12 Şiruri

12.1 Progresii

P 1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie aritmetică cu termeni pozitivi, de raţie $r>0$. Arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ au loc egalităţile:
a) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r$.
b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{r}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}$. c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{mr}{a_k a_{k+1}\ldots a_{k+m}} = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_m} - \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+m}}$, $(\forall) m\in\mathbb{N}^*$.

P 2. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un şir de numere reale nenule, cu proprietatea că există $r\in\mathbb{R}^*$ astfel încât

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{r}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\,, \qquad (\forall) n\in\mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că şirul este o progresie aritmetică de raţie r.

P 3. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ o progresie geometrică de raţie $q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Arătaţi că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$a_1+a_2+\cdots+a_n = \frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}\,.$$

P 4. Fie $a\in(-1,1)$ oarecare şi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit prin $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a^k$. Arătaţi că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi determinaţi limita sa.

P 5. Calculaţi sumele

$$1+2q+3q^2+4q^3+\cdots+nq^{n-1}\,,$$
$$1+4q+9q^2+16q^3+\cdots+n^2q^{n-1}\,.$$

12.2 Puncte limită ale unui şir

P 6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale şi $I\subseteq\overline{\mathbb{R}}$ un interval. Arătaţi că dacă $\{n\in\mathbb{N}^* |\, a_n\in I\}$ este infinită, atunci

$$\overline{I}\cap\mathcal{L}((a_n))\neq\emptyset.$$

P 7. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit şi $l_* = \liminf a_n$, $l^* = \limsup a_n$. Arătaţi că pentru orice $\varepsilon>0$ există un rang $n_\varepsilon\geq 1$ cu proprietatea că

$$l^*-\varepsilon < a_n < l^*+\varepsilon\,, \qquad (\forall) n\geq n_\varepsilon.$$

P 8. Fie $a\in\mathbb{R}$ un număr real cu proprietatea că $a+\varepsilon>0$, $(\forall)\varepsilon>0$. Arătaţi că $a\geq 0$.

P 9. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale, iar $(b_n)_{n\geq 1}$ un şir strict monoton de numere pozitive. Arătaţi că dacă are loc una dintre condiţiile
a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = \infty$ sau b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = 0$, atunci

$$\liminf \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \leq \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\,.$$

P 10. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numer reale pozitive. Arătaţi că

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}\,.$$

P 11. Calculaţi

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\,.$$

P 12. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere pozitive care verifică următoarele condiţii
a) subşirul $(a_{2n-1})_{n\geq 1}$ este convergent cu limita 2.
b) $a_{2n} = \sqrt{a_n+2}$ pentru orice $n\geq 1$.
Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

12.3 Şiruri Cauchy

P 13. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu proprietatea că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$, pentru orice $n \geq 1$, este convergent. Arătaţi că şirul $(y_n)_{n\geq 1}$, definit prin $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ pentru orice $n \geq 1$, este de asemenea convergent.

P 14. Fie $x \in \mathbb{R}$ oarecare, iar $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit prin

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \qquad , \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Arătaţi că şirul $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent. Dacă $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $f(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n(x)$, arătaţi că

$$f(0) = 1\,, \quad f'(x) = f(x)\,, \quad f(x+y) = f(x)\cdot f(y), (\forall)x, y \in \mathbb{R}.$$

Determinaţi funcţia f.

P 15. Fie $x \in \mathbb{R}$ oarecare, iar $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ şirurile definite prin

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad , \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

$$b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad , \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Arătaţi că şirurile $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente. Dacă $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt definite prin $f(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n(x)$, respectiv $g(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n(x)$, arătaţi că

$$f(0) = 1\,, \quad g(0) = 0\,, \quad f(-x) = f(x),\; g(-x) = -g(x),\; f'(x) = -g(x),\; g'(x) = f(x),\; (\forall)x \in \mathbb{R}.$$

P 16.

12.4 Câteva limite remarcabile

P 17. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirurile definite prin

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \,, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(y_n - x_n) = 0$, astfel că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n (= e)$.

P 18. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere nenule, cu limita $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0$. Arătaţi că

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e\,, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1\,;$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{(1+a_n)^r - 1}{a_n} = r \;(r \in \mathbb{R}), \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\alpha^{a_n} - 1}{a_n} = \ln(\alpha) \;(\alpha \in (0, \infty));$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{tg(a_n)}{a_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\arcsin(a_n)}{a_n} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{arctg(a_n)}{a_n} = 1\,.$$

P 19. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirurile definite prin

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\,, \quad y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\,, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(y_n - x_n) = 0$, astfel că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sunt convergente la o aceeaşi limită γ(constanta Euler-Mascheroni).

P 20. Arătaţi că
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\ln(2).$$

P 21. Fie $\alpha>-1$ oarecare. Arătaţi că
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha+1}\,.$$

P 22. Fie $a>0$ şi $\alpha>0$ oarecare, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul definit prin
$$x_0=\alpha \qquad \text{şi} \qquad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\ (\forall)n\in\mathbb{N}.$$

Arătaţi că $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent cu limita $\sqrt{a}$.

P 23. Arătaţi că
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\cdot\cdots\cdot\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\cdots+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}}_{n\text{ radicali}}=\frac{2}{\pi}\,.$$

P 24. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirurile definite prin
$$a_n=\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}\,,\qquad b_n=\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\,.$$

Arătaţi că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}a_n=1$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}a_n^n=e$ şi că
$$a_n^n=\left((1+(a_n-1))^{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot b_n}\,.$$

Deduceţi că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}b_n=\frac{1}{e}$.

P 25. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ oarecare. Arătaţi că numerele $x_k=ctg^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, cu $k=\overline{1,n}$ sunt soluţiile ecuaţiei
$$C_{2n+1}^1x^n-C_{2n+1}^3x^{n-1}+C_{2n+1}^5x^{n-2}-\cdots=0.$$

Deduceţi că
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}\,,$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}\right)=\frac{\pi^4}{90}\,.$$

P 26. Arătaţi că probabilitatea ca două numere naturale nenule alese la întâmplare să fie prime între ele este
$$P=\frac{6}{\pi^2}\,.$$