

Závěrečná správa zo Študentského fakultného grantu

Ema Madziová

Multi-mierkový pohľad na rast chýb počiatkových podmienok pri predpovedi počasia

Katedra fyziky atmosféry

Vedúci grantu: Mgr. Hynek Bednář, Ph.D.

Praha 2025

1 Úvod

Atmosféru možno definovať ako deterministickú a chaotickú, teda predpovede jej konkrétneho stavu sú mimoriadne závislé na počiatkových podmienkach. V atmosfére sa vyskytujú rôzne javy rôznej časopriestorovej mierky. Javy malej mierky sú horšie predpovedateľné ako javy veľkej mierky a dva pôvodne blízke stavy divergujú rýchlejšie. Zároveň sa ukazuje, že v numerických predpovediach systémov, ktoré sú schopné modelovať viac mierok, je rast chyby počiatkových podmienok väčších mierok ovplyvnený rastom chyby v malých mierkach.

Takýto rast chyby načrtol Lorenz (1969). Jeho model predpovedá veličinu, ktorá je superpozíciou rôznych mierok. Popri rýchlym raste chyby malých mierok pomaly narastá aj chyba veľkých mierok.

Jednoduché atmosférické modely majú využitie pri štúdiu tém spojených s rastom chyby počiatkových podmienok, a to kvôli veľkej komplexnosti a nenáročnej výpočetnej kapacite. Medzi tieto modely patrí aj dvoj mierkový Lorenzov systém z roku 1996, ktorý budeme v tomto článku skúmať. Hodnoty parametrov volíme tak, aby veľká mierka reprezentovala Rossbyho planetárne (obrovské atmosférické vlny s vlnovou dĺžkou tisícok kilometrov, ktoré vznikajú v dôsledku Coriolisovej sily a zachovania potenciálnej vorticity) a synoptické (menšie vlny s vlnovou dĺžkou rádovo tisícov kilometrov, vznikajú rovnako ako planetárne) vlny a malá mierka reprezentovala konvekciu (prúdenie vzduchu vyvolané rozdielnymi teplotami v atmosfére, ktoré sú dôsledkom nerovnomerného zohrievania zemského povrchu) stredných a tropických zemepisných šírok.

Cieľom práce je vyhodnotiť vplyv malých mierok na rast chyby počiatkových podmienok v Lorenzovom systéme. Po úvode je v druhej kapitole popísaný použitý model a jeho nastavenia. V tretej kapitole popíšeme metódu pre výpočet rastu priemer chyby počiatkových podmienok a v štvrtej kapitole prezentujeme výsledky experimentu. Výsledky diskutujeme v 5. kapitole a projekt zhrnieme v kapitole 6.

2 Model

Na experiment sme použili dvoj mierkovú verziu Lorenzovho modelu z roku 1996. Ten vychádza z pôvodného Lorenzovho modelu tiež z roku 1996, ktorý sa snaží simulovať správanie nešpecifikovanej meteorologickej kvantity na kružnici, ktorá predstavuje zemepisnú šírku. Tento model je daný rovnicou:

$$dX_k/dt = -X_{k-2}X_{k-1} + X_{k+1}X_{k-1} - X_k + F, \quad (1)$$

kde $k = 1, \dots, K$, X_k predstavuje spomínanú meteorologickú kvantitu, F je konštanta reprezentujúca vnútornú silu a t je čas. Index k je kruhovo prepojený, tj. $X_k = X_{k+K} = X_{k-K}$. Nelineárne členy rovnice (1) simulujú advekciu. Lineárne členy reprezentujú mechanickú termálnu disipáciu.

Pri dvoj mierkovom modeli je pôvodný model rozšírený o člen reprezentujúci previazanosť veľkej mierky (reprezentované veličinami X_k) s malou mierkou (reprezentované veličinami Y_j) a k pôvodnej rovnici sa pridáva rovnica s malou mierkou:

$$dX_k/dt = -X_{k-2}X_{k-1} + X_{k-1}X_{k+1} - X_k + F - \frac{hc}{b} \sum_{j=J(k-1)+1}^{kJ} Y_j, \quad (2a)$$

$$dY_j/dt = -cbY_{j-2}Y_{j-1} + cbY_{j-1}Y_{j+1} - cY_j + \frac{hc}{b} X_{int[(j-1)/J]+1}, \quad (2b)$$

kde $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, KJ$, int je celá časť, spolu teda $K = KJ$ rovníc. Premenné X_k a Y_j sú opäť kruhové. Parametre h, b, c definujú vzájomný vplyv (previazanosť) dvoch mierok.

Pre tropické zemepisné šírky je nutné pridať do rovnice (2b) člen zohľadňujúci silu F , ktorý sa dá interpretovať ako čerpanie tepla (energie) z oceánu:

$$dX_k/dt = -X_{k-2}X_{k-1} + X_{k-1}X_{k+1} - X_k + F - \frac{hc}{b} \sum_{j=J(k-1)+1}^{kJ} Y_j, \quad (3a)$$

$$dY_j/dt = -cbY_{j-2}Y_{j-1} + cbY_{j-1}Y_{j+1} - cY_j + \frac{h_Y c}{b} F + \frac{h_X c}{b} X_{int[(j-1)/J]+1}. \quad (3b)$$

V experimente sme zvolili $K = 36$, $J = 10$ a $F = 15$, čím sme dostali celkovo 396 rovníc. Ďalej sme pracovali so štyrmi rôznymi nastaveniami parametrov, ktoré určujú rôzne veľkosti malých mierok (pomocou hodnôt parametrov h_X a h_Y) a ktoré sme aplikovali na rovnice (3):

$$\begin{aligned} L1 : K = 36, J = 10, JK = 360, F = 15, b_{L1} = 10, c_{L1} = 10, h_{XL1} = 1, h_{YL1} = 0, \\ L2 : K = 36, J = 10, JK = 360, F = 15, b_{L2} = 10, c_{L2} = 10, h_{XL2} = 1.5, h_{YL2} = 0, \\ T1 : K = 36, J = 10, JK = 360, F = 15, b_{T1} = 10, c_{T1} = 10, h_{XT1} = 1, h_{YT1} = 1, \\ T2 : K = 36, J = 10, JK = 360, F = 15, b_{T2} = 10, c_{T2} = 10, h_{XT2} = 1.5, h_{YT2} = 1, \end{aligned}$$

ďalej označené len ako L1, L2, T1, T2.

Vďaka voľbe $h_Y = 0$ zodpovedajú nastavenia L1 a L2 klimatických podmienka v stredných zemských šírkach (sú ekvivalentné rovniciam (2)) a nastavenia T1 a T2 zodpovedajú tropickým oblastiam v blízkosti rovníka.

3 Metódy

Obsahom experimentu je vyhodnotiť vplyv malých mierok na rast chyby počiatočných podmienok v Lorenzovom dvoj mierkovom modeli z roku 1996. Priemerný rast chyby počiatočných podmienok je určený pomocou ansámblov. Výsledky ansámblu 1 reprezentujú "skutočnosť" (predpokladali sme, že model verne zodpovedá realite a že počiatočné podmienky boli "namerané" úplne presne) a ansámblu 2 vracajú "predpoveď", ktorá je ovplyvnená chybou merania počiatočných podmienok pre malú mierku. Následne sme sledovali rast chyby medzi "skutočnosťou" a "predpoveďou".

Určenie počiatočných podmienok prebehlo náhodným výberom 36 premenných X_{1-36} z intervalu $(-1, 1)$ a 360 premenných Y_{1-360} z intervalu $(-0.1, 0.1)$. Pre nájdenie prirodzených hodnôt pre daný model sme aplikovali na náhodne vygenerované hodnoty 144 000 iterácií Runge-Kuttovej metódy 4. rádu. Časový krok sme zvolili ako $t = 0.005$. Takto získané hodnoty sme považovali za naše počiatočné podmienky (graficky znázornené na obrázku 1).

Pomocou ansámblu 1 sme spočítali "realitu". Na počiatku sme vychádzali z vypočítaných počiatočných podmienok, na ktoré sme aplikovali 1000 krokov Runge-Kuttovej metódy 4. rádu, časový krok sme zvolili opäť ako $t = 0.005$. Následne sme si zvolili posledné hodnoty ako naše nové počiatočné podmienky a previedli sme výpočet znovu. Celkovo sme zopakovali proces 200-krát a vytvorili sme tak 200 rôznych časových vývojov. Jednotlivé kroky sme uložili do štvordimenzionálneho poľa, prvá úroveň rozlišovala premenné X a Y , druhá zvolený ansamble, tretia časový krok a štvrtá jednotlivé premenné X_k alebo Y_j . Výpočet sme previedli pre všetky 4 varianty zvolených parametrov.

Obdobne sme postupovali aj pri výpočte "predpovede", teda ansámblu 2. Zmena nastala iba pri voľbe počiatočných podmienok na začiatku každého ansámblu, keď sme cielene volili novú počiatočnú podmienku pre premenné Y s chybou a to spôsobom, že sme počiatočné podmienky vybrali náhodne z normálového rozdelenia

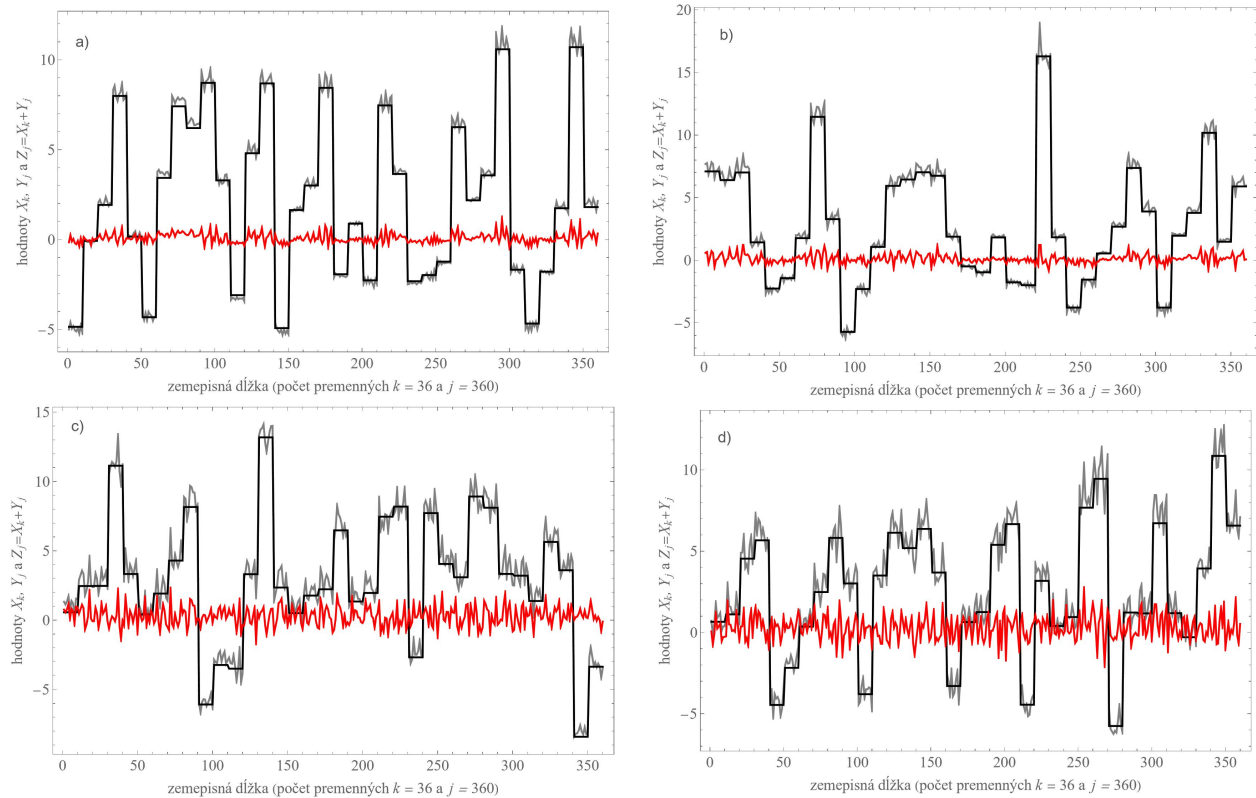
okolo našich "skutočných" hodnôt, čím sme testovali citlivosť systému. Vývoj "reality" a "predpovede" je znázornený na obrázku 2.

Ďalej sme určili priemerný rast chyby. Pre každú premennú X_k , Y_k a Z_k , ktorú zavádzame ako $Z_k = X_k + Y_k$, sme určili v každom časovom kroku kvadratický priemer rozdielu "skutočnosti" a "predpovede". Proces sa opakoval pre všetky členy ansámblu. V každom časovom kroku sa určil aritmetický priemer cez všetky opakovania (graficky znázornené na obrázku 3).

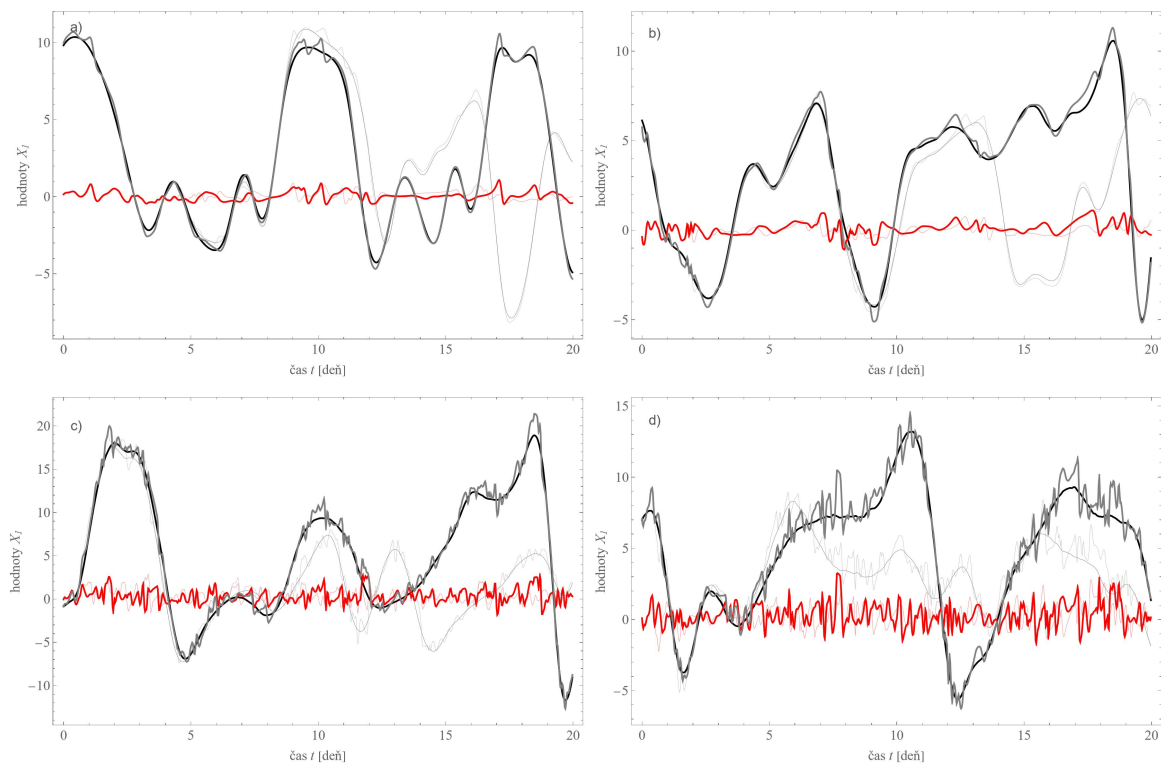
Nakoniec sme analyzovali priemerný rast chyby v čase. Sledovali sme časy, v ktorých chyba dosiahla veľkosť teoretickej prediktability (95% limitnej hodnoty chyby), praktickej prediktability (71% limitnej hodnoty chyby), a časy, keď chyba dosiahla 50% a 25% limitnej hodnoty chyby (znázornené na obrázku 4 a v tabuľke 1).

4 Výsledky

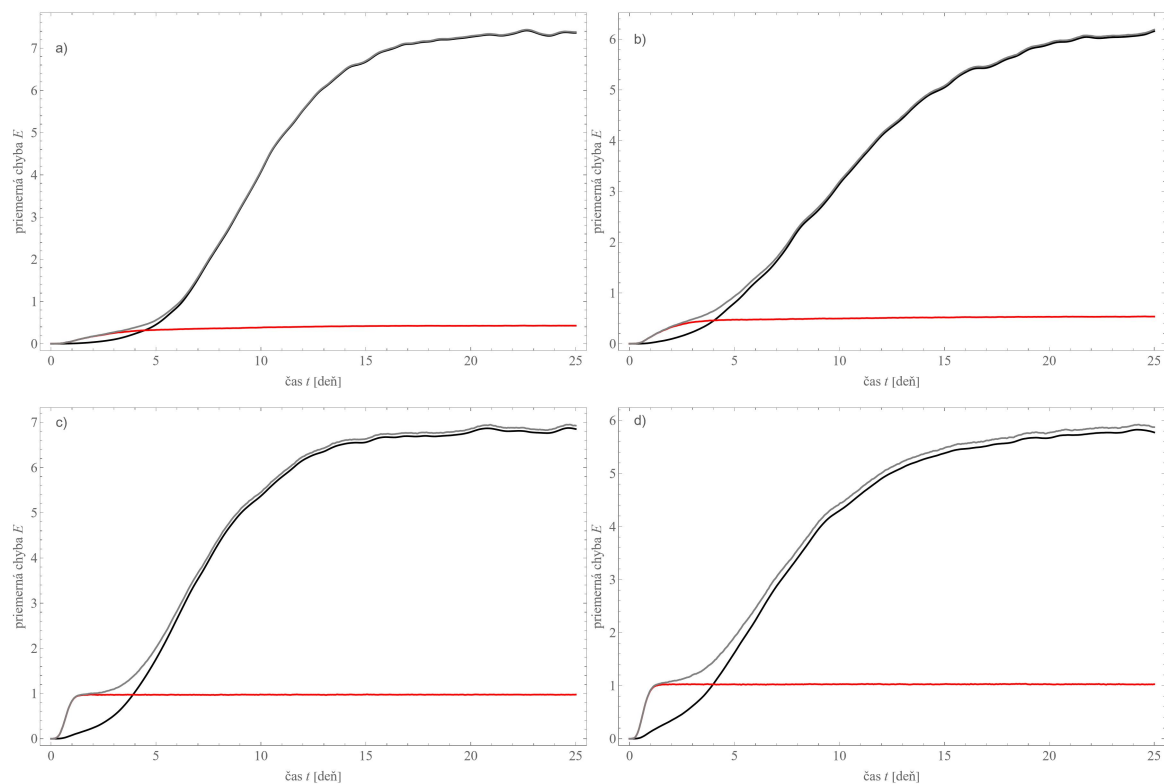
Výsledky sú zobrazené pre všetky nastavenia a platí, že a)L1, b)L2, c)T1, d)T2. Obrázok 1 zobrazuje počiatočné podmienky, na obrázku 2 môžeme vidieť časový vývoj jednej premennej X_n , Y_n , Z_n z jedného konkrétneho ansámblu, konkrétne sme zvolili ansámble 200 a vybrali sme z neho prvých 800 hodnôt pre $n = 1$, tj. X_1 , Y_1 , Z_1 . Obrázok 3 zobrazuje časový vývoj priemernej chyby premenných veľkej mierky X, malej mierky Y a súčtu veľkej a malej mierky Z. V tabuľke 1 môžeme vidieť deň, kedy priemerná chyba dosiahla 95%, 71%, 50% a 25% limitnej hodnoty chyby. Grafické zobrazenie tabuľky 1 najdeme na obrázku 4.



Obr. 1: Počiatočné podmienky, tj. 36 premenných veľkej mierky X_{1-36} (čierna), 360 premenných malej mierky Y_{1-360} (červená) a $j = 1, \dots, 360$ premenných $Z_j = X_{int[(j-1)/J]+1} + Y_j$ (šedá) v čase $t = 0$.



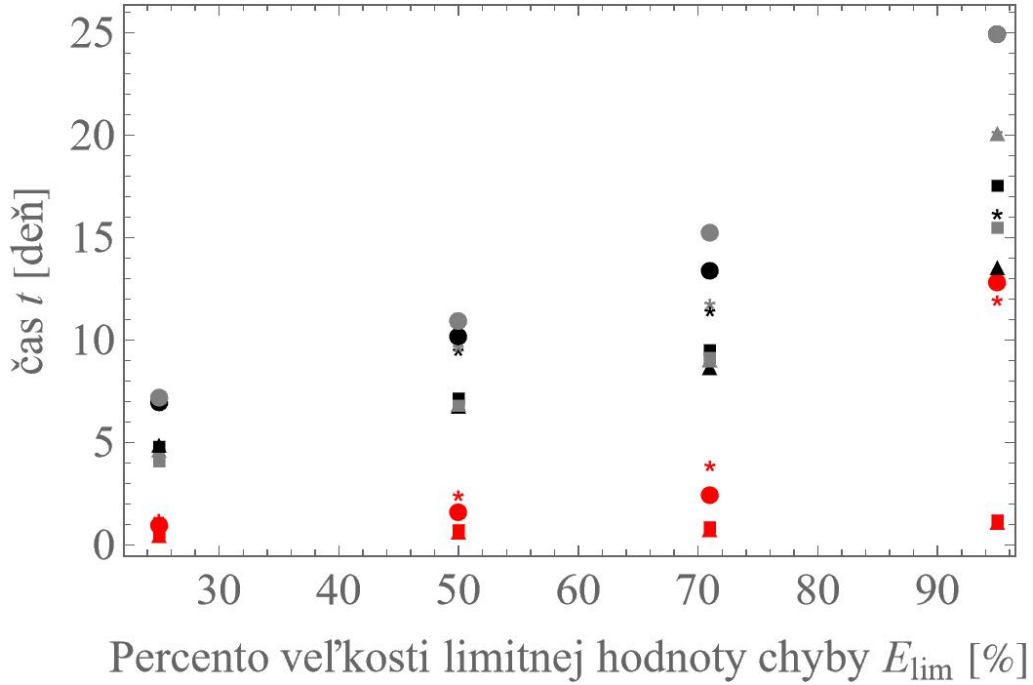
Obr. 2: Časový vývoj "realita" a "predpovede" premennej X_1 (200 člen ansámblu): X_1 "realita" - čierna, X_1 "predpoveď" - tenká čierna, Y_1 "realita" - červená, Y_1 "predpoveď" - tenká červená, Z_1 "realita" - šedá, Z_1 "predpoveď" - tenká šedá.



Obr. 3: Časový vývoj priemernej chyby premenných veľkej mierky X (čierna), malej mierky Y (červená) a súčtu veľkej a malej mierky Z (šedá).

premenná	95%	71%	50%	25%
L1-X	16.25	11.5	9.575	7.375
L1-Y	12.025	3.95	2.5	1.375
L1-Z	20.2	11.85	9.75	7.425
L2-X	25.0	13.45	10.25	7.025
L2-Y	12.875	2.5	1.675	1.025
L2-Z	25.0	15.3	11.0	7.275
T1-X	13.625	8.75	6.85	4.95
T1-Y	1.2	0.85	0.725	0.55
T1-Z	20.175	9.125	6.95	4.725
T2-X	17.475	9.45	7.1	4.75
T2-Y	1.15	0.825	0.675	0.5
T2-Z	15.425	9.075	6.75	4.025

Tab. 1: Čas (v dňoch), kedy priemerná chyba dosiahne: 2. stĺpec - teoretickú prediktabilitu (tj. 95% limitnej hodnoty chyby), 3. stĺpec - smerodajnú odchýľku (tj. 71% limitnej hodnoty chyby), 4. stĺpec - 50% limitnej hodnoty chyby, 5. stĺpec - 25% limitnej hodnoty chyby.



Obr. 4: Grafické zobrazenie tabuľky 1: L1 (hviezdička), L2 (krúžok), T1(trojuholník), T2 (štvorček) a veľká mierka X (čierna), malá mierka Y (červená), súčet malej a veľkej mierky Z (šedá).

5 Diskusia

Z obrázku 1 vidíme, že počiatočné podmienky pre všetky nastavenia sa pohybujú pre premenné X v rozmedzí $(-5, 20)$ a pre premenné Y v rozmedzí $(-2, 3)$, pre stredné zemepisné šírky dokonca $(-0.5, 1)$. Prirodzené počiatočné podmienky pre jednotlivé nastavenia sa od seba výrazne nelíšia, zaujímavý rozdiel medzi strednými a tropickými zemepisnými šírkami môžeme pozorovať pri hodnotách Y, ktoré v tropických oblastiach chaoticky kmitajú s väčšou amplitúdou, čo je zrejme spôsobené pridaným členom s F (viď. kapitola 2).

Na obrázku 2 môžeme sledovať rozdiely medzi skutočným stavom a predpovedaným stavom v danom čase. Pre stredné zemepisné šírky dochádza k výraznejším rozdielom pri malej mierke už po 3-5 dňoch, pri veľkej mierke okolo 10. dňa a približne po 13 dňoch už je predpoveď úplne iná ako realita a nemá žiadnu výpovednú hodnotu.

Pre tropické zemepisné šírky dochádza k veľkej nepresnosti predpovede malej mierky už v priebehu prvého dňa. Predpoveď veľkej mierky pomerne dobre kopíruje realitu zhruba do 7. dňa pre nastavenie T1 a do 5. dňa pre T2. Tieto rozdiely sú spôsobené väčšou previazanosťou mierok pri nastavení T2.

Za povšimnutie taktiež stojí fakt, že hoci sa "realita" a "predpoveď" po určitom čase značne líšia, obe oscilujú okolo tej istej hodnoty, pričom sa zdá, že ich časový priebeh môže byť ohraničený, čo je známa vlastnosť pre

štandardný Lorenzov model 96 s vhodne zvolenými parametrami.

S týmto pozorovaním súvisí aj obrázok 3, na ktorom môžeme vidieť rast chyby. Chyba malej mierky rastie prudko v priebehu prvého až prvých 3 dní, potom sa jej hodnota ustáli okolo hodnoty 0.5 pre stredné zemepisné šírky a okolo hodnoty 1 pre tropické zemepisné šírky.

Chyba veľkej mierky rastie v priebehu prvých 5 dní pomaly, potom je nárast chyby zhruba lineárny až do 10. dňa, kedy sa rast spomaľuje. Pre tropické zemepisné šírky je rast podobný, akurát chyba narastá prudko už pred 5. dňom. Po 15. dni hodnoty chyby oscilujú okolo hodnôt 7.4 pre L1, 6.1 pre L2, 6.9 pre T1, 5.8 pre T2. Grafy naznačujú, že chyba nediverguje do nekonečna, čo naznačuje, že hodnoty "reality" a "predpovede" nepravidelne oscilujú okolo určitej hodnoty a amplitúdy ich oscilácií sa s časom nezväčšujú.

Úvahy o časovom priebehu nárastu chyby dopĺňa tabuľka 1. Za povšimnutie stojí premenná L2-X. Limitná hodnota chyby je príliš veľká na to, aby sme v nami napočítaných časoch dosiahli 95%. To je pravdepodobne spôsobené nepatrným nárastom chyby v 25. dni, ktorý môžeme pozorovať na obrázku 3 alebo na obrázku 4 (čierne a šedé krúžky). Obdobný problém nastáva aj pre L2-Z.

Obrázok 4 nám taktiež umožňuje porovnávať presnosť predpovedi vzhľadom k rôznym nastaveniam. Vyplýva z neho, že premenné veľkej mierky X dosiahnu skôr 25%, 50% a 71% limitnej hodnoty chyby pre nastavenia T1 a T2, než pre nastavenia L1 a L2. Tieto dve nastavenia sa vyznačujú, narozdiel od zvyšných nastavení, členom obsahujúcim F aj pre rovnicu malej mierky (viď rovnica 3b), ktorý spôsobuje väčšie amplitúdy oscilácií pre premenné malej mierky Y. Tiež sa ukazuje, že väčšia previazanosť veľkej a malej mierky, čiže nastavenie T2, vedie k väčšiemu nárastu priemernej chyby pre počiatočné časy. Naopak pre neskoršie dni narastá priemerná chyba pomalšie. Nastavenie T1, ktoré má 1.5-krát slabšiu previazanosť, má chyba časový priebeh opačne. Priemerná chyba preňho dosiahne 25% limitnej hodnoty chyby neskôr ako pri nastavení T2, ale ostatné "mílniky" dosiahne toto nastavenie skôr.

Nastavenia L1 a L2 nadobúdajú "mílniky" neskôr ako nastavenia T1 a T2, a teda predpoveď týchto nastavení je lepšia a dlhšie podobná "realite". Nastáva podobný jav ako v predchádzajúcom prípade. Predpoveď pre nastavenie L1 je mierne presnejšia v prvých dňoch, než predpoveď nastavenia L2, potom však začne priemerná chyba pre nastavenie L1 rásť o niečo rýchlejšie ako priemerná chyba pre nastavenie L2. Nastavenie L2 má 1.5-krát viac previazaní malú a veľkú mierku, než nastavenie L1 (viď. kapitola 2).

Keď sa pozrieme na dosiahnutie 95% limitnej hodnoty chyby pre všetky nastavenia, zistíme, že tento "mílnik" dosiaha prekvapivo najskôr nastavenie T1 a L1, neskôr T2 a L2. To naznačuje, že slabšie previazané nastavenia majú tendenciu dosahovať obrovské chyby skôr ako silnejšie previazané nastavenia.

V praxi nás však zaujíma len predpoveď, ktorej chyba voči skutočnosti je rozhodne menšia ako v tabuľke uvedených 25% limitnej hodnoty chyby. Z nášho experimentu vyplýva, že čím väčšie hodnoty dosahuje malá mierka, tým je predpoveď menej presná. Zároveň, čím je previazanie malej a veľkej mierky väčšie, tým je predpoveď menej presná.

6 Záver

V tomto experimente sme študovali vývoj chyby Lorenzovho dvoj mierkového modelu z roku 1996 pre štyri rôzne nastavenia parametrov (viď. 2). Vypočítali sme rast priemernej chyby ansámbu 1 a ansámbu 2, ktorý zodpovedá chaotickému správaniu systému. Ukázalo sa, že rôzne nastavenia modelu majú mimoriadny vplyv na predvídateľnosť systému. Najlepšie zo všetkých nastavení dopadlo nastavenie L1, ktoré zodpovedalo stredným zemepisným šírkam a malo slabšie previazanie medzi malou a veľkou mierkou. Nastavenie L2, ktorá má silnejšie previazanie mierok, dopadlo v porovnaní s nastavením L1 o čosi horšie. Najhoršie dopadli nastavenia T1 a T2, zodpovedajúce tropickým oblastiam. Z experimentu teda plynie, že faktormi zhoršujúcimi predvídateľnosť systému sú tropické oblasti a najmä väčšia previazanosť medzi malou a veľkou mierkou modelu.

Zdroje

- [1] Lorenz, E. N.: Predictability: a problem partly solved, in: Predictability of Weather and Climate, edited by: Palmer, T. and Hagedorn, R., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1–18, <https://doi.org/10.1017/CBO9780511617652.004>, 1996.