Demostrar que el conjunto de funciones $\cos n\omega_0 t$ y $\operatorname{sen} n\omega_0 t$ son mutuamente ortogonales en un intervalo $t_0 < t < t_0 + \frac{2\pi}{\omega_0}$

la serie es $\qquad t_0 < t < t_0 + T$

$$f(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos\omega_0 t + A_2 \cdot \cos 2\omega t + \dots A_n \cdot \cos n\omega_0 t$$

$$+ B_1 \cdot \operatorname{sen}\omega_0 t + B_2 \cdot \operatorname{sen} 2\omega_0 t + \dots B_n \cdot \operatorname{sen} n\omega_0 t.$$

$\Rightarrow$ serie trigonométrica de fourier de $f(t)$

siendo

$$A_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos n\omega_0 t \, dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 n\omega_0 t \, dt}$$

y

$$B_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \operatorname{sen} n\omega_0 t \, dt}{\int_{t_0}^{t_0+T} \operatorname{sen}^2 n\omega_0 t \, dt}$$

Si $n = 0$ $\quad A_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \, dt$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt \cdot \operatorname{sen} nt \, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(-\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m+n)t)\,dt}_{\text{si } m=n \;\to\; 0} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-n)t)\,dt}_{\text{si } m=n \;\to\; \pi}$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt \cdot \operatorname{sen} nt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

Una función seno no es ortogonal a sí misma pero sí a todas las otras sen nt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cdot \cos nt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

Si $m \neq n \Rightarrow$

$$\cos mt \cdot \cos nt = \frac{1}{2}\left[\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)\right]$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)t\,dt + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\operatorname{sen}((m+n)t) + \frac{1}{m-n}\operatorname{sen}((m-n)t)\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n} + \frac{\operatorname{sen}(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)\pi}{m-n}\right] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cdot \operatorname{sen} nt \, dt = 0 \quad \forall\, m \text{ y } n$$

$\Rightarrow$ Las funciones $\cos nt$ y $\operatorname{sen} nt$ para $n = 1, 2, 3 \ldots \infty$ son mutuamente ortogonales en el intervalo $[-\pi, \pi]$