1 Logică. Mulţimi. Relaţii

1.1 Calcul propoziţional

P 1. Arătaţi că au loc următoarele echivalenţe logice:
a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
b) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.
c) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.
d) $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, $\neg p \rightarrow q \equiv p \vee q$, $p \rightarrow \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$.
e) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p$, $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv p$.

P 2. Arătaţi că următoarele formule logice sunt tautologii:
a) $(p \wedge q) \rightarrow p$, $p \rightarrow (p \vee q)$.
b) $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$, $(\neg q \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow p$, $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$.
c) $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow q$.
d) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$.
e) $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$, $((p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$.
f) $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$, $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$.

1.2 Calcul cu predicate

P 3. Arătaţi că pentru orice predicat unar P au loc echivalenţele logice:
a) $\neg((\forall x)P(x)) \equiv (\exists x)\neg P(x)$.
b) $\neg((\exists x)P(x)) \equiv (\forall x)\neg P(x)$.

P 4. Arătaţi că pentru orice predicat binar P au loc echivalenţele logice:
a) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \equiv (\forall y)(\forall x)P(x,y)$.
b) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \equiv (\exists y)(\exists x)P(x,y)$.

P 5. Arătaţi că pentru orice predicat binar P are loc implicaţia

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y),$$

dar reciproca ei

$$(\forall y)(\exists x)P(x,y) \rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$$

este în general falsă.

1.3 Operaţii cu mulţimi

P 6. (Funcţii caracteristice) Pentru orice submulţime A a unei mulţimi "totale" T, funcţia caracteristică associată mulţimii A este

$$\chi_A : T \longrightarrow \{0,1\}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } x \in A \\ 0 & , \text{ dacă } x \notin A \end{cases}$$

Arătaţi că au loc următoarele proprietăţi:
0) $A = B \Longleftrightarrow \chi_A = \chi_B$;
$A \subseteq B \Longleftrightarrow \chi_A \leq \chi_B$;
1) $\chi_T \equiv 1$, $\chi_\emptyset \equiv 0$;
2) $\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A$;
3) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = min(\chi_A, \chi_B)$;
4) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$;
5) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$;
6) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = max(\chi_A, \chi_B)$;
7) $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \cdot \chi_B$.

P 7. Fie A, B, şi C mulţimi, cu proprietatea că $B \subseteq A \subseteq C$. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C\,. \end{cases}$$

P 8. Fie A, B, şi C mulţimi, cu proprietatea că $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} A \setminus X = B \\ X \setminus A = C\,. \end{cases}$$

P 9. Fie M o mulţime. Arătaţi că $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ este un grup comutativ. Pentru $A, B \subseteq M$ oarecare, rezolvaţi în $\mathcal{P}(M)$ ecuaţia

$$A \Delta X = B\,.$$

P 10. Fie M o mulţime. Arătaţi că $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$ este un inel comutativ.

P 11. Pentru orice mulţime A, fie $\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$ şi $\mathcal{P}_f(A) = \{X \in \mathcal{P}(A) | \, |X| < \infty\}$ mulţimea tuturor submulţimilor, respectiv a tuturor submulţimilor finite ale lui A. Arătaţi că

$$A = \bigcup_{X \in \mathcal{P}(A)} X = \bigcup_{X \in \mathcal{P}_f(A)} X = \bigcup_{a \in A} \{a\}.$$

P 12. Arătaţi că
a) $A_i \subseteq B, (\forall) i \in I \Longleftrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$;
b) $B \subseteq A_i, (\forall) i \in I \Longleftrightarrow B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$;
c) $A_i \subseteq B_i, (\forall) i \in I \Longrightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$, $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$.

1.4 Relaţii

P 13. Fie $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ şi $\mathcal{R}$ relaţia binară între A şi B având graficul

$$G = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Determinaţi secţiunea fiecărui element al mulţimii A, respectiv secţiunile $\mathcal{R}(X)$, $\mathcal{R}(Y)$ ale submulţimilor $X = \{a, b\}$, $Y = \{b, c\}$. Comparaţi $\mathcal{R}(X) \cup \mathcal{R}(Y)$ şi $\mathcal{R}(X) \cap \mathcal{R}(Y)$ cu $\mathcal{R}(X \cup Y)$, respectiv $\mathcal{R}(X \cap Y)$. Determinaţi graficul relaţiei inverse $\mathcal{R}^{-1}$, precum şi graficele relaţiilor $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{-1}$ şi $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$.

P 14. Câte relaţii binare omogene se pot defini pe o mulţime cu 3 elemente?

1.5 Relaţii de echivalenţă

P 15. Arătaţi că relaţia de congruenţă modulo n, unde $n \in \mathbb{N}^*$, definită pe $\mathbb{Z}$ prin

$$a \equiv b \pmod{n} \Longleftrightarrow n | a - b\,,$$

este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea numerelor întregi. Determinaţi clasele de echivalenţă.

P 16. Fie ρ o relaţie de echivalenţă pe o mulţime M, iar $a, b \in M$. Arătaţi că au loc proprietăţile:

$$a \rho b \Longleftrightarrow [a]_\rho = [b]_\rho;$$

$$a \not\rho\, b \Longleftrightarrow [a]_\rho \cap [b]_\rho = \emptyset.$$

P 17. Arătaţi că relaţia "paralel sau egal" definită pe mulţimea dreptelor din plan este o relaţie de echivalenţă. Câte clase diferite de echivalenţă determină vârfurile şi mijloacele laturilor unui pătrat?

P 18. Care dintre următoarele relaţii din geometria plană sunt relaţii de echivalenţă: asemănarea triunghiurilor, perpendicularitatea dreptelor, congruenţa segmentelor?

P 19. Câte relaţii de echivalenţă se pot defini pe o mulţime cu 3 elemente? Dar pe o mulţime cu 4 elemente?

P 20. Câte relaţii de echivalenţă se pot defini se pot defini pe o mulţime cu $k \cdot m$ elemente, astfel încât fiecare clasă de echivalenţă să conţină exact k elemente?

1.6 Relaţii de ordine

P 21. Arătaţi că relaţia de divizibilitate este o relaţie de ordine pe mulţimea numerelor naturale. Care este cel mai mic, respectiv cel mai mare element în raport cu această relaţie? Care este infimumul, respectiv supremumul mulţimii $\{72, 120, 180\}$? Dar al mulţimii $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots\}$?

P 22. Câte relaţii de ordine totală se pot defini pe o mulţime cu n elemente?($n \in \mathbb{N}$)

P 23. Câte relaţii de ordine se pot defini pe o mulţime cu 3 elemente?