

# Algorithmen und Programme

Protokolliert von Rouven Czerwinski

Version vom 1. März 2012

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
1.1	Algorithmusbegriff . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Algorithmische Grundkonzepte</b>	<b>5</b>
2.1	Eigenschaften von Algorithmen . . . . .	5
2.2	Daten, Operanden und Operationen . . . . .	5
2.3	Standard-Datentypen . . . . .	6
2.3.1	Integer: . . . . .	6
2.3.2	Real: . . . . .	7
2.3.3	Character: . . . . .	7
2.3.4	String: . . . . .	7
2.3.5	Boolean: . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Imperative Algorithmen</b>	<b>10</b>
3.1	Ein- und Ausgabe . . . . .	10
3.2	Verzweigungen (bedingte Anweisung) . . . . .	10
3.3	Schleifen (Wiederholungen) . . . . .	11
3.4	Prozeduren/Funktionen (Unterprogramme) . . . . .	12
3.5	Strukturierung von Algorithmen/Programmen . . . . .	13
3.6	Beispiel: Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT . . . . .	13
3.7	Parameterübertragung bei Prozeduren/Funktionen . . . . .	14
3.8	Beispiel: Berechnung von Fibonacci-Zahlen . . . . .	15
3.9	Rekursionen . . . . .	16
3.10	Grundlegende statische Datenstrukturen . . . . .	16
3.10.1	Array: . . . . .	16
3.10.2	Struktur (structure/record) . . . . .	17

<b>4</b>	<b>Komplexität von Algorithmen</b>	<b>19</b>
4.1	Einführung . . . . .	19
4.2	Asymptotische Komplexität und Groß-O-Notation . . . . .	20
4.3	Beispiele . . . . .	21
<b>5</b>	<b>neue Mitschrift</b>	<b>23</b>
5.1	Dynmisches Erzeugen einer Struktur . . . . .	23
5.2	Lineare Listen . . . . .	24
5.3	Bäume . . . . .	25
5.4	Binäre Suchbäume . . . . .	26

## Tabellenverzeichnis

1	And Tabelle . . . . .	8
2	Or Tabelle . . . . .	8
3	Negation Tabelle . . . . .	8
4	ModuloTabelle . . . . .	11
5	ggT Beispiel . . . . .	14
6	Beispiel fib(4) . . . . .	16
7	Array Access Beispiel . . . . .	18
8	struct Speicher . . . . .	18
9	Aufwandsvergleich der Algorithmen . . . . .	19

# 1 Einführung

- Kleinstcomputer (eingebettete Systeme) mit Alg. in allen Bereichen des täglichen Lebens: Taschenrechner, Handy, DvD-Player, MP3-Player, Waschmaschine, TV, Autos, Funkuhren...
- Programmierkenntnisse werden erwartet:
  - Programmierung und Steuerung komplexer Geräte und Maschinen
  - Erstellung interaktiver Medien (Internet, Videospiele, DVD, BluRay, E-Books...)
  - Verwaltung und Auswertung von Datenbanken

## 1.1 Algorithmusbegriff

Intuitiv: Alg. = Verarbeitungsvorschrift

Im Alltag z.B. Kochrezept, Spielregeln, Noten, Waschmaschinenprogramme, ...

Man spricht von einem Alg., wenn die Vorschrift präzise, eindeutig, vollständig und ausführbar ist.

Definition:

Ein Alg. ist eine präzise formulierte Verarbeitungsvorschrift, die unter Verwendung elementarer Operationen einen Eingangszustand bzw. Einganswerte in einen Ausgangszustand bzw. Ausgangswerte überführt

Formal: Abbildung  $f$ : Eingabe  $\rightarrow$  Ausgabe

Beispiele:

- Mathematische Formeln:  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  z.B. Addition zweier Zahlen  
 $f(q, p) = q + p$
- Primzahlentest:  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{ja, nein\}$

$$f(n) = \begin{cases} \text{ja, falls } n \text{ Primzahl} \\ \text{nein, sonst} \end{cases}$$

- Euklidischer Alg. ggT(x,y)

Alg. dienen zur Lösung von Problemen, sie werden als Programme so abgefasst, dass sie von einem Rechner ausgeführt werden können:

Problem  $\rightarrow$  Algorithmus  $\rightarrow$  Programme  $\rightarrow$  Maschine

Gegenstand der Vorlesung

## 2 Algorithmische Grundkonzepte

### 2.1 Eigenschaften von Algorithmen

- Terminiertheit  
Ein Alg. terminiert, wenn er für jede Wahl von gültigen Eingabewerten nach endlich vielen Schritten anhält
- Determiniertheit  
Ein Alg. ist determiniert, wenn er bei gleicher Eingabe stets auf das gleiche Ergebnis führt.
- Determinismus  
Ein Alg. ist deterministisch wenn er bei gleicher Eingabe stets über die gleichen Zwischenergebnisse zum gleichen Ergebnis führt.
- Beispiel: Berechnung eines Terms
  - hält immer an  $\Rightarrow$  terminiert
  - gleiches Ergebnis  $\Rightarrow$  determiniert
  - $\Rightarrow$  nicht deterministisch

### 2.2 Daten, Operanden und Operationen

Daten:

- Darstellung von Informationen im Rechner zur Eingabe, Verarbeitung und Ausgabe
- zB. Zahlen, Zeichen, Texte, Tabellen, Graphen, Bilder, ...
- Rechnerinterne Darstellung zB. (komprimiert vs. unkomprimiert)

Datentyp:

- Zusammenfassung von Wertebereich und darauf def. Operationen zu einer Einheit
- Beispiel: Standarddatentypen: int, float, char, ...
- Ein Alg. lässt sich auffassen als Anwenden von Operationen auf Objekte bestimmten Datentyps (=Operanden).
- Operand können Konstanten, Variablen oder Ausdrücke sein.

- Ausdrücke (Terme) entstehen indem Operanden mit Operationen verknüpft werden
- Datentypen legen die Wertemenge fest, aus der die Operanden Werte annehmen können

## 2.3 Standard-Datentypen

:

(In den meisten Programmiersprachen vorgegeben)

### 2.3.1 Integer:

(in der Programmiersprache C/C++: int)

C/C++ Beispiel: (Deklaration einer Variablen a vom Typ Integer)

```
int a; // Kommentar
```

Datentyp, Variablenname, Befehlsende

Wertemenge:  $Z = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  (im realen Rechner nach oben und unten begrenzt)

Rechenoperationen: +, -, \*, /, % (modulo), ++ (Inkrement), -- (Dekrement)

Zuweisungsoperator: =

Vergleichsoperatoren: <, >, == (gleich), != (ungleich), <= (kleiner gleich), >=,

...

C/C++ Beispiel:

```
int a; // Deklaration der Variablen a
int b; // Deklaration der Variablen b
a = 5; // Wertezuweisung: a wird auf 5 gesetzt
b = a + 8;
```

Variablen bestehen aus einem Namen (Referenz auf einen Speicherplatz) und einem Wert (Inhalt des Speicherplatzes)

```
int c;
c = b / a; // Division: c wird auf b/a also 2 gesetzt
```

Problem bei der Integer-Division:

Ergebnis wird ganzzahlig abgerundet: 13/5 ergibt 2,

Allg. zur Berechnung des Restes der ganzzahligen Division b/a:

```
int rest;
rest = b - (b/a)*a;
```

Der Rest kann in C/C++ auch durch den Modulo -Operator % beschrieben werden

```
rest = b % a;
```

### 2.3.2 Real:

(in C/C++: float und double)

Wertemenge:  $\mathbb{Q}$  (Im realen Rechner nur eine Teilmenge von  $\mathbb{Q}$ )

Operatoren wie oben

C/C++ Beispiel

```
double c,d; // Deklaration der Var. c und d
c = 0,3; // c wird auf 0,3 gesetzt
d = (4,5 - c)*1,5; // d <- 6,3
```

### 2.3.3 Character:

(in C/C++: char)

Wertemenge zB. {'a', 'b', ..., 'A', 'B', ..., '1', '2', ..., '#', ...}

```
char e;
e = 'z';
char f = '#'
```

### 2.3.4 String:

(in C kein Standarddatentyp, statt dessen Array vom Typ char, in C++ std::string)

Wertemenge: Zeichenketten, zB. "Hallo", "Guten Tag", ...

C++ Beispiel:

```
char wort[6] = "Hallo"; //Deklaration als char-array
std::string s = "Guten Tag"; // Deklaration als std::string
```

### 2.3.5 Boolean:

(in C++ bool; in C kein Standarddatentyp, stattdessen int)

Wertemenge: {true, false} bzw. {0,1}

Einstelliger: ! (not) Zweistellige Verknüpfungsoperatoren: && (and), || (or), == (gleich), != (ungleich), ...

C++ Beispiel

```
bool ergebnis, op1, op2;
op1 = true;
op2 = !op1; // op2 wird false
ergebnis = op1 && op2; // ergebnis wird false
Ergebnis = op1 || op2; // ergebnis wird true
```

Verknüpfungstabellen:

Tabelle 1: And Tabelle

op1	&& op2	Ergebnis
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false

Tabelle 2: Or Tabelle

op1	op2	Ergebnis
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

Tabelle 3: Negation Tabelle

!op1	Ergebnis
true	false
false	true



Die Reihenfolge der Auswertung von Ausdrücken ergibt sich durch Klammerung und Vorrangregeln (Punkt vor Strich usw z.B.  $(a * b + c * d / e)$ )  
Beispiel:

```
bool Ergebnis, op1, op2, op3;  
Ergebnis = op1 || op2 && op3;  
Ergebnis = op1 || (op2 && op3);
```

## 3 Imperative Algorithmen

- Basis für imperative Programmiersprachen wie C, Pascal, Modula, Basic, PHP, ...
- bekannteste/häufigste Art Alg. zu formulieren
- Alternative: Deklarative Programmierung z.B. funktionale Programmiersprachen wie z.B. Lisp, Scheme, Haskell, ...

### 3.1 Ein- und Ausgabe

C++ Beispiel

```
int a;  
cin >> a; //Eingabe des Wertes von a ueber Konsole  
cout << "Sie haben" << a << "eingegeben" << ende; // Ausgabe
```

### 3.2 Verzweigungen (bedingte Anweisung)

Mit Verzweigungen können in Abhängigkeit einer Bedingung unterschiedliche Anweisungen ausgeführt werden.

Syntax:

```
if (BEDINGUNG) ANWEISUNG;  
else ANWEISUNG2;
```

Interpretation:

Führe ANWEISUNG1 aus, falls die boolsche BEDINGUNG wahr (true) ist, ansonsten führe ANWEISUNG2 aus. (Der Else-Teil ist optional)

C++ Beispiel:

```
if (a<0) cout << "a ist negativ" << endl;  
else cout << "a ist positiv" << endl;  
  
bool b = ((a % 2) == 0); // b wird true, falls a modulo 2 null ist  
if(b) cout << "a ist gerade" << endl;
```

Eine ANWEISUNG darf auch ein mit Klammern {} zusammengefasster Block von mehreren Anweisungen sein.

Syntax:

```
if (BEDINGUNG)
{
    Anweisung 1.1
    Anweisung 1.2
}
```

Tabelle 4: Modulo Tabelle

a	$a/2$	$a\%2$	$a/3$	$a\%3$
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	1	0	0	2

### 3.3 Schleifen (Wiederholungen)

Wiederholte Ausführung von Anweisungen in Abhängigkeit von einer Bedingung.

Syntax:

```
while (BEDINGUNG) ANWEISUNG;
```

Interpretation: Solang die boolsche BEDINGUNG wahr ist, wiederhole ANWEISUNG.

C++ Beispiel:

```
int a = -1;
while (a<0) cin >> a; // Wiederholte Eingabe von a, bis a positiv ist
// Ausgabe aller Zahlen von 0 bis a:
int b = 0; // Startwert
while ( b <= a ) // Schleife laeuft solange b<=a
{
    cout << b << endl; // Ausgabe
    b = b + 1; // Hochzaehlen von b
}
```

Alternativ kann auch die for-Schleife benutzt werden.

Syntax:

```
for ( STARTANWEISUNG; BEDINGUNG; ZAEHLANWEISUNG ) ANWEISUNG;
```

Interpretation: Führe zu Beginn einmal die Startanweisung aus, solange die boolsche BEDINGUNG wahr ist, wiederhole erst ANWEISUNG dann ZAEHLANWEISUNG.

C++ Beispiel:

```
for ( int b = 0; b <= a; b = b + 1 ) // Ausgabe aller Zahlen von 0 bis a.
{
    cout << b << endl;
}
```

### 3.4 Prozeduren/Funktionen (Unterprogramme)

Zusammenfassung von mehreren Anweisungen zu einer Anweisung. Bestehend aus einem RUECKGABETYP, dem FUNKTIONSNAMEN und einer Liste von Parametern.

Syntax:

```
RUECKGABETYP FUNKTIONSNAMEN ( PARAM1, PARAM2, ... )
```

C++ Beispiel:

```
int max( int a, int b ) // Selbstdefinierte Funktion "max"
{
    if ( a > b ) return a; // gibt a zurueck
    else return b; // gibt b zurueck
}

-----

int m, n;
m = max( 2,5 ); // m wird auf 5 gesetzt
n = max( 8,m ); // n wird auf 8 gesetzt
```

Ganz Ähnlich ist die mathematische Definition:

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{falls } a > b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

Funktionsaufrufe können verschachtelt werden

```
n = max( 8, max( 2,5 ) );
```

C++ Beispiel: Funktion zur Berechnung von  $f(x) = x^2 + 2x + 1$

```
float f( float x )
{
    return x * x + 2*x - 1
}

-----

float y = f( 3.4 )
```

Wenn die Prozedur keine Rückgabe hat, ist der RUECKGABETYP = void

```
void SchreibWas() // Prozedur ohne RUECKGABE und ohne Parameter
{
    cout << "Test" << endl;
}
```

Der Einstiegspunkt eines Programms ist bei C/C++ auch eine Funktion mit Namen „main“

```
int main()
{
    int x,n;
    SchreibWas();
    cout << "Zahl eingeben";
    cin >> x;
    n = max( x,5);
    ...
    return 0; // Fehlercode
}
```

### 3.5 Strukturierung von Algorithmen/Programmen

Systematischer, übersichtlicher Aufbau; insbesondere bei größeren Programmen

- Zum Entwurf und zur Darstellung von Algorithmen: Struktogramme (nach Nassi-Shneiderman):  
Linearer Ablauf (Sequenz) Verzweigung (Alternative) und Wiederholung (Iteration)  
( Hier müssen noch mit zB. TikZ Bilder gemalt werden... )
- Alternative
  - Ablauf-/Flussdiagramme (Auch hier fehlt das Bild...)
- UML (Unified Modeling Language)  
Insbesondere objektorientiert

### 3.6 Beispiel: Euklidischer Algorithmus zur Berechnung des ggT

Problem: Entwickeln sie ein Programm zum Kürzen eines Bruches.

$$\frac{x}{y} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Teilproblem: Berechnung des größten gemeinsamen Teilers.

Algorithmus:

Gegeben: Zwei zahlen  $x, y (element)\mathbb{N}$

Gesucht: ggT(x,y)

Vorgehensweise: von der jeweils größeren Zahl die kleinere Zahl solange subtrahieren, bis beide Zahlen gleich sind => Ergebnis.

(Muss noch als Bild realisiert werden)

Eingabe  $x, y$

solange  $x \neq y$

$x > y$   
 ja nein  
 $x = x - y \mid y = y - x$   
 Ausgabe x  
 Beispiel: ggT(12,20)

Tabelle 5: ggT Tabelle

	$x$	$y$
Start	12	20
nach Schritt 1	12	8
nach Schritt 2	4	8
nach Schritt 3	4	4

### 3.7 Parameterübertragung bei Prozeduren/Funktionen

- Wertaufruf (siehe bisherige Bsp.)  
Übergabeparameter sind lokale Größen, Sie werden beim Funktionsaufruf in lokale (nur für die Funktion sichtbare Variablen) kopiert.
- Referenzaufruf Speicherort der Größen wird übergeben, d.h. Referenz auf den Inhalt der Variablen.

In C mit Hilfe von Zeigern realisiert. C++ Beispiel

```

int QuadratSumme(int x, int y)
{
    x = x*x;
    y = y*y;
    return x + y;
}

.....

int x = 5;
int y = 3;
int a = QuadratSumme(x,y); // a wird 34
cout << "x=" << x << " y=" << endl; // Ausgabe: x = 5, y = 3
  
```

Der Wert von x und y ändert sich durch den Funktionsaufruf nicht.

```

int QuadratSumme(int &x, int &y)
{
    x = x*x;
    y = y*y;
    return x + y;
}
  
```

```

.....
int x = 5;
int y = 3;
int a = QuadratSumme(x,y); // a wird 34
cout << "x=" << x << " y=" << endl;
// Ausgabe: x = 25, y = 9, wegen der &-Zeichen!

```

Bei Ausführung mit Referenzaufruf sind die Werte von x und y verändert!

Beispiel: Funktion die den Inhalt zweier Variablen vertauscht.

```

// void SwapValues(int x, int y)
void SwapValues(int &x, int &y)
{
    int tmp = x;
    x = y;
    // y = x;
    y = tmp;
}

-----

int x = 5;
int y = 3;
SwapValues(x,y);

```

### 3.8 Beispiel: Berechnung von Fibonacci-Zahlen

Jede Fibonacci-Zahl ist gleich der Summe der beiden vorhergehenden Fibonacci-Zahlen:

$$F_0 = 0, F_1 = 1; \text{ für } n > 1 : F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Folge: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 13, ....

C++ Beispiel:

```

int fib(int n) // Funktion zur Berechnung der n-ten Fibonacci-Zahl
{
    int n2 = 0;
    int n1 = 1;
    int Ergebnis = n1 + n2;

    if (n <= 0) return 0;

    for (int i=2; i <= n, i=i+1)
    {
        Ergebnis = n1 + n2;
        n2 = n1;
        n1 = ergebnis;
    }
    return ergebnis;
}

```

Tabelle 6: fib(4)

fib(4)	i	n1	n2	ergebnis
Initial	2	1	0	1
Nach 1. Schleifendurchlauf	3	1	1	1
Nach 2. Schleifendurchlauf	4	2	1	2
Nach 3. Schleifendurchlauf	5	3	2	3

### 3.9 Rekursionen

Prozeduren können sich selbst direkt oder indirekt aufrufen.

Bsp: Fibonacci-Zahlen rekursiv:  $F_0 = 0, F_1 = 1$ ; für  $n > 1 : F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

C/C++:

```
int fib(int n)
{
    if (n<=0) return 0; // Abbruchbedingungen
    if (n==1) return 1; // Abbruchbedingungen
    return fib(n-1) + fib(n-2); // Rekursionsschritt
}
```

Ablaufbeispiel fib(4)

(An dieser Stelle sollte etwas erstellt werden...)

- Beispiel ineffizienter als iterative Lösung( mit forschleife), da identische Berechnungen mehrfach wiederholt werden müssen.
- Oft lassen sich Algorithmen durch Rekursion einfach und anschaulicher formulieren.

### 3.10 Grundlegende statische Datenstrukturen

statisch = konstante Anzahl von Variablen bzw. konstante Größen

#### 3.10.1 Array:

Vektor bzw. Feld aus Elementen desselben Datentyps in C/C++:

```
int a[100]; // Deklaration eines Arrays mit 100 Integer-Werten 0-99!
a[0] = 30;
a[99] = 40;
a[100] = 1; // Falsch!

char name[5] = "Karl"; // letztes Zeichen immer NULL-Zeichen '\0'
```



```
// alternativ:
char name[] = "Hans"; // Compiler erkennt die Laenge automatisch
name[3] = 'd'; // Aus "Hans" wird "Hand"
name = "Hans"; // FALSCH! Zuweisung an Feld nicht möglich!
```

Zweidimensionales Array: Matrix bzw Tabelle

Deklaration C/C++ z.B:

```
float m[M][N]; // M und N ganze konstante Zahlen > 0!
// Indizierung beginnt bei 0!
```

$$\begin{bmatrix} m[0][0] & m[0][1] & \dots & m[0][N-1] \\ m[1][0] & \dots & \dots & m[1][N-1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m[M-1][0] & \dots & \dots & m[M-1][N-1] \end{bmatrix}$$

Im Speicher werden alle Zeilen hintereinander abgelegt:

$m[0][0] \dots m[0][N-1] \mid m[1][0] \dots m[1][N-1] \mid \dots \mid m[M-1][0] \dots m[M-1][N-1]$

Wenn das Element  $m[0][0]$  an der Speicherposition  $s$  abgelegt ist, dann ist das Element  $m[j][i]$  an der Speicherposition  $s + j * N + i$  abgelegt

C/C++ Beispiel:

```
double m[5][12]; // 2d-Array mit 5 Zeilen und 12 Spalten
m[0][0] = 1.3; // setzt Element nach oben links
m[4][11] = 2.5; // setzt Element nach unten rechts
for (int y=0; y<5; j=j+1)
{
    for (int i=0; i<12; i=i+1)
    {
        m[j][i] = j * 12 + i; // Alle Elemente mit fortlauf. Nummern füllen
    }
}
```

Arrays mit mehr als zwei Dimensionen entsprechend.

z.B. `float m[N1][N2]...[Nk]`

Zugriffsbeispiel:

```
for (int i=0; i<100; i=i+1)
{
    a[i] = i*i;
}
```

### 3.10.2 Struktur (structure/record)

Zusammenfassung von Elementen unterschiedlicher Typen

C/C++ Beispiel:

```
#include <string.h> // für den Befehl strcpy(...)
struct Person
{
    char Vorname[20];
    char nachname[28];
}
```

Tabelle 7: Array Access

Index	Inhalt
0	0
2	4
...	...
99	9801

```

int alter;
float groesse;
...
};

int main()
{
    person k; // deklariert eine Variable k von Typ Person
    k.alter = 29;
    k.groesse = 1.65;
    strcpy(k.vorname, "Markus");
    strcpy(k.nachname, "Mueller");
}

```

Für die Variable k (vom typ Person) reservierter Speicher: C/C++ Beispiel:

Tabelle 8: struct Speicherreservierung

Adresse	Inhalt
30 001	'M'
30 002	'a'
...	...
30 021	'M'
...	'u'
...	'e'
30049	(Beginn des int32 mit Nullen gefüllt) 0001 1101

```

...
Person pt[100]; // Array mit 100 Personen
...
pt[37].alter = 29;
strcpy(pt[37].nachname, "Beyer");
pt[37].nachname[0] = 'M' // Aus " Beyer" wird "Meyer"
...

```

- Geeignet zur Organisation/Strukturierung von Daten  
⇒ übersichtliche und effiziente Algorithmen

## 4 Komplexität von Algorithmen

### 4.1 Einführung

Alg1:

```
void Alg1(int n)
{
    for(int i=0; i < n*4; i=i+1)
    {
        tue_etwas(...);
    }
}
```

Alg2:

```
void Alg2(int n)
{
    for(int i=0; i < n; i=i+1)
    {
        for(int j=0; j<n; j=j+)
        {
            tue_etwas(...);
        }
    }
}
```

Aufwandsvergleich (Anzahl der Aufrufe von `tue_etwas`):

Tabelle 9: Aufwandsvergleich

n	1	2	3	4	5	6	7
Alg1	4	8	12	16	20	24	28
Alg2	1	4	9	16	25	36	49

Alg1  $\leftarrow$  linear ( $4n$ )

Alg2  $\leftarrow$  quadratisch ( $n^2$ )

- Aufwand abhängig von
  - Größe  $n$  der Eingabe, Anzahl der Daten usw.
  - der Komplexität des Algorithmus
- Unterscheidung zwischen
  - (a) Zeitkomplexität (Laufzeit der Alg. s.o.)
  - (b) Speicherkomplexität (benötigte Speichermenge)

- 90/10-Regel beim Programmieren:  
„Ungefähr 90% der Laufzeit wird in ca. 10% des Programmcodes verbraucht“

## 4.2 Asymptotische Komplexität und Groß-O-Notation

- Abschätzung der Komplexität als Funktion von  $n$
- Idee: „Wachstumsverhalten,,möglichst allgemein für große  $n$  beschreiben (Konstante Faktoren und Summanden werden nicht berücksichtigt) (Zeichnung als Foto auf Handy)
- Die Groß-O-Notation weist einer Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Menge von Funktionen  $O(g(n))$  zu, die in gleicher Wachstumsbeziehung zu  $g$  stehen.
- Eine Funktion  $f$  ist Element von  $O(g(n))$ , falls sie nicht wesentlich schneller als  $g$  wächst.  
Für große  $n$  muss gelten  $f(n) \leq c \cdot g(n)$  mit einer beliebigen Konstanten  $c$ .
- Hier z.B.  $g(n)$  wächst so schnell wie  $f(n)$ ;  
 $\Rightarrow f(n) \in O(g(n))$   
in Bsp. aus 4.1.  
Alg1:  $f(n) = 4n \Rightarrow f(n) \in O(n)$   
Alg2:  $f(n) = n^2 \Rightarrow f(n) \in O(n^2)$
- formale Definition  
 $O(g(n))$  ist die Menge aller Funktionen  $f(n)$ , die asymptotisch beschränkt sind durch ein beliebiges aber konstantes Vielfaches der Funktion  $g(n)$ .  
Mathematisch:  
 $O(g(n)) = \{f(n) | \text{Es gibt positive Konstanten } c \text{ und } n_0, \text{ so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } f(n) \leq c \cdot g(n)\}$ 
  - $O(a)$  Konstanter Aufwand
  - $O(\log(n))$  logarithmischer Aufwand
  - $O(n)$  linearer Aufwand
  - $O(n^2)$  quadratischer Aufwand
  - $O(n^k)$  polynomialer Aufwand
  - $O(2^n)$  exponentieller Aufwand
  - $O(n^n)$  exponentieller Aufwand
- Exponentielle Probleme sind im Allgemeinen nicht lösbar für große  $n$ .

- Wichtig: Reduktion der Komplexität durch Entwicklung effizienter Algorithmen.  
z.B. Fouriertransformation  $O(n^2) \rightarrow$  schnelle Fouriertransformation (FFT):  $O(n * \log(n))$
- Rechenregeln:
  - Linearität:  $O(c_1 * g(n) + c_2) = O(g(n)) \Rightarrow 4n + 3 \in O(n)$
  - Distributivität:  $O(g_1(n)) + O(g_2(n)) = O(g_1(n) + g_2(n))$   
 $O(g_1(n)) * O(g_2(n)) = O(g_1(n) * g_2(n))$
  - Außerdem:  $O(O(g(n))) = O(g(n))$   
 $g_1(n) * O(g_2(n)) = O(g_1(n) * g_2(n))$
  - Merke:  $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0$   
 $\Rightarrow f(n) \in O(n^k) \Rightarrow 3n^5 + 2n^2 - 18n + 5 \in O(n^5)$

### 4.3 Beispiele

Berechnung von  $x^n$  (Version 1)

C/C++ Beispiel

```
double pow1(double x, int n)
{
    double y = 1;
    for(int i=0; i < n; i = i+1) // n Durchläufe
    {
        y = y*x;
    }
    return y;
}
```

Schleife wird  $(n)$ -mal durchlaufen  $1 * x * x * x * x * x * \dots * x$

$\Rightarrow$  Zeitkomplexität  $f(n) = 1 \Rightarrow f(n) \in O(n)$

Berechnung von  $x^n$  (schneller) Rekursive Lösung des Problems durch fortlaufende Halbierung des Exponenten.

z.B.  $x^8 = x^4 * x^4 \rightarrow x^4 = x^2 * x^2 \rightarrow x^2 = x * x$

anstatt 8 nur noch 3 Multiplikationen

$x^9 = x^4 * x^4 * x \rightarrow x^4 = \dots$

C/C++

```
double pow2(double x, int n)
{
    if(n==0) return 1; // x^0 = 1
    if(x==1) return x; // x^1 = x
    double y = pow2(x, n/2) // Rekursionsaufruf
    y = y*y;
    if(n%2==1) y=y*x; //für ungerade n
    return y;
}
```

Wie oft lässt sich  $n$  halbieren?

→ Logarithmus  $n$  (zur Basis 2)

⇒ Zeitkomplexität  $f(n) = \log_2 n$

⇒  $f(n) \in O(\log n)$

Algorithmisches Prinzip: „Divide and Conquer“

## 5 neue Mitschrift

Whd:  
statisches Array:

```
int a[4]; // Größe konstant
a[0] = 35;
```

```
int size;
cin >> size;
int b[size]; // Compilerfehler
```

stattdessen ein dynamisches Array:

```
int* pa = new int[size];
pa[0] = 35;
delete[] pa; // Gibt den Speicher wieder frei
```

Achtung! Klammern[] dürfen nicht vergessen werden; da sonst nur das erste Element des Arrays freigegeben würde! In C analog zu `new` und `delete`:

```
int* pa = (int*)malloc(size*4); //size*4 Byte reserviert
pa[0] = 1001;
...
free(pa);
```

oder besser:

```
int* pa = (int*)malloc(size*sizeof(int));
```

### 5.1 Dynamisches Erzeugen einer Struktur

```
struct Person
{
    string name;
    int alter;
    ...;
}

void main()
{
    Person z; //Statisch erzeugt
    z.alter = 29;
    Person* p; //Zeiger auf eine Person
    p = new Person; //Speicher reservieren
    (*p).alter = 29; // setzt Alter auf 29 C-Syntax
    p->alter=29; // setzt alter in C++-Syntax
    ...
    delete p;
}
```

Bisher: Liste von Daten in Arrays, Problem bei Arrays:

- Die Elemente müssen alle hintereinander im Speicher abgelegt werden

- Einfügen und Löschen langsam, da die hinteren Elemente umkopiert werden müssen

## 5.2 Lineare Listen

- Lineare Listen sind verkettete Folgen von Datenelementen
- Jedes Element enthält neben den eigentlichen Daten einen zeiger auf das nächste Element

C/C++-Beispiel

```
struct Element
{
    string name;
    int nummer; // Personalnummer
    Element *next; // Zeiger auf nächstes Element
}
```

Element: name nummer next

Verkettete Liste von Elementen:

Anfang  $\Rightarrow$  1. Element | next  $\Rightarrow$  ...

Nullzeiger (NULL bzw 0 markiert, dass ein Zeiger auf keine gültige Speicherstelle zeigt

Erzeugen und Verketteten von einer Liste mit zwei Elementen (C++):

```
Element* anfang = new Element;
anfang -> name = "Peter Meier";
anfang -> nummer = 230001;
anfang -> next=NULL;
Element *zweites = new Element;
zweites -> name "Gabi Schmidt";
zweites -> nummer = 230002;
zweites -> next = NULL;
anfang -> next = zweites; // Verkettung vom ersten und zweiten Element
```

- Größe und Verkettung können während der Programmlaufzeit verändert werden (Einfügen/Löschen von Elementen)
- Speicherplatz wird dynamisch zugeteilt
- Die einzelnen Listenelemente können sich an beliebigen Stelle im Speicher befinden.

Operationen auf Listen:

Füge neues Element hinter dem Element auf das Zeiger p zeigt ein.

C++ Beispiel



```

void insertElement(Element *p, const string &name, int nummer)
{
    Element *q = new Element;
    q -> name = name;
    q -> nummer = nummer;
    q -> next = p -> next;
}
// Beispielaufruf (Einfügen eines neuen 3. elements):
insertElement(anfang->next, "Ute Müller", 230120);

```

Lösche das Element hinter dem Element auf das p zeigt:

```

void deleteElement(Element *p)
{
    if(p -> next != NULL) // Teste ob Nachfolger existiert
    {
        Element* q = p -> next;
        p -> next = q -> next; // neu verketteten
        delete q;
    }
}

```

## 5.3 Bäume

- Ermöglicht Speicherung hierarchischer Strukturen (Gliederung in Dokumenten, Dateiverzeichnisse, verschachtelte terme, Vererbung, Organisationhierarchien...)
- Element des Baumes (Knoten) sind durch gerichtete Kanten verbunden (keine Zyklen!)
- Alle Elemente außer der Wurzel haben einen Vorgänger
- Binärer Baum maximal 2 Nachfolger pro Knoten
- Definition: Ein binärer Baum  $B$  ist entweder leer oder besteht aus einer Wurzel  $w$ , sowie aus einem linken Teilbaum  $B_l(w)$  und einem rechten Teilbaum  $B_r(w)$ .

\* Datenstrukturen: ähnlich wie Liste jedoch 2 Nachfolger pro Element  
C/C++ Beispiel

```

struct Knoten
{
    int x; // zu speichernder Wert
    Knoten* links; // Zeiger auf den linken Teilbaum
    Knoten* rechts; // Zeiger auf den rechten Teilbaum
};

```

\* Eignet sich gut um sortierte Daten zu speichern und schnell Zugriffsoperationen zu ermöglichen.

- \* Baumtraversierung: Vollständiger Durchlauf eines Baumes, um sich z.B. auf alle Elemente eine Operation anzuwenden.
- \* Man unterscheidet drei Traversierungsarten: preorder, inorder, postorder Alternative Anschauung:  
Preorder, inorder und postorder durchlaufen die Knoten in der gleichen Reihenfolge, unterscheiden sich jedoch darin wann die Operation auf die Knoten angewendet wird.

```
// Parameter *p: Zeiger auf Wurzel bzw. Teilbaum
void traverse(Knoten* p)
{
    if(p != NULL)
    {
        Operation auf p -> x; // für preorder
        traverse(p -> links);
        Operation auf p -> x; // für inorder
        traverse(p -> rechts);
        Operation auf p -> x; // für postorder
    }
}
```

## 5.4 Binäre Suchbäume

Ein binärer Baum B heißt Suchbaum wenn:

für alle  $x \in \text{Be}(w)$  gilt  $x < w$  und  $x \in \text{Br}(w)$  gilt  $x > w$  und  $\text{Be}(w)$ ,  $\text{Br}(w)$  Suchbäume sind.

Einfügen neuer Elemente in B (Struktogramm)