

Curs 1, partea 2

Sisteme si baze de numeratie

Reprezentarea numerelor in memoria calculatorului

Elemente de algebra booleana

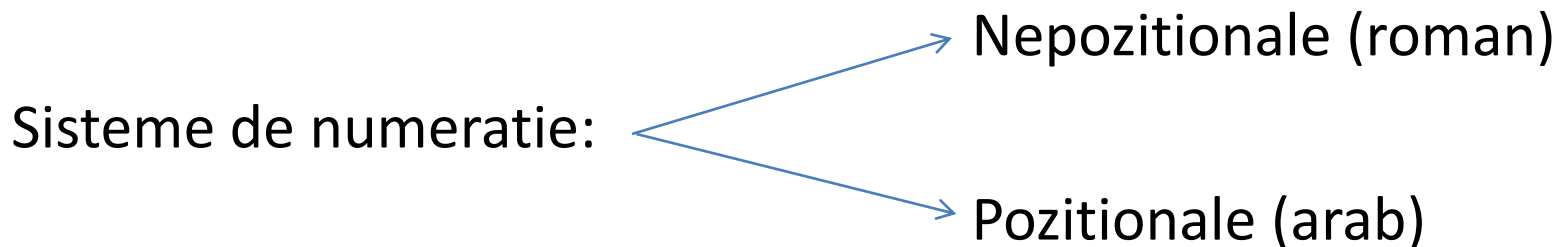
Sisteme si baze de numeratie

Comunicare

Def: limbaj.....

Definitie: Un sistem de numeratie este o multime finita de simboluri numite cifre si o multime de reguli folosite pentru a reprezenta o valoare numerica (numar).

Exemplu: in antichitate, pentru numărul 10 egiptenii foloseau simbolul „ \cap ”, babilonienii simbolul „ $<$ ”, iar romanii simbolul „X”



Sistem de numerație pozitional:

aportul unei cifre la valoarea totală a unui număr depinde de :

- valoarea cifrei
- locul ocupat de cifră în reprezentarea numărului respectiv.

valoarea indicată de o cifră este valoarea cifrei înmulțită cu o putere a unei constante numită bază.

ordinea puterilor bazei este succesivă, de la dreapta la stânga, cu puterea 0 la ultima cifră în cazul întregilor.

pentru valori fracționare, puterile negative ale bazei se extind la dreapta, începând de la un separator zecimal.

$C_n C_{n-1} C_{n-2} \dots C_2 C_1 C_0, D_1 D_2 D_3 \dots$,

$$\text{Nr}_{(10)} = C_n * b^n + C_{n-1} * b^{n-1} + \dots + C_2 * b^2 + C_1 * b^1 + C_0 * b^0 + D_1 * b^{-1} + D_2 * b^{-2} + D_3 * b^{-3} + \dots$$

- Ex: $123_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 100 + 20 + 3$

- Tema scurta: $123_7 = ?$

Numărul cifrelor definește **baza** sistemului de numerație.

Cifrele folosite într-o baza de numerație: un set de simboluri care formează o mulțime al cărei număr cardinal este egal cu baza de numerație.

2 cifre: baza 2

10 cifre: baza 10

....

Sisteme si baze de numerație uzuale:

- **sistemul binar** este un sistem de numerație în baza 2. Cifrele utilizate de acest sistem: 0,1.
- **sistemul ternar** este un sistem de numerație în baza 4. Cifrele utilizate de acest sistem: 0,1,2,3.
- **sistemul octal** este un sistem de numerație în baza 8. Cifrele utilizate de acest sistem: 0,1,2,3,4,5,6,7.
- **sistemul zecimal** este un sistem de numerație în baza 10. Cifrele utilizate de acest sistem: 0,1,2,3...,9.
- **sistemul hexazecimal** este un sistem de numerație în baza 16. Cifrele utilizate: 0,1,2,...,9,A,B,C,D,E,F.

Exemple reprezentare valori in diferite baze:

Zecimal(10)	Binar(2)	Ternar(4)	Octal(8)	Hexazecimal(16)
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	3	3	3
4	100	10	4	4
5	101	11	5	5
6	110	12	6	6
7	111	13	7	7
8	1000	20	10	8
9	1001	21	11	9
10	1010	22	12	A
11	1011	23	13	B
12	1100	30	14	C
13	1101	31	15	D
14	1110	32	16	E
15	1111	33	17	F

Pentru a face distincție între numerele scrise într-o anumită bază:

- la sfârșitul numărului se mai scrie o literă ce simbolizează baza, de exemplu:

B pentru numerele scrise în binar (baza 2)

Q pentru numerele scrise în octal (baza 8)

D pentru numerele scrise în zecimal (baza 10)

H pentru numerele scrise în hexazecimal (baza 16)

sau

- la sfarsit numar, ca si indice, (cu sau fara paranteze), baza

123₇ 123₍₇₎

Sistemul binar = mod reprezentare a informatiei in calculator

Codificarea: operația de transformare a informației în secvențe de cifre binare.

- realizata cu ajutorul dispozitivelor de intrare

Decodificarea: operația inversă codificarii.

- realizata de catre dispozitivele de iesire

Conversii intre baze de numeratie

Conversia numerelor dintr-o bază oarecare in baza 10

Pentru un număr scris într-o bază oarecare “b” sub forma parte întreagă și parte zecimală:

$$\text{Nr}(b) = C_n C_{n-1} C_{n-2} \dots C_2 C_1 C_0, D_1 D_2 D_3 \dots,$$

valoarea sa în baza 10 este:

$$\text{Nr}_{(10)} = C_n * b^n + C_{n-1} * b^{n-1} + \dots + C_2 * b^2 + C_1 * b^1 + C_0 * b^0 + D_1 * b^{-1} + D_2 * b^{-2} + D_3 * b^{-3} + \dots$$

Exemplu:...

Conversii între baze de numeratie

Conversia numerelor din baza 10 într-o bază oarecare

! trebuie convertite separat partea întreagă și cea zecimală

a) Conversia părții întregi

împartirea din clasa I, adică cea cu *cat* și *rest* !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

$$7:2 = ?$$

- împartiri succesive ale numărului scris în baza 10 la baza în care se dorește conversia (se împarte numărul la bază, iar în continuare se împarte câtul obținut la bază ș.a.m.d. până când câtul devine 0), după care se iau resturile obținute în ordine inversă, care constituie valoarea numărului în baza cerută.

b) Conversia părții zecimale

- înmulțiri succesive ale părților fracționare până când se ajunge la parte fracționară nulă, sau se ajunge la perioadă sau se depășește capacitatea de reprezentare (cifre suficiente). Ceea ce depășește partea zecimală la fiecare înmulțire reprezintă o cifră a numărului în baza spre care se face conversia.

Exemplu conversie intre baze de numeratie pentru un numar real

Conversia numerelor din baza 10 într-o bază oarecare

Exemplu: sa se converteasca nr. 2,47 din zecimal in binar, octal, hexazecimal

Pt. partea intreaga este evident $2(D) = 10(B) = \dots\dots(O) \dots\dots(H)$

iar pentru partea zecimala trecerea la binar:

0, 47*2

094

188

176

152

104

008

016

032

.....

2,47(D) = 10, 0111 1000 (B)

Operatii aritmetice in baze de numeratie

Adunarea si scaderea: aceleasi reguli ca si la zecimal, adica folosind “transport” respectiv “imprumut”

Exercitii rezolvate:

- $2(10) = 10(2)$; $62(10) = 111110(2)$; $1995(10) = 11111001011(2)$; $1024(10) = 10000000000(2)$
- $1010011(2) = 83(10)$; $11100011(2) = 227(10)$; $1000000000(2) = 512(10)$; $11001(2) = 25(10)$
- $86C(16) = 8 \times 16^2 + 6 \times 16 + C = 8 \times 16^2 + 6 \times 16 + 12 = 2156(10)$

Exercitii propuse:

- 1) Să se transforme din baza 10 în baza 2 numerele: 23, 57, 101, 567.
- 2) Să se transforme din baza 2 în baza 10 numerele: 101(2), 1101(2), 111101(2) , 10011(2), 11011(2).
- 3) Să se transforme din baza 10 în baza 16 numerele: 1221, 1581, 52021, 5638, 4298, 44782
- 4) Să se transforme din baza 16 în baza 10 numerele: 1001A(16), 110F(16) , A25F(16) , FA0B(16), CA01F(16).
- 5) Determinați baza de numerație x, astfel încât să aibă loc egalitățile:
 $102(x) = 27$
 $10100(x) = 90$
 $131(x) = 71$

Reprezentarea numerelor in memoria calculatorului

Generalitati

- memoria calculatorului = un sir de celule (biti): fiecare celula contine la un moment dat un 0 sau un 1 (nu poate fi goala!).
- Pentru ca o informatie din memorie sa fie utilizabila, trebuie sa stim unde anume se afla (la ce adresa).
 - varianta simpla: fiecare informatie sa fie la o adresa fixa (fixata in momentul scrierii programului). => ca si dimensiunea pentru reprezentarea informatiei se fixeaza la scrierea programului.
- In reprezentarea numerelor se stabileste la inceput numarul n de biti pe care se face reprezentarea: prin urmare reprezentarea oricarui numar va fi un sir finit de n cifre 0 sau 1,
=> nu putem reprezenta orice numar intreg, ci doar numerele dintr-un anumit interval, fixat o data cu **alegerea lui n** .

Reprezentarea numerelor intregi pozitive (multimea \mathbb{N})

- Cea mai naturala reprezentare a numerelor intregi pozitive este scrierea pozitionala in baza 2.
- De exemplu, numarul 20 se reprezinta pe 8 biti ca 00010100₍₂₎.
- Cel mai mare numar reprezentabil pe 8 biti este 11111111, adica 255, adica 256 de valori distincte (de ce 256?).
- In general, cel mai mare numar reprezentabil pe n biti este $2^n - 1$ (de ce?).
- Cel mai mic numar reprezentabil in acest fel, indiferent de numarul de biti ales, este 0.
- Se mai numeste si reprezentare cu virgula fixa

Exercitiu

Care este intervalul maxim de reprezentare in baza 2 pe n biti pentru n numere intregi pozitive? Justificati.

Reprezentarea numerelor intregi pozitive

ADUNAREA

- Aritmetica pentru numere reprezentate in baza 2 se face intocmai ca in baza 10, dar cu tabla adunarii adecvata.

Obs. : noi nu stim sa adunam direct doua numere; stim doar sa aplicam algoritmul de adunare asupra reprezentarilor lor, de obicei in baza 10.

$$C_i = A_i + B_i + T_{i-1}, \text{ unde } T_{-1} = 0$$

Exemplu 1:

20 = 00010100 +

7 = 00000111

00011011

Exemplu 2:

144 = 10010000 +

116 = 01110100

260 = 00000100

Obs. transportul 1 de la rangul cel mai semnificativ ? => rezultatul corect al adunarii (260) nu este reprezentabil pe 8 biti, iar rezultatul obtinut este 4 (incorect).

In general, urmatoarele afirmatii sunt echivalente:

- suma este reprezentabila pe lungimea aleasa
- transportul de la rangul cel mai semnificativ este 0
- rezultatul calculului este suma (corecta).

Reprezentarea numerelor intregi pozitive

Conversii de lungime

Pentru a adunare/scadere doua numere reprezentate in baza 2, trebuie sa dispunem de reprezentari pe lungimi egale. In caz contrar, trebuie aplicate conversii de lungime asupra unuia sau ambelor numere:

R1) trecerea de la o reprezentare pe mai putini biti la reprezentare pe mai multi biti se face adaugand cifre 0 in fata.

R2) trecerea de la mai multi biti la mai putini se face ignorand bitii mai semnificativi.

In ce conditii conversiile de lungime sunt corecte (rezultatul este o reprezentare a aceluasi numar ca si cel de plecare) ?

Ce riscuri implica R2 ? Exista vreo solutie?

Reprezentarea numerelor intregi pozitive si negative (multimea \mathbb{Z})

- Se foloseste un bit pentru reprezentarea semnului (de ex., 0 inseamna plus si 1 inseamna minus) si ceilalti $(n-1)$ biti pentru reprezentarea valorii absolute.

De ce 0 pt. pozitive si nu invers?

! Dar reprezentarea precum la nr. Intregi pozitive creaza probleme!

De ce? (z_p si z_n)

Solutia:

- reprezentare *in complement fata de 2* sau *cod complementar*:
 - numerele pozitive se reprezinta ca si in baza 2; primul bit trebuie sa fie 0, motiv pentru care cel mai mare numar reprezentabil este $2^{(n-1)}$
 - numerele negative se reprezinta astfel: plecam de la reprezentarea in baza 2 a opusului (care este pozitiv), dupa care inversam toate cifrele pana la ultimul 1 (exclusiv).

Reprezentarea numerelor intregi pozitive si negative (multimea \mathbb{Z})

Astfel (tot pe 8 biti), -20 se reprezinta ca 11101100. Cel mai mic numar reprezentabil este -2^n (care are reprezentarea un 1 urmat de $n-1$ zerouri).

- primul bit se numeste *bit de semn* deoarece el indica semnul numarului (este 0 daca numarul este pozitiv).
- avantajul acestei reprezentari: *algoritmii de adunare si de scadere a doua numere reprezentate in cod complementar sunt identici cu algoritmii de adunare si de scadere pentru numere pozitive reprezentate in baza 2.*

Elemente de algebra booleana

Algebra Booleană (logica booleana)

- **George Boole** matematician englez: „O investigare a legilor gândirii” („An investigation of the Laws of Thought”) - 1854;
- Aplicații majore ale algebrei boolene: logica matematică, logica digitală, programarea calculatoarelor, statistica;
- **Shannon Claude Elwood** a descoperit aplicabilitatea algebrei boolene în electronică. A demonstrat că orice problemă de logică se poate rezolva utilizând relee electrice.

Algebra Booleană (logica booleana)

Definim o **funcție logică** (funcție booleană) astfel:

$$f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$$

Operatorii logici de bază sunt:

- Conjuncție, produs logic, notat cu SI, AND, *, \wedge
- Disjuncție, suma logica, notat cu SAU, OR, +, \vee
- Negatie, notat cu NOT, \bar{x} , \neg

Nota: combinand cei trei operatori de baza se obtin altii derivati precum:

- SAU EXCLUSIV (XOR) (True, True => False)
- SAU NEGAT (NOR)
- SI NEGAT (NAND)

Proprietățile algebrei booleene

- **idempotența**

$$a + a = a$$

$$0 + 0 = 0$$

$$1 + 1 = 1$$

$$a \cdot a = a$$

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

- **comutativitatea**

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- **asociativitatea**

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

Proprietățile algebrei booleene

- **distributivitatea**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

- **simetria**

$$a = b \rightarrow b = a$$

- **reflexivitatea**

$$a = a$$

- **tranzitivitatea**

$$\left. \begin{array}{l} a = c \\ b = c \end{array} \right\} \rightarrow a = c$$

Regulile lui De Morgan

$$\overline{a \text{ OR } b} = \overline{a} \text{ AND } \overline{b}$$

$$\overline{a \text{ OR } b \text{ OR } c} = \overline{a} \text{ AND } \overline{b} \text{ AND } \overline{c}$$

$$\overline{a \text{ AND } b} = \overline{a} \text{ OR } \overline{b}$$

$$\overline{a \text{ AND } b \text{ AND } c} = \overline{a} \text{ OR } \overline{b} \text{ OR } \overline{c}$$

Reguli de absorbție/simplificare

$$a \text{ OR } a \text{ AND } b = a$$

$$a \text{ AND } (a \text{ OR } b) = a$$

$$a \text{ OR } \overline{a} \text{ AND } b = a \text{ OR } b$$

$$a \text{ AND } (\overline{a} \text{ OR } b) = a \text{ AND } b$$

$$a \text{ AND } b \text{ OR } \overline{a} \text{ AND } c \text{ OR } b \text{ AND } c = a \text{ AND } b \text{ OR } \overline{a} \text{ AND } c$$

$$(a \text{ OR } b) \text{ AND } (\overline{a} \text{ OR } c) \text{ AND } (b \text{ OR } c) = (a \text{ OR } b) \text{ AND } (\overline{a} \text{ OR } c)$$

Alte relații utile

$$a \text{ OR } 0 = a$$

$$a \text{ OR } 1 = 1$$

$$a \text{ AND } 0 = 0$$

$$a \text{ AND } 1 = a$$

$$a \text{ OR } \overline{a} = 1$$

$$a \text{ AND } \overline{a} = 0$$

$$\overline{\overline{a}} = a$$

Reprezentarea funcțiilor logice

Se poate face prin:

- tabele de adevar;
- in forma algebrica (FND sau FNC):
 - Forma normală disjunctivă (FND) (sumă/disjuncție de produse/conjuncții)
 - Forma normală conjunctivă (FNC) (produse/conjuncții de suma/disjuncții)
- notatia sigma

Nota: prima pare a fi mai des si mai usor de folosit

Compararea a doua functii logice:

- aducerea lor la forma canonică, adica operarea cu termeni canonici.
- termen canonic = un termen în care sunt prezente toate variabilele independente, luate sub formă directă sau negată.

Posibilități de a exprima forma canonică a unei funcții:

- forma canonică conjunctivă (**fcc**) – expresia funcției este o sumă de produse
- forma canonică disjunctivă (**fcd**) – expresia funcției este un produs de sume

Ambele forme se deduc din tabelul de adevăr a funcției:

FCC: se însumează toți termenii pentru care funcția este egală cu 1

FCD: se scrie produsul sumelor de termeni pentru care funcția este egală cu 0.

Funcțiile logice sunt funcții de n variabile ce se caracterizează prin faptul că atât variabilele cât și funcția nu pot lua decât două valori distincte (0 sau 1).

Câte funcții de n variabile binare există?

Teoremă:

- Numărul N al funcțiilor de n variabile binare este egal cu 2^m , unde $m=2^n$;
- Pentru n variabile binare (n biți) există $m=2^n$ configurații distincte.

Un mod de reprezentare al funcțiilor logice este ***tabelul de adevăr*** – un tabel care în coloana/coloanele din stânga listează toate elementele mulțimii valorilor posibile de intrare, iar în coloana/coloanele din dreapta (coloanele de ieșire) sunt listate valorile corespunzătoare ieșirilor.

1. Funcții de 1 variabilă

$n=1$ variabile de intrare (x)

$\Rightarrow m=2^n=2^1=2$ configurații distincte și

$N=2^m=2^2=4$ funcții de o variabilă (f_0, f_1, f_2 și f_3)

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	1	0	1
1	0	0	1	1

$$f_0(x)=0$$

funcția ZERO

$$f_1(x)=\bar{x}$$

funcția NOT

$$f_2(x)=x$$

funcția DRIVER

$$f_3(x)=1$$

funcția TAUTOLOGIE

Funcții de 2 variabile

$n=2$ variabile de intrare (x, y)

$m=2^n=2^2=4$ configurații distincte ale variabilelor și

$N=2^m=2^4=16$ funcții de 2 variabile ($f_0, f_1, f_2 \dots f_{15}$)

Vom avea:

$f_0(x,y)=0$ funcția ZERO

$f_3(x,y)=$ funcția NOT

$f_5(x,y)=$ funcția NOT

$f_{12}(x,y)=x$ funcția DRIVER

$f_{10}(x,y)=y$ funcția DRIVER

$f_{15}(x,y)=1$ funcția TAUTOLOGIE

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

f_8 este funcția **ȘI (AND)** – realizează produsul logic $x \cdot y$

x	y	$f_8(x,y)=x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

f_8 – funcția **ȘI (AND)** ia valoarea 1 dacă variabilele de intrare iau valoarea 1

Analog vom avea:

f_7 funcția **ȘI NEGAT (NAND)** – realizează produsul logic negat

f_{14} funcția **SAU (OR)** – realizează suma logică

f_1 funcția **SAU NEGAT (NOR)** – realizează suma logică negată

f_6 funcția **SAU EXCLUSIV (XOR)** – realizează suma logică modulo2 $x \oplus y$

f_9 funcția **SAU EXCLUSIV NEGAT (NXOR)** – realizează suma logică modulo2 negată $\overline{x \oplus y}$

Conversii directe intre baze de numeratie

(8) \rightarrow (2)

Se scriu cifrele corespunzatoare bazei 2 pentru fiecare cifra componenta a numarului scris in baza 8

Baza 8	Baza 2
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

$$631_{(8)} = 110\ 011\ 001_{(2)} = 110011001_{(2)}$$

(2) ->(8)

Grupam cifrele cate 3 si scriem cifra corespunzatoare grupei. Vom avea atatea cifre in baza 8 cate grupe de 3 cifre exista.

Baza 2	Baza 8
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

$$110001010101_{(2)} = 110\ 001\ 010\ 101_{(2)} = 6125_{(8)}$$

$(2) \rightarrow (16) \rightarrow (2)$

Grupam cifrele cate 4 si scriem cifra in baza 16 corespunzatoare grupei. Vom avea atatea cifre in baza 16 cate grupe de 4 cifre am format.

Baza 16	Baza 2	Baza 16	Baza 2
0	0000	8	1000
1	0001	9	1001
2	0010	A	1010
3	0011	B	1011
4	0100	C	1100
5	0101	D	1101
6	0110	E	1110
7	0111	F	1111

$$12A3_{(16)} = 0001\ 0010\ 1010\ 0011_{(2)} = 1001010100011_{(2)}$$

$$1001010100011_{(2)} = 0001\ 0010\ 1010\ 0011_{(2)} = 12A3_{(16)}$$

Exercitii seminar 2,3

Sisteme si baze de numeratie

Reprezentarea numerelor in memoria calculatorului

Elemente de algebra booleana

Exercitii:

- 1) Să se transforme din baza 10 în baza 2 numerele: 23, 57, 101, 567.
- 2) Să se transforme din baza 2 în baza 10 numerele: 101(2), 1101(2), 111101(2) , 10011(2), 11011(2).
- 3) Să se transforme din baza 10 în baza 16 numerele: 1221, 1581, 52021, 5638, 4298, 44782
- 4) Să se transforme din baza 16 în baza 10 numerele: 1001A(16), 110F(16) , A25F(16) , FA0B(16), CA01F(16).
- 5) Determinați baza de numerație x, astfel încât să aibă loc egalitățile:
 $102(x) = 27$
 $10100(x) = 90$
 $131(x) = 71$
- 6) Sa se adune 11010 si 10101 in bazele 2, 8,10 si 16
- 7) Sa se faca scaderea pentru numerele de la ex. 6.

Tema de casa :

8. Aflați cifra a știind că $aaa + aa + a = 8612$
 9. Să se determine numărul abc , știind că $abbc - abb - ab - a = 1779$
 10. Determinați numărul natural de forma ab scris în baza zece pentru care : $ab = 5a + 3b$.
 11. Aflați toate numerele naturale de forma ab astfel încât 5 se împarte exact prin numărul $(a + b)$.
 12. Determinați toate numerele naturale de forma $ab57$ astfel încât $a + b = 11$.
 13. Determinați a și b astfel încât pentru $17ab24$ produsul cifrelor să fie 672.
 14. Aflați numărul $abcd$ care verifică egalitatea $abcd + bcd + cd + d = 3102$
 15. Scrie numerele de forma abc , astfel încât cifra sutelor să fie de 3 ori mai mare decât cifra zecilor, iar cifra zecilor de 3 ori mai mică decât cifra unităților.
 16. Să se determine numerele ab scrise în baza 10 care verifică condiția: $ab = a + 22 \cdot b$
 17. Să se determine numerele abc scrise în baza 10 care verifică condiția : $a^2 = bc$
 18. Determinați numărul natural abc cu proprietatea $7a + 5b + 4c = 175$.
 19. Determinați baza de numerație x , astfel încât să aibă loc egalitățile: $102(x) = 27$, $10100(x) = 90$, respectiv $131(x) = 71$
 20. Numărul A se scrie în baza patru $A = 333...3$, iar în baza zece se scrie $A = 24020 - 1$.
1. Aflați câte cifre are numărul A în baza patru

Exerciții

Completați următorul tabel de adevăr:

x	y	$f(x, y) = \bar{x} + \bar{x}y + x\bar{y}$	x	y	z	$f = \bar{x} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}z$
0	0		0	0	0	
0	1		0	0	1	
1	0		0	1	0	
1	1		0	1	1	
			1	0	0	
			1	0	1	
			1	1	0	
			1	1	1	

•Completați tabelele de adevăr pentru următoarele funcții:

$$F(x, y) = x + y + xy$$

$$F(x, y, z) = x + xy + xy + xz + yz$$