9 Numere complexe

9.1 Forma algebrică. Forma trigonometrică

P 1. Fie $z, w \in \mathbb{C}$ două numere complexe de modul 1. Arătaţi că

$$\left| \frac{1 - \overline{z} \cdot w}{z - w} \right| = 1.$$

P 2. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ trei numere complexe de modul 1 cu propietatea că

$$z_1 + z_2 + z_3 \neq 0 \qquad \text{şi} \qquad z_1^2 + z^2 + z^3 = 0.$$

Determinaţi $|z_1 + z_2 + z_3|$.

P 3. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ numere complexe cu proprietatea că

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1 + z_2 + z_3|\,.$$

Arătaţi că două dintre numere sunt opuse.

P 4. Arătaţi că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc egalităţile

$$\cos(n\alpha) = C_n^0 \cos^n(\alpha) - C_n^2 \cos^{n-2}(\alpha)\sin^2(\alpha) + C_n^4 \cos^{n-4}(\alpha)\sin^4(\alpha) - \cdots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^{2k} \cos^{n-2k}(\alpha)\sin^{2k}(\alpha)\,,$$

respectiv

$$\sin(n\alpha) = C_n^1 \cos^{n-1}(\alpha)\sin(\alpha) - C_n^3 \cos^{n-3}(\alpha)\sin^3(\alpha) + C_n^5 \cos^{n-5}(\alpha)\sin^5(\alpha) - \cdots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k C_n^{2k+1} \cos^{n-1-2k}(\alpha)\sin^{2k+1}(\alpha)\,.$$

P 5. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există polinoamele $T_n, U_n \in \mathbb{Z}[X]$ cu $grad(T_n) = n$, respectiv $grad(U_n) = n - 1$, cuproca pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos(n\alpha) = T_n(\cos(\alpha)) \qquad \text{şi} \qquad \sin(n\alpha) = \sin(\alpha) \cdot U_n(\cos(\alpha))\,.$$

Arătaţi că aceste polinoame verifică şi identităţile

$$\cosh(n \cdot x) = T_n(\cosh(x)) \qquad \text{şi} \qquad \sinh(n \cdot x) = \sinh(x) \cdot U_n(\cosh(x))\,,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

P 6. Arătaţi că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$ au loc egalităţile

$$2^{2n} \cos^{2n}(\alpha) = C_{2n}^n + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos(2(n-k)\alpha)\,,$$

$$2^{2n} \cos^{2n+1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k \cos((2n-2k+1)\alpha)\,,$$

$$2^{2n} \sin^{2n}(\alpha) = C_{2n}^n + 2\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} C_{2n}^k \cos(2(n-k)\alpha)\,,$$

$$2^{2n} \sin^{2n+1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k \sin((2n-2k+1)\alpha)\,.$$

P 7. Calculaţi pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$ sumele

$$S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\alpha) \qquad \text{şi} \qquad S_2(n) \sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha)\,.$$

P 8. Calculaţi pentru $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m < n$ şi $0 \leq r < m$ suma

$$S_{n,m,r} = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-r}{m} \rfloor} C_n^{mq+r}\,.$$

9.2 Rădăcini ale unităţii

P 9. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, şi orice $w \in \mathbb{C}^*$, cele n rădăcini ale ecuaţiei binome $z^n = w$ sunt afixele vârfurilor unui poligon regulat cu n laturi cu centrul în origine.

P 10. Determinaţi toate rădăcinile unităţii de ordine a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

P 11. Determinaţi toate rădăcinile primitive ale unităţii de ordine a) 2; b) 3; c) 4; d) 6; e) 8; f) 12; g) 24.

P 12. Care sunt ordinele rădăcinilor
a) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{180} + i\sin\frac{2k\pi}{180}$, pentru $k \in \{27, 99, 137\}$;
b) $z_k = \cos\frac{2k\pi}{144} + i\sin\frac{2k\pi}{144}$, pentru $k \in \{10, 35, 60\}$.

P 13. Determinaţi toate elementele de ordin 7 dintre rădăcinile unităţii de ordin 28.

P 14. Determinaţi polinoamele ciclotomice Φ_n pentru fiecare $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 30, 105\}$.

P 15. Dacă ε este o rădăcină primitivă de ordin $2n$ a unităţii, calculaţi suma $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1}$.

P 16. Determinaţi suma tuturor rădăcinilor de ordin n ale unităţii.

P 17. Determinaţi suma puterilor k ale tuturor rădăcinilor de ordinul n ale unităţii, unde $k \in \mathbb{Z}$.

P 18. Dacă $U_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}$ este mulţimea tuturor rădăcinilor de ordinul n ale unităţii, calculaţi suma $\sum\limits_{z \in U_n} (x+z)^n$.

P 19. Dacă $\varepsilon \in U_n$, calculaţi $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \cdots + n\varepsilon^{n-1}$.

P 20. Dacă $\varepsilon \in U_n$, calculaţi $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \cdots + n^2\varepsilon^{n-1}$.

P 21. Determinaţi suma tuturor rădăcinilor primitive de ordinul n ale unităţii de ordine $n \in \{15, 24, 30\}$.

P 22. Determinaţi expresiile algebrice ale rădăcinilor de ordinul 5 ale unităţii.

P 23. Determinaţi $\sin 18^\circ$ şi $\cos 18^\circ$.

P 24. Descompuneţi $X^n - 1$ în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

P 25. Arătaţi că $a^n - b^n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} (a - b\varepsilon_k)$, unde $\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

P 26. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$ sunt coprime, atunci produsul oricărei rădăcini primitive de ordin m a unităţii cu orice rădăcină primitivă de ordin n este o rădăcină primitivă de ordin mn a unităţii şi viceversa.

P 27. Dacă $\varphi(n)$ este numărul rădăcinilor primitive de ordin n ale unităţii, arătaţi că $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, pentru orice numere coprime m, n.

P 28. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt numere prime distincte, atunci

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

P 29. Fie $\mu(n)$ suma tuturor rădăcinilor primitive de ordin n ale unităţii. Arătaţi că

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } n \text{ este divizibil prin pătratul unui număr prim;} \\ (-1)^k & \text{, dacă } n = p_1 p_2 \ldots p_k, \text{ produsul a } k \text{ numere prime distincte.} \end{cases}$$

P 30. Arătaţi că $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

P 31. Arătaţi că

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d \,.$$

P 32. Arătaţi că

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

P 33. Arătaţi că $\Phi_n = \prod\limits_{d|n} \left(X^d - 1\right)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$.

9.3 Aplicaţii ale numerelor complexe în geometria plană

9.3.1 Câteva proprietăţi şi formule utile

Vom folosi convenţia ca afixul unui punct să fie notat cu litera mică corespunzătoare notaţiei punctului(care va fi notat cu literă mare).

Propoziţie 9.1. Au loc următoarele proprietăţi:
1) Distanţa dintre punctele A şi B este $|a-b|$.
2) Măsura în radiani a unghiului orientat $\widehat{BAC}$ este $arg(\frac{c-a}{b-a})$.
3) A, B, C sunt coliniare $\Longleftrightarrow \frac{\overline{a}-\overline{b}}{a-b} = \frac{\overline{a}-\overline{c}}{a-c}$.
4) Ecuaţia dreptei AB este $\overline{z} = \frac{\overline{a}-\overline{b}}{a-b} \cdot z + \frac{a\overline{b}-b\overline{a}}{a-b}$.
5) Ecuaţia unei drepte d are forma $\overline{z} = \lambda \cdot z + \nu$, cu $|\lambda| = 1$, $\nu + \lambda\overline{\nu} = 0$, şi $arg(\lambda) = -2 \cdot \mu(\widehat{Ox, d})$, unde $\mu(\widehat{Ox, d})$ este unghiul orientat dintre dreapta numerelor reale şi dreapta d.
6) Dacă d_1, d_2 au ecuaţiile $\overline{z} = \lambda_1 \cdot z + \nu_1$, respectiv $\overline{z} = \lambda_2 \cdot z + \nu_2$, cu $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, atunci $d_1 \parallel d_2 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.
$AB \parallel CD \Longleftrightarrow \frac{\overline{a}-\overline{b}}{a-b} = \frac{\overline{c}-\overline{d}}{c-d}$.
7) Dacă d_1, d_2 au ecuaţiile $\overline{z} = \lambda_1 \cdot z + \nu_1$, respectiv $\overline{z} = \lambda_2 \cdot z + \nu_2$, cu $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, atunci $d_1 \perp d_2 \Longleftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$.
$AB \perp CD \Longleftrightarrow \frac{\overline{a}-\overline{b}}{a-b} + \frac{\overline{c}-\overline{d}}{c-d} = 0$.
8) Raportul în care un punct $M \in AB$ împarte segmentul orientat $\overline{AB}$ este $r = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{m-a}{b-m}$.
9) Afixul punctului $M \in AB$ care împarte $\overline{AB}$ în raportul $r \neq -1$ este $m = \frac{a+rb}{1+r}$.
10) A, B, C, D sunt conciclice $\Longleftrightarrow \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$.
11) Triunghiurile ABC şi KLM sunt asemenea $\Longleftrightarrow \frac{a-b}{a-c} = \frac{k-l}{k-m}$(dacă triunghiurile au aceeaşi orientare), respectiv $\frac{a-b}{a-c} = \frac{\overline{k}-\overline{l}}{\overline{k}-\overline{m}}$(dacă triunghiurile au orientări contrare).
12) Afixul centrului de greutate G al unui triunghi ABC este $g = \frac{a+b+c}{3}$.
13) Afixele ortocentrului H şi al centrului O al cercului circumscris unui triunghi ABC verifică relaţia $h + 2o = a + b + c$.
14) Aria orientată a unui triunghi ABC este dată de

$$\overline{aria[ABC]} = \frac{1}{4i}\left(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a - a\overline{b} - b\overline{c} - c\overline{a}\right) = -\frac{1}{4i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & \overline{a} \\ 1 & b & \overline{b} \\ 1 & c & \overline{c} \end{vmatrix}.$$

Propoziţie 9.2. Dacă A, B, C, D sunt puncte de pe cercul unitate, atunci
1) Ecuaţia dreptei AB este $\overline{z} = -\overline{ab} \cdot z + \overline{a} + \overline{b}$.
Tangenta în A la cercul unitate are ecuaţia $\overline{z} = -\overline{a^2} \cdot z + 2\overline{a}$.
2) Ortocentrul H al triunghiului ABC are afixul $h = a + b + c$.
3) Intersecţia dreptelor AB şi CD are afixul $p = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.
Intersecţia tangentelor în A şi B la cercul unitate are afixul $p = \frac{2ab}{a+b}$.

9.3.2 Probleme

P 34. Dacă $ABCD$ este un patrulater oarecare, atunci $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$, cu egalitate dacă şi numai dacă ABCD este inscriptibil.

P 35. Dacă $A_1A_2\ldots A_n$ este un poligon regulat înscris într-un cerc de centru O şi de rază R, atunci pentru orice punct M din plan are loc egalitatea $\sum\limits_{k=1}^{n} MA_k^2 = n(R^2 + OM^2)$.

P 36. Dacă $A_1A_2\ldots A_n$ este un poligon oarecare cu centrul de greutate G, atunci pentru orice punct M din plan are loc egalitatea $n^2MG^2 = n\sum\limits_{i=1}^{n} MA_i^2 - \sum\limits_{1\leq i<j\leq n} A_iA_j^2$.

P 37. Un triunghi ABC este echilateral dacă şi numai dacă are loc una dintre următoarele relaţii echivalente:
a) $|a-b| = |a-c| = |b-c|$.
b) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
c) $(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega) = 0$, unde ω este o rădăcină cubică a unităţii.

P 38. Dacă OAB, OCD, OEF sunt triunghiuri echilaterale cu aceeaşi orientare, iar M, N, P sunt mijloacele segmentelor $[BC]$, $[DE]$, $[FA]$, atunci triunghiul MNP este echilateral.

P 39. Pe laturile triunghiului ABC se construiesc în exterior(sau în interior) triunghiurile echilaterale BCM, CAN, ABP, cu centrele de greutate G_1, G_2, G_3. Arătaţi că triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral.

P 40. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, iar $H_, H_2, H_3, H_4$ ortocentrele triunghiurilor BCD, CDA, DAB, ABC. Arătaţi că patrulaterul $H_1H_2H_3H_4$ este congruent cu $ABCD$.

P 41. Fie $ABCD$ un pătrat şi M un punct în interiorul pătratului $ABCD$ cu proprietatea că $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{MBA}) = 15°$. Arătaţi că triunghiul MCD este echilateral.

P 42. Dacă a, b, c sunt numere complexe distincte cu $|a| = |b| = |c| = R$, atunci $min_{t\in\mathbb{R}}|tb + (1-t)c - a| = \frac{|a-b|\cdot|a-c|}{2R}$.

P 43. Fie ABC un triunghi, $D \in [AB]$ mijlocul laturii $[AB]$, $P \in Int(ABC)$, cu proprietatea că $\widehat{PAC} \equiv \widehat{PBC}$, iar $M \in [BC]$ şi $N \in [AC]$ proiecţiile punctului P pe laturile $[BC]$ şi $[AC]$. Arătaţi că $[DM] \equiv [DN]$.

P 44. Fie ABC un triunghi, iar $K, L, M \in \mathcal{P}$, astfel încât KBC, LCA şi MAB sunt asemenea şi la fel orientate. Arătaţi că triunghiurile ABC şi KLM au acelaşi centru de greutate.

P 45. Fie ABC un triunghi. În exteriorul triunghiului se construiesc triunghiurile BCP, CAQ şi ABR, astfel încât $m(\widehat{ABR}) = m(\widehat{BAR}) = 15°$, $m(\widehat{CAQ}) = m(\widehat{CBP}) = 45°$, $m(\widehat{ACQ}) = m(\widehat{BCP}) = 30°$. Arătaţi că $[RP] \equiv [RQ]$ şi $RP \perp RQ$.

P 46. Să se determine afixul proiecţiei unui punct P de afix z pe o dreaptă d de ecuaţie $d: \overline{z} = \lambda \cdot z + \nu$, unde $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ cu $|\lambda| = 1$ şi $\nu + \lambda\overline{\nu} = 0$. Determinaţi, de asemenea, şi distanţa $dist(P, d)$.

P 47. Fie ABC un triunghi, $[AD]$ înălţimea din A, iar $M \in [AD]$. Arătaţi că proiecţiile punctului D pe AB, AC, BM, CM sunt patru puncte concilice.

P 48. Fie ABC un triunghi, iar $M, N \in BC$, astfel încât $[AM]$ şi $[AN]$ să fie două ceviene izogonale. Arătaţi că

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 .$$

P 49. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu diagonalele AC şi BD perpendiculare, iar $E \in AC \cap BD$. Arătaţi că simetricele punctului E faţă de laturile patrulaterului sunt patru puncte concilice.

P 50. Fie ABC un triunghi. Arătaţi că tangentele în B şi C la cercul circumscris triunghiului se intersectează pe simediana vârfului A.

P 51. Fie ABC un triunghi, H ortocentrul său, iar M un punct de pe cercul circumscris triunghiului ABC. Arătaţi că ortocentrul H şi simetricele punctului M faţă de laturile triunghiului sunt patru puncte coliniare.

P 52. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, $E \in AC \cap BD$, $F \in AD \cap BC$, iar M schi N mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[CD]$. Arătaţi că

$$\frac{MN}{EF} = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB}\right| .$$

P 53. Fie $ABCD$ un patrulater circumscriptibil, iar M, N, P, Q punctele de tangenţă ale laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ cu cercul înscris. Arătaţi că dreptele AC, BD, MP şi NQ sunt concurente.

P 54. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc cu centrul O, iar $E \in AB \cap CD$, $F \in AD \cap BC$ şi $G \in AC \cap BD$. Arătaţi că O este ortocentrul triunghiului EFG.

P 55. Fie $ABCDEF$ un hexagon inscriptibil, iar $K \in AB \cap DE$, $L \in BC \cap EF$, $M \in CD \cap FA$. Arătaţi că punctele K, L şi M sunt coliniare.

P 56. Fie ABC un triunghi, iar $M, N, P \in Int(ABC)$, cu proprietatea că $m(\widehat{PAB}) = m(\widehat{PAN}) = m(\widehat{NAC}) = \frac{1}{3} \cdot m(\hat{A})$, $m(\widehat{PBA}) = m(\widehat{PBM}) = m(\widehat{MBC}) = \frac{1}{3} \cdot m(\hat{B})$, $m(\widehat{MCB}) = m(\widehat{MCN}) = m(\widehat{NCA}) = \frac{1}{3} \cdot m(\widehat{C})$. Arătaţi că triunghiul MNP este echilateral.

P 57. Fie M un punct interior pătratului $ABCD$, iar A_1, B_1, C_1, D_1 punctele în care dreptele AM, BM, CM, respectiv DM intersectează a doua oară cercul circumscris pătratului. Arătaţi că

$$A_1B_1 \cdot C_1D_1 = A_1D_1 \cdot B_1C_1.$$