عمادالدین رشتیان ۴۰۳۲۰۶۴۷۹

تمرین سری سوم

۱) الف) فقط توابع تفکیک پذیر خطی قابل شناسایی با یک perceptron هستند. برای ۲ ورودی توابع تفکیک پذیر خطی عبارتند از: 1، 0، AND، OR، NAND، NOR، ~A، ~B، A، B، A∧~B، ~A∧B، ~A∨B، A∨~B و ۲ تابع تفکیک ناپذیر XOR و XNOR هستند.

ب) tanh مانند sigmoid مشکل ناپدید کردن گرادیان را دارد ولی به دلیل صفر محور بودن tanh برخلاف sigmoid، گرادیان مقادیر متعادل تری دارد که اثر ناپدید شوندگی را کمتر می‌کند.

ج) از آنجا که توابع XOR و XNOR ناپیوسته اند، استفاده از یک شبکه عصبی دولایه با relu ممکن است کافی نباشد. با افزایش لایه ها یا نورون ها می‌توان به دقت تخمین بهتری رسید.

د) نادرست زیرا با افزایش پیچیدگی شبکه عصبی، مدل به overfit شدن نزدیک می‌شود.

ه) شبکه های عمیق معمولا از نظر محاسباتی بهینه تر اند زیرا نیاز به نورون های کمتر دارند با این حال شبکه های عمیق می‌توانند از نظر محاسباتی پرهزینه باشند و همچنین به overfitting حساس تراند.

و) ناپدید شدن گرادیان وقتی به وجود می‌آید که هنگام آموزش مدل، گرادیان loss function در لایه های ابتدایی بسیار کوچک شود. در توابع فعالسازی sigmoid و tanh معمولا این اتفاق رخ می‌دهد. با استفاده از relu خروجی نورون ها برای مقادیر مثبت خطی اند پس گرادیان مقدار ثابت و غیرصفر دارد و ناپدید نمی‌شود.

ز) نادرست زیرا با اندازه batch کوچک واریانس افزایش یافته و مدل overfit می‌شود.

۲)

$$y' = 1.2x^3 - 0.3x^2 - 4x - 0.8$$

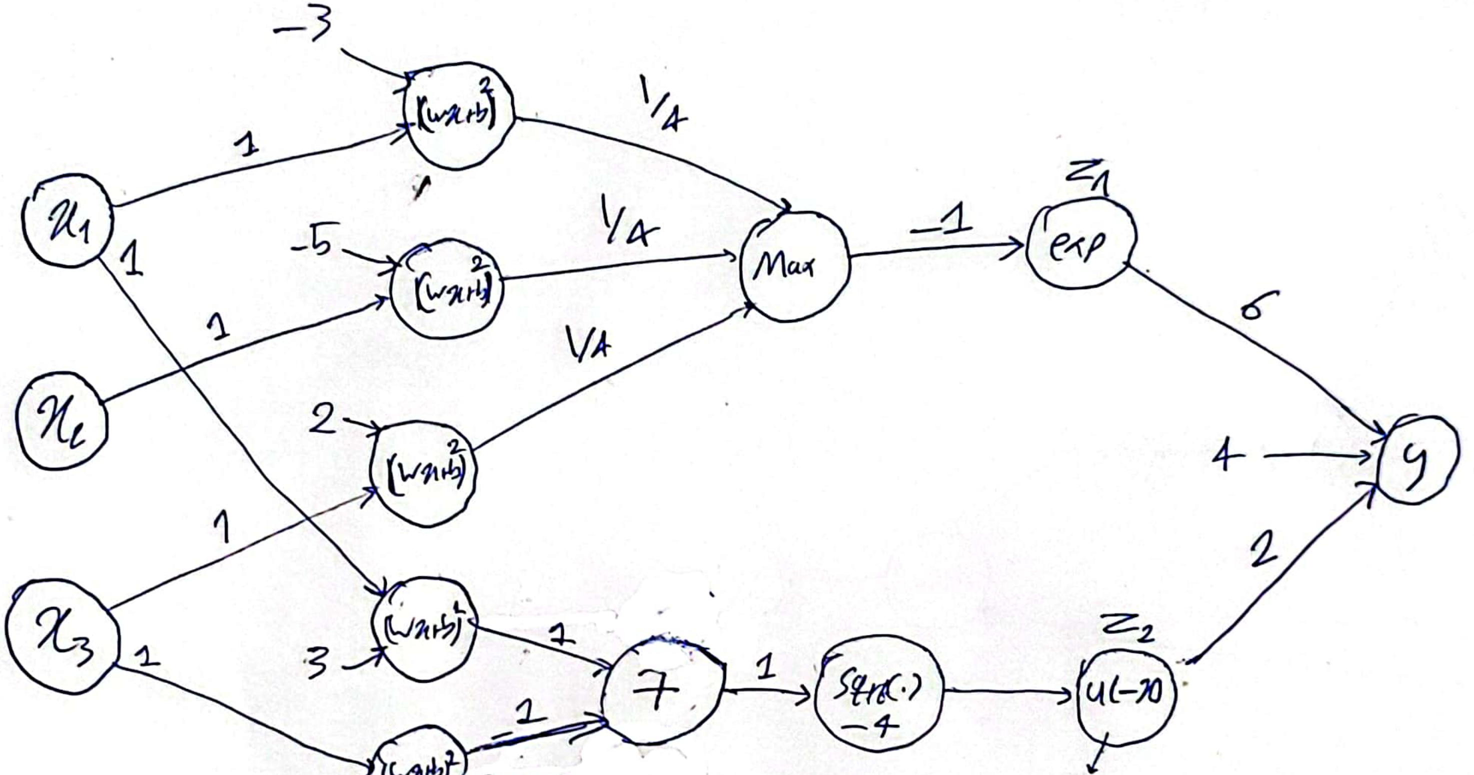
$$g_1 = 1.2(-2.8)^3 - 0.3(-2.8)^2 + 4\times 2.8 - 0.8 = -18.3$$

$$m_1 = g_1(1-\beta) + m_0\beta = -15.1(1-0.7) = -4.5$$

$$x_1 = x_0 - \gamma m_1 = -2.8 - 0.05(-4.53) = -2.525 \rightarrow y_1 = 3.07$$

$$g_2 = -11.83 \rightarrow m_2 = -7.43 \rightarrow x_2 = -2.15 \rightarrow y_2 = -0.7$$

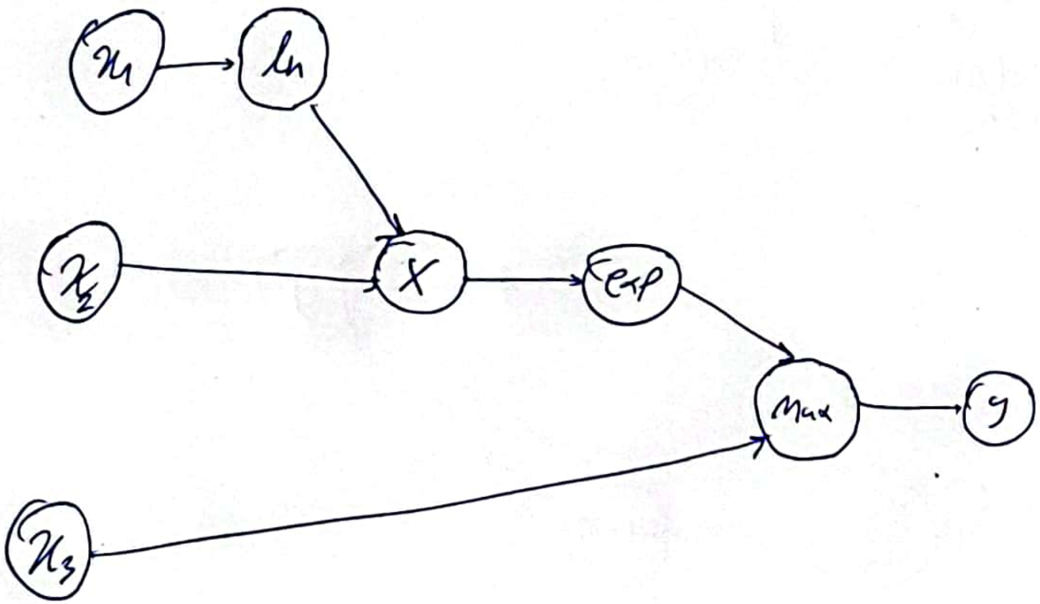
۲ الف)



$$u(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases} \longrightarrow u(-x)=\begin{cases}1 & x\leq 0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

۲ ب)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \max\{x_3, x_1^{x_2}\}$$



-1 (ب)

$$\underset{D_a\times 1}{z_1} = \underset{D_a\times D_x}{W_1}\underset{D_x\times 1}{x}^{1} + b_{1\,D_a\times 1} \rightarrow W_{1\,D_a\times D_x} , b_{1\,D_a\times 1}$$

$$a_1 = ReLU(z_1) \longrightarrow a_{1\,D_a\times 1}$$

$$\underset{1\times 1}{z_2} = W_2 \times \underset{D_a\times 1}{a_1} + b_2 \longrightarrow W_{2\,1\times D_a} , b_{2\,1\times 1}$$

vectorize:

$$X_{D_x\times m} \longrightarrow W_{1\,D_a\times D_x}, b_{1\,D_a\times m} \longrightarrow z_{1\,D_a\times m} \longrightarrow a_{1\,D_a\times m} \longrightarrow W_{2\,1\times D_a}, b_{2\,1\times m}$$

$$\longrightarrow z_{2\,1\times m} \longrightarrow \hat{Y}_{1\times m}$$

$$\delta_1^{(i)} = \frac{\partial J}{\partial \hat{y}^{(i)}} = \frac{\partial J}{\partial L^{(i)}} \cdot \frac{\partial L^{(i)}}{\partial \hat{y}^{(i)}} = -\frac{1}{m}\left(\frac{y^{(i)}}{\hat{y}^{(i)}} + \frac{y^{(i)}-1}{1-\hat{y}^{(i)}}\right) = \frac{-1}{m}\left(\frac{(1-\hat{y}^{(i)})y^{(i)} + \hat{y}^{(i)}(y^{(i)}-1)}{\hat{y}^{(i)}(1-\hat{y}^{(i)})}\right)$$ 2

$$= -\frac{1}{m}\left(\frac{y^{(i)} - y^{(i)}\hat{y}^{(i)} + \hat{y}^{(i)}y^{(i)} - 1}{\hat{y}^{(i)}(1-\hat{y}^{(i)})}\right) = -\frac{1}{m}\left(\frac{y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}}{\hat{y}^{(i)}(1-\hat{y}^{(i)})}\right)$$

$$\delta_1 = -\frac{1}{m}\left(\frac{Y - \hat{Y}}{\hat{Y}(1-\hat{Y})}\right)$$

$$\delta_2^{(i)} = \frac{\partial \sigma(z_2)}{\partial z_2} = \sigma(z_2)(1-\sigma(z_2))$$ -3

$$\delta_3^{(i)} = \frac{\partial z_2}{\partial a_1} = W_2$$ -4

-5

$$\delta_4^{(i)} = \frac{\partial a_1}{\partial z_1} = \frac{\partial ReLU(z_1)}{\partial z_1} = \begin{cases} 1 & z_1 > 0 \\ 0 & z_1 \leq 0 \end{cases}$$

-6

$$\delta_5^{(i)} = \frac{\partial z_1}{\partial W_1} = X$$

-7

$$\frac{\partial J}{\partial W_1} = \frac{\partial J}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{y}}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial a_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial W_1} = \frac{1}{m}\sum\left[(W_2^T(\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})) \odot ReLU'(z_1^{(i)})\right] \cdot (x^{(i)})$$

(ع الف)

$$z^{(1)} = w^{(1)} x + b^{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} a & -a \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \xrightarrow{\sigma} h^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+e^{-a}} \\ \frac{1}{1+e^{-b}} \end{bmatrix}$$

$$z^{(2)} = w^{(2)} h^{(1)} + b^{(2)}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & -b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{1+e^{-a}} \\ \frac{1}{1+e^{-b}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{1+e^{-a}} + \frac{b}{1+e^{-b}} \\ \frac{-b}{1+e^{-a}} + \frac{-b}{1+e^{-b}} \end{bmatrix} \to h^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{a}{1+e^{-a}} + \frac{b}{1+e^{-b}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z^{(3)} = w^{(3)} h^{(2)} + b^{(3)}$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ -a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{a}{1+e^{-a}} + \frac{b}{1+e^{-b}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{1+e^{-a}} + \frac{-b^2}{1+e^{-b}} \\ \frac{-a^2}{1+e^{-a}} + \frac{b^2}{1+e^{-b}} \end{bmatrix} \to h^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{e^{z_1^{(3)}}}{e^{z_1^{(3)}} + e^{z_2^{(3)}}} \\ \frac{e^{z_2^{(3)}}}{e^{z_1^{(3)}} + e^{z_2^{(3)}}} \end{bmatrix}$$

$$z^{(4)} = w^{(4)} h^{(3)} + b^{(4)}$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ \frac{1}{2}a & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{e^{z_1^{(3)}}}{e^{z_1^{(3)}} + e^{z_2^{(3)}}} \\ \frac{e^{z_2^{(3)}}}{e^{z_1^{(3)}} + e^{z_2^{(3)}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ae^{z_1^{(3)}} - be^{z_2^{(3)}}}{e^{z_1^{(3)}} + e^{z_2^{(3)}}} \\ \frac{\frac{1}{2}ae^{z_1^{(3)}} + ae^{z_2^{(3)}}}{e^{z_1^{(3)}} + e^{z_2^{(3)}}} \end{bmatrix} = a^{(4)}$$

(ب)

$$E = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{ae^{z_1^{(3)}} - be^{z_2^{(3)}}}{e^{z_1^{(3)}} + e^{z_2^{(3)}}} - 0\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}ae^{z_1^{(3)}} + ae^{z_2^{(3)}}}{e^{z_1^{(3)}} + e^{z_2^{(3)}}} - 1\right)^2\right)$$

(c2 ④)

$$\frac{\partial L}{\partial z^{(4)}} = {}^{(4)} - t = \begin{bmatrix} z_1^{(4)} \\ z_2^{(4)} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial W^{(4)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(4)}} \frac{\partial z^{(4)}}{\partial W^{(4)}} = \begin{bmatrix} z_1^{(4)} \\ z_2^{(4)} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(3)} \\ h_2^{(3)} \end{bmatrix}^T, \quad \frac{\partial L}{\partial b^{(4)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(4)}} \frac{\partial z^{(4)}}{\partial b^{(4)}} = \begin{bmatrix} z_1^{(4)} \\ z_2^{(4)} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h^{(3)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(4)}} \frac{\partial z^{(4)}}{\partial h^{(3)}} = \begin{bmatrix} z_1^{(4)} \\ z_2^{(4)} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ \frac{1}{2}a & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a z_1^{(4)} - b(z_2^{(4)} - 1) \\ \frac{1}{2} a z_1^{(4)} + a(z_2^{(4)} - 1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z^{(3)}} = \frac{\partial L}{\partial h^{(3)}} \cdot \frac{\partial h^{(3)}}{\partial z^{(3)}} = \begin{bmatrix} (a(z_1^{(4)}) + \frac{a}{2}(z_2^{(4)} - 1)) \times h_1^{(3)} \times (1 - h_1^{(3)}) \\ [-b(z_1^{(4)}) + a(z_2^{(4)} - 1)] \times h_2^{(3)} \times (1 - h_2^{(4)}) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_3} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial L}{\partial z^{(3)}}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial z^{(3)}}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(2)} & h_2^{(2)} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial L}{b^{(3)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(3)}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h^{(2)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(3)}} \frac{\partial z^{(3)}}{\partial h^{(2)}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial L}{\partial z^{(3)}}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial z^{(3)}}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ -a & b \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z^{(2)}} = \frac{\partial L}{\partial h^{(2)}} \times (z^{(2)} > 0) \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial w^{(2)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(2)}} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial w^{(2)}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial L}{\partial z^{(2)}}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial L}{\partial z^{(2)}}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{(1)} & h_2^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial L}{\partial z^{(2)}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h^{(1)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(2)}} \frac{\partial z^{(2)}}{\partial h^{(1)}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial L}{\partial z^{(2)}}\right)_{(1)} \\ \left(\frac{\partial L}{\partial z^{2}}\right)_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & -b \end{bmatrix} = \cdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial z^{(1)}} = \frac{\partial L}{\partial h^{(2)}} \sigma(x)(1 - \sigma(x)) \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial w^{(1)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(2)}} \times (X)^T, \quad \frac{\partial L}{\partial b^{(1)}} = \frac{\partial L}{\partial z^{(1)}}$$

4

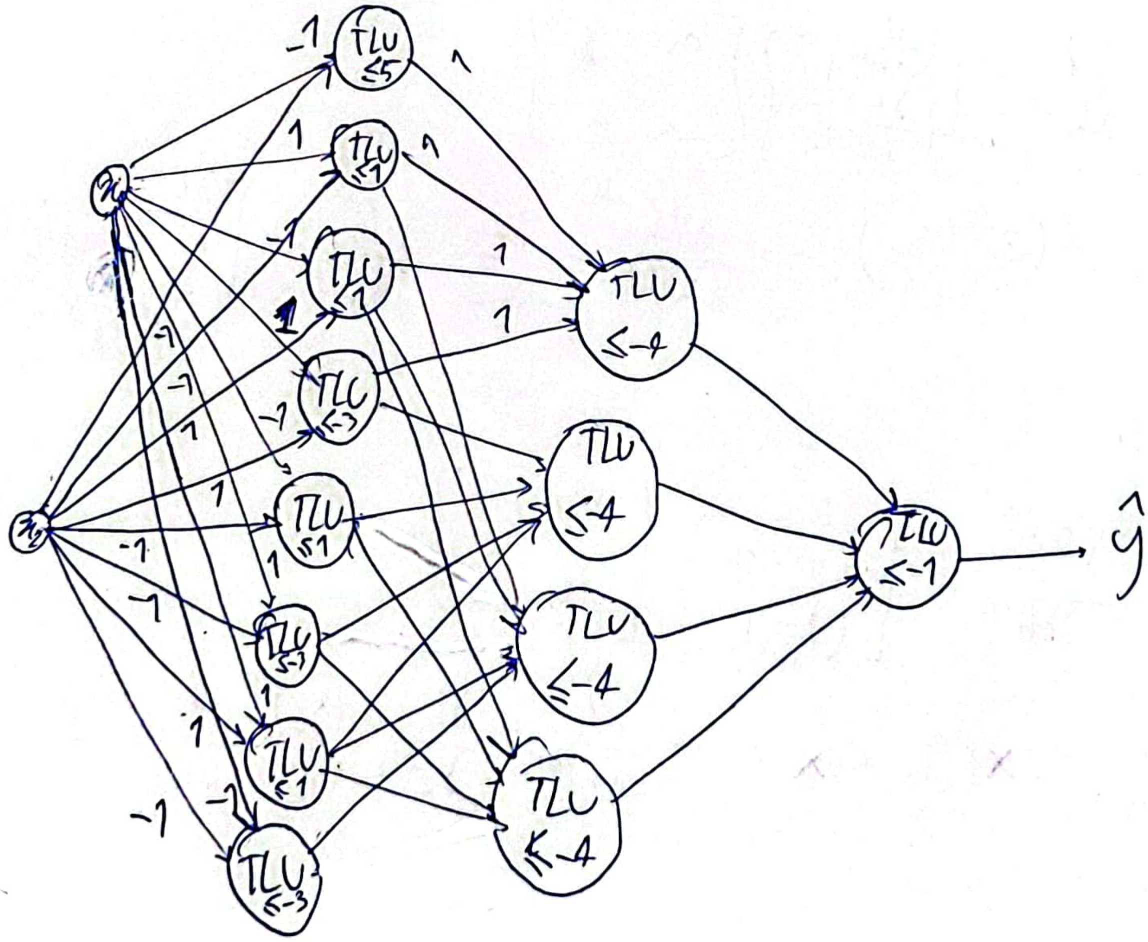
$$w^{(i)} = w^{(i)} - \eta\, \partial w^{(i)}$$

$$b^{(i)} = b^{(i)} - \eta\, \partial b^{(i)}$$

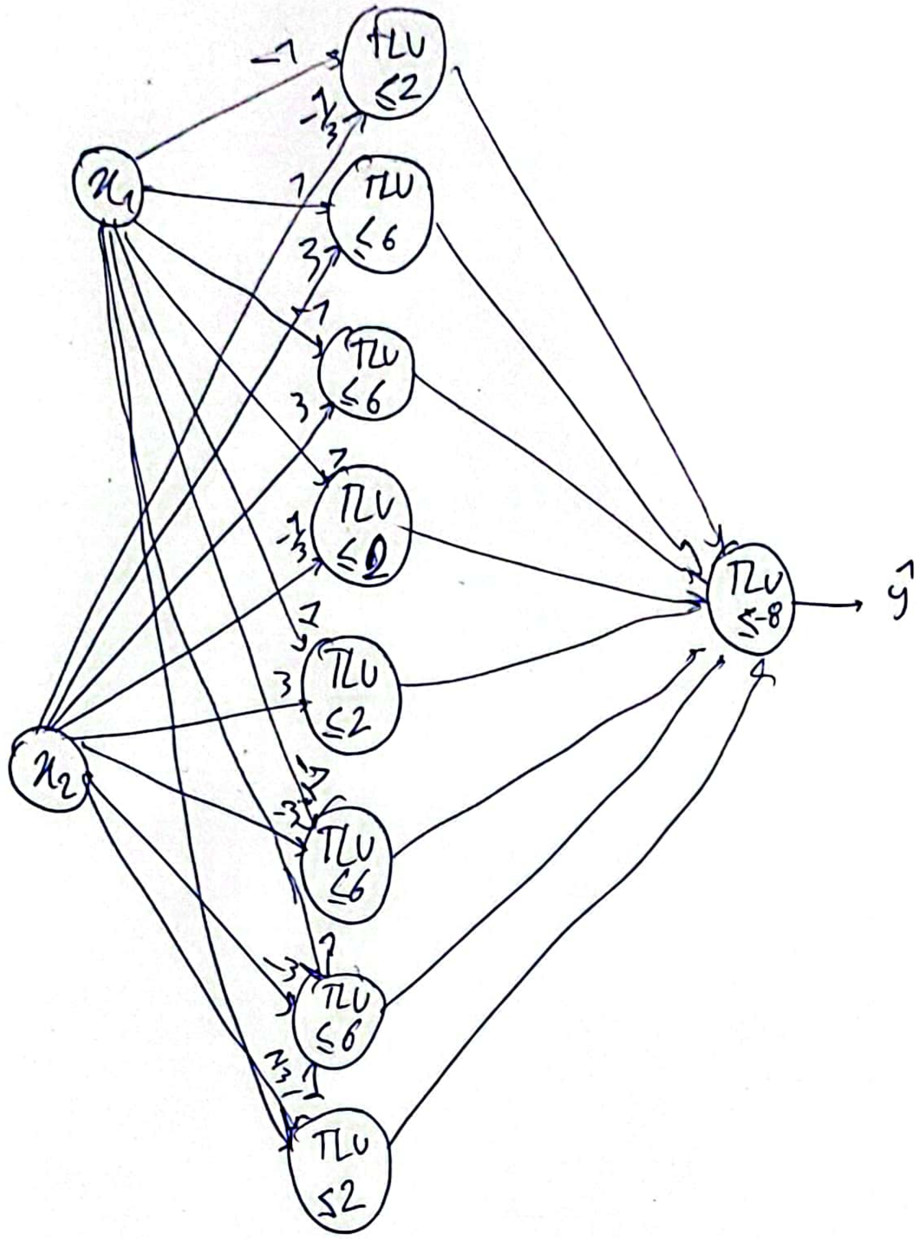
5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ -x_2 + x_1 \le -3 \\ -x_2 - x_1 \le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + x_1 \le 1 \\ x_2 - x_1 \le 5 \\ -x_2 + x_1 \le -3 \\ -x_1 - x_2 \le 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 + x_1 \le -3 \\ x_2 - x_1 \le 1 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ -x_2 - x_1 \le 5 \end{cases}$$

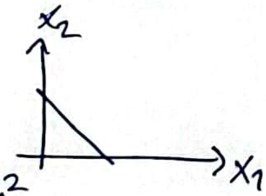
$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le -3 \\ x_2 + x_1 \le 1 \\ -x_2 - x_1 \le 1 \\ -x_2 - x_1 \le -1 \end{cases}$$

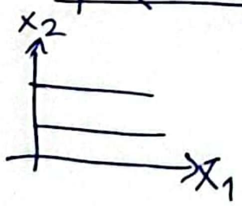


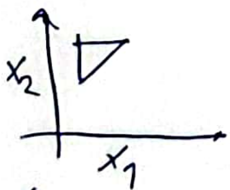
۵) ب) بله

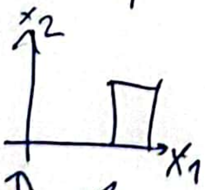


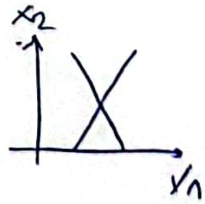
ج)

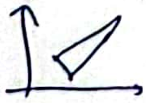
A:  → جداپذیر خطی با یک مرز

B:  → جداپذیر با دو مرز تقسیم

C:  → جداپذیر با سه مرز تقسیم

D:  → دو TLU بدون اشتراک

F:  شبه متقارن

E:  → سه TLU با اشتراک