6 Vectori

6.1 Spaţii vectoriale

P 1. Verificaţi care dintre următoarele sisteme de vectori din spaţiul standard $\mathbb{R}^4$ sunt liniar dependente. În caz de dependenţă, determinaţi o relaţie de dependenţă liniară între vectorii sistemului.
a) $S_a = \{\overline{v}_1 = (1,0,2,-1), \overline{v}_2 = (0,1,1,2), \overline{v}_3 = (2,-1,3,-4)\}$.
b) $S_b = \{\overline{v}_1 = (1,1,1,1), \overline{v}_2 = (1,1,-1,-1), \overline{v}_3 = (1,-1,1,-1), \overline{v}_4 = (1,-1,-1,1)\}$.
c) $S_c = \{\overline{v}_1 = (0,1,2,3), \overline{v}_2 = (1,3,5,7), \overline{v}_3 = (2,-1,-4,-7), \overline{v}_4 = (-3,1,5,9)\}$.

P 2. Verificaţi că sistemul de vectori B este o bază în spaţiul liniar considerat şi determinaţi coordonatele vectorului v în raport cu baza B:
a) $B_a = (v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,1,-1,-1), v_3 = (1,-1,1,-1), v_4 = (1,-1,-1,1)) \subseteq \mathbb{R}^4$, $v = (1,2,1,1)$.
b) $B_b = (v_1 = (1,1,0,1), v_2 = (2,1,3,1), v_3 = (1,1,0,0), v_4 = (0,1,-1,-1)) \subseteq \mathbb{R}^4$, $v = (0,0,0,1)$.
c) $B_c = (v_1 = (1,2,-1,-2), v_2 = (2,3,0,-1), v_3 = (1,2,1,4), v_4 = (1,3,-1,0)) \subseteq \mathbb{R}^4$, $v = (7,14,-1,2)$.
d) $B_d = (v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,2), v_3 = (1,2,3)) \subseteq \mathbb{R}^3$, $v = (6,2,-7)$.
e) $B_e = (v_1 = (2,1,-3), v_2 = (3,2,5), v_3 = (1,-1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$, $v = (6,9,14)$.

6.2 Spaţii euclidiene. Produs scalar. Produs vectorial. Produs mixt

P 3. Fie E un spaţiu liniar euclidian, iar $u, v, w \in E$.
a) Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
i) $u \perp v$.
ii) $\|u+v\| = \|u-v\|$.
iii) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
b) Arătaţi că dacă $u \perp (v-w)$ şi $v \perp (w-u)$, atunci $w \perp (u-v)$.
c) Arătaţi că $\|u\| = \|v\|$ dacă şi numai dacă $(u+v) \perp (u-v)$.
d) Stabiliţi identităţile:
i) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.
ii) $u \cdot v = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2)$.
e) Arătaţi că dacă $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ este un sistem ortogonal de vectori, atunci

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|u_i\|^2.$$

P 4. Fie $\mathbb{R}^2$ spaţiul liniar euclidian $2-$dimensional standard. Determinaţi unghiul orientat $\widehat{u_1, u_2}$ dintre vectorii $u_1 = (1, \sqrt{3})$ şi $u_2 = (\sqrt{3}, 1)$.

Toţi vectorii din problemele următoare sunt în spaţiul liniar euclidian $3-$dimensional E_3 cu baza canonică $B_c = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

P 5. Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori, cu $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$, şi $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{2\pi}{3}$. Calculaţi: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a}+\vec{b})^2$, $(3\vec{a}-2\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b})$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$, $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$.

P 6. Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, şi $\vec{c}$ trei vectori astfel încât $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 5$, $\|\vec{c}\| = 8$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\widehat{\vec{a}, \vec{c}} = \widehat{\vec{b}, \vec{c}} = \frac{\pi}{3}$. Calculaţi: $(3\vec{a}-2\vec{b}) \cdot (\vec{b}+3\vec{c})$, $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$, $(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})^2$.

P 7. Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, şi $\vec{c}$ trei vectori unitari vectors astfel încât $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$. Calculaţi $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

P 8. Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, şi $\vec{c}$ trei vectori oarecare. Arătaţi că vectorul $\vec{p} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ este ortogonal pe vectorul $\vec{a}$.

P 9. Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori, cu $\|\vec{a}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{b}\| = 1$, iar $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{\pi}{6}$. Determinaţi unghiul dintre vectorii $\vec{p} = \vec{a}+\vec{b}$ şi $\vec{q} = \vec{a}-\vec{b}$.

P 10. Fie $\vec{a} = (4,-2,-4)$ şi $\vec{b} = (6,-3,2)$. Calculaţi: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$, $(2\vec{a}-3\vec{b}) \cdot (\vec{a}+2\vec{b})$, $\|\vec{a}+\vec{b}\|$, $\|\vec{a}-\vec{b}\|$.

P 11. Fie $\vec{a} = (3,-6,-1)$, $\vec{b} = (1,4,-5)$, şi $\vec{c} = (3,-4,12)$. Determinaţi proiecţia $pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$.

P 12. Demonstraţi identitatea

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2.$$

Deduceţi că $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$.

P 13. Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori, cu $\|\vec{a}\| = 6$, $\|\vec{b}\| = 5$, şi $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{\pi}{6}$. Calculaţi $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

P 14. Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori ortogonali, cu $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 4$. Calculaţi $\|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\|$ şi $\|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})\|$.

P 15. Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori, cu $\|\vec{a}\| = 1$, $\|\vec{b}\| = 2$, şi $\widehat{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{2\pi}{3}$. Calculaţi $(\vec{a} \times \vec{b})^2$, $\Big((2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})\Big)^2$, $\Big((\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})\Big)^2$.

P 16. Fie $\vec{a}$, $\vec{b}$, şi $\vec{c}$ vectori astfel încât $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Arătaţi că $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

P 17. Fie $\vec{a} = (3, -1, -2)$ şi $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Calculaţi $\vec{a} \times \vec{b}$, $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$, $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

P 18. Fie $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 2)$, şi $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Calculaţi $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ şi $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

P 19. Demonstraţi identitatea $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge (\vec{b} + \vec{c}) \wedge (\vec{c} + \vec{a}) = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$.

P 20. Demonstraţi identitatea $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge (\vec{c} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$, pentru orice scalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

P 21. Arătaţi că dacă trei vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ satisfac relaţia

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0},$$

atunci vectorii sunt coplanari(=liniar dependenţi).

P 22. Calculaţi $\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ pentru vectorii $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 2, 1)$, $\vec{c} = (3, -2, 5)$.

P 23. Demonstraţi identităţile:
a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$.
b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

P 24. Demonstraţi identităţile:
a) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$.
b) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$.
c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{d} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{d}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.
d) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{d})\vec{c} - (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})\vec{d}$.
e) $(\vec{a} \times \vec{b}) \wedge (\vec{b} \times \vec{c}) \wedge (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})^2$.
f) $\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})) = (\vec{b} \cdot \vec{d})(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{d}) = (\vec{a} \wedge \vec{c} \wedge \vec{d})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d})$.
g) $(\vec{a} \times \vec{b})^2(\vec{a} \times \vec{c})^2 - ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c}))^2 = \vec{a}^2(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})^2$.
h) $((\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})) \wedge ((\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})) \wedge ((\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})) = (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})^4$.
i) $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{d} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \wedge \vec{c} \wedge \vec{d})\vec{a}$.
j) $(\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c})(\vec{a} \wedge \vec{d} \wedge \vec{e}) = (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{d})(\vec{a} \wedge \vec{c} \wedge \vec{e}) - (\vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{e})(\vec{a} \wedge \vec{c} \wedge \vec{d})$.

6.3 Spaţii afine. Raport simplu

P 25. Fie $A, B \in \mathcal{A}$ două puncte, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, şi $C, D \in AB$ astfel încât $(A, B|C) = \lambda = -(A, B|D)$. Dacă E este mijlocul lui (CD), arătaţi că $\overline{EA} = \lambda^2 \overline{EB}$.

P 26. Fie $A, B, C \in \mathcal{A}$ trei puncte, şi $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$.
a) Dacă $(B, C|M) = (C, A|N) = (A, B|P)$, atunci
i) $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \overline{0}$.
ii) $\frac{1}{3}M + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$.
b) Dacă A, B, C sunt afin independente, atunci
i) $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \overline{0} \Longrightarrow (B, C|M) = (C, A|N) = (A, B|P)$.
ii) $\frac{1}{3}M + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}P = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C \Longrightarrow (B, C|M) = (C, A|N) = (A, B|P)$.

P 27. Fie A_1, A_2, A_3, A_4 patru puncte, $B_i \in A_iA_{i+1}$, $i = \overline{1, 4}$ mijloacele segmentelor (A_iA_{i+1})(cu $A_5 = A_1$), $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare, şi $C \in A_1A_2$, $D \in A_3A_4$ astfel încât $\overline{A_1C} = \lambda\overline{A_1A_2}$ şi $\overline{A_3D} = \lambda\overline{A_3A_4}$. Arătaţi că
a) $\overline{B_1B_2} = \overline{B_4B_3}$.
b) $\overline{CD} = (1 - \lambda)\overline{A_1A_3} + \lambda\overline{A_2A_4}$.

P 28. Fie A, B, C trei puncte afin independente şi $P \in AB$, $Q \in AC$. Arătaţi că $(A, B|P) = (A, C|Q)$ dacă şi numai dacă vectorii $\overline{PQ}$ şi $\overline{BC}$ sunt coliniari(i.e., liniar dependenţi).

P 29. Fie $A, B, C \in \mathcal{A}$ puncte afin independente, M mijlocul lui (BC), $N \in AC$ şi $P \in AB$ astfel încât $(A, B|P) = (A, C|N)$. Arătaţi că dreptele AM, BN, şi CP sunt concurente.

P 30. Fie $ABCDEF$ un patrulater complet. Arătaţi că mijloacele of diagonalele AC, BD, şi EF sunt trei puncte coliniare.

6.4 Biraport

P 31. Fie a, b, c, d patru drepte, concurente într-un punct O. Dacă l este o dreaptă care nu trece prin O, şi A, B, C, D sunt punctele de intersecţie ale lui l cu dreptele a, b, c, d, arătaţi că

$$(A, B|C, D) = \frac{sin(\widehat{AOC})}{sin(\widehat{COB})} : \frac{sin(\widehat{AOD})}{sin(\widehat{DOB})} \overset{not}{=} \frac{sin(\widehat{ac})}{sin(\widehat{cb})} : \frac{sin(\widehat{ad})}{sin(\widehat{db})} \overset{not}{=} (a, b|c, d)\,.$$

P 32. (teorema lui Steiner) Fie $\Delta\, ABC$ un triunghi oarecare, şi $M, N \in BC$ două puncte astfel încât bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{MAN}$ coincid. Arătaţi că

$$\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2\,.$$

P 33. Fie A, B, C, D, P, Q şase puncte oarecare pe un cerc $\mathcal{C}$. Arătaţi că

$$(PA, PB|PC, PD) = (QA, QB|QC, QD) \overset{not}{=} (A, B|C, D)$$

(biraportul punctelor conciclice A, B, C, D).

P 34. Fie $ABCD$ un patrulater, şi $E \in AB \cap CD$ şi $F \in AD \cap BC$($ABCDEF$ se numeşte un patrulater complet, cu diagonalele AC, BD, şi EF). Dacă $K \in AC \cap BD$, $L \in AC \cap EF$, şi $M \in BD \cap EF$, arătaţi că

$$(A, C|K, L) = (B, D|K, M) = (E, F|L, M) = -1.$$

P 35. Fie A, B, C, D, B', C', D' puncte astfel încât A, B, C, D sunt coliniare, A, B', C', D' sunt coliniare, şi $(A, B|C, D) = (A, B'|C', D')$. Arătaţi că dreptele BB', CC', şi DD' sunt concurente(sau paralele).

P 36. Fie a, b, c, d, b', c', d' drepte astfel încât a, b, c, d sunt concurente, a, b', c', d' sunt concurente, şi $(a, b|c, d) = (a, b'|c', d')$. Arătaţi că punctele de intersecţie $B \in b \cap b'$, $C \in c \cap c'$, şi $D \in d \cap d'$ sunt coliniare.

P 37. (teorema lui Pappus) Fie d_1, d_2 două drepte, $A_1, B_1, C_1 \in d_1$, $A_2, B_2, C_2 \in d_2$ puncte pe cele două drepte, şi $U \in B_1C_2 \cap B_2C_1$, $V \in A_1C_2 \cap A_2C_1$, $W \in A_1B_2 \cap A_2B_1$. Arătaţi că punctele U, V, W sunt coliniare.

P 38. (teorema lui Pascal) Fie $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ şase puncte pe un cerc $\mathcal{C}$, şi $U \in B_1C_2 \cap B_2C_1$, $V \in A_1C_2 \cap A_2C_1$, $W \in A_1B_2 \cap A_2B_1$. Arătaţi că punctele U, V, W sunt coliniare.