Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 4

Integrale şi primitive.

EVA KASLIK, RALUCA MUREŞAN

Integrala Riemann-Darboux

O partiţie P a intervalului $[a,b]$ este o mulţime finită de puncte $\{x_0, x_1, .., x_n\}$ ce satisfac

$$a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b.$$

Considerăm o funcţie mărginită f definită pe $[a,b]$.

Suma Riemann a funcţiei f în raport cu partiţia P:

$$R_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{unde} \quad x_i^\star \in [x_{i-1}, x_i]$$

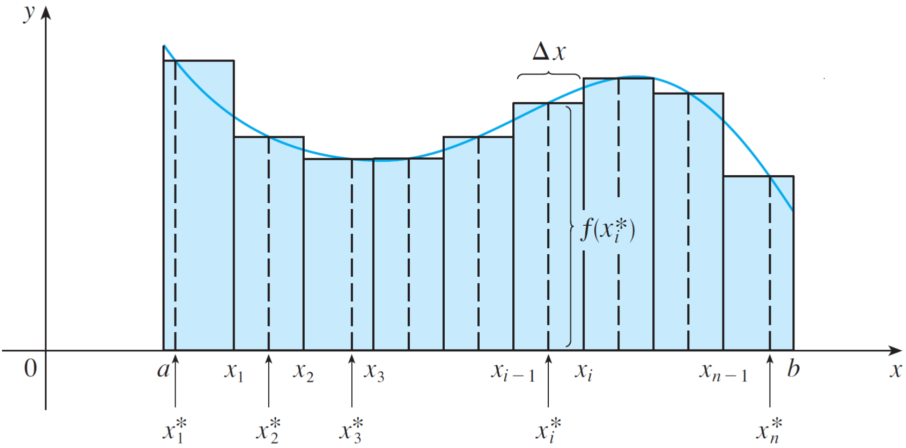
Suma superioară Darboux a funcţiei f în raport cu partiţia P:

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{unde} \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

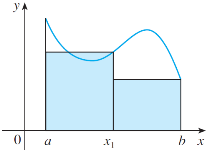
Suma inferioară Darboux a funcţiei f în raport cu partiţia P:

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{unde} \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

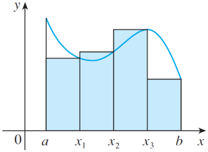
Integrala Riemann-Darboux



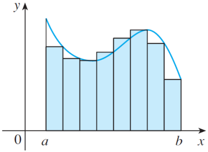
Integrala Riemann-Darboux



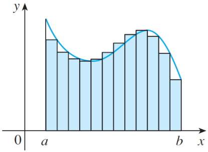
(a) $n = 2$



(b) $n = 4$



(c) $n = 8$



(d) $n = 12$

Integrala Riemann-Darboux

Considerăm

$$M = \sup\{f(x)\,|\,a \le x \le b\} \quad \text{şi} \quad m = \inf\{f(x)\,|\,a \le x \le b\}.$$

Pentru orice partiţie P a intervalului $[a,b]$ avem:

$$m(b-a) \le L_f(P) \le R_f(P) \le U_f(P) \le M(b-a).$$

Următoarele mulţimi sunt mărginite:

$$L_f = \{L_f(P)\,|\,P \text{ este o partiţie a intervalului } [a,b]\}$$

$$U_f = \{U_f(P)\,|\,P \text{ este o partiţie a intervalului } [a,b]\}$$

Integrala Riemann-Darboux

Deci $\mathcal{L}_f = \sup L_f$ şi $\mathcal{U}_f = \inf U_f$ există. Mai mult:

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f.$$

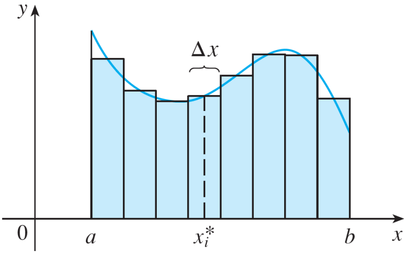
O funcţie mărginită definită pe $[a, b]$ este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a, b]$ dacă

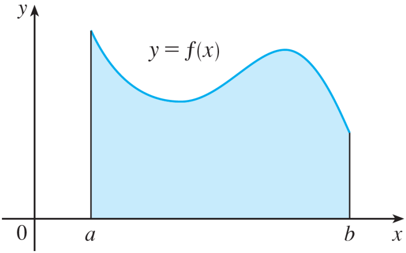
$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f.$$

Valoarea comună se notează prin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f = \lim_{n\to\infty} R_f(P).$$

Integrala Riemann-Darboux





Exemplu

Evaluaţi suma Riemann pentru $f(x) = x^3 - x$ pe intervalul $[0, 3]$, alegând punctele intermediare $x_i^\star = x_i \in [x_{i-1}, x_i]$, unde $x_i = \dfrac{3i}{n}$. Calculaţi $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$.

$$\begin{aligned}
R_f(P) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - \frac{3i}{n}\right] \\
&= \frac{3^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{3^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{3^4}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{3^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{81}{4} - \frac{9}{2} = \frac{63}{4}.
\end{aligned}$$

Deci:

$$\int_0^3 f(x)dx = \frac{63}{4}.$$

Proprietăţi ale integralei Riemann-Darboux

Dacă f şi g sunt integrabile Riemann-Darboux pe $[a, b]$ atunci toate integralele de mai jos există şi sunt verificate următoarele relaţii:

$$\int_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx \text{ pentru orice } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \text{ pentru orice } a \leq c \leq b.$$

$$\text{Dacă } f(x) \leq g(x) \text{ pe } [a, b] \text{ atunci } \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Clase de funcţii integrabile Riemann-Darboux

Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Riemann-Darboux pe $[a,b]$.

O funcţie f se numeşte continuă pe porţiuni pe $[a,b]$ dacă există o partiţie $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ a intervalului $[a,b]$ şi funcţii continue f_i definite pe $[x_{i-1}, x_i]$, astfel încât $f(x) = f_i(x)$ pentru $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Orice funcţie continuă pe porţiuni este integrabilă Riemann-Darboux şi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x)\,dx.$$

Teorema de medie

Dacă f şi g sunt continue pe $[a, b]$ şi $g(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, există un punct intermediar c între a şi b astfel incât

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

Teorema fundamentală a CDI

Teoremă

Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann-Darboux pe* $[a, b]$ *şi*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

atunci F *is continuă pe* $[a, b]$.

Mai mult, dacă f *este continuă pe* $[a, b]$, *atunci* F *este derivabilă pe* $[a, b]$ *şi*

$$F' = f.$$

Orice funcţie Φ cu proprietatea $\Phi' = f$ se numeşte primitivă funcţiei f.

- Două primitive ale aceleiaşi funcţii f diferă printr-o constantă.
- Dacă F este o primitivă a funcţiei f, atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Integrare prin părţi

Pentru două funcţi f şi g de clasă C^1 pe intervalul $[a, b]$, avem

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

unde $\int f(x)g'(x)dx$ şi $\int f'(x)g(x)dx$ reprezintă mulţimile primitivelor funcţiilor fg' şi $f'g$.

Consecinţa pentru integrale definite:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Schimbarea de variabilă

Dacă funcţia $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ este o bijecţie de clasă C^1 cu proprietatea $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ este continuă, atunci:

$$\left(\int f(x)\,dx\right) \circ g = \int (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,dt$$

unde $\int f(x)dx$ şi $\int (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,dt$ reprezintă mulţimile primitivelor funcţiilor f şi $(f \circ g) \cdot g'$.

Consecinta pentru integrale definite:

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ g)(t) \cdot g'(t)\,dt$$

Integrale improprii de speţa I (interval nemărginit)

Definiţie

Considerăm o funcţie mărginită $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann-Darboux pe orice interval închis de forma $[a, b]$, unde $b > a$.

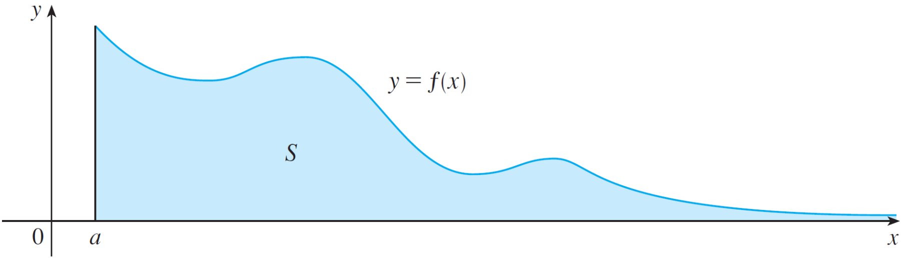
Integrala improprie de speţa I $\int_a^{\infty} f(x)dx$ este convergentă dacă limita

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

există şi este finită. În acest caz: $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$.

Dacă limita de mai sus nu există (sau este infinită), integrala improprie este divergentă.

Integrale improprii de speţa I (interval nemărginit)



Integrale improprii de speţa I (interval nemărginit)

Analog, integrala improprie de speţa I pe intervalul $(-\infty, b]$ se defineşte astfel:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

(în cazul in care limit există şi este finită).

Dacă integralele improprii $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ şi $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ sunt convergente, putem defini:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Integrale improprii de speţa I (interval nemărginit)

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$, unde $p > 0$.

Presupunem că $p \neq 1$ şi fie $b > 1$. Avem:

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^b = \frac{b^{1-p} - 1}{1-p} .$$

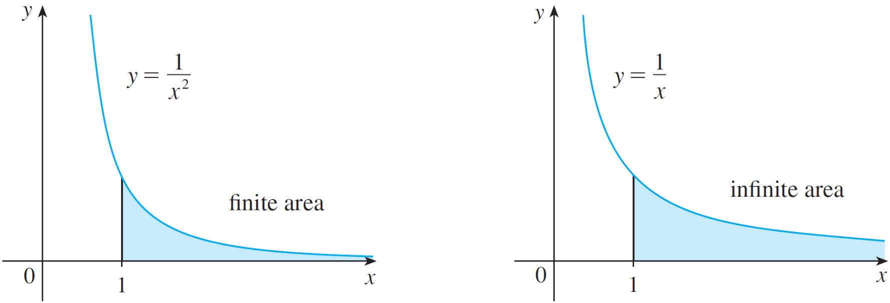
Pe de altă parte, dacă $p = 1$, avem:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_1^b = \ln(b) .$$

Trecând la limită pentru $b \to \infty$ în relaţiile de mai sus, avem:

- dacă $p \in (0, 1]$ avem $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \infty \implies \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ divergentă
- dacă $p \in (1, \infty)$ avem $\lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1} \implies \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx$ convergentă

Integrale improprii de speţa I (interval nemărginit)



Integrale improprii de speţa II (funcţii nemărginite)

Definiţie

Considerăm funcţia $f : (a, b] \to \infty$ *care are o asimptotă verticală în* a*, integrabilă Riemann-Darboux pe orice interval* $[a + \epsilon, b]$*, unde* $\epsilon \in (0, b - a)$.

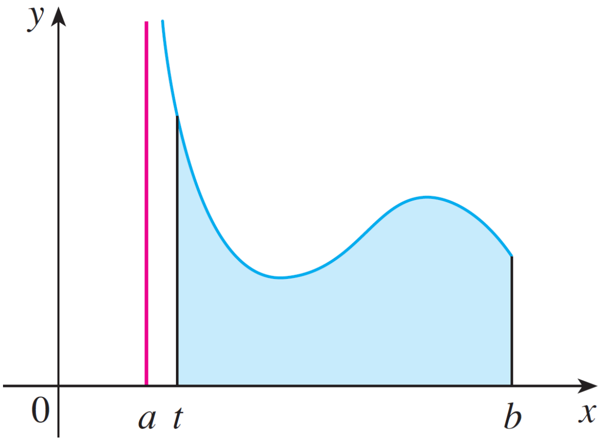
Integrala improprie de speţa II $\int_a^b f(x)\,dx$ *este convergentă dacă limita*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

există şi este finită. În acest caz: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$.

Dacă limita de mai sus nu există (sau este infinită), integrala improrie este divergentă.

Integrale improprii de speţa II (funcţii nemărginite)



Integrale improprii de speţa II (funcţii nemărginite)

Analog, integrala improprie de speţa II pe intervalul $[a, b)$ se defineşte astfel:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\, dx$$

(în cazul în care limit de mai sus există şi este finită).

Dacă funcţia f are o asimptotă verticală în $c \in (a, b)$ şi integralele improprii $\int_a^c f(x)dx$ şi $\int_c^b f(x)dx$ sunt convergente, atunci putem defini:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Integrale improprii de speţa II (funcţii nemărginite)

Exemplu. Studiaţi convergenţa integralei $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, unde $p > 0$.

Presupunem că $p \neq 1$ şi fie $\epsilon > 0$. Avem:

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_\epsilon^1 = \frac{1-\epsilon^{1-p}}{1-p} \, .$$

Pe de altă parte, dacă $p = 1$, avem:

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_\epsilon^1 = -\ln(\epsilon) \, .$$

Trecând la limită pentru $\epsilon \to 0^+$ în relaţii de mai sus, obţinem:

- dacă $p \in [1, \infty)$ avem $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \infty \implies \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ divergentă
- dacă $p \in (0, 1)$ avem $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \implies \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ convergentă

Concluziile exemplului

Fie $a > 0$.

Integrala improprie de speţa I:

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx \text{ este convergentă } \iff p \in (1, \infty)$$

Integrala improprie de speţa II:

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx \text{ este convergentă } \iff p \in (0, 1)$$

Criteriul comparaţiei pentru integrale improprii

Teoremă

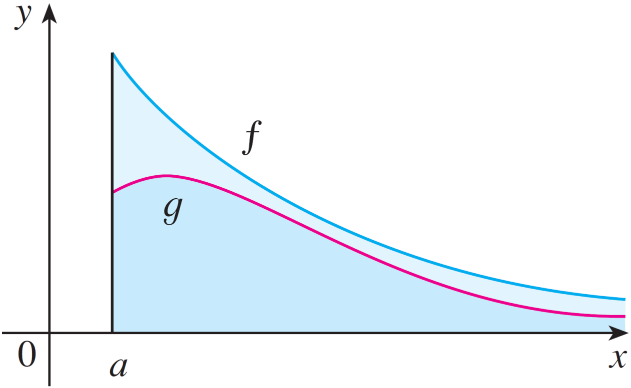
Fie funcţiile f şi g definite pe $[a,\infty)$, integrabile Riemann-Darboux pe orice interval închis şi mărginit de forma $[a,b]$, unde $b>a$, şi satisfăcând inegalităţile:

$$0 \le g(x) \le f(x) \quad , \forall x \ge a$$

- *Dacă* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *este convergentă atunci* $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *este convergentă.*
- *Dacă* $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ *este divergentă atunci* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *este divergentă.*

Remarcă: O teoremă similară are loc pentru integrale improprii de speţa II.

Criteriul comparaţiei pentru integrale improprii



Criteriul comparaţiei pentru integrale improprii

Exemplu. Arătaţi că integrala lui Gauss $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ este convergentă.

Are loc următoarea inegalitate (verificaţi folosind derivate!):

$$e^x \geq x+1 \quad ,\forall\, x \geq 0.$$

Rezultă că:

$$0 \leq e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{x^2+1} \quad ,\forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Următoare integrală de speţa I este convergentă:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

Pe baza criteriului comparaţiei, deducem că $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ este convergentă.

(valoarea ei exactă este $\sqrt{\pi}$, se poate demonstra folosind integrale duble)