Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 11

Integrale curbilinii. Teorema lui Green.

EVA KASLIK, RALUCA MURESAN

Curbe elementare în $\mathbb{R}^2$

O curbă elementară în $\mathbb{R}^2$ este o mulţime de puncte $C \subset \mathbb{R}^2$ pentru care există o funcţie de clasă C^1 $\varphi : [a, b] \to C$ care este bijectivă pe $[a, b)$.

Punctele $A = \varphi(a)$ şi $B = \varphi(b)$ se numesc capetele curbei.

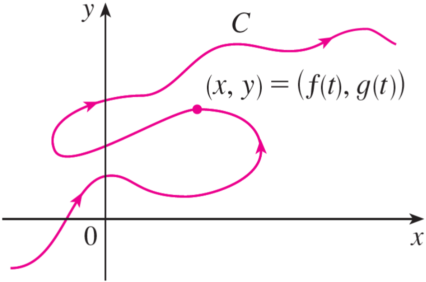
Funcţia φ se numeşte reprezentare parametrică a curbei.

Vectorul $\varphi'(t)$ este tangent curbei în punctul $\varphi(t)$.

Ecuaţii parametrice:

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

unde f şi g sunt componentele scalare ale funcţiei φ.



Curbe elementare în $\mathbb{R}^2$

O curbă elementară închisă este o curbă cu o reprezentare parametrică φ a.î.

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Observaţii:

- Orice curbă elementară are o infinitate de reprezentări parametrice.
- Capetele unei curbe elementare sunt independente de alegerea unei reprezentări parametrice pentru curba respectivă.

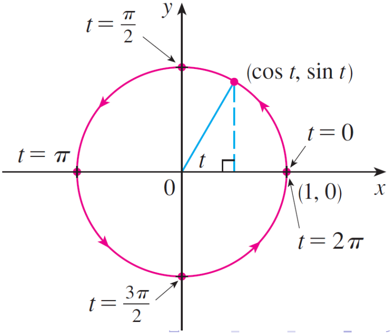
Exemplu: O reprezentare parametrică a cercului $x^2 + y^2 = 1$ este

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\cos t, \sin t).$$

Ecuaţii parametrice:

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$$

Curbă închisă: $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = (1, 0)$.



Lungimea unei curbe în $\mathbb{R}^2$

Lungimea unei curbe elementare $C \subset \mathbb{R}^2$ cu reprezentarea parametrică $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ este:

$$l = \int_a^b \|\varphi'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt$$

unde $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Remarcă: Lungimea unei curbe este independentă de alegerea unei reprezentări parametrice a curbei!

Elementul de arc al curbei C cu reprezentarea φ este

$$ds = \|\varphi'(t)\|\, dt = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt$$

În **exemplul precedent**, lungimea cercului $x^2 + y^2 = 1$ este

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Integrala curbilinie în raport cu elementul de arc în $\mathbb{R}^2$

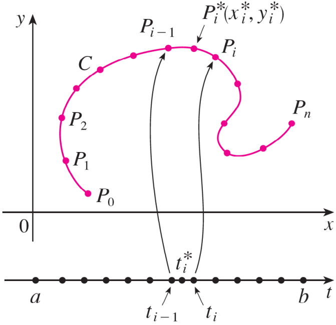
Fie curba $C \subset \mathbb{R}^2$ cu reprezentarea parametrică $\varphi : [a, b] \to C$ şi o funcţie continuă $f : C \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Integrala curbilinie de speţa I (în raport cu elementul de arc):

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2}\, dt$$

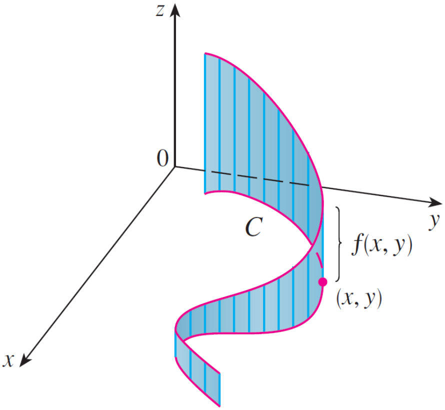
- intervalul $[a, b]$ se împarte în n subintervale $[t_{i-1}, t_i]$, $i = \overline{1, n}$, de lungimi egale
- considerăm $P_i = \varphi(t_i) \in C$
- punctele P_i împart curba C în n arce de lungimi Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n
- alegând un punct intermediar $P_i^*(x_i^*, y_i^*) = \varphi(t_i^*)$, cu $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$

$$\Longrightarrow \int_C f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta s_i$$



Interpretare

Integrala curbilinie în raport cu elementul de arc a unei funcţii pozitive $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in C$ reprezintă aria suprafeţei ("gardului") din figură, având ca şi bază curba C şi înălţimea deasupra punctului (x, y) egală cu $f(x, y)$.

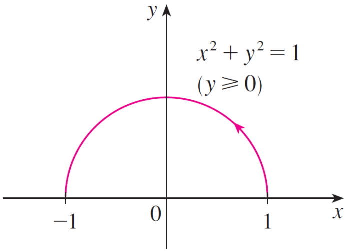


Exemplu

Calculaţi $\int_C (2 + x^2 y) ds$ unde C este semicercul $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

Considerând următoarele ecuaţii parametrice ale curbei C:

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t \in [0, \pi]$$



având în vedere că elementul de arc este

$$ds = \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt = dt$$

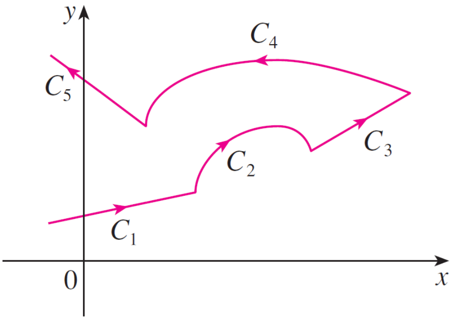
obţinem:

$$\int_C (2 + x^2 y) ds = \int_0^\pi (2 + (\cos t)^2 \sin t) dt = 2\pi - \frac{1}{3} (\cos t)^3 \Big|_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

Integrale curbilinii pe curbe netede pe porţiuni

Dacă curba C este reuniunea unor curbe elementare netede $C_1, C_2, ..., C_n$ pentru care punctul iniţial al curbei C_i este punctul terminal al curbei C_{i-1}, pentru orice $i = \overline{1, n}$, avem:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds + ... + \int_{C_n} f(x,y)ds$$



Integrale curbilinii în raport cu variabilele

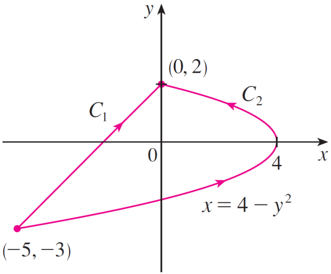
Integralele curbilinii (de speţa II) ale funcţiei f în raport cu variabilele x şi y:

$$\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_1{}'(t)\,dt$$

$$\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\varphi_2{}'(t)\,dt$$

Exemplu. Fie C_2 arcul parabolei $x = 4 - y^2$ de la punctul $(-5,-3)$ la punctul $(0,2)$.

$$C_2 : \begin{cases} x = 4 - t^2 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [-3, 2]$$



$$\Longrightarrow \int_{C_2} (y^2dx + xdy) = \int_{-3}^{2} t^2(-2t)dt + \int_{-3}^{2}(4-t^2)dt = \int_{-3}^{2}(-2t^3+4-t^2)dt = \ldots$$

Integrale curbilinii în $\mathbb{R}^3$

Fie o curbă netedă $C \subset \mathbb{R}^3$ cu reprezentarea parametrică $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, şi o funcţie continuă $f : C \to \mathbb{R}$.

$$\int_C f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t))\sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \varphi_3'(t)^2}\, dt$$

$$\int_C f(x,y,z)dx = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)){\varphi_1}'(t)\, dt$$

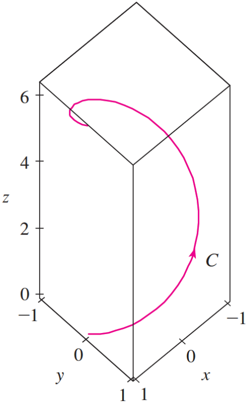
$$\int_C f(x,y,z)dy = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)){\varphi_2}'(t)\, dt$$

$$\int_C f(x,y,z)dz = \int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)){\varphi_3}'(t)\, dt$$

Exemplu

C este elicea circulară cu ecuaţiile parametrice

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$



$$\int_C y \sin z ds = \int_0^{2\pi} (\sin t)^2 \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} dt$$
$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \; dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2t)) dt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(2\pi - \frac{\sin(2t)}{2} \Big|_0^{2\pi} \right) = \sqrt{2}\pi.$$

Teorema lui Green

Teoremă (Teorema lui Green)

Fie D un domeniu închis şi mărginit în planul $\mathbb{R}^2$ cu frontiera formată dintr-o curbă închisă netedă pe porţiuni C.

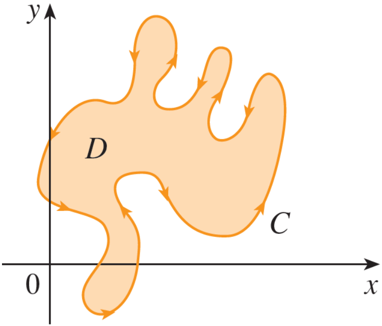
Dacă f şi g sunt funcţii de clasă C^1 pe o regiune deschisă ce conţine domeniul D, atunci

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint_C f\, dx + g\, dy$$

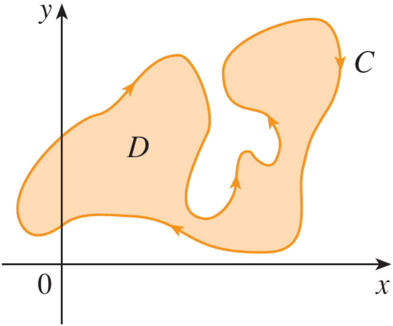
unde se consideră orientarea pozitivă a curbei C.

Orientarea unei curbe închise

orientarea pozitivă



orientarea negativă



Exemplu

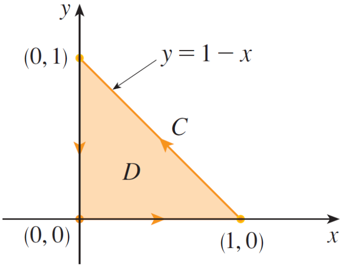
C este frontiera unui triunghi cu laturile reprezentate de segmentele ce unesc punctele $(0,0)$ şi $(1,0)$, $(1,0)$ şi $(0,1)$, $(0,1)$ şi $(0,0)$.

Calculaţi integrala: $\oint_C x^4dx + xydy$.

$$f(x,y) = x^4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$g(x,y) = xy \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x} = y$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1],\ y \in [0,1-x]\}$$



$$\oint_C x^4dx + xydy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D y\ dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} y\ dy\ dx = \int_0^1 \frac{1}{2}y^2\Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2 dx =$$

$$= -\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$