Curs 3:

Analiza eficienței algoritmilor (I)

Structura

- In ce constă analiza eficienței algoritmilor ?
- Cum se poate măsura eficiența algoritmilor ?
- Exemple
- Analiza în cazul cel mai favorabil, în cazul cel mai defavorabil și in cazul mediu

In ce constă analiza eficienței algoritmilor?

Analiza eficienței algoritmilor înseamnă:

estimarea volumului de resurse de calcul necesare execuției algoritmilor

Observatie: uneori se folosește termenul de analiză a complexității

Utilitate: analiza eficienței este utilă pentru a compara algoritmii între ei și pentru a obține informații privind resursele de calcul necesare pentru execuția algoritmilor

In ce constă analiza eficienței algoritmilor?

Resurse de calcul:

- Spațiu de memorie = spațiul necesar stocării datelor prelucrate de către algoritm

- Timp de execuție = timp necesar execuției prelucrărilor din cadrul algoritmului

Algoritm eficient: algoritm care necesită un volum rezonabil de resurse de calcul

Dacă un algoritm utilizează mai puține resurse de calcul decât un alt algoritm atunci este considerat mai eficient

In ce constă analiza eficientei algoritmilor?

Există două tipuri de eficiență

- Eficiența în raport cu spațiul de memorie = se referă la spațiul de memorie necesar stocării tuturor datelor prelucrate de către algoritm

- Eficiența în raport cu timpul de execuție = se referă la timpul necesar execuției prelucrărilor din algoritm

Ambele tipuri de analiză a eficienței algoritmilor se bazează pe următoarea ipoteză:

volumul resurselor de calcul necesare depinde de volumul și/sau de caracteristicile datelor de intrare => dimensiunea problemei

Scopul analizei eficienței este să răspundă la întrebarea:

Cum depinde volumul resurselor necesare de dimensiunea problemei ?

Cum se poate determina dimensiunea problemei ?

... de regulă foarte simplu pornind de la enunțul problemei și de la proprietățile datelor de intrare

Dimensiunea problemei = volumul de memorie necesar pentru a stoca toate datele de intrare ale problemei

Dimensiunea problemei este exprimată în una dintre următoarele variante:

- numărul de componente (valori reale, valori întregi, caractere etc) ale datelor de intrare
- numărul de biți necesari stocării datelor de intrare

Alegerea se face în funcție de nivelul la care se fac prelucrările ...

Cum se poate determina dimensiunea problemei ?

Exemple:

1. Determinarea minimului unui tablou x[1..n]

   Dimensiunea problemei: n

2. Calculul valorii unui polinom de ordin n

   Dimensiunea problemei: n

   Obs: numărul coeficienților este de fapt n+1 iar numărul datelor de intrare este n+2 (inclusiv valoarea nedeterminatei din polinom)

3. Calculul sumei a două matrici cu m linii și n coloane

   Dimensiunea problemei: (m,n) sau mn

4. Suma elementelor de pe diagonala unei matrici pătratice (n linii și n coloane) **Dimensiunea problemei: n**

5. Verificarea primalității unui număr n

   Dimensiunea problemei: n sau $\log_2 n$

   Obs: numărul de biți necesari stocării valorii n este de fapt $[\log_2 n]+1$ ([..] reprezintă partea întreagă inferioară)

Structura

- In ce constă analiza eficienței algoritmilor ?
- Cum se poate măsura eficiența algoritmilor ?
- Exemple
- Analiza în cazul cel mai favorabil, în cazul cel mai defavorabil și în cazul mediu

Cum se poate măsura eficiența algoritmilor ?

In continuare ne vom referi doar la analiza eficienței din punctul de vedere al timpului de execuție.

Pentru estimarea (teoretică) a timpului de execuție este necesar să se stabilească:

- Un model de calcul
- O unitate de măsură a timpului de execuție

Cum se poate măsura eficiența algoritmilor ?

Model de calcul: mașina cu acces aleator (Random Access Machine = RAM)

Caracteristici (ipoteze simplificatoare):

- Toate prelucrările sunt executate secvențial
  (nu există paralelism în execuția algoritmului)

- Timpul de execuție al unei prelucrari elementare nu depinde de valorile operanzilor
  (timpul de execuție necesar pentru a calcula 1+2 nu diferă de timpul de execuție necesar pentru 12433+4567)

- Timpul necesar accesării datelor nu depinde de locația datelor în memorie (nu este diferență între timpul necesar prelucrării primului element al unui tablou și cel al prelucrării ultimului element) – asupra acestei restricții se va reveni când se va discuta despre analiza prelucrărilor efectuate asupra diferitelor structuri de date (în contextul analizei amortizate)

Cum se poate măsura eficiența algoritmilor ?

Unitate de măsură = timpul necesar execuției unei prelucrări elementare (prelucrare de bază)

Operații elementare (de bază):

- Asignarea unei valori
- Operații aritmetice (adunare, scădere, înmulțire, împărțire)
- Comparații
- Operații logice

Timp de execuție al algoritmului = numărul de operații elementare executate

Obs. Estimarea timpului de execuție are ca scop determinarea dependenței dintre numărul de operații elementare executate și dimensiunea problemei

Structura

- In ce constă analiza eficienței algoritmilor ?
- Cum se poate măsura eficiența algoritmilor ?
- Exemple
- Analiza în cazul cel mai favorabil, în cazul cel mai defavorabil și in cazul mediu

Exemplu 1 (calcul suma)

Date de intrare : x[1..n], n>=1

Dim. problema: n

Rezultat: S=x[1]+x[2]+…+x[n]

Algoritm:

Sum(x[1..n])

1: S←0

2: i ← 0

3: WHILE i<n DO

4: i ← i+1

5: S ← S+x[i]

6: ENDWHILE

7: RETURN S

Tabel de costuri:

Operație	Cost	Nr. repetări
1	c1	1
2	c2	1
3	c3	n+1
4	c4	n
5	c5	n

Timp de execuție:

T(n)=(c3+c4+c5)n+(c1+c2+c3)= a*n +b

Obs:

1. unele dintre costuri sunt identice (c1=c2), iar altele pot fi considerate diferite (de exemplu c5>c1)
2. este necesară o analiză atât de detaliată? - în general nu, astfel că se introduc ipoteze simplificatoare

Exemplu 1 (calcul suma)

Observații:

- Varianta cea mai simplă este să se considere toate prelucrările elementare ca având același cost
- Dacă în exemplul anterior se consideră că toate operațiile elementare au cost unitar atunci se obtine următoarea estimare pentru timpul de execuție: $T(n)=3(n+1)$

- Constantele ce intervin în expresia timpului de execuție nu sunt foarte importante. Elementul important este faptul că timpul de execuție depinde liniar de dimensiunea problemei.

- Algoritmul anterior este echivalent cu:

  $S \leftarrow 0$

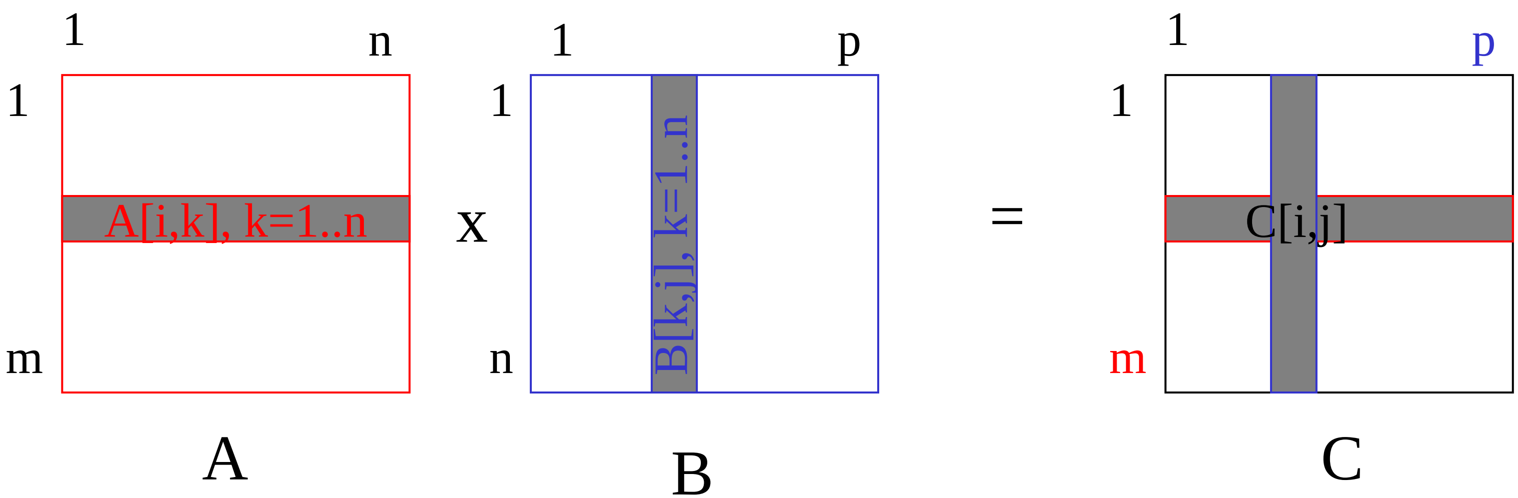
  FOR $i \leftarrow 1,n$ DO $S \leftarrow S+x[i]$ ENDFOR

Se observă că gestiunea contorului ciclului FOR implică execuția a $2(n+1)$ operații; celelalte $(n+1)$ operații corespund calculului sumei (inițializarea lui S și actualizarea de la fiecare repetare a corpului ciclului)

Exemplu 2 (produs matrici)

Date de intrare: A_{m*n}, B_{n*p} Rezultat: C=A*B

Dimensiunea problemei: (m,n,p)



$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$$

C[i,j]=A[i,1]*B[1,j]+A[i,2]*B[2,j]+…+A[i,n]*B[n,j], i=1..m, j=1..p

Exemplu 2 (produs matrici)

Idee de bază: pentru fiecare i=1..m și j=1..p se calculează suma după k

Algoritm:

```
Produs(A[1..m,1..n],B[1..n,1..p])
1:  FOR i ← 1,m DO
2:    FOR j ← 1,p DO
3:       C[i,j] ← 0
4:       FOR k ← 1,n DO
5:           C[i,j] ← C[i,j]+A[i,k]*B[k,j]
6:        ENDFOR
7:    ENDFOR
8:  ENDFOR
9: RETURN C[1..m,1..p]
```

Tabel de costuri

Op.	Cost	Rep.	Total
1	2(m+1)	1	2(m+1)
2	2(p+1)	m	2m(p+1)
3	1	mp	mp
4	2(n+1)	mp	2mp(n+1)
5	2	mpn	2mnp

T(m,n,p)=4mnp+5mp+4m+2

Exemplu 2 (produs matrici)

Obs: De regulă nu este necesar să se completeze întreg tabelul de costuri ci este suficient să se contorizeze doar operația dominantă

Operație dominantă: cea mai frecventă (costisitoare) operație

Algoritm:

```
Produs(A[1..m,1..n],B[1..n,1..p])
FOR i ← 1,m DO
  FOR j ← 1,p DO
      C[i,j] ← 0
      FOR k ← 1,n DO
          C[i,j] ← C[i,j]+A[i,k]*B[k,j]
      ENDFOR
   ENDFOR
ENDFOR
RETURN C[1..m,1..p]
```

Estimare timp de execuție:

$T(m,n,p)=mnp$

Exemplu 3 (determinare minim)

Date de intrare: x[1..n], n>=1   Rezultat: m=min(x[1..n])

Dimensiunea problemei: n

Algoritm:

```
Minim(x[1..n])
1:  m ← x[1]
2:   FOR i ← 2,n DO
3:       IF x[i]<m THEN
4:                       m ← x[i]
5:       ENDIF
6:   ENDFOR
7:RETURN m
```

Tabel de costuri:

Op.	Cost	Rep.	Total
1	1	1	1
2	2n	1	2n
3	1	n-1	n-1
4	1	t(n)	t(n)

T(n)=3n+t(n)

t(n)=nr de modificări ale variabilei m (depinde de modul în care sunt aranjate elementele tabloului)

Obs: Timpul de execuție depinde nu doar de dimensiunea pb. ci și de proprietățile datelor de intrare

Exemplu 3 (determinare minim)

Dacă timpul de execuție depinde de proprietățile datelor de intrare atunci trebuie analizate cel puțin cazurile extreme:

- Cel mai favorabil caz: $x[1]<=x[i], i=1..n$ => $t(n)=0$ => $T(n)=3n$
- Cel mai defavorabil caz

  $x[1]>x[2]>\ldots>x[n])$=>$t(n)=n-1$=> $T(n)=4n-1$

Rezultă că: $3n<=T(n)<=4n-1$

Atât limita inferioară cât și cea superioară depind liniar de dimesiunea problemei

Varianta de analiză ce ia în calcul doar operația dominantă, adică cea de comparare ($x[i]<m$), conduce la

$$T(n) = n-1$$

(indiferent de poziția pe care se află valoarea minimă trebuie analizate toate elementele lui x)

Algoritm:

```
Minim(x[1..n])
m ← x[1]
  FOR i ← 2,n DO
     IF x[i]<m THEN
                   m ← x[i]
     ENDIF
  ENDFOR
RETURN m
```

Exemplu 4 (căutare secvențială)

Date de intrare: x[1..n], n>=1, v o valoare

Rezultat: variabila logică "gasit" conține valoarea de adevăr a afirmației "*valoarea v este în tabloul x[1..n]*"

Dimensiunea problemei: n

Algoritm (căutare secvențială):

```
caut(x[1..n],v)
1:  gasit ← False
2:  i ← 1
3:  WHILE (gasit==False) AND (i<=n) DO
4:      IF x[i]==v                      //t1(n)
5:          THEN gasit ← True           //t2(n)
6:          ELSE  i ← i+1               //t3(n)
7:      ENDIF
8:  ENDWHILE
9: RETURN gasit
```

Tabel de costuri

Op.	Cost
1	1
2	1
3	t1(n)+1
4	t1(n)
5	t2(n)
6	t3(n)

Exemplu 4 (căutare secvențială)

Timpul de execuție depinde de proprietățile tabloului x[1..n].

Caz 1: valoarea v aparține tabloului (considerăm k cel mai mic indice cu proprietatea că x[k]= v)

Caz 2: valoarea v nu se află în tablou

$$t1(n)=\begin{cases} k & \text{dacă } x[k]=v \\ n & \text{dacă } v \text{ nu este în } x[1..n] \end{cases}$$

$$t2(n)=\begin{cases} 1 & \text{dacă } v \text{ este în } x[1..n\,] \\ 0 & \text{dacă } v \text{ nu este în } x[1..n] \end{cases}$$

$$t3(n)=\begin{cases} k-1 & \text{dacă } x[k]=v \\ n & \text{dacă } v \text{ nu este în } x[1..n] \end{cases}$$

Algoritm (căutare secvențiala):

```
caut(x[1..n],v)
gasit ← False
i ← 1
WHILE (gasit==False) AND (i<=n) DO
    IF x[i]==v                          // t1(n)
        THEN gasit ← True               // t2(n)
        ELSE  i ← i+1                   // t3(n)
    ENDIF
ENDWHILE
RETURN gasit
```

Exemplu 4 (căutare secvențială)

Cel mai favorabil caz: x[1]=v

t1(n)=1, t2(n)=1, t3(n)=0

T(n)= 6

Cel mai defavorabil caz: v nu se află în x[1..n]

t1(n)=n, t2(n)=0, t3(n)=n

T(n)=3n+3

Marginile (inferioară și superioară) ale timpului de execuție sunt:

6<= T(n) <= 3(n+1)

Obs: limita inferioară este constantă iar cea superioară depinde liniar de dimensiunea problemei

$$t1(n)=\begin{cases} k & \text{dacă } x[k]=v \\ n & \text{dacă } v \text{ nu este în } x[1..n] \end{cases}$$

$$t2(n)=\begin{cases} 1 & \text{dacă } v \text{ este în } x[1..n \\ 0 & \text{dacă } v \text{ nu este în } x[1..n] \end{cases}$$

$$t3(n)=\begin{cases} k-1 & \text{dacă } x[k]=v \\ n & \text{dacă } v \text{ nu este în } x[1..n] \end{cases}$$

Exemplu 4 (căutare secvențială II)

```
Caut2(x[1..n],v)
i ← 1
while i<n  and x[i]!=v do
     i ← i+1
endwhile
if x[i]!=v then gasit ← false
               else gasit ← true
endif
return gasit
```

Cel mai favorabil caz (valoarea v se află pe prima poziție):

$T(n)=4$

Cel mai defavorabil caz (valoarea v se află pe ultima poziție sau nu se află în tablou):

$T(n)=1+n+(n-1)+2=2n+2$

Dacă se consideră ca operație dominantă comparația x[i]!=v atunci:

Cel mai favorabil caz: $T(n)=2$

Cel mai defavorabil caz: $T(n)=n+1$

OBS: este suficient să se contorizeze operația dominantă

Structura

- In ce consta analiza eficienței algoritmilor ?

- Cum se poate măsura eficiența algoritmilor ?

- Exemple

- Analiza în cazul cel mai favorabil, în cazul cel mai defavorabil și în cazul mediu

Analiza în cel mai favorabil și cel mai defavorabil caz

Analiza în cazul cel mai favorabil:

- furnizezază o margine inferioară pentru timpul de execuție
- Permite identificarea algoritmilor ineficienți (dacă un algoritm are un cost ridicat chiar și în cel mai favorabil caz atunci el nu reprezintă o soluție acceptabilă)

Analiza în cazul cel mai defavorabil:

- Furnizează cel mai mare timp de execuție în raport cu toate datele de intrare de dimensiune n (margine superioară a timpului de execuție)
- Estimarea marginii superioare a timpului de execuție este mai utilă din punct de vedere practic decât estimarea marginii inferioare

Analiza în cazul mediu

Pentru anumite probleme cazul cel mai favorabil si cel mai defavorabil sunt cazuri rare (excepții)

Astfel … timpul de execuție în cazul cel mai favorabil respectiv în cazul cel mai defavorabil nu furnizează suficientă informație

In aceste cazuri se efectuează o altă analiză… analiza cazului mediu

Scopul acestei analize este să furnizeze informații privind comportarea algoritmului în cazul unor date de intrare arbitrare (care nu corespund neapărat nici celui mai favorabil nici celui mai defavorabil caz)

Analiza în cazul mediu

Această analiză se bazează pe cunoașterea distribuției de probabilitate a datelor de intrare

Aceasta înseamnă cunoașterea (estimarea) probabilității de apariție a fiecăreia dintre instanțele posibile ale datelor de intrare (cât de frecvent apare fiecare dintre posibilele valori ale datelor de intrare)

Timpul mediu de execuție este valoarea medie (în sens statistic) a timpilor de execuție corespunzători diferitelor instanțe ale datelor de intrare

Analiza în cazul mediu

Ipoteze. Presupunem că sunt satisfăcute următoarele ipoteze:

- datele de intrare pot fi grupate în clase astfel încât timpul de execuție corespunzător datelor din aceeași clasă este același
- sunt $m=M(n)$ clase corespunzătoare datelor de intrare
- Probabilitatea de apariție a unei date din clasa k este P_k
- Timpul de execuție al algoritmului pentru date de intrare aparținând clasei k este $T_k(n)$

In aceste ipoteze timpul mediu de execuție este:

$$T_{mediu}(n)= P_1T_1(n)+P_2T_2(n)+\ldots+P_mT_m(n)$$

Observație: dacă toate clasele de date au aceeași probabilitate atunci timpul mediu de execuție este:

$$T_{mediu}(n)=(T_1(n)+T_2(n)+\ldots+T_m(n))/m$$

Analiza în cazul mediu

Exemplu: căutare secvențială (operație dominantă: comparația)
Ipoteze privind distribuția de probabilitate a datelor de intrare:

- Probabilitatea ca valoarea v să se afle in tablou: p
  - valoarea v apare cu aceeași probabilitate pe fiecare dintre pozițiile din tablou
  - probabilitatea ca valoarea v să se afle pe poziția k este 1/n
- Probabilitatea ca v să nu se afle in tablou: 1-p

(in cazul alg Caut2 dacă valoarea este pe poziția k atunci numărul de comparații efectuate este (k+1))

$T_{mediu}(n)=p(2+3+\ldots+(n+1))/n+(1-p)(n+1)=n(1-p/2)+(1+p/2)$

Daca $p=0.5$ se obține $T_{mediu}(n)=3n/4+5/4$

Concluzie: timpul mediu de execuție al algoritmului de căutare secvențială depinde liniar de dimensiunea datelor de intrare

Analiza în cazul mediu

Exemplu: căutare secvențială (varianta cu santinelă sau fanion)

Idee de bază:

- Tabloul este extins cu un element suplimentar (pe poziția n+1) a cărui valoare este v

- Tabloul este parcurs până la întâlnirea lui v (valoarea va fi găsită în cel mai rău caz pe poziția n+1 – corespunde situației când tabloul x[1..n] nu conține valoarea v)

x[1]	x[2]	x[3]	…	x[n]	v

Valoare santinelă (fanion)

Analiza în cazul mediu

Algoritm:

```
Căutare_fanion(x[1..n],v)
i ← 1
WHILE x[i]!=v DO
    i ← i+1
ENDWHILE
RETURN i
```

Operație dominantă: comparația

Ipoteză: Probabilitatea ca valoarea v să fie pe pozitia k din {1,2,…,n+1} este 1/(n+1)

Timpul mediu de execuție:

$T_{mediu}(n)=(1+2+\ldots+(n+1))/(n+1)$
$=(n+2)/2$

Observație:

- Schimbând ipoteza privind distribuția datelor de intrare valoarea timpului mediu se poate modifica (în cazul căutarii secvențiale dependența de dimensiunea problemei rămâne liniară)

Observație. Timpul mediu de execuție NU este in mod necesar media aritmetică dintre timpii de execuție corespunzători cazurilor extreme (cel mai favorabil si cel mai defavorabil)

Rezumat: etapele analizei eficienței

- Pas 1: Identificarea dimensiunii problemei

- Pas 2: Stabilirea operației dominante

- Pas 3: Determinarea numărului de execuții ale operatiei dominante
- Pas 4: Dacă numărul de execuții ale operației dominante depinde de proprietățile datelor de intrare atunci se analizează
  - Cel mai favorabil caz
  - Cel mai defavorabil caz
  - Cazul mediu
- Pas 5: Se stabilește ordinul (clasa) de complexitate (vezi cursul următor)

Următorul curs va fi …

.. tot despre analiza eficienței algoritmilor.

Mai concret, vor fi prezentate:

- Ordin de creștere
- Notații asimptotice (O, Theta, Omega)
- Clase de complexitate