10 Polinoame

10.1 Ecuatii de grad ≤ 4

P 1. Rezolvaţi următoarele ecuaţii de grad 3:
a) $x^3 - 6x + 9 = 0$;
b) $x^3 + 12x + 63 = 0$;
c) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$;
d) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$;
e) $x^3 + 18x + 15 = 0$;
f) $x^3 - 6x^2 + 57x - 196 = 0$;
g) $x^3 + 3x - 2i = 0$;
h) $x^3 - 6ix + 4(1 - i) = 0$.

P 2. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $X^3 + pX + q$, arătaţi că

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

P 3. Rezolvaţi următoarele ecuaţii de grad 4:
a) $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$;
b) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x - 15 = 0$;
c) $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$;
d) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$;
e) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$;
f) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 5 = 0$;
g) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 - 8x + 4 = 0$;
h) $x^4 - x^3 + 2x - 1 = 0$.

P 4. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile polinomului de grad 4 $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$, să se determine polinomul g de grad 3 monic, care are rădăcinile

$$y_1 = x_1x_2 + x_3x_4\,, \quad y_2 = x_1x_3 + x_2x_4\,, \quad y_3 = x_1x_4 + x_2x_3\,.$$

10.2 Divizibilitate. Descompuneri în factori

P 5. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât 1 să fie rădăcină dublă a polinomului $P = X^n - aX^{n-1} + aX - 1$.

P 6. Determinaţi cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
a) $X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ şi $X^3 + X^2 - X - 1$;
b) $X^5 + X^4 - X^3 - 2X - 1$ şi $3X^4 + 2X^3 + X^2 + 2x - 2$;
c) $X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$ şi $X^5 + X^2 - X + 1 = 0$.

P 7. Determinaţi restul împărţirii polinomului $X^{2021} - 1$ prin $(X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$.

P 8. Fie $a, b, u, v \in \mathbb{C}$, iar $P \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea că P dă restul u la împărţirea prin $X - a$, respectiv v la împărţirea prin $X - b$. Determinaţi restul împărţirii lui P prin $(X - a)(X - b)$.

P 9. Determinaţi polinomul de grad minim care
a) dă restul $2X$ la împărţirea prin $(X - 1)^2$ şi $3X$ la împărţirea prin $(X - 2)^3$;
b) dă restul X^2+X+1 la împărţirea prin $X^4-2X^3-2X^2+10X-7$ şi $2X^2-3$ la împărţirea prin $X^4-2X^3-3X^2+13X-10$.

P 10. Determinaţi rădăcinile multiple ale polinoamelor:
a) $X^6 - 6X^4 - 4X^3 + 9X^2 + 12X + 4$;
b) $X^5 - 6X^4 + 16X^3 - 24X^2 + 20X - 8$;
c) $X^7 - 3X^6 + 5X^5 - 7X^4 + 7X^3 - 5X^2 + 3X - 1$;
d) $X^8 + 2X^7 + 5X^6 + 6X^5 + 8X^4 + 6X^3 + 5X^2 + 2X + 1$.

P 11. Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom, iar $a, b \in \mathbb{C}$ două rădăcini distincte ale lui. Dacă g şi h sunt câturile împărţirii polinomului f prin $X - a$, respectiv $X - b$, arătaţi că orice rădăcină a lui f diferită de a şi b este rădăcină a polinomului $k = g - h$.

P 12. Determinaţi două rădăcini întregi ale polinomului $f = X^4 - 5X - 6$, după care determinaţi toate rădăcinile lui f.

P 13. Arătaţi că dacă rădăcinile unui polinom f sunt simple, atunci f divide un polinom g dacă şi numai dacă pentru orice $\alpha \in Z(f)$ are loc $g(\alpha) = 0$.

P 14. Determinaţi valorile parametrilor naturali m, n, p astfel încât
a) $(X^2 + X + 1)|(X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2})$;
b) $(X^2 - X + 1)|(X^{3m} - X^{3n+1} + X^{3p+2})$;
c) $(X^4 + X^2 + 1)|(X^{3m} + X^{3n+1} + X^{3p+2})$;
d) $(X^2 + X + 1)|((X + 1)^m + X^m)$.

P 15. Descompuneţi următoarele expresii raţionale în fracţii simple:
a) $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$; b) $\frac{3+x}{(x-1)(x^2+1)}$ c) $\frac{x^2}{x^4-16}$; d) $\frac{x^2}{x^6+27}$; e) $\frac{n!}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$;
f) $\frac{x}{(x^2-1)^2}$; g) $\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}$; h) $\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^3(x-2)}$; i) $\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$; j) $\frac{1}{x(x^2+1)(x^2+4)\dots(x^2+n^2)}$.

P 16. Fie $f(t) = (t - x_1)(t - x_2)\dots(t - x_n)$. Exprimaţi următoarele sume în funcţie de $f(t)$:
a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t-x_i}$; b) $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{t-x_i}$; c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(t-x_i)^2}$.

P 17. Calculaţi următoarele sume, ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f:
a) $\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3}$, unde $f = X^3 - 3X - 1$;
b) $\frac{1}{x_1^2-3x_1+2} + \frac{1}{x_2^2-3x_2+2} + \frac{1}{x_3^2-3x_3+2}$, unde $f = X^3 + X^2 - 4X + 1$;
c) $\frac{1}{x_1^2-2x_1+1} + \frac{1}{x_2^2-2x_2+1} + \frac{1}{x_3^2-2x_3+1}$, unde $f = X^3 + X^2 - 1$.

P 18. Fie A_1, A_2, …, A_n vârfurile unui poligon regulat cu centrul în punctul A_0. Fie, de asemenea z_0, z_1, …, z_n afixele punctelor A_0, A_1, …, A_n. Arătaţi că dacă f este o funcţie polinomială de grad cel mult $n - 1$, atunci

$$f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n) = n \cdot f(z_0).$$

P 19. Rezolvaţi ecuaţia

$$z^3 - (3 + 2i)z^2 + (5 + 7i)z - 6(1 + i) = 0\,,$$

ştiind că admite o rădăcină reală.

‘

10.3 Polinoame cu coeficienţi întregi

P 20. Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că dacă $k \in \mathbb{Z}$ esteo rădăcină a lui f, atunci $k|a_0$.

P 21. Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este o rădăcină a lui f dacă şi numai dacă

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \dots + a_{n-k}p^{n-k}q^k + \dots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Deduceţi că dacă $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ şi $(p, q) = 1$, atunci $p|a_0$ şi $q|a_n$. În particular, dacă polinomul f este monic(i.e., $a_n = 1$), atunci orice rădăcină raţională a sa este întreagă.

P 22. Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Arătaţi că dacă $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ este o rădăcină a lui f, cu $p, q \in \mathbb{Z}^*$, $(p, q) = 1$), atunci

$$(kq - p)|f(k)\,, \quad (\forall)k \in \mathbb{Z}.$$

P 23. Determinaţi rădăcinile raţionale ale polinoamelor:
a) $5X^3 - 4X^2 + 3X + 2$;
b) $6X^3 + 13X^2 - 22X - 8$;
c) $3X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 6X - 4$;
d) $X^4 - X^3 - 32X^2 - 62X - 56$;
e) $4X^3 - 22X^2 + 7X + 15$;
f) $40X^3 + 25X^2 + 9X - 9$;
g) $8X^3 + 20X^2 - 18X - 45$;
h) $6X^4 + X^3 - 66X^2 + 30X + 56$.

P 24. Fie $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$. Dacă există un număr prim p cu proprietatea că $p \nmid a_n$, $p|a_k$, $(\forall)k = \overline{0, n-1}$, $p^2 \nmid a_0$, arătaţi că f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

P 25. Dacă p este un număr prim, arătaţi că polinomul $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X^2 + X + 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

P 26. Fie $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ cu proprietatea că pentru un număr prim p polinomul $\hat{f} = \hat{a_n} X^n + \hat{a_{n-1}} X^{n-1} + \cdots + \hat{a_1} X + \hat{a_0} \in \mathbb{Z}_p[X]$ are acelaşi grad ca f şi este ireductibil în $\mathbb{Z}_p[X]$. Arătaţi că f este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

P 27. Determinaţi toate polinoamele monice ireductibile de grade 2 şi 3 din $\mathbb{Z}_2[X]$, $\mathbb{Z}_3[X]$ şi $\mathbb{Z}_5[X]$.

P 28. Pentru orice polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ notăm cu $c(f)$ cel mai mare divizor comun al coeficienţilor săi. Arătaţi că pentru orice două polinoame $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ are loc egalitatea

$$c(f \cdot g) = c(f) \cdot c(g).$$

P 29. Arătaţi că un polinom $f \in \mathbb{Z}[X]$ ireductibil peste $\mathbb{Z}[X]$ este ireductibil şi peste $\mathbb{Q}[X]$.

10.4 Polinoame cu coeficienţi raţionali

P 30. Fie $a, b, d \in \mathbb{Q}$, cu $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, iar $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom având rădăcina $\alpha = a + b\sqrt{d}$ cu multiplicitatea m. Arătaţi că $\beta = a - b\sqrt{d}$ este de asemenea o rădăcină cu multiplicitatea m a polinomului f.

P 31. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există un polinom ireductibil $f \in \mathbb{Q}[X]$ de grad n.

P 32. Arătaţi că dacă un polinom $f \in \mathbb{Q}[X]$ are rădăcina $\sqrt[3]{2}$, atunci $X^3 - 2 | f$.

10.5 Polinoame cu coeficienţi reali

P 33. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$ un polinom şi $z \in \mathbb{C}$ o rădăcină a sa cu multiplicitatea m. Arătaţi că $\overline{z}$ este de asemenea o rădăcină a polinomului f cu multiplicitatea m.

P 34. Dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie polinomială de grad ≤ 3, arătaţi că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

P 35. a) Arătaţi că polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$, $P = X^4 + 4X^3 - 1$ are exact două rădăcini reale a şi b.
b) Arătaţi că produsul ab al celor două rădăcini reale ale polinomului P este soluţie a ecuaţiei $x^6 + x^4 + 16x^3 - x^2 - 1 = 0$.
c) Determinaţi produsul ab şi scrieţi polinomul P ca produs de două polinoame de grad 2 cu coeficienţi reali.

10.6 Polinoame simetrice

P 36. Exprimaţi următoarele polinoame simetrice în funcţie de polinoamele simetrice fundamentale:
a) $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 - 3X_1X_2X_3$;
b) $\sum\limits_{sym} X_i^2 X_j$;
c) $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 - 2X_1^2X_2^2 - 2X_1^2X_3^2 - 2X_2^2X_3^2$;
d) $\sum\limits_{sym} X_i^2 X_j X_k$;
e) $\sum\limits_{sym} X_i^2 X_j^2 X_k$;
f) $\sum\limits_{sym} X_i^3 X_j X_k$;
g) $\sum\limits_{sym} X_i^3 X_j^2 X_k$;
h) $\sum\limits_{sym} X_i^4 X_j^2 X_k$;
i) $X_1X_2 + X_3X_4)(X_1X_3 + X_2X_4)(X_1X_4 + X_2X_3)$.

P 37. Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, unde $a_3 \neq 0$, scrieţi următoarele expresii în funcţie de coeficienţii polinomului:
a) $a_3^4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$;
b) $a_3^4(x_1^2 - x_2x_3)(x_2^2 - x_1x_3)(x_3^2 - x_1x_2)$;
c) $a_3^4(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2)$;
d) $\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2} + \frac{(x_1-x_3)^2}{x_1x_3} + \frac{(x_2-x_3)^2}{x_2x_3}$.