Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 3

Şiruri şi serii de funcţii. Serii de puteri.
Polinoame Taylor şi Serii Taylor.

EVA KASLIK, RALUCA MUREŞAN

ŞIRURI DE FUNCŢII - definiţii

Un şir de funcţii cu valori reale definite pe $A \subset \mathbb{R}$ este o funcţie

$$F : \mathbb{N} \to \{f \mid f : A \to \mathbb{R}\}.$$

Notăm $F(n) = f_n$ termenul general, iar şirul de funcţii se notează (f_n).

Un element $a \in A$ se numeşte punct de convergenţă al şirului (f_n) dacă şirul de numere reale $(f_n(a))$ este convergent.

Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă se numeşte mulţimea de convergenţă a şirului (f_n).

Exemplu: Muţimea de convergenţă a şirului de funcţii (f_n), unde

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$$

este intervalul $(-1, 1]$.

Limita unui şir de funcţii

Considerăm un şir de funcţii (f_n), unde $f_n : A \to \mathbb{R}$.

O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ se numeşte limita (punctuală) a şirului de funcţii (f_n) dacă

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(x,\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n > N(x,\varepsilon).$$

Scriem $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ pe A.

Exemplu Limita şirului de funcţii (f_n), unde

$$f_n : (-1, 1] \to \mathbb{R},\quad f_n(x) = x^n$$

este funcţia $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \in (-1, 1), \\ 1 & , \text{ dacă } x = 1. \end{cases}$

Convergenţa uniformă

Un şir (f_n) este uniform convergent pe A la f dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n > N(\varepsilon),\ \forall x \in A.$$

Scriem $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

convergenţa uniformă $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ convergenţa punctuală

Criteriul lui Cauchy: (f_n) converge uniform la funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ d.n.d.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,\ \forall n, m > N(\varepsilon),\ \forall x \in A.$$

Criterii pentru convergenta uniforma

Criteriul mărginirii: Dacă există o funcţie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi un şir de numere reale şi pozitive (a_n) care converge la 0, astfel încât

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in A,$$

atunci $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$.

Exemplu: Şirul de funcţii (f_n) unde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ la funcţia $f(x) = 0$, pentru că:

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

iar (a_n) este un şir de numere reale pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Continuitate şi convergenţă uniformă

Teoremă (Continuitate şi convergenţă uniformă)

Dacă $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} f$ pe A şi toate funcţiile f_n sunt continue în punctul $a \in A$, atunci f este continuă în punctul a.

Exemplu: Şirul de funcţii (f_n), unde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ nu este uniform convergent pe $A = [0,1]$ la limita sa (punctuală)

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ definită prin } f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } x \in [0,1), \\ 1 & , \text{ dacă } x = 1. \end{cases}$$

Funcţiile f_n sunt continue pe $[0,1]$, dar limita f nu este continuă în $x = 1$.

Şiruri de funcţii egal continue şi egal mărginite

Un şir de funcţii (f_n) este egal continuu pe A dacă ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$\forall\, x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |x' - x| < \delta \implies |f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Un şir de funcţii (f_n) este egal uniform continuu pe A dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |x' - x''| < \delta \implies |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Un şir de funcţii (f_n) este egal mărginit pe A dacă

$$\exists M > 0 \text{ a.î. } |f_n(x)| < M,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A.$$

Teoremă (Arzela-Ascoli)

Dacă (f_n) este un şir de funcţii egal continuu şi egal mărginit pe $[a, b]$, atunci (f_n) conţine un subşir (f_{n_k}) uniform convergent pe $[a, b]$.

SERII de FUNCŢII - definiţii

Considerăm un şir de funcţii (f_n), unde $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este serie de funcţii convergentă / divergentă în punctul $a \in A$, dacă seria de numere reale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ este convergentă / divergentă.

Un punct $a \in A$ se numeşte punct de convergenţă al seriei de funcţii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ dacă seria este convergentă în a.

Muţimea tuturor punctelor de convergenţă se numeşte muţimea de convergenţă a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Suma unei serii de funcţii

Funcţia $S_n : A \to \mathbb{R}$ definită prin

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),\ \forall x \in A$$

se numeşte suma parţială de ordinul n a seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge pe $B \subseteq A$ la funcţia $S : B \to \mathbb{R}$ dacă

$$\forall x \in B,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(x, \varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,\ \forall n > N.$$

Dacă N nu depinde de x, atunci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform pe B la S.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absolut pe B dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ converge pe B.
! convergenţa absolută $\Rightarrow$ convergenţa (punctuală)

Serii de funcţii - exemplu

Exemplu: Considerăm $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, pentru $n \in \mathbb{N}$.

Suma parţială de ordinul n este funcţia $S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată de:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} = x^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^k = x^2 \frac{1 - \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n}{1 - \frac{1}{1+x^2}}$$

şi deci: $S_n(x) = (1+x^2) \left[1 - \left(\dfrac{1}{1+x^2} \right)^n \right]$.

În concluzie, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ este convergentă pe $\mathbb{R}$ şi suma ei este

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & , \text{ dacă } x \neq 0, \\ 0 & , \text{ dacă } x = 0. \end{cases}$$

Criterii de convergenţă pentru serii de funcţii

Seria $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} f_n$ este restul de ordin k al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

1: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge d.n.d. restul de orice ordin k al seriei converge.

2: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge d.n.d. şirul resturilor de ordin k converge la 0.

Criteriul lui Cauchy: Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniform pe A d.n.d.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ N = N(\varepsilon) > 0$ a.î. $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon,\ \forall n > N,\ \forall x \in A.$

Criterii de convergenţă pentru serii de funcţii

Criteriul lui Weierstrass:

Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ o serie convergentă de numere reale pozitive. Dacă

$$|f_n(x)| \leq M_n, \ \forall x \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut şi uniform convergentă.

Exemplu Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin^n x}{n^2}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, deoarece:

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin x|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este o serie armonică convergentă ($p = 2$).

Serii de puteri

O serie de funcţii de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

se numeşte serie de puteri.

Termenul general al acestei serii este funcţia

$$f_n(x) = a_n x^n$$

unde (a_n) este un şir de numere reale, numit şirul coeficienţilor.

Seria de puteri centrată în punctul x_0:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Teorema Abel-Cauchy-Hadamard

Considerăm seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Notând

$$\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty]$$

şi raza de convergenţă

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & \text{dacă } \omega \neq 0 \\ +\infty, & \text{dacă } \omega = 0 \end{cases}$$

seria de puteri este

- absolut convergentă pentru $|x| < R$.
- divergentă pentru $|x| > R$.
- uniform convergentă pe orice interval închis $[-r, r] \subset (-R, R)$.

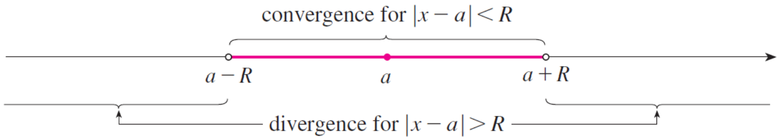
!!! această teoremă nu oferă nicio informaţie despre convergenţa seriei în $x = \pm R$.

Teorema Abel-Cauchy-Hadamard

Studiem convergenţa unei serii de puteri centrate în punctul a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

cu ajutorul schimbării de variabile $y = x - a$, aplicând Teorema ACH:



Exemplu

Fie seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

Şirul coeficienţilor este $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Calculăm:

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{1}{\omega} = 1$$

- Seria de puteri este absolut convergentă pentru $|x| < 1$.
- Seria de puteri este divergentă $|x| > 1$.

Pentru $x = 1$, avem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to$ convergentă! (serie armonică).

Pentru $x = -1$, avem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} \to$ convergentă! (serie alternantă).

Intervalul de convergenţă este $[-1, 1]$.

Aritmetica seriilor de puteri

Considerăm seriile de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ cu razele de convergenţă R_1 şi R_2, unde $0 \leq R_1 \leq R_2$.

Următoarele serii au raze de convergenţă cel puţin egale cu R_1:

- suma $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$
- produsul scalar $\sum_{n=0}^{\infty} k \cdot a_n x^n$
- produsul Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, unde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Aritmerica seriilor de puteri

Mai mult, notând sumele celor două serii cu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \quad \text{şi} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x),$$

atunci, pentru orice $x \in (-R_1, R_1)$, avem:

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = f(x) + g(x)$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} k \cdot a_n x^n = k \cdot f(x)$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x) g(x)$

Continuitatea şi derivabilitatea sumei seriei de puteri

Teoremă (Continuitatea)

Suma $f(x)$ *a unei serii de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este o funcţie continuă pe intervalul* $(-R, R)$, *unde* R *este raza de convergenţă.*

Teoremă (Derivabilitatea)

Suma $f(x)$ *a unei serii de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *cu raza de convergenţă* $R > 0$ *este derivabilă de* k *ori, pentru orice* $k \in \mathbb{N}$ *şi*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} \quad , \forall\, x \in (-R, R).$$

Pentru $x = 0$, avem $f^{(k)}(0) = a_k \cdot k! \implies a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Continuitatea şi derivabilitatea sumei seriei de puteri

Avem următoarea reprezentare:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad , \forall\, x \in (-R, R).$$

Deci, pentru $|x|$ suficient de mic, putem estima

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Similar, pentru seria de puteri centrată în x_0, avem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad , \forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Deci, dacă x is suficient de aproape de x_0, putem estima

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Exemplu

Considerând $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$, for $x \in [-1,1]$, avem:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^n)'}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}.$$

Înmulţind cu x^2 şi derivând, obţinem:

$$(x^2 f'(x))\,' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 \quad , \forall\, x \in (-1,1).$$

Integrând, obţinem:

$$x^2 f'(x) = \int \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) dx = -\ln(1-x) - x$$

şi deci:

$$f(x) = -\int \left(\frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x} + 1 \quad , \forall\, x \in (-1,1).$$

Polinoame Taylor

Motivare. Găsiţi o metoda practică de a estima e^x, $\sin(x)$, etc. cu o anumită acurateţe (ex "cinci zecimale").

Fie f o funcţie derivabilă de n ori, cu derivata $f^{(n)}$ continuă pe un interval deschis ce conţine punctul a.

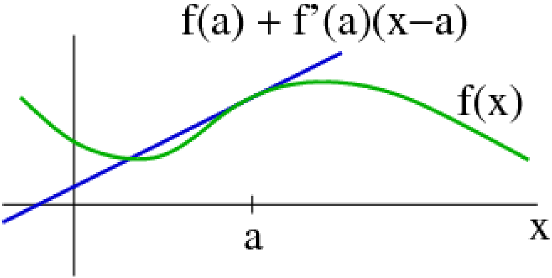
Polinomul Taylor de ordin n al funcţiei f în punctul a este:

$$T_{n,a}f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Întrebare. Putem aproxima valoarea funcţiei f în punctul x prin valoarea polinomului Taylor $T_{n,a}f(x)$?

Polinoame Taylor - cazuri simple

- $T_{0,a}f(x) = f(a) \to$ constant;
- aproximare liniară: $T_{1,a}f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$



Polinoame Taylor - exemple

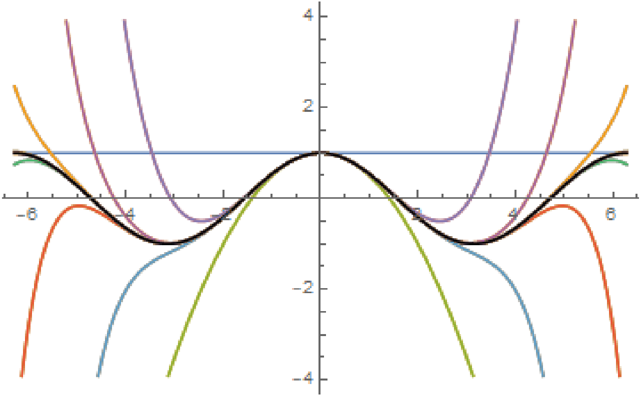
Găsiţi polinomul Taylor de ordin $n = 6$ al funcţiei $f(x) = \cos(x)$ în punctul $a = 0$.

k	$f^{(k)}(x)$	$f^{(k)}(0)$
0	$\cos(x)$	1
1	$-\sin(x)$	0
2	$-\cos(x)$	-1
3	$\sin(x)$	0
4	$\cos(x)$	1
5	$-\sin(x)$	0
6	$-\cos(x)$	-1

$$T_{6,0}f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

Polinoame Taylor - exemple

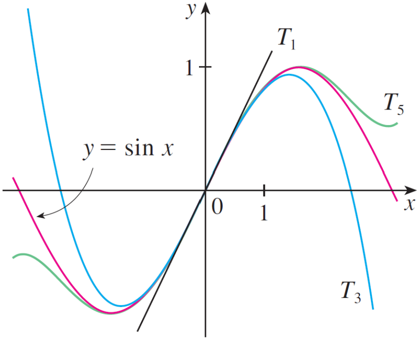
Polinoame Taylor pentru $f(x) = \cos(x)$ de ordin $n \in \{0, 2, 4, ..., 14\}$



Polinoame Taylor - exemple

Pentru $f(x) = \sin(x)$ avem:

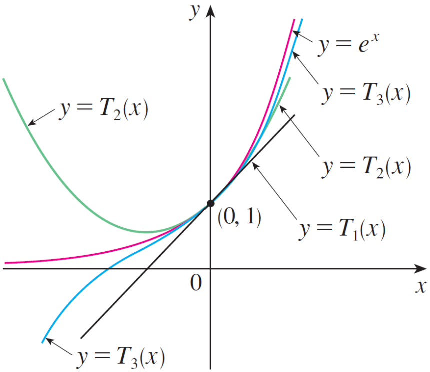
$$T_{1,0}f(x) = x \quad , \quad T_{3,0}f(x) = x - \frac{x^3}{3!} \quad , \quad T_{5,0}f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$



Polinoame Taylor - exemple

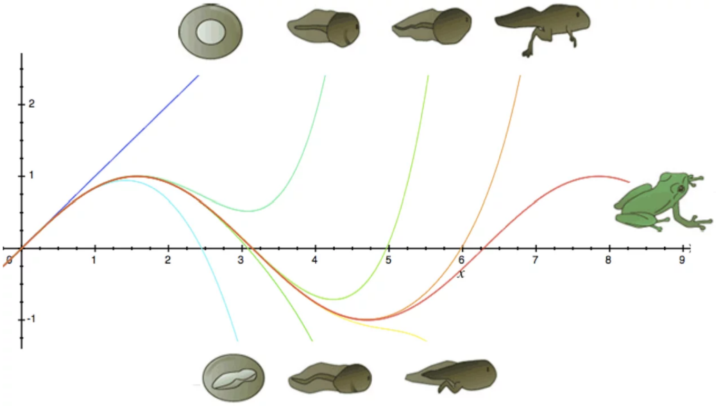
Pentru $f(x) = e^x$ avem:

$$T_{n,0}f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$



Aplicaţii

Aproximarea numerică a funcţiilor.



Aplicaţii

Exemplu: Aproximaţi $\cos(0.1)$.

O valoare aproximată este dată de polinomul Taylor de ordin 6:

$$T_{6,0}f(0.1) = 1 - \frac{(0.1)^2}{2!} + \frac{(0.1)^4}{4!} - \frac{(0.1)^6}{6!} = 0.995004$$

Care este acurateţea acestei aproximări?

Prima teorema a restului

Teoremă

Fie o funcţie f derivabilă de $(n+1)$ ori, cu derivata $f^{(n+1)}$ continua pe un interval ce conţine punctele a şi x. Atunci diferenta dintre $f(x)$ şi $T_{n,a}f(x)$ este dată de

$$f(x) - T_{n,a}f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

unde $c \in (a,x) \cup (x,a)$.

Eroarea de aproximare a funcţiei $f(x)$ prin valoarea polinomului $T_{n,a}f(x)$ este restul Taylor:

$$R_{n,a}f(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Formula lui Taylor de ordin n:

$$f(x) = T_{n,a}f(x) + R_{n,a}f(x)$$

Prima teorema a restului: aplicaţie

Exemplu: Găsiţi eroarea aproximării lui $\cos(0.1)$ prin $T_{6,0}(0.1) = 0.995004$.

$$R_{6,0}f(x) = \frac{x^7}{7!}f^{(7)}(c) = \frac{x^7}{7!}\sin(c)$$

Deci:

$$R_{6,0}f(0.1) = \frac{(0.1)^7}{7!}\sin(c) \quad \text{unde } c \in (0, 0.1)$$

Eroarea absolută de aproximare este:

$$\epsilon_a = |R_{6,0}f(0.1)| \le \frac{(0.1)^7}{7!} = \frac{10^{-7}}{5040} \le \frac{10^{-7}}{5000} = 2 \cdot 10^{-11}$$

$\to$ acurateţea este de cel puţin 10 zecimale

Serii Taylor

Presupunem că funcţia f are derivate de orice ordin pe un interval ce conţine punctul a şi că

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,a}f(x) = 0$$

pentru orice x din acel interval. Atunci pentru orice x din acel interval, avem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

numită dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei $f(x)$ în punctul a.

Dacă $a = 0$, seria de mai sus se mai numeşte şi serie MacLaurin.

Dezvoltarea in serie Taylor: exemple

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad , \ x \in (-1, 1]$$