Algoritmi şi Structuri de Date I. Seminar 1: Rezolvarea algoritmică a problemelor

- De la ce pornim? Ce se dă şi ce se cere?
- Putem abstractiza problema? Este problema similară unor probleme pe care le-am rezolvat anterior?
- Este vreo diferenţă între modul în care rezolvăm problemele în matematică şi abordarea din informatică?

Problema 1 (*Examen admitere la Informatică.*) La examenul de bacalaureat am obţinut media generală 7.50, nota la proba de Matematică fiind 7.25 iar la Informatică 8.75. Care este nota minimă pe care ar trebui să o obţin la proba scrisă a examenului de admitere pentru ca media de admitere să fie cel puţin 5?

Extras din Metodologia de admitere la specializările de Informatică (2019-2020):

> La domeniul Informatică media de admitere se calculează ca $N = (N3 + \max\{N1, N2\})/2$, unde $N1$ este media generală la examenul de bacalaureat, $N2$ este nota la proba de matematică sau informatică de la examenul de bacalaureat (se alege cea mai mare dintre ele, iar lipsa notei se echivalează cu nota 4) iar $N3$ este nota obţinută la proba scrisă de admitere la matematică sau informatică.

Problema 2 (*Inmulţirea à la russe.*) Se consideră următoarea metodă de înmulţire (numită înmulţirea ”à la russe”) a două numere naturale nenule x şi y: ”Se scrie x alături de y (pe aceeaşi linie). Se împarte x la 2 şi câtul impărţirii se scrie sub x (restul se ignoră deocamdată). Se înmulţeşte y cu 2 iar produsul se scrie sub y. Procedeul continuă construindu-se astfel două coloane de numere. Calculele se opresc în momentul în care pe prima coloană se obţine valoarea 1. Se adună toate valorile de pe coloana a doua care corespund unor valori impare aflate pe prima coloană.”

Exemplu. Fie $x = 13$ şi $y = 25$. Succesiunea de rezultate obţinute prin aplicarea operaţiilor de mai sus este:

x	y	rest	factor multiplicare y
13	$\boxed{25}$	1	2^0
6	50	0	2^1
3	$\boxed{100}$	1	2^2
1	$\boxed{200}$	1	2^3
	325		

a) Prelucrarea descrisă prin metoda de mai sus se termină întotdeauna după un număr finit de paşi ? Ce se întâmplă în cazul în care una dintre valori este egală cu 0?

b) Metoda de mai sus conduce întotdeauna la produsul celor două numere (cu alte cuvinte este o metodă corectă de înmulţire)?

c) Câte operaţii de înmulţire cu 2 sunt necesare? Depinde acest număr de ordinea factorilor?

Problema 3 (*Determinarea părţii întregi.*) Propuneţi o metodă bazată pe operaţii de adunare, scădere şi comparare pentru determinarea părţii întregi a unui număr real. Partea întreagă (numită uneori parte întreagă inferioară şi notată pentru un număr real x cu $\lfloor x \rfloor$) a unui număr real este definită ca fiind cel mai mare număr întreg mai mic decât numărul real respectiv. De exemplu, partea întreagă a lui 2.4 este 2, iar pentru -2.4 este -3.

Problema 4 (*Problema identificării monedei mai uşoare.*) Se consideră un set de n monede identice, cu excepţia uneia care are greutatea *mai mică* decât a celorlalte. Folosind o balanţă simplă (care permite doar compararea greutăţii monedelor plasate pe cele două talere) să se identifice moneda cu greutatea mai mică folosind cât mai puţine comparaţii.

Problema 5 (*Problema clătitelor.*) La un restaurant bucătarul a pregătit clătite (americane) pe care le-a aşezat pe un platou sub forma unei stive. Din păcate nu toate clătitele au acelaşi diametru astfel că stiva nu arată estetic. Chelnerul ia platoul şi având la dispoziţie o spatulă reuşeşte să aranjeze cu o singură mână clătitele astfel încât să fie în ordinea descrescătoare a diametrelor (cea mai mare clatită pe platou iar cea mai mică în vârful stivei). Cum a procedat? Descrieţi problema într-o manieră abstractă şi propuneţi un algoritm de rezolvare.

Problema 6 (*Problema partiţionării echilibrate.*)

Considerăm un set de programe pentru care se cunosc estimări ale timpilor de execuţie şi care trebuie executate utilizând două calculatoare similare. Propuneţi o modalitate de distribuire a execuţiei programelor pe cele două calculatoare astfel încât încărcarea acestora să fie cât mai echilibrată.

Indicaţie. Problema poate fi reformulată (abstractizată) astfel: se consideră o mulţime de numere pozitive, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n > 1$ şi se cere să se determine două submulţimi disjuncte B şi C astfel încât $B \cup C = A$ şi $|\sum_{a \in B} a - \sum_{a \in C} a|$ este minimă. Cea mai simplă metodă este cea a "forţei brute" prin care se generează toate perechile de submulţimi (B, C) şi se alege cea care minimizează diferenţa specificată. Numărul de partiţii distincte (fără a ţine cont de ordinea calculatoarelor) este $2^{n-1} - 1$.

Problema 7 (*Problema acoperirii.*) Se consideră o mulţime cu n elemente (de exemplu $U = \{1, 2, \ldots, n\}$) şi un set S de submulţimi ale acesteia. Se pune problema determinării unei acoperiri minimale a mulţimii U folosind submulţimi din setul S (o acoperire minimală este un subset $A \subset S$ cu proprietatea că $\cup_{s \in A} s = U$ iar numărul de elemente din A este minim). De exemplu pentru $n = 5$ se poate considera setul de submulţimi $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ cu $S_1 = \{1, 3, 5\}$, $S_2 = \{1, 4\}$, $S_3 = \{2, 4\}$, $S_4 = \{2, 5\}$. In acest caz acoperirea minimală se obţine selectând prima dată submulţimea cu cele mai multe elemente (S_1), eliminând din U elementele submulţimii alese (U devine $\{2, 4\}$) şi continuând prin selectarea unei submulţimi care conţine elemente din U (în acest exemplu ar fi S_3). Garantează strategia de a alege la fiecare etapă cea mai numeroasă mulţime care acoperă elementele rămase obţinerea unei soluţii optime? Dacă nu, propuneţi un contraexemplu.

Probleme suplimentare.

1. Se pune problema determinării valorii în baza 10 a unui număr natural pornind de la şirul cifrelor sale binare. Propuneţi o metodă bazată doar pe operaţii elementare (adunare, scădere, înmulţire - ridicarea la putere nu este considerată operaţie elementară). Se urmăreşte ca numărul operaţiilor implicate să fie cât mai mic.

2. Se consideră un număr constituit din 10 cifre distincte, diferit de 9876543210. Să se determine numărul care îl succede în şirul crescător al tuturor numerelor naturale ce conţin 10 cifre distincte.

3. Se consideră un şir de valori nenule (pozitive şi negative). Să se transforme şirul astfel încât toate valorile negative să le preceadă pe cele pozitive iar numărul operaţiilor efectuate să fie cât mai mic.

4. Se consideră un şir cu $n - 1$ valori distincte din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Să se determine, folosind un număr cât mai mic de comparaţii, valoarea care lipseşte din şir.

5. Se consideră următorul joc cu doi jucători bazat pe două stive de monede: una conţinând m monede şi cealaltă conţinând n monede. La fiecare etapă jucătorul care este la rând poate ridica o monedă dintr-una dintre stive sau câte o monedă din ambele stive. Câştigă jucătorul care ridică ultima/ultimele monede. Propuneţi un algoritm care pentru o pereche de valori (n, m) decide dacă pentru jucătorul care face prima mutare există o strategie câştigătoare.

6. Căutaţi pe internet (fragmente din) cartea *How to solve it?* a matematicianului George Polya şi parcurgeţi partea referitoare la etapele care trebuie parcurse în procesul de rezolvare a unei probleme.