Teoria dos grafos

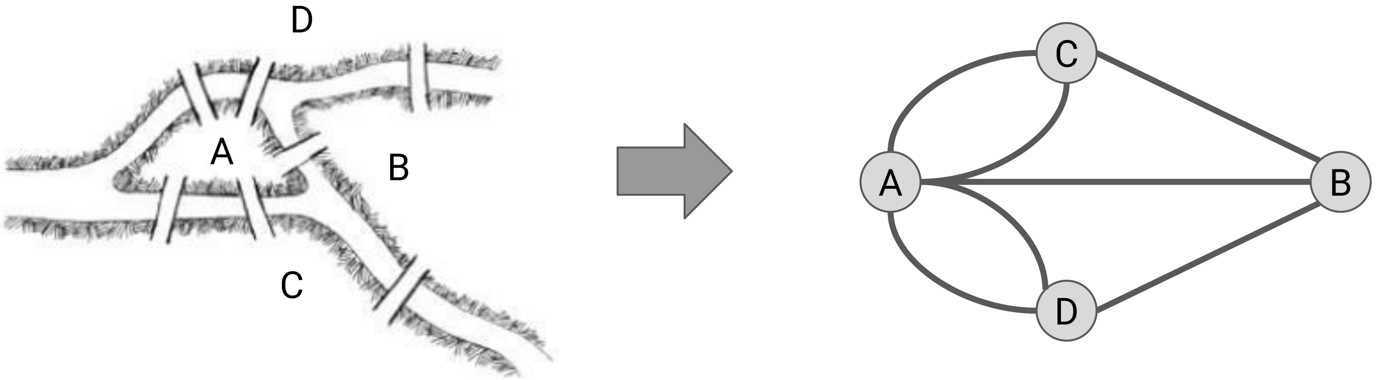
Inteligência artificial

Prof. Allan Rodrigo Leite

Teoria dos grafos

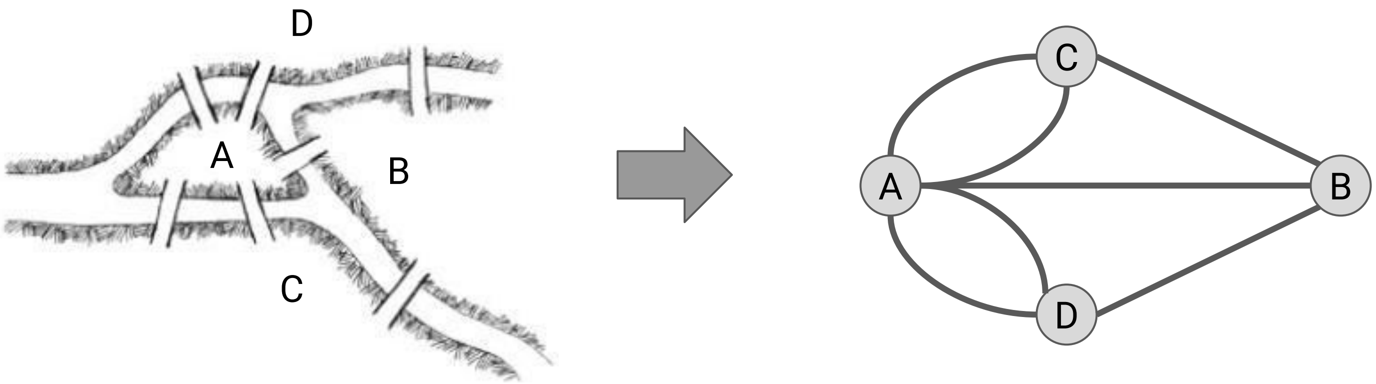
- História da teoria
  - Origem relativamente recente (século XVIII) na história da matemática
  - Definição informal
    - Conjunto de pontos (vértices) e pares destes pontos (arestas)

  - Resolução de Euler (1736) para o problema Pontes de Königsberg
    - Atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte



Teoria dos grafos

- História da teoria (cont.)
  - Conclusões de Euler sobre o problema Pontes de Königsberg
    - Transformou os caminhos em arestas e as interseções em vértices
    - Não há solução para este problema
    - Só é possível se tivesse 0 ou 2 vértices com um número ímpar de caminhos
    - A razão é que cada vértice precisa ter um caminho de entrada e saída
    - E os 2 vértices com número ímpar de caminhos seria o inicial e final



Teoria dos grafos

- Teoria vastamente aplicada em vários campos de estudo
    - Psicologia
        - Análise de redes sociais
        - Mapeamento do comportamento de interação de indivíduos
    - Ciência da computação
        - Representação de problemas
        - Estrutura de dados
    - Física
        - Sistemas dinâmicos
        - Teoria de redes complexas
    - ...

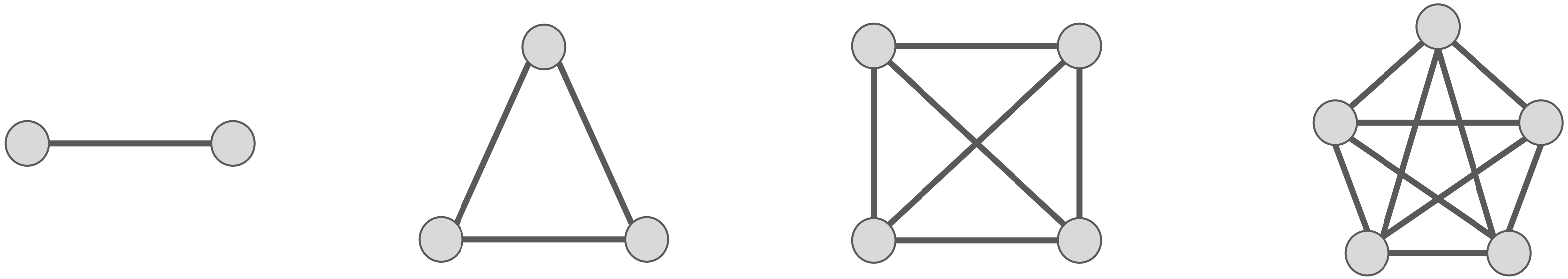
Propriedades de grafos

- Definição formal
    - Um grafo simples $G(V, E)$ é formado por
        - Conjunto V finito e não vazio de vértices
        - Conjunto E de arestas
    - Um par de vértices $\{u, v\}$ são adjacentes se $\{u, v\} \in E$
        - Também chamados de vizinhos, isto é, u é vizinho de v e vice-versa

- Grafos completos
    - Grafo simples onde todo vértice é adjacente a todos os outros vértices
    - Também chamado de K_N, onde N é o número de vértices
        - K é um grafo completo com N vértices
        - K possui $(N \times (N - 1) / 2$ arestas

Propriedades de grafos

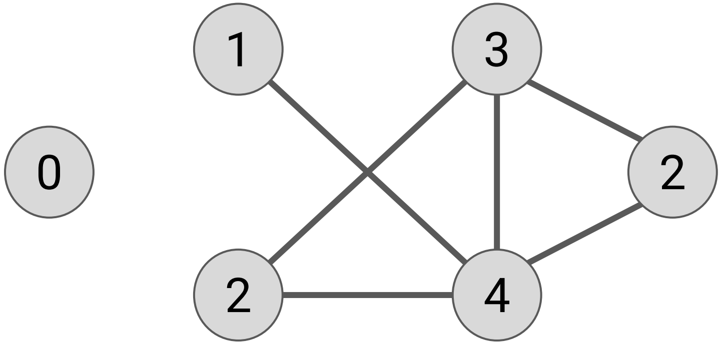
- Grafos completos (cont.)
  - Seja um grafo K_N e $N = 4$
    - Número de vértices é $V(G) = 4$
    - Número de arestas é $E(G) = N \times (N - 1) / 2 = 4 \times 3 / 2 = 6$
    - Cada vértice v possui $N - 1$ vizinhos



Propriedades de grafos

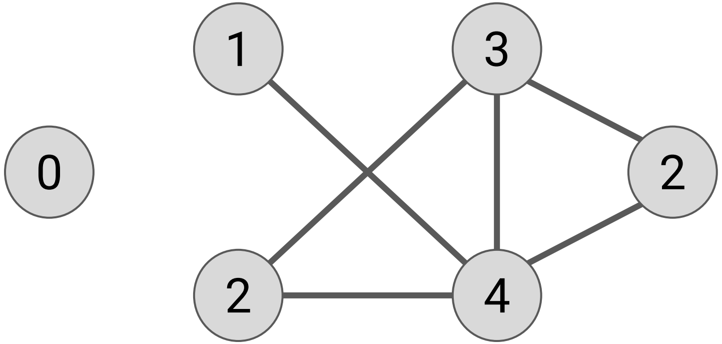
- Grau ou valência
  - Grau de um vértice é o número de arestas incidentes sobre ele
    - Representado por $deg(v)$
  - Grau mínimo de um grafo indica o menor grau entre todos os vértices
    - $\min\{deg(v) : \forall v \in G(V)\}$
  - Grau máximo de um grafo indica o menor grau entre todos os vértices
    - $\max\{deg(v) : \forall v \in G(V)\}$

  - Exemplo
    - Grau mínimo: 0
    - Grau máximo: 4



Propriedades de grafos

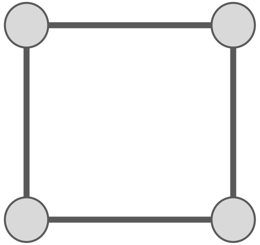
- Teorema de Euler
    - Soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas
    - $2|E| = \sum_{u \in V} deg(u)$
    - Exemplo
        - Número de arestas: 6
        - Soma dos graus: 12



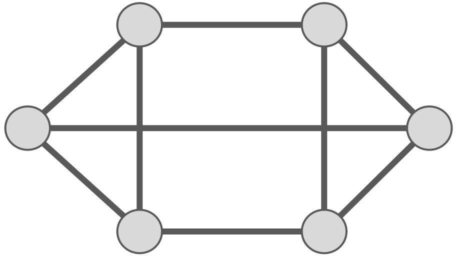
Propriedades de grafos

- Grafos regulares
  - Um grafo G é regular quando todos os vértices tem o mesmo grau
  - Um grafo k-regular possui k vértices, todos com o mesmo grau
    - Um grafo completo é regular, cujos vértices possui grau $k = N - 1$

1-regular



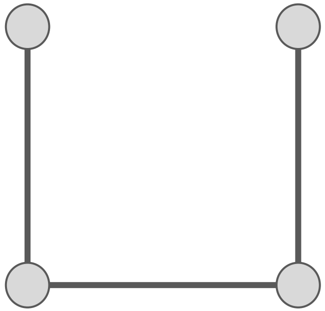
2-regular



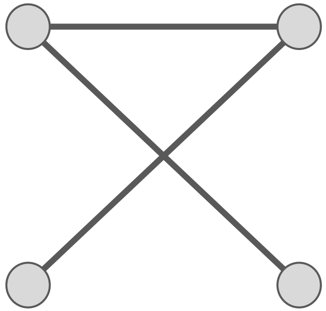
3-regular

Propriedades de grafos

- Grafos complementares
  - O complemento de um grafo G é um grafo H quando
    - Possuem o mesmo número de vértices
    - Os vértices de H são adjacentes se e somente se eles não são em G
  - Dado um grafo $G(V, E), H = (V, K \ / \ E)$ é o complemento de G
    - Também representado como $\bar{G}$ de G



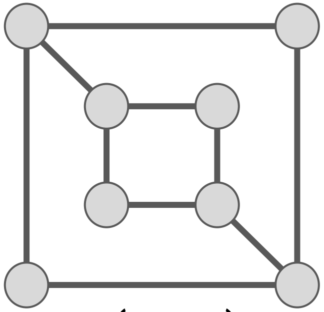
$G(V, E)$



$H(V, K \ / \ E)$ ou $\bar{G}$

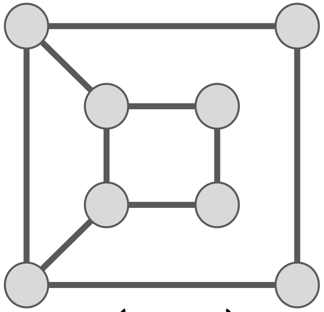
Propriedades de grafos

- Grafos isomórficos
  - Dois grafos G e H podem ser isomórficos quando ambos têm
    - Quantidades iguais de vértices e de arestas
  - Isomorfismo é uma bijeção f de $V(G)$ em $V(H)$ tal que
    - Vértices $\{v, u\}$ são adjacentes em G se $f(v)$ e $f(w)$ também são em H
    - Embora suas representações sejam diferentes
  - São denotados por $f:\ V(G) \rightarrow V(H)$ ou $G \simeq H$



$G(V, E)$

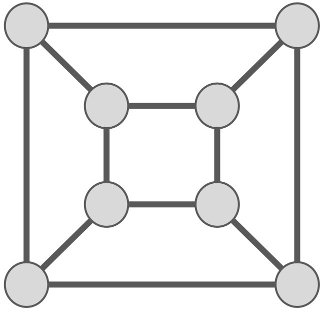
$\simeq$



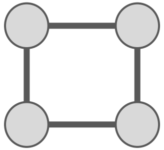
$H(V, E)$

Propriedades de grafos

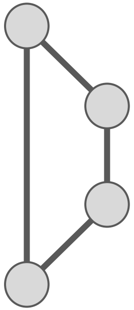
- Subgrafos
  - Um grafo H é um subgrafo de G se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$
  - O grafo H também é chamado um subgrafo de gerador de G
    - Desde que $V(H) = V(G)$



$G(V,E)$



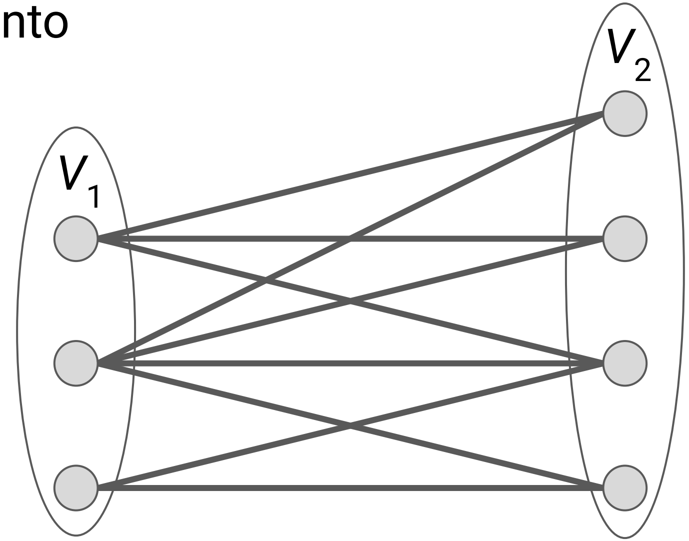
$H(V,E)$



$H(V,E)$

Propriedades de grafos

- Grafos bipartidos
  - Um grafo *G* é bipartido quando os vértices estiverem distribuídos em conjuntos disjuntos, não vazios e independentes, isto é, $V = V_1 \cup V_2$
  - Um conjunto é independente quando não houver vértices adjacentes no mesmo conjunto

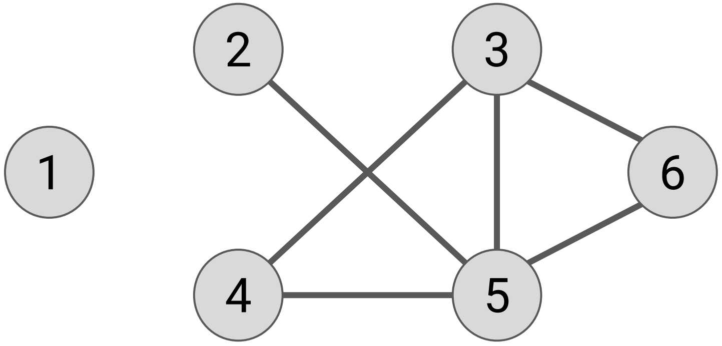


Representação de grafos

- Matriz de adjacência
  - Forma mais usual para representar grafos
  - Seja um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$, a matriz de adjacência será
    - $Adj(G) = (a_{ij})_{n \times n}$
    - Onde a_{ij} $\begin{cases} 1, & \textbf{se } i \neq j \textbf{ e } \{i, j\} \in E \\ 0, & \textbf{do contrário} \end{cases}$
  - A matriz de adjacência é simétrica e a diagonal principal sempre será 0

Representação de grafos

- Matriz de adjacência (cont.)
  - Seja um grafo $G = (V, E)$ com $|V| = n$ e $n = 6$



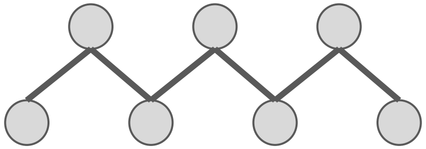
$G(V,E)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

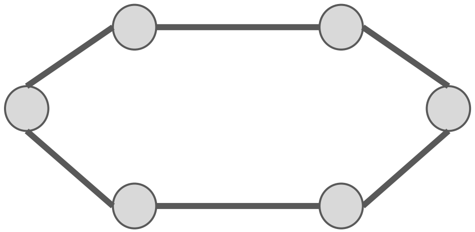
$Adj(G)$

Passeios, caminhos e árvores

- Passeio
    - É uma sequência de vértices ($v_1, v_2, ..., v_k$) com comprimento k que
        - $V_{i - 1}$ é adjacente v_i para $1 \leq i \leq k$
        - Os vértices não são necessariamente distintos
    - Um passeio é fechado quando $v_1 = v_k$
        - Também chamado de ciclo ou circuito
    - Um grafo é conexo se existir um passeio entre dois quaisquer vértice
        - Do contrário, o grafo é desconexo



Passeio



Circuito

Passeios, caminhos e árvores

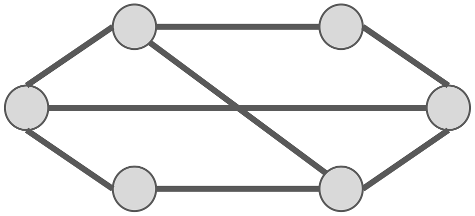
- Caminho
  - É um passeio onde todos os vértices distintos
    - Todo caminho é um passeio
    - Mas nem todo passeio é um caminho
  - Se há um passeio entre dois vértices, também haverá um caminho

- Caminho Euleriano
  - Caminho em um grafo conexo que usa cada aresta do grafo uma só vez
    - Deve ter exatamente zero ou dois vértices de grau ímpar
  - Problema das pontes de Königsberg

Passeios, caminhos e árvores

- Caminho Hamiltoniano
  - Ciclo que passa por todos os vértices do grafo
    - Permite passar por todos os vértices, mas sem repetí-los
    - Um grafo é Hamiltoniano se for conexo e contiver um ciclo Hamiltoniano

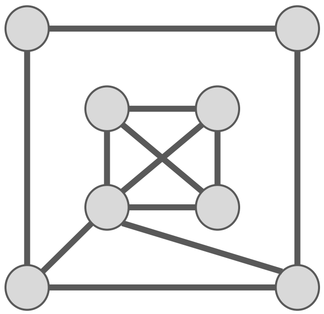
  - Problema do caixeiro viajante
    - Encontrar uma rota que passe por todas as cidades uma única vez, retornando a cidade de origem



Grafo Hamiltoniano

Passeios, caminhos e árvores

- Cliques
  - Subconjunto de vértices $C \subseteq V$ que formam um subgrafo completo
  - Um clique máximo é o maior clique possível em um dado grafo



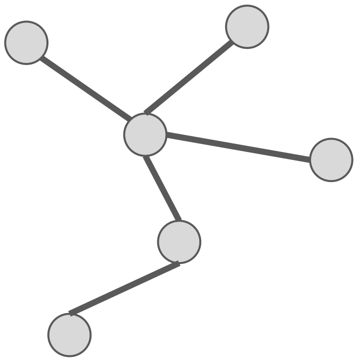
Grafo com cliques

Passeios, caminhos e árvores

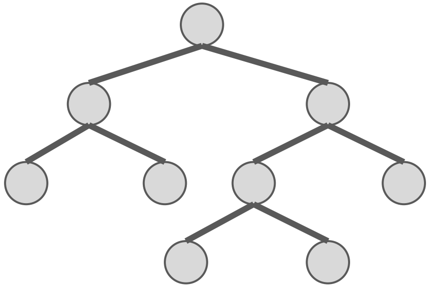
- Árvores
  - Uma árvore $T(V,E)$ é um grafo conexo e acíclico
    - Pode possuir um vértice chamado raiz
    - Possui um conjunto de vértices de grau 1 chamado folhas
    - Possui um conjunto de vértices de grau maior que um chamado nós
  - Propriedades
    - Se $T(V,E)$ é uma árvore, então $T(E) = T(V) - 1$
    - Árvores possui uma definição recursiva
    - Cada nó da árvore forma uma subárvore
    - Grau de um nó representa a quantidade de ligações com nós vizinhos

Passeios, caminhos e árvores

- Árvores (cont.)
  - Propriedades
    - T é uma árvore, há exatamente um caminho entre dois vértices quaisquer
    - Uma árvore que não possui raiz é denominada livre



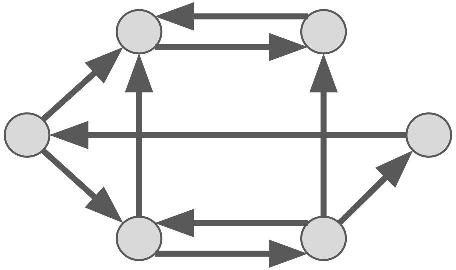
Árvore



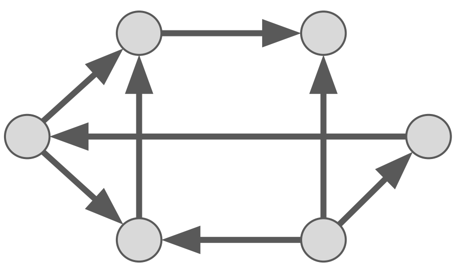
Árvore binária

Grafos dirigidos e ponterados

- Grafos dirigidos
  - Também conhecidos como digrafos
  - Diferencia-se de grafos normais devido às arestas serem direcionadas
    - Uma aresta $\{v, u\}$ descreve uma ligação com origem em v e destino em y
    - Um digrafo G é simétrico se cada aresta tem uma invertida que pertence à G
  - Grafos orientados são grafos dirigidos que não tem pares simétricos



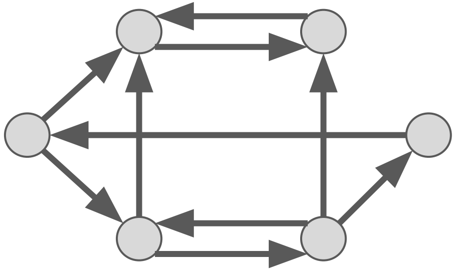
Digrafo



Grafo orientado

Grafos dirigidos e ponterados

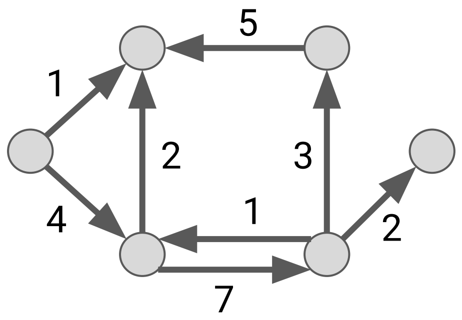
- Grafos dirigidos (cont.)
  - Grau de entrada de um vértice *v* é o número de arestas convergentes a v
    - Representado por $deg^{-}(v)$
  - Grau de saída de um vértice *v* é o número de arestas divergentes a *v*
    - Representado por $deg^{+}(v)$
  - O digrafo é balanceado quando $deg^{-}(v) = deg^{+}(v)$



Digrafo não balanceado

Grafos dirigidos e ponterados

- Grafos ponderados
  - Grafo cujas arestas são rotuladas um peso numérico
  - Representação na matriz de adjacência aceita valores diferentes de `0` e 1
    - Usualmente utiliza-se o valor a_{ij} `= -1` para identificar a ausência de aresta
    - Qualquer valor a_{ij} `>= 0` representa o peso da aresta
  - Problema do caminho mais curto faz uso de grafos ponderados



Digrafo ponderado

Exercícios

1. Crie um grafo regular com 10 vértices e indique quantas arestas são necessárias para desenhá-lo.

2. Crie um grafo para representar os estados do Brasil. Cada vértice deve representar um estado e as arestas devem descrever as fronteiras em comum. Em seguida, identifique os estados com o menor e maior número de estados vizinhos, respectivamente.

3. A partir do grafo do exercício 2, identifique se há cliques e qual é o clique máximo do grafo. Além disso, encontre o maior ciclo Hamiltoniano existente no grafo.

4. A partir do grafo do exercício 2, resolva o problema de coloração de grafos. O problema consiste em pintar cada vértice com uma cor, de modo que nenhum vértice vizinho possua a mesma cor. Devem ser utilizadas 4 de cores distintas para pintar os vértices.

Exercícios

5. A partir do grafo do exercício 2, altere o grafo para prever a distância entre as capitais por meio de um grafo ponderado. Em seguida, resolva o problema do caminho mais curto (*shortest-path*) entre Santa Catarina e Ceará.

Teoria dos grafos

Inteligência artificial

Prof. Allan Rodrigo Leite