Examen la Fundamente ale Matematicii
21.I.2022, ora 11:00, IR1, grupele 1, 2

P 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, iar $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul lui Fibonacci, definit prin $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ şi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pentru orice $n \geq 2$. Arătaţi că

$$A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*,$$

şi că $F_{n-1} \cdot F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

P 2. a) Fie $m, n, r \in \mathbb{N}^*$ numere naturale cu proprietatea că r este restul împărţirii numărului m prin numărul n. Arătaţi că restul împărţirii numărului $M = 2^m - 1$ prin $N = 2^n - 1$ este $R = 2^r - 1$.
b) Arătaţi că pentru orice numere naturale nenule m, n are loc egalitatea

$$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1.$$

P 3. Determinaţi inversa matricei $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{Q})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P 4. Fie A şi B două puncte fixe în planul $\mathcal{P}$, iar $k > 0$, $k \neq 1$, un număr real pozitiv fixat. Arătaţi că mulţimea

$$\mathcal{M} = \{P \in \mathcal{P} \mid PA = k \cdot PB\}$$

este un cerc. Arătaţi că centrul acestui cerc se află pe dreapta AB, dar nu pe segmentul $[AB]$.

P 5. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$, $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon oarecare cu n laturi în plan, iar G centrul de greutate al acestuia. Arătaţi că pentru orice punct M din plan are loc egalitatea

$$n^2 MG^2 = n\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 - \sum_{1\leq i<j\leq n} A_iA_j^2\,.$$

P 6. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ şirurile definite prin

$$a_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad b_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\,.$$

Arătaţi că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = 1$, $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n^n = e$ şi că

$$a_n^n = \left((1 + (a_n - 1))^{\frac{1}{a_n - 1}}\right)^{\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\cdot b_n}\,.$$

Deduceţi că $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n = \frac{1}{e}$.