2 Funcţii

2.1 Imagini directe şi imagini inverse. Funcţii surjective, injective, bijective. Mulţimi echipotente

P 1. Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcţie. Arătaţi că
a) $f(X_1) \subseteq f(X_2), (\forall) X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$;
b) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2), (\forall) X_1, X_2 \subseteq A$;
c) $f(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} f(X_i), (\forall)\{X_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(A)$;
d) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2), (\forall) X_1, X_2 \subseteq A$;
e) $f(\bigcap_{i\in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(X_i), (\forall)\{X_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(A)$;
f) $f(X_1) \setminus f(X_2) \subseteq f(X_1 \setminus X_2), (\forall) X_1, X_2 \subseteq A$.

P 2. Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcţie. Arătaţi că
a) $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2), (\forall) Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq B$;
b) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2), (\forall) Y_1, Y_2 \subseteq B$;
c) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} Y_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(Y_i), (\forall)\{Y_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(B)$;
d) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2), (\forall) Y_1, Y_2 \subseteq B$;
e) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} Y_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(Y_i), (\forall)\{Y_i | i \in I\} \subseteq \mathcal{P}(B)$;
f) $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2), (\forall) Y_1, Y_2 \subseteq B$.

P 3. Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcţie. Arătaţi că pentru orice $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$ au loc următoarele proprietăţi:
a) $f(X) \subseteq Y \iff X \subseteq f^{-1}(Y)$;
b) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$;
c) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$;
d) $f(X) \cap Y = f(X \cap f^{-1}(Y))$.

P 4. Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcţie. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) f este surjectivă(i.e., pentru orice $y \in B$ ecuaţia $f(x) = y$ are cel puţin o soluţie $x \in A$);
b) $(\forall) y \in B \Longrightarrow (\exists) x \in A : f(x) = y$;
c) $Im(f) = B$;
d) $f(f^{-1}(Y)) = Y, (\forall) y \subseteq B$;
e) $(\forall) C, (\forall) g, h : B \longrightarrow C, g \circ f = h \circ f \Longrightarrow g = h$;
f) $(\exists) g : B \longrightarrow A : f \circ g = id_B$.

P 5. Fie $f : A \longrightarrow B$ o funcţie. Arătaţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a) f este injectivă(i.e., pentru orice $y \in B$ ecuaţia $f(x) = y$ are cel mult o soluţie $x \in A$);
b) $(\forall) x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$;
c) $(\forall) x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$;
d) $f^{-1}(f(X)) = X, (\forall) X \subseteq A$;
e) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2), (\forall) X_1, X_2 \subseteq A$;
f) $f(X_1 \setminus X_2) = f(X_1) \setminus f(X_2), (\forall) X_1, X_2 \subseteq A$;
g) $(\forall) C, (\forall) g, h : C \longrightarrow A, f \circ g = f \circ h \Longrightarrow g = h$;
h) $(\exists) g : B \longrightarrow A : g \circ f = id_A$.

P 6. Fie $f : A \longrightarrow A$ o funcţie cu proprietatea că $f \circ f$ are un unic punct fix $a \in A$. Arătaţi că a este unicul punct fix al funcţiei f.

P 7. Fie $f, g : A \longrightarrow A$ două funcţii cu proprietatea că $f \circ g = g \circ f$. Dacă funcţia f are un unic punct fix $a \in A$, arătaţi că a este un punct fix al funcţiei g.

P 8. Fie A şi B două mulţimi finite cu acelaşi număr de elemente şi $f : A \longrightarrow B$ o funcţie. Atunci f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă. Arătaţi că afirmaţia nu este adevărată pentru mulţimi infinite.

P 9. Arătaţi că o reuniune numărabilă de mulţimi numărabile este numărabilă.

P 10. Arătaţi că $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$.

P 11. Arătaţi că
a) $(0,1) \sim [0,1) \sim (0,1] \sim [0,1]$;
b) $(a,b) \sim (0,1), (\forall) a, b \in \mathbb{R}, a < b$;
c) $\mathbb{R} \sim (0,1)$.

P 12. Arătaţi că nu există nicio funcţie surjectivă $f : \mathbb{N} \longrightarrow (0, 1)$, astfel că $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

P 13. Arătaţi că există o funcţie injectivă $f : (0, 1) \times (0, 1) \longrightarrow (0, 1)$, astfel că $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$.

P 14. Arătaţi că pentru orice mulţime A are loc inegalitatea $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

P 15. Fie A şi B mulţimi finite, cu $|A| = m$ şi $|B| = n$. Determinaţi:
a) numărul tuturor funcţiilor $f : A \longrightarrow B$;
b) numărul tuturor funcţiilor injective $f : A \longrightarrow B$;
c) numărul tuturor funcţiilor bijective $f : A \longrightarrow B$;
d) numărul tuturor funcţiilor surjective $f : A \longrightarrow B$.

2.2 Permutări

P 16. Fie permutarea $\alpha \in S_5$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculaţi α^2 şi α^3. Determinaţi cel mai mic $k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\alpha^k = id$.

P 17. În grupul S_3 considerăm permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculaţi α^2, α^3, β^2, $\alpha\beta$ şi $\alpha^2\beta$. Arătaţi că , împreună cu α şi β, acestea sunt toate permutările din S_3. Verificaţi că $\alpha^2 = \alpha^{-1}$, $\beta = \beta^{-1}$ şi $\beta\alpha = \alpha^2\beta$.

P 18. Determinaţi toate ciclurile de lungime 3 din S_4.

P 19. Câte cicluri de lungime l se află în S_n.

P 20. Două permutări $\alpha, \beta \in S_n$ se numesc disjuncte dacă

$$(\alpha(i) - i) \cdot (\beta(i) - i) = 0\,, \quad (\forall) i = \overline{1, n}\,.$$

Dacă $\alpha, \beta \in S_n$ sunt două permutări disjuncte, arătaţi că
a) $\alpha(i) \neq i \Longrightarrow \beta(\alpha(i)) = \alpha(i)$.
b) $\alpha\beta = \beta\alpha$.

P 21. Descompuneţi următoarele permutări în produse de cicluri disjuncte:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 & 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

P 22. Descompuneţi permutările de la exerciţiul precedent în produse de transpoziţii.

P 23. Determinaţi parităţile tuturor permutărilor din S_3 şi din S_4.

P 24. Determinaţi ordinul maxim pe care îl poate avea o permutare din S_n, pentru $n = \overline{2, 10}$.

P 25. Verificaţi identităţile următoare:
a) $(a, b)(a, b) = id$, $(a, b)(a, c) = (a, c, b)$, $(a, b)(c, d) = (a, d, c)(a, b, c)$;
b) $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{l-1}, i_l) = (i_1, i_l)(i_1, i_{l-1}) \ldots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$;
c) $(i, j) = (i, i+1)(i+1, i+2) \ldots (j-2, j-1)(j-1, j)(j-2, j-1) \ldots (i+1, i+2)(i, i+1)$, $(\forall) i < j$;
d) $\alpha(i_1, i_2, \ldots, i_l)\alpha^{-1} = (\alpha(i_1), \alpha(i_2), \ldots, \alpha(i_l))$.

P 26. Determinaţi toate permutările $\alpha \in S_6$ care comută cu permutarea
a) $\sigma = (1, 3, 4)(2, 6)$.
b) $\tau = (1, 2, 3)(4, 5, 6)$.
c) $\rho = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$.

P 27. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $M \subseteq G$, $M \neq \emptyset$. Arătaţi că subgrupul $\langle M \rangle$ generat de M este cea mai mică submulţime $H \subseteq G$ cu proprietatea că $M \subseteq H$ şi $H \cdot (M \cup M^{-1}) \subseteq H$. Arătaţi că dacă grupul G este finit, atunci $\langle M \rangle$ este cea mai mică submulţime a lui G cu proprietatea că $M \subseteq H$ şi $H \cdot M \subseteq H$.

P 28. Arătaţi că dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit, iar $M \subseteq G$, $M \neq \emptyset$, atunci algoritmul următor permite determinarea subgrupului generat de M:

1) $S := \{1\}$
2) $H := \{1\}$
3) $S := S \cdot M \setminus H$
4) if $S = \emptyset$, then stop$[\Longrightarrow H = \langle M \rangle]$
5) $H := H \cup S$, go to 3)

(alternativ putem descrie algoritmul prin următoarele recurenţe:

$$\begin{array}{l} S_0 := \{1\}, H_0 := \{1\}, \\ S_{n+1} := S_n \cdot M \setminus H_n,\ (\forall) n \in \mathbb{N} \\ \text{if } S_{n+1} = \emptyset, \text{ then } \langle M \rangle = H_n, \\ \text{else } H_{n+1} := H_n \cup S_{n+1} \end{array}$$

care conduc de asemenea la subgrupul generat de submulţimea nevidă M).

P 29. Utilizaţi algoritmul din problema precedentă pentru a construi subgrupul $\langle M \rangle \leq S_4$, generat de $M = \{(1,2,3), (2,3,4)\}$.

P 30. Arătaţi că :
a) $S_n = \langle (i, i+1) \mid i = \overline{1, n-1} \rangle$;
b) $S_n = \langle (1, i) \mid i = \overline{2, n} \rangle$;
c) $S_n = \langle (1,2), (1,2,\ldots,n-1,n) \rangle$;
d) $S_n = \langle (1,2), (2,3,\ldots,n-1,n) \rangle$;
e) $S_n = \langle (1,2,\ldots,n-1), (1,2,\ldots,n-1,n) \rangle$;
f) $A_n = \langle (i,j,k) \mid 1 \leq i < j < k \leq n \rangle$;
g) $A_n = \langle (1,2,i) \mid i = \overline{3, n} \rangle$.

P 31. a) Arătaţi că elementele grupului altern A_5 au formele id, $(i,j)(k,l)$, (i,j,k), sau (i,j,k,l,m).
b) Arătaţi că A_5 conţine 20 de $3-$cicluri, 24 de $5-$cicluri şi 15 produse de câte două transpoziţii disjuncte.

P 32. Fie $\sigma = (1, 2, \ldots, m)$. Arătaţi că
a) σ^k este un ciclu de lungime m dacă şi numai dacă $(k, m) = 1$.
b) Dacă $(k, m) = d$, atunci σ^k este un produs de d cicluri de lungimi egale.

P 33. Fie $p, q, r, s \in S_8$ permutările date de următoarele produse de cicluri:

$$\begin{array}{ll} p = (1,4,3,8,2)(1,2)(1,5), & q = (1,2,3)(4,5,6,8), \\ r = (1,2,8,7,4,3)(5,6), & s = (1,3,4)(2,3,5,7)(1,8,4,6)\,. \end{array}$$

Calculaţi qpq^{-1} şi $r^{-2}sr^2$.

P 34. Determinaţi numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ ale căror descompuneri în cicluri disjuncte conţin k_1 cicluri de lungime 1, k_2 cicluri de lungime 2, ..., k_n cicluri de lungime n.

P 35. Arătaţi că grupul altern A_n poate fi generat de ciclurile
a) $(1,2,3)$ şi $(1,2,3,\ldots,n)$ dacă n este impar.
b) $(1,2,3)$ şi $(2,3,\ldots,n)$ dacă n este par.

P 36. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ cu $m < n-1$ şi $G = \langle \sigma_{m+1}, \sigma_{m+2}, \ldots, \sigma_n \rangle \leq S_n$, unde

$$\sigma_{m+1} = (1,2,\ldots,m,m+1)\,, \quad \sigma_{m+2} = (1,2,\ldots,m,m+2)\,, \quad \ldots, \quad \sigma_n = (1,2,\ldots,m,n)\,.$$

Arătaţi că $G = S_n$ dacă m este impar, respectiv $G = A_n$ dacă m este par.