A4

ⓐ $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$

$\to f(x) = O(g(x))$ für $x \to x_0 \iff \exists C : \lim\limits_{x \to x_0} \sup \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < C$

Für jede Funktion $f(x) = o(g(x))$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$ gilt gleichzeitig für irgendein $C > 0$ $\lim\limits_{x \to x_0} \sup \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < C$ und somit auch $f(x) = O(g(x))$

ⓑ

$$(1+x)^3 = (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1) = (x^2+2x+1)\cdot(x+1) = x^3+2x^2+x+x^2+2x+1$$

$$= x^3+3x^2+3x+1 \overset{!}{=} 1+3x+O(x^2) \quad , x \to 0 \quad |-1-3x$$

$$= x^3+3x^2 = O(x^2)$$

$$\lim\limits_{x \to 0} \left|\frac{x^3+3x^2}{x^2}\right| = 0 \Rightarrow \exists C > 0 : \lim\limits_{x \to 0} \sup \left|\frac{x^3+3x^2}{x^2}\right| < C$$

$$\Rightarrow (1+x)^3 = 1+3x+O(x^2)$$

ⓒ $\sin(x) \overset{!}{=} x + O(x^3) \quad , x \to 0$ // da $x \to 0$ wird $x + O(x^3) \to O(x^3)$

$$\lim\limits_{x \to 0} \left|\frac{\sin(x)}{x^3}\right| = 0 \Rightarrow \exists C > 0 : \lim\limits_{x \to 0} \sup \left|\frac{\sin(x)}{x^3}\right| < C$$

$$\Rightarrow \sin(x) = x + O(x^3)$$

(d)

<u>Gegenbeispiel:</u>

$f = g \Rightarrow f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, da: $C = 2$: $\limsup_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 1$

$\hookrightarrow x_0$ ist beliebig

$\overset{!}{\Longrightarrow} \lim_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 1 \neq 0$

Die Umkehrung der Aussage gilt nicht.

(e)

<2

$f_1(x) = \mathcal{O}(g(x)), x \to x_0 \qquad f_2(x) = \mathcal{O}(g(x)), x \to x_0$

$\Rightarrow \exists C_1: \limsup_{x \to x_0} \left|\frac{f_1(x)}{g(x)}\right| < C_1$ und: $\exists C_2: \limsup_{x \to x_0} \left|\frac{f_2(x)}{g(x)}\right| < C_2$

$\Rightarrow \limsup_{x \to x_0} \left|\frac{f_1(x) + f_2(x)}{g(x)}\right| \leq C_1 + C_2$

(f) $f(x) = \mathcal{O}(g(x)), x \to x_0 \qquad \Rightarrow \quad \exists C: \limsup_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < C$

$c \in \mathbb{R}: (cf)(x) \overset{!}{=} \mathcal{O}(g(x)), x \to x_0$

$(cf)(x) = c \cdot f(x) \quad \Rightarrow \limsup_{x \to x_0} \left|\frac{c \cdot f(x)}{g(x)}\right| < |c| \cdot C < \infty$

(g) $f(x) = x^3 + 3x = \mathcal{O}(x^k)$ gesucht: größtmögliches $k \in \mathbb{N}$

$x \to 0: \exists C: \limsup_{x \to 0} \left|\frac{x^3 + 3x}{x^k}\right| < C$ für $k = 1$

$k = 1: \limsup_{x \to 0} \left|\frac{x^3 + 3x}{x}\right| = \limsup_{x \to 0} |x^2 + 3| < 4 < \infty$

$k = 2: \limsup_{x \to 0} \left|\frac{x^3 + 3x}{x^2}\right| = \limsup_{x \to 0} \left|x + \frac{3}{x}\right| \to \infty$, da $x \to 0$ geht

Also ist $k = 1$ der maximale Wert für k für $x \to 0$.

$x \to \infty$: $\exists C: \limsup\limits_{x\to\infty} \left| \frac{x^3+3x}{x^k} \right| < C$

$k \geq 3$: $\limsup\limits_{x\to\infty} \left| \frac{x^3+3x}{x^3} \right| = \limsup\limits_{x\to\infty} \left| 1 + \frac{3}{x^2} \right| < 2$, da $x \to \infty$

k muss größer gleich 3 sein, damit $f(x) = O(x^k)$, $x\to\infty$ gilt.