Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 9

Derivate de ordin superior. Optimizare.

EVA KASLIK, RALUCA MURESAN

Derivate parţiale de ordinul doi

FIe $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcţie derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă x_j, $j = \overline{1, n}$ pe A.

Funcţia f este derivabilă parţial de două ori în a în raport cu fiecare variabilă dacă toate derivatele parţiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sunt derivabile parţial în $a \in A$ în raport cu fiecare variabilă x_k.

Notaţia pentru derivata parţială de ordinul doi a funcţiei f:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)(a) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(a)$$

.

Derivata Fréchet de ordinul doi

Funcţia f este diferenţiabilă de două ori în punctul $a \in A$ dacă derivatele parţiale $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sunt diferenţiabile în a.

Derivata Fréchet de ordinul doi a funcţiei f în punctul a este funcţia $d_a^2 f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dată de formula

$$d_a^2 f(u)(v) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a) u_j v_k \right) e_i$$

unde $u, v \in \mathbb{R}^n$, $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, $i = \overline{1, n}$.

Derivata Fréchet de ordinul doi a funcţiei f în a verifică relaţia

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|d_{a+u} f(v) - d_a f(v) - d_a^2 f(u)(v)\|}{\|u\|} = 0 \quad , \ \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Derivate de ordinul doi pentru funcţii de două variabile

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Derivate parţiale de ordinul doi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Derivata Fréchet de ordinul doi în $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$:

funcţia $d_a^2 f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de

$$d_a^2 f(u)(v) = f_{xx}(a_1, a_2)u_1v_1 + f_{xy}(a_1, a_2)u_1v_2 + f_{yx}(a_1, a_2)u_2v_1 + f_{yy}(a_1, a_2)u_2v_2$$

pentru orice $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplu

Fie funcţia $f(x, y) = xe^{xy}$.

Derivatele parţiale de ordinul întâi sunt:

$$f_x = e^{xy} + xye^{xy} \qquad \text{şi} \qquad f_y = x^2e^{xy}.$$

Derivatele parţiale de ordinul doi sunt:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_x)_x = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy} & \qquad f_{xy} &= (f_x)_y = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} \\ f_{yx} &= (f_y)_x = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} & \qquad f_{yy} &= (f_y)_y = x^3e^{xy} \end{aligned}$$

Derivata Fréchet de ordinul doi în punctul $a = (1, 0)$ este funcţia $d^2_{(1,0)}f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de:

$$\begin{aligned} d^2_{(1,0)}f(u)(v) &= f_{xx}(1,0)u_1v_1 + f_{xy}(1,0)u_1v_2 + f_{yx}(1,0)u_2v_1 + f_{yy}(1,0)u_2v_2 \\ &= 2(u_1v_2 + u_2v_1) + u_2v_2 \end{aligned}$$

pentru orice $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.

Teoreme importante

Teoremă (Teorema derivatelor mixte a lui Schwarz)

Dacă funcţia f este diferenţiabilă de două ori în punctul a, atunci

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}(a) \quad , \forall i = \overline{1,m},\ j,k = \overline{1,n}.$$

Teoremă (Criteriu pentru diferenţiabilitate de ordinul doi)

Dacă derivatele parţiale de ordinul doi $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}$ există într-o vecinătate a punctului a şi sunt continue în a, atunci f este diferenţiabilă de două ori în a.

Derivate parţiale de ordin superior

Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este derivabilă parţial de k-ori în $a \in A$ în raport cu fiecare variabilă dacă

- f este de $(k-1)$-ori derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă într-o vecinătate deschisă a punctului a
- fiecare derivată parţială de ordinul $(k-1)$ este derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă x_{j_k} în a.

Notaţie pentru derivata parţială de ordin k a funcţiei f în punctul a:

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_k} \partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f_i}{\partial x_{j_{k-1}} \cdots \partial x_{j_1}} \right)(a)$$

Diferenţiabilitate de ordin superior

Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă de k-ori în punctul a dacă derivatele sale parţiale de ordin $(k-1)$ sunt diferenţiabile în a.

Derivata Fréchet de ordin k a funcţiei f în a este funcţia $d_a^k f : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dată de

$$d_a^k f(u^1)(u^2)\cdots(u^k) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_k=1}^{n} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_k} \cdots \partial x_{j_1}}(a) \cdot u^1_{j_1} u^2_{j_2} \cdots u^k_{j_k} \right) e_i$$

Derivata Fréchet de ordin k a funcţiei f în a verifică relaţia:

$$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{\|d_{a+u^k}^{k-1} f(u^1)(u^2)\cdots(u^{k-1}) - d_a^{k-1} f(u^1)(u^2)\cdots(u^{k-1}) - d_a^k f(u^1)(u^2)\cdots(u^k)\|}{\|u\|} = 0$$

Rezultate importante

Teoremă (Teorema derivatelor mixte)

Dacă funcţia f este diferenţiabilă de k-ori în punctul a, atunci au loc următoarele relaţii:

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}(a) = \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{\sigma(j_1)} \partial x_{\sigma(j_2)} \cdots \partial x_{\sigma(j_k)}}(a)$$

Teoremă (Criteriu pentru diferenţiabilitatea de ordin k)

Dacă derivatele parţiale de ordin k a funcţiei f există într-o vecinătate a punctului a şi sunt continue în a, atunci f este diferenţiabilă de k-ori în a.

Minime şi maxime

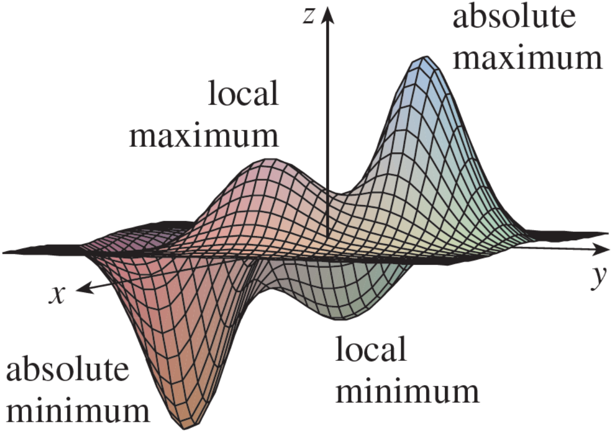
Punctul $a \in A$ este un punct de minim local al funcţiei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ dacă există o vecinătate $V \subset A$ a lui a astfel încât $f(a) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V$.

Punctul $a \in A$ este punct de minim global al funcţiei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ dacă $f(a) \leq f(x)$ pentru orice $x \in A$.

Punctul $a \in A$ este un punct de maxim local al funcţiei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ dacă există o vecinătate $V \subset A$ a lui a astfel încât $f(a) \geq f(x)$ pentru orice $x \in V$.

Punctul $a \in A$ este punct de maxim global al funcţiei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ dacă $f(a) \geq f(x)$ pentru orice $x \in A$.

Minime şi maxime



Condiţii pentru minime şi maxime locale

Condiţie necesară pentru extreme locale:

Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ are o valoare de minim sau maxim local în punctul $a \in A$ şi dacă toate derivatele parţiale ale funcţiei f există în punctul a, atunci

$$\nabla f(a) = 0,$$

adică a este un punct critic (punct staţionar) al funcţiei f.

Condiţii suficiente pentru extreme locale:

Presupunem că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ are derivate parţiale de ordinul doi continue pe mulţimea A şi că a este un punct critic al funcţiei f.

i) Dacă $d_a^2 f(h)(h) \geq 0$ pentru $h \in \mathbb{R}^n$ şi $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \neq 0$, atunci a este un punct de minim local al funcţiei f;

ii) Dacă $d_a^2 f(h)(h) \leq 0$ pentru $h \in \mathbb{R}^n$ şi $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right) \neq 0$, atunci a este un punct de maxim local al funcţiei f.

Testul derivatelor de ordinul doi pentru funcţii de două variabile

Fie $a = (a_1, a_2) \in A$ un punct critic al funcţiei $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Considerăm matricea Hessiană:

$$H_{(a_1,a_2)}f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a_1, a_2) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2) \end{pmatrix}$$

şi minorii ei principali:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) \qquad \text{şi} \qquad \Delta_2 = \det\left(H_{(a_1,a_2)}f\right)$$

- dacă $\Delta_1 > 0$ şi $\Delta_2 > 0$ atunci $a = (a_1, a_2)$ este punct de minim local al lui f;
- dacă $\Delta_1 < 0$ şi $\Delta_2 > 0$ atunci $a = (a_1, a_2)$ este punct de maxim local al lui f;
- dacă $\Delta_2 < 0$ atunci $a = (a_1, a_2)$ este un punct şa al funcţiei f;
- dacă $\Delta_2 = 0$ atunci testul este neconcludent.

Exemple

Exemplul 1.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

Derivate parţiale:

$$f_x = 2x - 2 \qquad f_y = 2y - 6$$

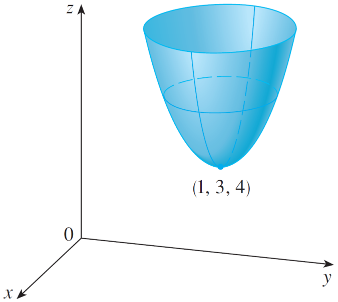
$\Longrightarrow$ punct critic: $(1,3)$.

Matricea Hessiană în $(1,3)$:

$$H_{(1,3)}f = \begin{pmatrix} f_{xx}(1,3) & f_{xy}(1,3) \\ f_{yx}(1,3) & f_{yy}(1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Deoarece $\Delta_1 = 2 > 0$ şi $\Delta_2 = 4 > 0$ deducem că $(1,3)$ este punct de minim a funcţiei f.

Valoarea minimă: $f(1,3) = 4$



Exemple

Exemplul 2.

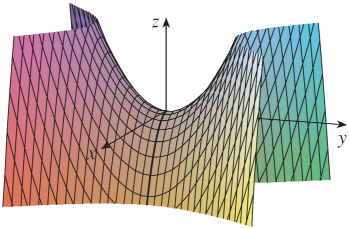
$$f(x,y) = y^2 - x^2$$

Derivate parţiale:

$$f_x = -2x \qquad f_y = 2y$$

$\implies$ punct critic: $(0,0)$.

Matricea Hessiană în $(0,0)$:



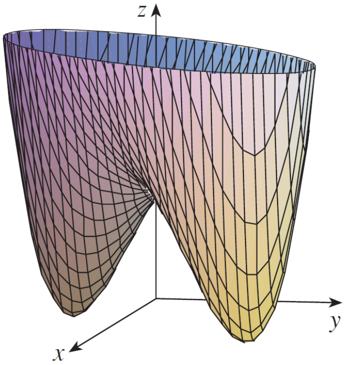
$$H_{(0,0)}f = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_2 = -4 < 0 \implies (0,0)$ este un punct şa.

Exemple

Exemplul 3.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$



Derivate parţiale:

$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$

$\Longrightarrow$ puncte critice: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Matricea Hessiană:

$$H_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $\Delta_1 = 12x^2$ şi $\Delta_2 = 144x^2y^2 - 16$

- $(0,0)$ este punct şa ($\Delta_2 = -16 < 0$)
- $(1,1)$ şi $(-1,-1)$ sunt puncte de minim local ($\Delta_1 = 12 > 0$ şi $\Delta_2 = 128 > 0$)

Multiplicatorii Lagrange şi optimizarea cu constrângeri

Fie o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, unde A este o mulţime deschisă şi fie mulţimea $\Gamma \subset A$, definită prin:

$$\Gamma = \{x \in A \ : \ g_i(x) = 0, \ i = \overline{1,p}\} \qquad \text{unde } g_i : A \to \mathbb{R}^1 \text{ şi } p < n$$

Ecuaţiile $g_i(x) = 0$ se numesc constrângeri.

Dacă restricţia funcţiei f la mulţimea Γ, adică $f\,|_\Gamma$, are un punct de extrem $a \in \Gamma$, atunci acesta se numeşte punct de extrem condiţionat.

Metoda multiplicatorilor Lagrange:

Presupunem că funcţiile f şi g_i, $i = \overline{1,p}$ au derivate parţiale continue într-o vecinătate a punctului de extrem condiţionat $a \in \Gamma$ şi vectorii gradient $\nabla g_i(a)$, $i = \overline{1,p}$ sunt vectori liniar independenţi în $\mathbb{R}^n$.

Atunci există constantele $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ astfel ca

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla g_i(a)$$

Caz special: două variabile şi o constrângere

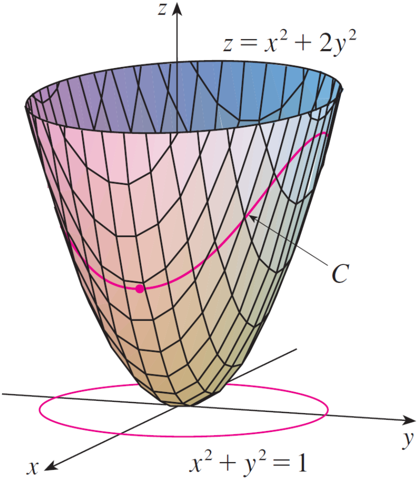
Dacă dorim să maximizăm (minimizăm) funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ în raport cu constrângerea $g(x, y) = 0$, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii

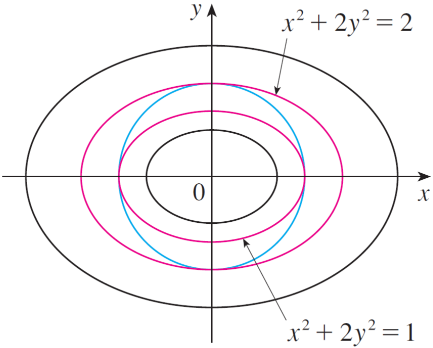
$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{cases}$$

în raport cu variabilele x, y, λ. Punctele (x, y) pe care le găsim astfel sunt posibile puncte de extrem condiţionat ale funcţiei f în raport cu constrângerea $g(x, y) = 0$.

Exemplu

Găsiţi valorile extreme ale funcţiei $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ pe cercul $x^2 + y^2 = 1$.





Exemplu

Găsiţi valorile extreme ale funcţiei $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ pe cercul $x^2 + y^2 = 1$.

constrângere: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x = \lambda \cdot 2x \\ 4y = \lambda \cdot 2y \end{cases}$$

- dacă $x = 0$, atunci $y = \pm 1$;
- dacă $\lambda = 1$, atunci $y = 0$ şi $x = \pm 1$.

$\Longrightarrow$ posibile puncte de extrem: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ şi $(0,-1)$.

Calculând f în fiecare din aceste puncte, obţinem valoarea minimă şi maximă a funcţiei pe cercul $x^2 + y^2 = 1$:

$$f(\pm 1, 0) = \underbrace{1}_{\text{min}} \quad \text{şi} \quad f(0, \pm 1) = \underbrace{2}_{\text{max}}.$$

Caz special: trei variabile şi două constrângeri

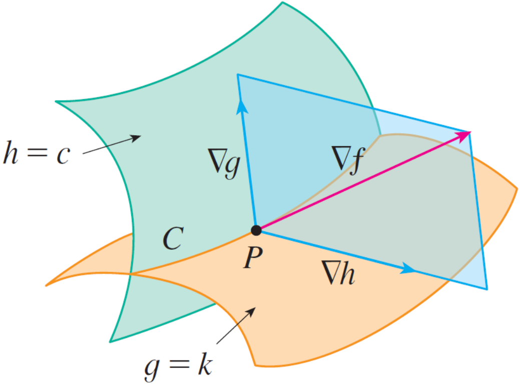
Dacă dorim să maximizăm (minimizăm) funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ în raport cu constrângerile $g(x, y, z) = 0$ şi $h(x, y, z) = 0$, trebuie să rezolvăm următorul sistem:

$$\begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lambda_1 \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \lambda_2 \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lambda_1 \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \lambda_2 \dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lambda_1 \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) + \lambda_2 \dfrac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) \end{cases}$$

în raport cu variabilele $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$. Punctele (x, y, z) găsite astfel sunt posibile puncte de extrem local ale funcţiei f în raport cu cele două constrângeri.

Caz special: trei variabile şi două constrângeri

∇f este în planul determinat de ∇g şi ∇h:



Exerciţiu. Găsiţi aria maximă a unui triunghi dreptunghic de perimetru P fixat.