Şiruri şi serii

ŞIRURI

Definiție

Un **şir de numere reale** este o funcție $n \mapsto a_n$ a cărei domeniu este mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ şi a cărei valori aparțin mulțimii numerelor reale $\mathbb{R}$. Notația uzuală: (a_n).

Proprietăți

- Un şir (a_n) se numeşte **crescător** dacă $a_n \leq a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
- Un şir (a_n) se numeşte **descrescător** dacă $a_n \geq a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
- Un şir care este crescător sau descrescător se numeşte **şir monoton**.
- Spunem că un şir (a_n) este **mărginit** dacă există un număr $M > 0$ astfel ca $|a_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiție

- Sirul (a_n) **converge** la numărul real L (are **limita** L) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n - L| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq N$.
- Spunem că limita şirului (a_n) este $+\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există N_M astfel încât $a_n > M$ pentru orice $n > N_M$.
- Spunem că limita şirului (a_n) este $-\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există N_M astfel încât $a_n < -M$ pentru orice $n > N_M$.

Remarci

- Dacă şirul (a_n) este convergent la L, atunci orice subşir (a_{n_k}) al şirului (a_n) converge la L.
- Există şiruri care nu au limită (de exemplu, şirul $a_n = (-1)^n$).
- Dacă limita şirului (a_n) există, atunci ea este unică.
- Dacă şirul (a_n) este convergent la un număr real L, atunci el este mărginit.

Definiții

- **Mulțimea punctelor limită** a şirului (a_n) (notată cu $\mathscr{L}(a_n)$) este mulțimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care există un subşir (a_{n_k}) al şirului (a_n) astfel încât $\lim\limits_{n_k \to \infty} a_{n_k} = x$.
- Şirul (a_n) este convergent la L, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$, dacă şi numai dacă $\mathscr{L}(a_n) = \{L\}$.
- **Limita superioară** a şirului (a_n) este $\sup \mathscr{L}(a_n)$. Notația uzuală: $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ sau $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n$.
- **Limit inferioară** a şirului (a_n) este $\inf \mathscr{L}(a_n)$. Notația uzuală: $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$ sau $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n$.

Convergența șirurilor monotone și mărginite

Orice șir monoton și mărginit este convergent.

Teorema Bolzano-Weierstrass

Orice șir mărginit (a_n) are cel puțin un subșir convergent.

Reguli de calcul pentru limite

Dacă limitele $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ există și sunt finite, atunci:

1. Regula de înmulțire cu un scalar: $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A$ pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
2. Regula sumei: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$
3. Regula produsului: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$
4. Regula raportului: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ (presupunând că $b_n \neq 0$ și $B \neq 0$)

Regula cleștelui pentru șiruri

Dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ atunci și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Regula lui L′Hospital pentru șiruri

Presupunem că $a_n = f(n)$ și $b_n = g(n) \neq 0$ unde f și g sunt două funcții derivabile pentru care are loc una din condițiile următoare:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ sau

b. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (dacă limita din partea dreaptă a egalității există).

Lema lui Stolz-Cesaro

Fie două șiruri (a_n) și (b_n), șirul (b_n) fiind pozitiv, strict crescător și nemărginit. Atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

(dacă limita din partea dreaptă a egalității există).

Lema lui Cauchy-d'Alembert

Fie (a_n) un șir de numere reale pozitive. Atunci: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (dacă limita din partea dreaptă a egalității există).

SERII

Definiție

- O **serie (infinită) de numere reale** este o expresie de forma: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$
  unde (a_n) este un şir de numere reale; termenul a_n se numeşte **termenul general** al seriei.
- **Suma parțială de ordinul *n*** a seriei este suma primilor n termeni: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Definiție

- Seria $\sum a_n$ este **convergentă** dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale (S_n) este convergent.
- Seria $\sum a_n$ este **divergentă** dacă şi numai dacă şirul sumelor parțiale (S_n) este divergent.
- Limita şirului sumelor parțiale $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ se numeşte **suma seriei** şi notăm $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.
- Spunem că seria $\sum a_n$ este **absolut convergentă** dacă şi numai dacă $\sum |a_n|$ este convergentă.

Remarcă

Convergența absolută implică convergența simplă (dar nu întotdeauna şi reciproc).

♠ Serii geometrice

Seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ $(a \neq 0)$ este convergentă d.n.d. $|r| < 1$. În acest caz, suma ei este $S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{a}{1-r}$.

♠ Serii armonice

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, unde $p \in \mathbb{R}$, se numeşte ***p*-serie**,şi este convergentă d.n.d. $p > 1$.

Condiție

Dacă $\sum a_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Remarcă

- Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ sau limita nu există, atunci seria infinită $\sum a_n$ este divergentă.
- Inversul condiției anterioare nu este adevărat. (*seria armonică* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă).

Criteriul lui Cauchy pentru convergența unei serii

Seria $\sum a_n$ converge dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există N astfel încât pentru $n \geq N$ și $p \geq 1$ are loc inegalitatea: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Adunarea și înmulțirea

Dacă seriile $\sum a_n$ și $\sum b_n$ converg, atunci seriile $\sum(a_n + b_n)$ și $\sum c a_n$ (cu $c \in \mathbb{R}$) converg și

1. $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$
2. $\sum c a_n = c \sum a_n$

CRITERII DE CONVERGENȚĂ

Criteriul integralei

Fie $f : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ o funcție descrescătoare și șirul (a_n) definit prin $a_n = f(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Considerăm $j_n = \int_1^n f(x)\,dx$. Seria $\sum a_n$ este convergentă d.n.d. șirul (j_n) este convergent.

Criteriul comparației I

Dacă $0 \leq a_n \leq b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci:
1. dacă $\sum b_n$ este convergentă atunci și $\sum a_n$ este convergentă.
2. dacă $\sum a_n$ este divergentă atunci și $\sum b_n$ este divergentă.

Criteriul comparației II

Presupunem că seriile $\sum a_n$ și $\sum b_n$ sunt serii cu termeni pozitivi, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty)$. Atunci, $\sum a_n$ este convergentă dacă și numai dacă $\sum b_n$ este convergentă.

Criteriul lui Leibnitz pentru serii alternante

Dacă (b_n) este un șir descrescător de numere reale astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ atunci seria alternantă $\sum(-1)^n \cdot b_n$ este convergentă.

Criteriul raportului

Presupunem că limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ există sau este infinită. Atunci seria $\sum a_n$
1. este absolut convergentă dacă $L < 1$;
2. este divergentă dacă $L > 1$.
Dacă $L = 1$, acest criteriu nu este concludent.

Criteriul rădăcinii

Presupunem că limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ există sau este infinită. Atunci seria $\sum a_n$
1. este absolut convergentă dacă $L < 1$;
2. este divergentă dacă $L > 1$.
Dacă $L = 1$, acest criteriu nu este concludent.

Exemple

Şiruri

Exemplul 1

Să demonstrăm, pe baza definiției, că $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ converge la 0.

Soluție:
Fie $\varepsilon > 0$. Atunci

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Big|^2 \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Considerăm $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$.

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N = N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, avem $\Big|a_n - 0\Big| < \varepsilon$.
În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplul 2

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 1}{5n^2 + 10n}$.

Soluție:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 1}{5n^2 + 10n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(5 + \frac{10}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{10}{n}} = \frac{3}{5}$$

Exemplul 3

Calculăm $\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ și $\overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n$ pentru șirul $a_n = (-1)^n$.

Soluție:

$$n = 2k \qquad \Rightarrow a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
$$n = 2k + 1 \Rightarrow a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

Mulțimea punctelor limită este $\mathscr{L}(a_n) = \{-1, 1\}$. Atunci

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf \mathscr{L}(a_n) = \inf\{-1, 1\} = -1$$
$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup \mathscr{L}(a_n) = \sup\{-1, 1\} = 1$$

Remarcă: Cum $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1 \neq 1 = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, rezultă că **nu** există $\lim_{n\to\infty} a_n$

Exemplul 4

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n^2}{2^n}$.

Soluție:
Fie $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$-1 \le \cos n^2 \le 1 \,\Big|\, \cdot \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow -\frac{1}{2^n} \le \frac{\cos n^2}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, aplicând criteriul cleștelui, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n^2}{2^n} = 0$.

Exemplul 5

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, unde $a_n = \dfrac{e^{2n}}{n}$.

Soluție:
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x}$. Observăm că $f(n) = a(n) = a_n$.

Atunci, aplicând regula lui l'Hospital, avem că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{2n}}{n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}}{1} = +\infty.$$

Exemplul 6

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{n}$.

Soluție:
Notăm $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$ and $b_n = n$. Avem că $b_n \nearrow \infty$ (exercițiu)
Atunci, aplicând Lema lui Stolz-Cesaro, obținem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)}{n + 1 - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Exemplul 7

Calculăm $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$.

Soluție:

Notăm $a_n = n^2$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem că $a_n \geq 0$. Rezultă, aplicând Lema lui Cauchy-d′Alembert, că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 2\cdot 0 + 0 = 1.$$

Serii

Exemplul 1

Calculăm suma parțială de rang n și determinăm suma seriei pentru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Soluție:

Observăm că $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. (verificați!). Atunci

$k=1 \Rightarrow \dfrac{1}{1\cdot 2} = 1 - \dfrac{1}{2}$

$k=2 \Rightarrow \dfrac{1}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$

$k=3 \Rightarrow \dfrac{1}{3\cdot 4} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}$

...

$k=n-1 \Rightarrow \dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$

$k=n \Rightarrow \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Suma parțială de ordinul (rangul) n este

$$\Rightarrow S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n-1}$$

Suma seriei este

$$s = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1.$$

Remarcă: Cum suma seriei este $s = 1 < \infty$, avem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ este convergentă.

Exemplul 2

Studiem convergența seriilor: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\arcsin 1)^n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2}{3n^2+1}$.

Soluție:

a) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\arcsin 1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^n$ este o serie geometrică cu $r = \dfrac{\pi}{2}$.

As $|r| = \left|\dfrac{\pi}{2}\right| = \dfrac{\pi}{2} > 1$, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\arcsin 1)^n$ este divergentă.

b) Cum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3} \neq 0$$

rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2}{3n^2+1}$ este divergentă.

Exemplul 3

Studiem convergenţa seriilor: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ folosind criteriul integralei.

Soluţie:

a) Fie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

Observăm că funcţia f este descrescătoare (verificaţi!) şi $f(n)=\frac{1}{n^2}$.

Calculăm

$j_n=\int\limits_1^n f(x)dx=\int\limits_1^n\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^n=-\frac{1}{n}+1$

$\lim\limits_{n\to\infty}j_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}+1\right)=-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}1=-0+1=1$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}j_n=1<\infty$, rezultă că (j_n) este şir convergent şi, aplicând criteriul integralei, obţinem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă.

b) Fie $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. Observăm că funcţia f este descrescătoare (verificaţi) şi $f(n)=\frac{1}{n\ln n}$

Calculăm

$j_n=\int\limits_2^n f(x)dx=\int\limits_2^n\frac{1}{x\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big|_2^n=\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)$

$\lim\limits_{n\to\infty}j_n=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(\ln n)-\ln(\ln 2))=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(\ln 2)-\lim\limits_{n\to\infty}\ln(\ln 2)=\infty-\ln(\ln 2)=\infty$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}j_n=\infty$, rezultă că (j_n) este şir divergent şi, aplicând criteriul integralei, obţinem că $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ este divergentă.

Exemplul 4

Studiem convergenţa seriilor: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+3)}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^n\sin\frac{1}{7^n}$.

Soluţie:

a) Notăm $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+3)}}=\frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+3n}}$.

Observăm că $0<a_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+3n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

MI: Cum $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este o serie armonică cu $p=\frac{3}{2}>1$, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ este convergentă şi, aplicând criteriul I al comparaţiei, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ este convergentă.

MII: Calculăm

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+3n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+4n^2+3n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3\left(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0+0}}=\frac{1}{1}=1$$

Cum $l = 1 \in (0, \infty)$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ este o serie convergentă (serie armonică cu $p = \frac{3}{2} > 1$), aplicând criteriul II al comparației, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Notăm $a_n = 5^n \sin \frac{1}{7^n}$.

MI: Cum $0 \leq \sin x \leq x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\frac{1}{7^n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru orice $n \geq 1$, obținem

$0 \leq \sin \frac{1}{7^n} \leq \frac{1}{7^n} \Big| \cdot 5^n \Leftrightarrow 0 \leq 5^n \sin \frac{1}{7^n} \leq \frac{5^n}{7^n} \Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq \left(\frac{5}{7}\right)^n$.

Cum $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n$ este o serie convergentă (serie geometrică cu $|r| = \left|\frac{5}{7}\right| = \frac{5}{7} < 1$), aplicând criteriul I al comparației, obținem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

MII: Cum $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ și $\frac{1}{7^n} \to 0$, calculăm

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n \sin \frac{1}{7^n}}{\frac{5^n}{7^n}} = \lim_{n\to\infty} 5^n \cdot \frac{7^n}{5^n} \cdot \sin \frac{1}{7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{7^n}}{\frac{1}{7^n}} = 1.$$

Cum $l = 1 \in (0, \infty)$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n$ este convergentă, aplicând criteriul II al comparației, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Exemplul 5

Studiem convergența seriei alternante $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$.

Soluție:

Notăm $b_n = \frac{1}{3^n}$. Observăm că $b_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$ și (b_n) este un șir descrescător, deoarece

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{3^n}{3^n \cdot 3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Mai mult, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

Atunci, aplicând criteriul lui Leibniz pentru serii alternante, obținem că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$ este convergentă.

Exemplul 6

Studiem convergența seriilor: a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{2^n((n+1)!)^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+3n} - n)^n$.

Soluție:

a) Notăm $a_n = \frac{(n+3)!}{2^n((n+1)!)^2}$ și observăm că $a_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$.

Calculăm

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)!}{2^{n+1}((n+2)!)^2} \cdot \frac{2^n((n+1)!)^2}{(n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)!(n+4)}{2^n \cdot 2((n+1)!)^2(n+2)^2} \cdot \frac{2^n((n+1)!)^2}{(n+3)!}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{2(n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\dfrac{4}{n}\right)}{2n^2\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{4}{n}}{2n\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)} = 0$$

Cum $l = 0 < 1$, aplicând criteriul raportului, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Notăm $a_n = (\sqrt{n^2+3n}-n)^n$ şi observăm că $a_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$. Calculăm

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\sqrt{n^2+3n}-n)^n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n}-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+3n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-n^2}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{3}{n}\right)}+n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+1}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{3}{2}$$

Cum $l = \dfrac{3}{2} > 1$, aplicând criteriul rădăcinii, rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Exerciții

1. Să se demonstreze riguros (pe baza definiției) că $a_n = \frac{1}{n}$ este convergent la 0.

2. Să se demonstreze riguros (pe baza definiției) că $a_n = \frac{2n}{5n-3}$ is este convergent la $\frac{2}{5}$.

3. Să se demonstreze riguros (pe baza definiției) că $a_n = 1 + \left(\frac{9}{10}\right)^n$ este convergent la 1.

4. Calculați limitele următoarelor şiruri:

a. $a_n = \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n$

b. $a_n = \frac{\sin n}{3^n}$

c. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$

d. $a_n = \frac{\ln n}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$

e. $a_n = \frac{n^{2005}}{(n+1)^x - n^x}$, $x > 0$

f. $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)}$

g. $a_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n}$

h. $a_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+2)}\right)$

i. $a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$

j. $a_n = \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$

k. $a_n = \sqrt[n]{n}$

l. $a_n = \sqrt[n]{n!}$

m. $a_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$

n. $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$

5.Găsiți $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ şi $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ pentru următoarele şiruri:

a. $a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \\ 1, & n = 2k \end{cases}$

b. $a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k \\ \frac{1}{n}, & n = 3k+1 \\ n, & n = 3k+2 \end{cases}$

c. $a_n = \cos(n\pi)$

d. $a_n = \frac{n}{n+1}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

e. $a_n = \frac{[na]}{n+1}$, $a \in \mathbb{R}^\star$

f. $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

g. $a_n = \frac{n^{(-1)^n}}{n} + \sin^2\frac{n\pi}{4}$

h. $\cos^n\frac{2n\pi}{3}$

6. Calculați suma parțială de rang n şi determinați suma seriei:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

c. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

d. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

e. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$

f. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

g. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

h. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{6n}{n^4-5n^2+4}$

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9n^2+3n-2}$

j. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$

7. Stabiliți dacă următoarele serii sunt convergente sau divergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sin \frac{1}{n}}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}\right)$ g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + 3^n}$ i. $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan 1)^n$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n+5^n}{3^n}$ h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ j. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{7}{11}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$

8. Folosind criteriul integralei, determinați dacă următoarele serii sunt convergente sau divergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1/n}}{n^2}$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, p \in \mathbb{R}$

9. Folosind criteriile comparației, determinați dacă următoarele serii sunt convergente sau divergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$ m. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$ q. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{5^n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^4+2}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n}$ j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$ n. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ r. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^{3/2}}$ g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n+3^n}$ o. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2 \cdot 3^n}$ s. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{n^2+n+1}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{n^4+1}$ h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \ln n}$ l. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+3^n}$ p. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin n}{n^2}$ t. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{3}{n^2+4n}\right)$

10. Determinați dacă următoarele serii alternante sunt convergente sau divergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^2+2}}$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ g. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$ i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n^2+2}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{\sqrt{n}}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$ h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^{3/2}}$

11. Folosind criteriile raportului sau rădăcinii, determinați dacă următoarele serii sunt convergente sau divergente.

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}, a \in \mathbb{R}$ i. $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, a > 0$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\sqrt{n^2-2}}$ d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 n^2}{(2n)!}$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n! n}$ h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}, a \in \mathbb{R}$ j. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+1}{bn+2}\right)^n, a, b > 0$

Exerciții suplimentare

12. Fie (F_n) șirul lui Fibonacci dat de relația de recurență $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, cu $F_0 = F_1 = 1$. Arătați că $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ există și este egală cu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

13. Se dă șirul (a_n) definit prin relația de recurență:

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$$

Demonstrați prin inducție că $a_n < 4$ pentru orice n și arătați că sirul (a_n) este crescător. Găsiți limita șirului.

14. Studiați dacă următoarele serii sunt absolut convergente, convergente sau divergente.

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p \in \mathbb{R}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{3^{n^2}}$

j. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{3^n (n!)^2}$