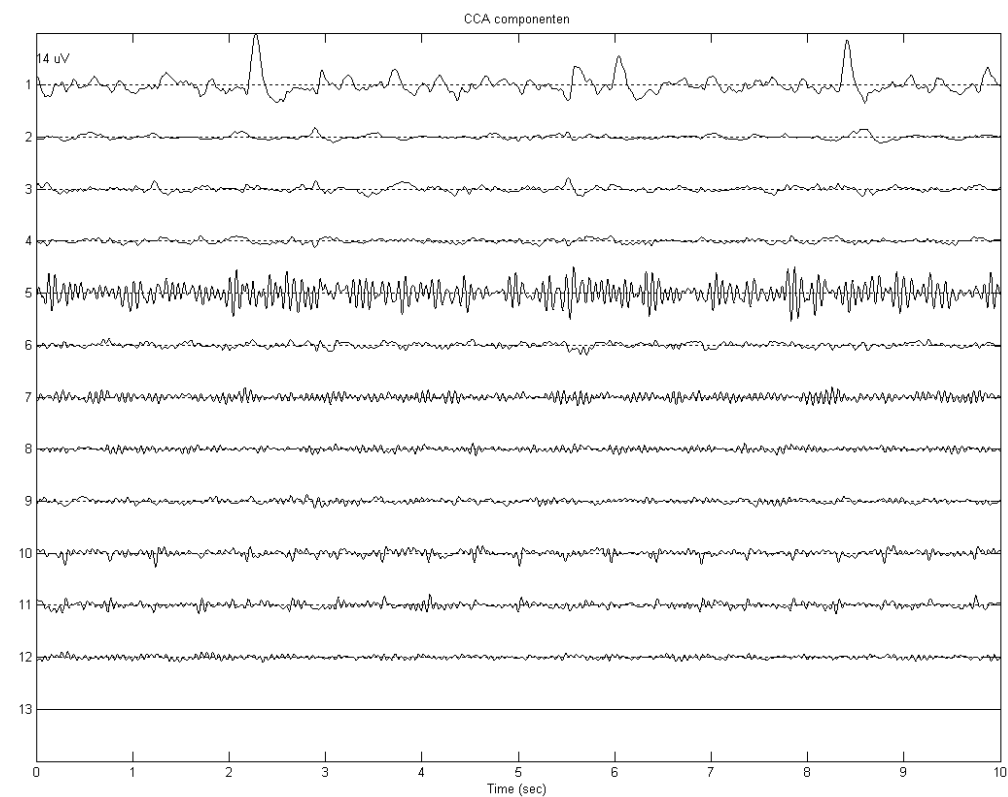


Slika 4, Proces uklanjanja EKG artefakta iz EEG signala korišćenjem ICA metode, pruzeto iz [9]

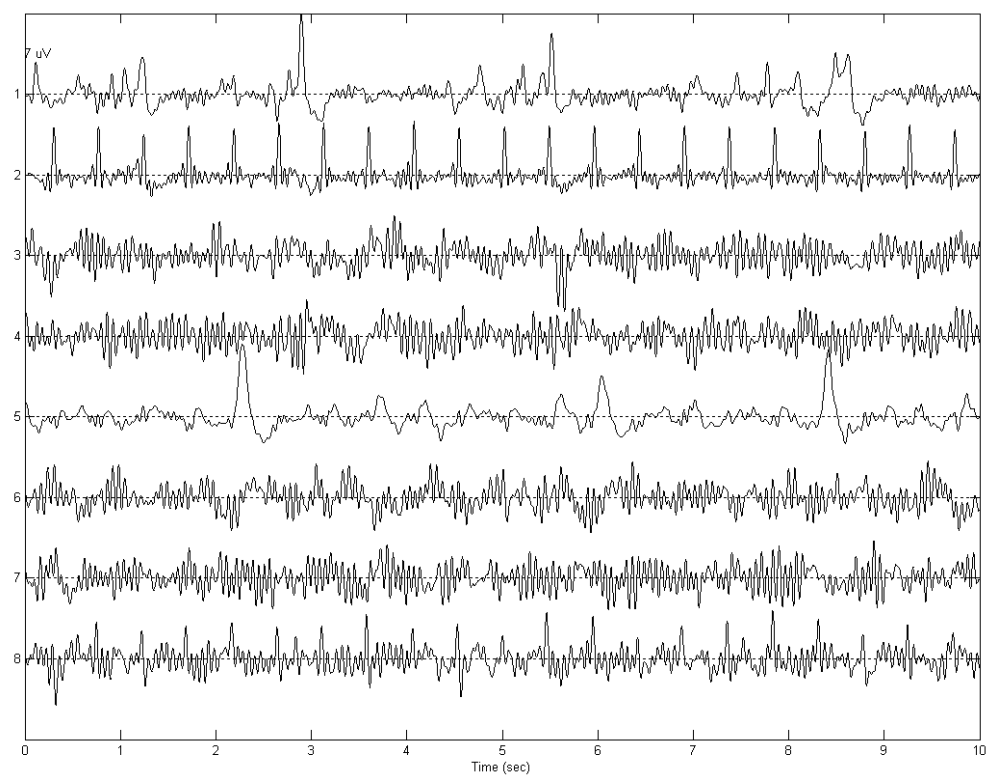
Radi ilustracije predstavljen je snimljeni EEG signal u trajanju od 10 sekundi na Sl. 5. Jasno se uočava da na određenim kanalima postoji prisustvo EKG artefakta. Dati segment EEG signala je dekomponovan korišćenjem ICA algoritama i to je respektivno prikazano na Sl. 6, Sl. 7 i Sl. 8. Izlazi algoritama daju komponente različitih oblika, a neke od njih na osnovu svoje morfologije jasno ukazuju da predstavljaju EKG artefakte. Algoritmi JADE i SOBI su na ovom segmentu izdvojili komponentu koja je očigledno korelisana sa signalom EKG-a (komponentna 2 na Sl. 7 i Sl. 8). Za ovaj segment algoritam CCA je estimirao dve komponente kod kojih je prisutna korelisanost sa EKG signalom (komponente 10 i 11 na Sl. 6).



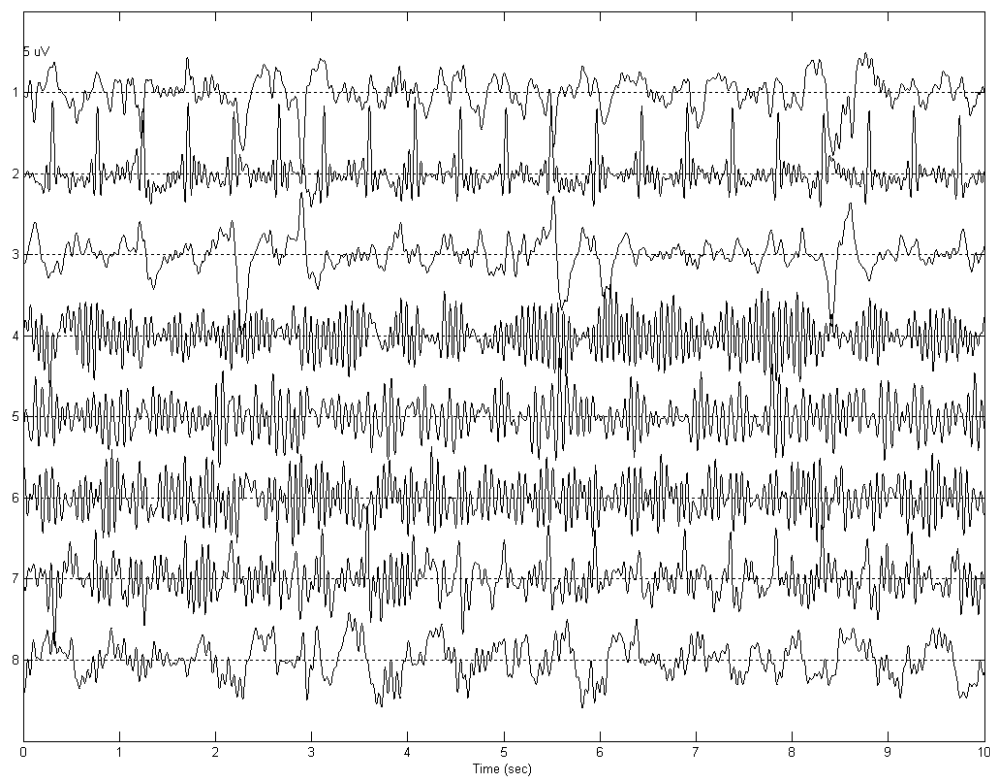
Slika 5, Prikaz EEG signala i kanali na kojima se vidi prisustvo EKG artefakta, preuzeto iz [9]



**Slika 6, Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa Sl. 5 korišćenjem CCA algoritma, preuzeto iz [9]**



**Slika 7, Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa Sl. 5 korišćenjem JADE algoritma, preuzeto iz [9]**

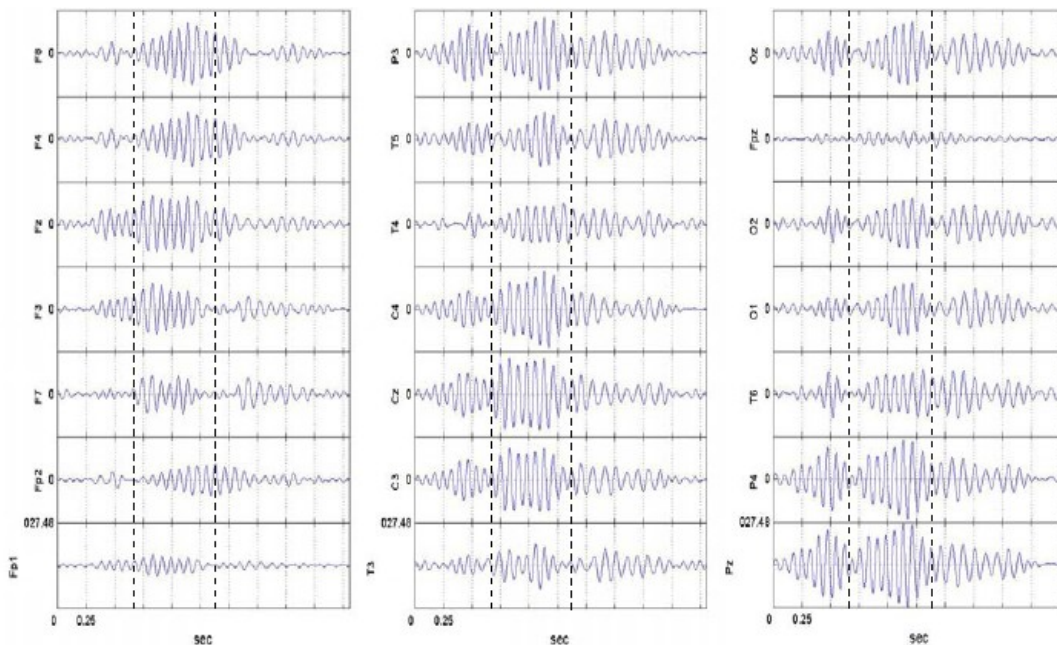


**Slika 8, Estimirane nezavisne komponente segmenta EEG-a sa Sl. 5 korišćenjem SOBI algoritma, preuzeto iz [9]**

## Detektovanje faza spavanja ekstrakcijom spindle-ova primenom ICA algoritma

Jedan primer primene ICA metode je proučavanje pojave pikova (*spindle*-ova) tokom spavanja kako bi se omogućilo bolje proučavanje faza spavanja. *Spindle*-ovi imaju kvaziritmičku aktivnost u propusnom opsegu od 11-16 Hz i okarakterisani su sa progresivnim povećanjem i postepenim smanjenjem amplitude. Ideja je da se ICA algoritmi koriste za ekstrakciju *spindle*-ova iz EEG signala i da se odrede mesta na kori mozga na kojima se nalaze strujni izvori *spindle*-ova pomoći LORETA (*low-resolution brain electromagnetic tomography*) algoritma, [4].

*Spindle* signali definišu početak spavanja. Ovi signali se mogu podeliti na spore i brze *spindle*-ove. Spori imaju pik na 12 Hz u frekvencijskom domenu, a brzi imaju pik na 14 Hz. Prostiranje sporih signala je najizraženije na frontalnoj regiji korteksa, a prostiranje brzih na parijetalnoj i centralnoj regiji. Ideja je da se nakon separacije nezavisnih komponenata na njih primeni LORETA algoritam. LORETA algoritam rešava problem raspodele izvornih struja u korteksu i pretpostavlja da su orijentacija i snage susednih neuralnih izvora korelisane (što je u potpunosti suprotno ICA pretpostavkama).



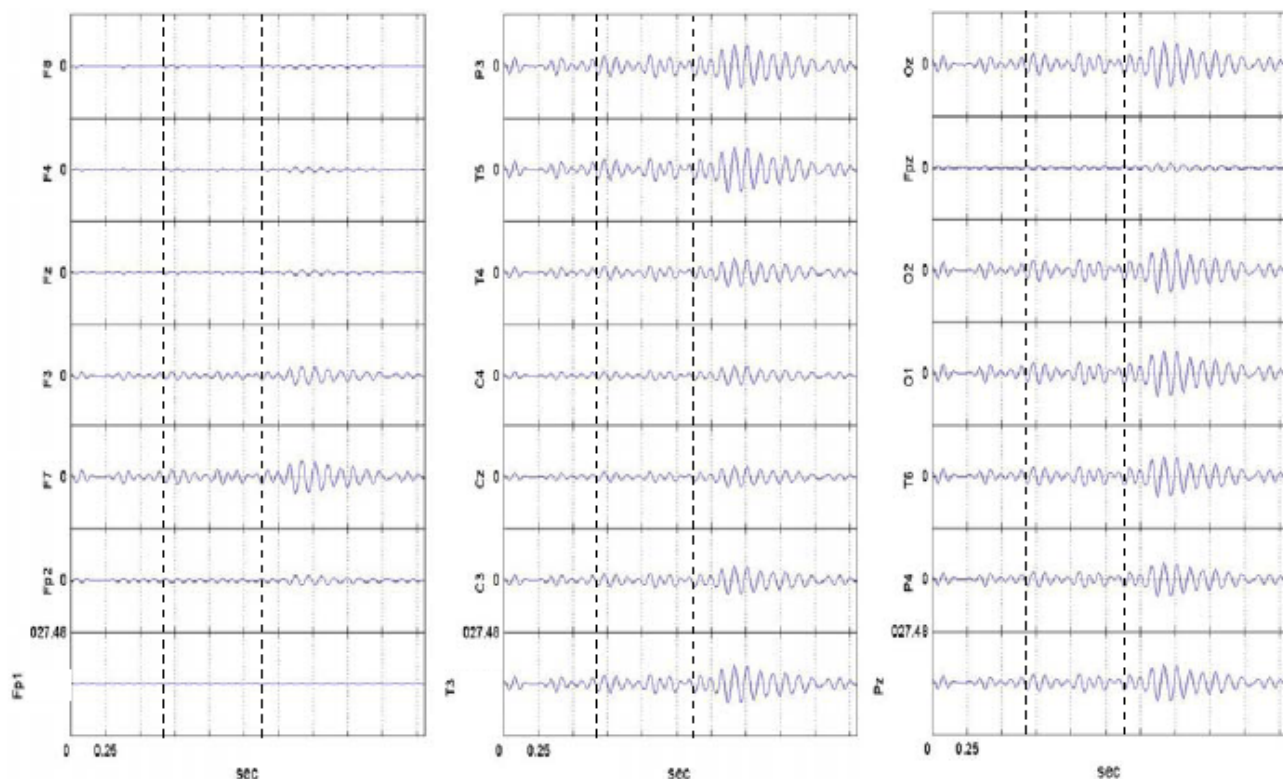
Slika 9, Filtrirani EEG signali na svim kanalima, isprekidana linija označava prelaze sa visokih na *spindle*-ove granične frekvencije kao i sa *spindle*-ova granične frekvencije na *spindle*-ove niske frekvencije, potencijali su u *mV*, preuzeto iz [4].

Primer signala snimanih u toku noći na jednom zdravom subjektu su prikazani na Sl. 9. Korišćena je standardna EEG kapa (sistem 10-20) i frekvencija odabiranja je bila 512 Hz. EEG snimak je podeljen na faze sna i filtrirani su *spindle* signali sa filtrom propusnikom opsega (FIR filtar propusnik opsega sa slabljenjem od 3 dB, frekvencijama odsecanja na 10.5 i 16 Hz, 128-og reda). Na filtriranim podacima je primenjen FastICA algoritam. Originalni podaci su najpre centrirani (kako bi srednja vrednost signala bila nula). *Spindle*-ovi su klasifikovani na *spindle*-ove niže frekvencije (niže od 12 Hz), na *spindle*-ove više frekvencije (više od 13 Hz) i na granične *spindle*-ove (od 12 do 13 Hz).

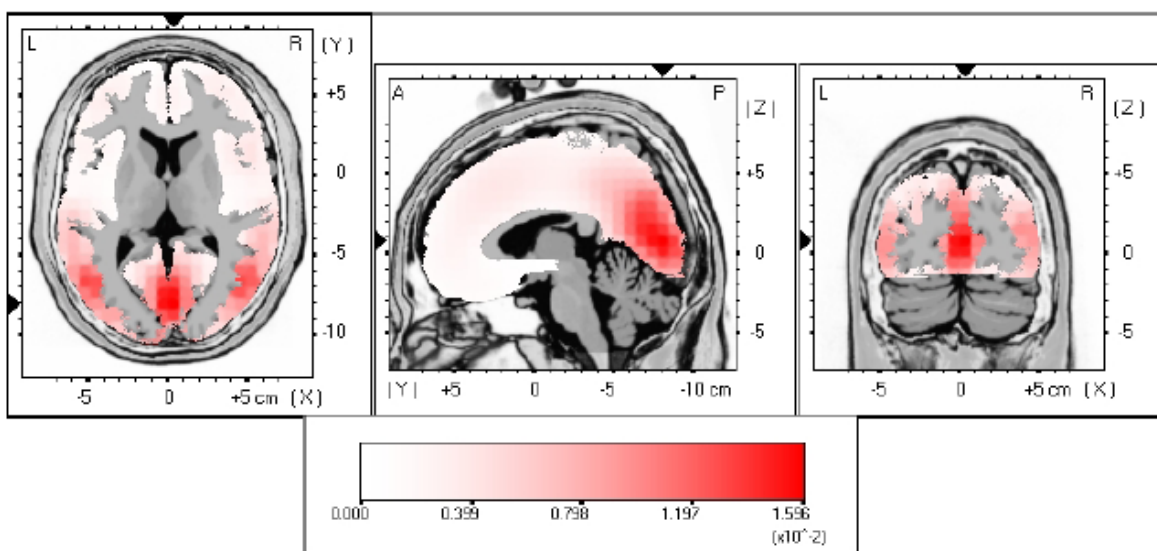
Primenjen je ICA algoritam i vizuelnom inspekcijom su određene nezavisne komponente (IC – *independent components*) koje odgovaraju pojavi *spindle*-ova po vremenskom trajanju i frekvencijskom sadržaju. Tako je omogućena lokacija svake grupe *spindle*-a na mestima pojave (elektrode na kojima su snimljeni). Potom je primenjen LORETA algoritam koji pretpostavlja



korelaciju snimaka sa susednih mesta i na taj način su određene lokacije strujnih izvora na korteksu na kojima se javljaju *spindle*-ovi, Sl. 10 i Sl. 11. Ovaj rad ([4]) je dobar primer kako kombinacija dve procesirajuće metode, koje se zasnivaju na potpuno oprečnim pretpostavkama mogu da dovedu do vidljivih rezultata.



Slika 10, Na osnovu dobijenih ICA komponentata rekonstruisan je EEG signal na svim kanalima, preuzeto iz [4]



Slika 11, Raspodela srednje vrednosti strujnih izvora *spindle*-ova visoke frekvencije za originalni EEG signal. Raspodele su normalizovane u odnosu na sopstvene maksimalne vrednosti za tri preseka. Vrednosti su u jedinicama  $\mu A / mm^2$ , preuzeto iz [4]

## Cocktail-party problem

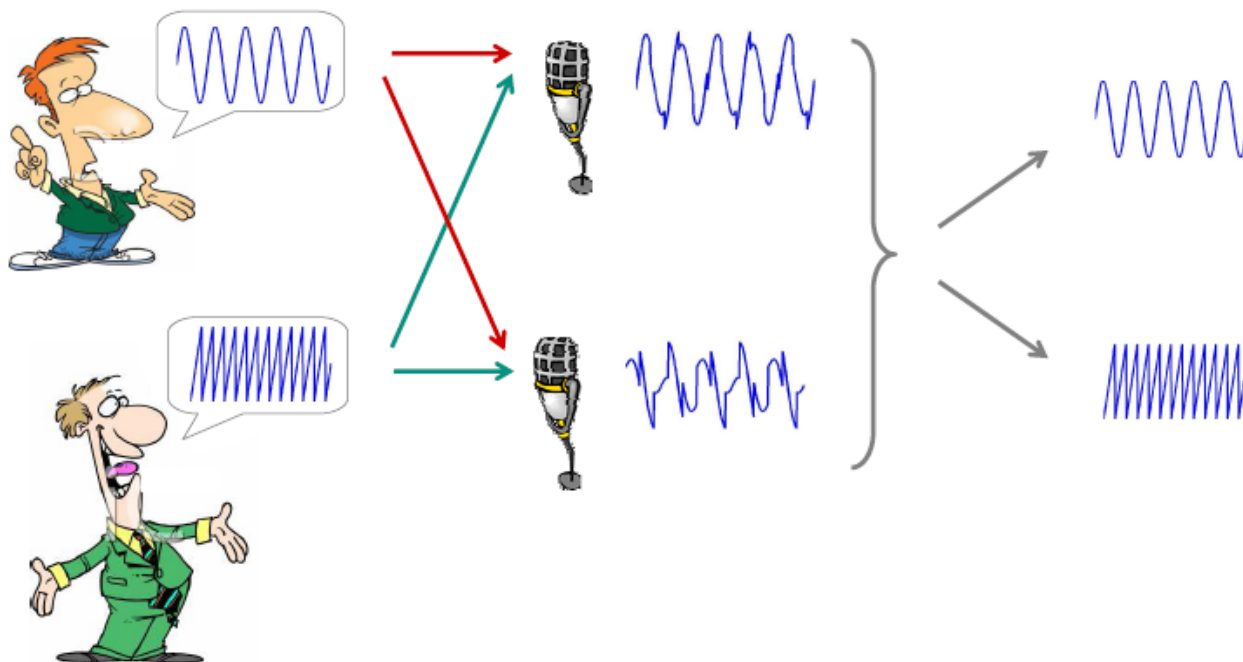
Ako se pretpostavi da dve osobe u prostoriji simultano razgovaraju i ako se u prostoriji nalaze dva mikrofona koja su postavljena na dve različite lokacije, tada mikrofoni snimaju dva vremenska signala koji se mogu obeležiti sa  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ . Svaki od ova dva snimljena signala predstavlja težinsku sumu govornog signala koje emituju dva sagovornika i označeni su sa  $s_1$  i  $s_2$ . Ovaj proces se može uprošćeno izraziti linearnim sistemom jednačina, [3], [6] i [9]:

$$x_1(t) = a_{11}s_1 + a_{12}s_2$$

$$x_2(t) = a_{21}s_1 + a_{22}s_2$$

Relacija 33

gde  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  predstavljaju parametre koji zavise od udaljenosti mikrofona od osoba koje govore. Za sada će sva moguća vremenska kašnjenja govornog signala i ostali faktori biti izostavljeni kako bi model ostao dovoljno uprošćen za dalju ilustraciju. *Cocktail-party* problem predstavlja rekonstrukciju izvornih signala  $s_1$  i  $s_2$  iz signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ .



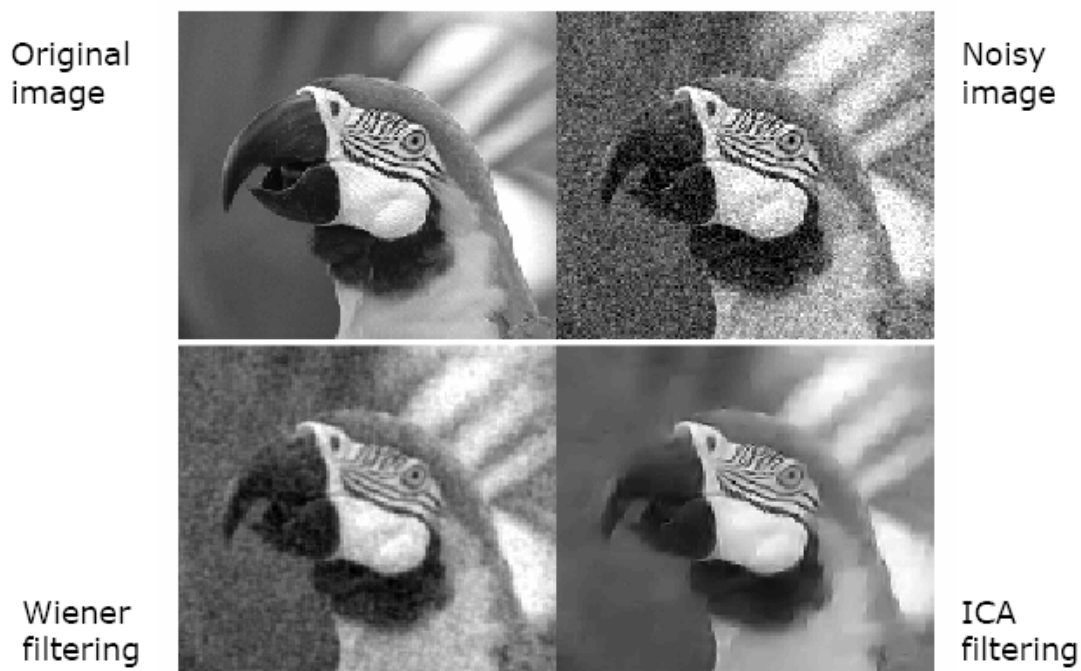
Slika 12, Skica najjednostavnijeg *Cocktail-party* problema sa dve izvorne i dve nezavisne komponente, preuzeto iz [8]

Kada bi koeficijenti  $a_{ij}$  bili poznati, onda bi se klasičnim metodama jednostavno rešio ovaj problem. Međutim, kako koeficijenti  $a_{ij}$  nisu poznati rešenje problema postaje znatno teže. ICA algoritam se može iskoristiti za estimaciju koeficijenata  $a_{ij}$  na osnovu informacija o njihovoj nezavisnosti, što omogućava da se izdvoje originalni signali  $s_1(t)$  i  $s_2(t)$  iz njihovih izmiksovanih signala  $x_1(t)$  i  $x_2(t)$ .

Analiza nezavisnih komponenta (ICA) nastala je prvobitno za rešavanje problema koji su usko povezani sa *cocktail-party* problemom. Skorašnji veliki porast interesovanja za ICA metode, jasno pokazuje da ovaj princip ima i mnoge druge interesantne primene.

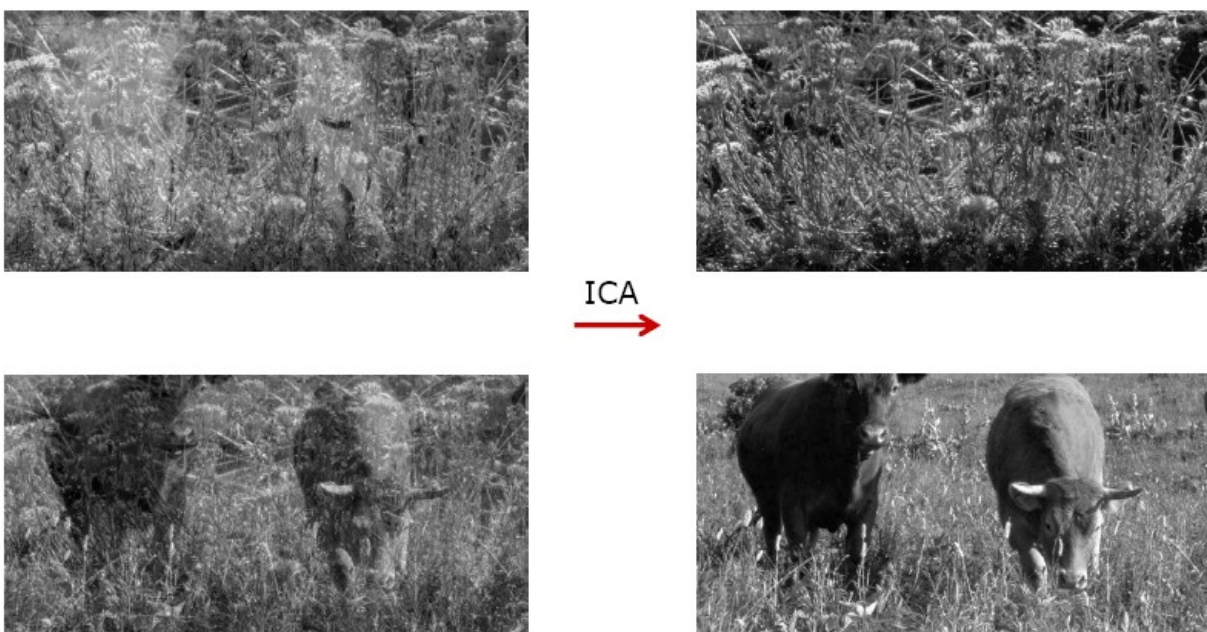
## *Ostali primeri primene ICA algoritama*

1. Obrada slika – uklanjanje šuma (Sl. 13)



Slika 13, Efikasnost ICA algoritma za otklanjanju šuma u poređenju sa *Wiener*-ovim filtrom, preuzeto iz [8]

2. Filtriranje artefakta u podacima dobijenim magnetoencefalografijom (MEG podaci), [2].
3. Separacija različitih slika (Sl. 14).



Slika 14, Efikasnost ICA algoritma u primeni za separaciju slika, preuzeto iz [2]

4. Pronalaženje skrivenih faktora u proučavanju finansijskih podataka (npr. efekti praznika na zaradu u prodavnicama itd.), [2] i [8].
5. U telekomunikacijama, za separaciju signala korisnika od interferentnih signala drugih korisnika sistema u CDMA (eng. *Code-Division Multiple Access*) pristupu u oblasti mobilnih telekomunikacija, [2] i [8].
6. Analiza tekstualnih dokumenata, [2] i [8].
7. Radiokomunikacije, [8].
8. i druge.

## *Literatura*

- [1] Aapo Hyvarinen and Erkki Oja. Independent Component Analysis: Algorithms and Applications, Neural Networks Research Center, Helsinki University of Technology, Neural Networks, 13(4-5):411-430, 2000.
- [2] Aapo Hyvarinen, Juha Karhunen, Erkki Oja. Independent Component Analysis, A Wiley-Interscience Publication, ISBN 0-471-22131-7, John Wiley & Sons, Inc. New York, 2001.
- [3] Demo for cocktail party problem: [http://www.cis.hut.fi/projects/ica/cocktail/cocktail\\_en.cgi](http://www.cis.hut.fi/projects/ica/cocktail/cocktail_en.cgi)
- [4] Errikos M. Ventouras, Periklis Y. Ktonas, Hara Tsekou, Thomas Paparrigopoulos, Ioannis Kalatzis, Constantin R. Soldatos. Independent Component Analysis for Source Localization of EEG Sleep Spindle Components, *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2010; ():329436.
- [5] FastICA package for MatLab: <http://www.cis.hut.fi/projects/ica/fastica/>
- [6] Jonathan Boley. Auditory component analysis using perceptual pattern recognition to identify and extract independent components from an auditory scene, research project submitted to the Faculty of the University of Miami in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Music Engineering technology, Coral Gables, FL, May 2005, br. strana 80, mentor: Ken C. Pohlmann
- [7] M. De Vos, L. De Lathauwer, A. Vergult, W. De Clercq, W. Van Paesschen, S. Van Huffel. Spatially constrained independent component analysis algorithm for real-time eye artifact removal from the electroencephalogram, *IEEE Benelux EMBS Symposium*, Belgian Day on Biomedical Engineering, December 7-8, 2006, strane: 1:4
- [8] Michel Journee. Independent component analysis, Matlab project, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, University of Liege, Belgium, September, 2008, br. strana 38
- [9] Vladimir Matić. Master rad: Upoređivanje efikasnosti ICA algoritama za uklanjanje EKG šuma iz EEG signala kod novorođenčadi, Elektrotehnički fakultet u Beogradu, 2010, br. strana 49, mentor: profesor Mirjana B. Popović