Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 8

Derivabilitatea funcţiilor de mai multe variabile reale.

EVA KASLIK, RALUCA MUREŞAN

Derivate parţiale - exemplu

Indicele termic depinde de temperatură şi de umiditatea relativă: $I = f(T, H)$.

Table 1 Heat index I as a function of temperature and humidity

Relative humidity (%)

Actual temperature (°F) T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

Fixând $H = 70\%$, considerăm $g(T) = f(T, 70)$ - descrie cum depinde indicele termic I de temperatura T atunci când umiditatea relativă este de 70%.

Rata de variaţie:

$$g'(96) = \lim_{h\to 0} \frac{g(96+h) - g(96)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(96+h, 70) - f(96, 70)}{h} = \frac{\partial f}{\partial T}(96, 70)$$

Derivate parţiale - exemplu

Pentru $h = 2$ obţinem: $g'(96) \simeq \dfrac{f(98,70) - f(96,70)}{2} = \dfrac{133 - 125}{2} = 4.$

Pentru $h = -2$ obţinem: $g'(96) \simeq \dfrac{f(94,70) - f(96,70)}{-2} = \dfrac{118 - 125}{-2} = 3.5.$

Considerând valoarea medie, obţinem următoare aproximare:

$$\frac{\partial f}{\partial T}(96,70) = g'(96) \simeq 3.75$$

$\Longrightarrow$ atunci când temperatura este $96^\circ F$ şi umiditatea relativă este 70%, indicele termic creşte cu aproximativ $3.75^\circ F$ pentru fiecare grad de creştere a temperaturii.

Similar,

$$\frac{\partial f}{\partial H}(96,70) \simeq 0.9$$

$\Longrightarrow$ atunci când temperatura este $96^\circ F$ şi umiditatea relativă este 70%, indicele termic creşte cu aproximativ $0.9^\circ F$ pentru fiecare procent de creştere a umidităţii relative.

Derivate parţiale - definiţii

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ o funcţie reală de n variabile şi $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathrm{Int}(A)$.

Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu variabila x_i în punctul a dacă următoarea limită există şi este finită:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)}{h}$$

Valoarea limitei se notează cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ şi se numeşte derivata parţială a funcţiei f în raport cu x_i în punctul a.

Vectorul

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

se numeşte vectorul gradient (gradientul) funcţiei f în punctul a.

Remarci

- Pentru calculul derivatelor parţiale, trebuie sa derivăm (folosind metodele cunoscute) în raport cu variabila x_i, păstrând toate celelalte variabile fixate.
- Toate regulile de derivare (pentru sumă, produs, raport) se păstrează.
- Derivabilitatea parţială a unei funcţii vectoriale de n variabile este echivalentă cu derivabilitatea parţială a tuturor componentelor scalare.
- Pentru o funcţie de două variabile $f(x, y)$ derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Exemplu

Considerăm funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Această funcţie este continuă, deoarece:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\in[0,1]} = 0 = f(0,0).$$

Derivatele parţiale în $(0,0)$ sunt calculate astfel:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Exemplu

Derivatele parţiale într-un punct arbitrar $(x, y) \neq (0,0)$ se calculează folosind formulele uzuale:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)'_y = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

În concluzie, derivatele parţiale sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Interpretarea derivatelor parţiale

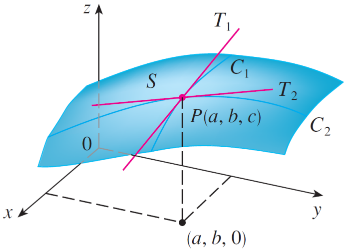
Rate de variaţie: Dacă $z = f(x, y)$ atunci:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ reprezintă rata de variaţie a lui z în raport cu x, când y este fixat;
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ reprezintă rata de variaţie a lui z în raport cu y, când x este fixat.

Pante: $z = f(x, y)$ este o suprafaţă S în $\mathbb{R}^3$.

$P(a, b, c)$ un punct pe suprafaţă: $c = f(a, b)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b)$ reprezintă pantele tangentelor în punctul $P(a, b, c)$ la curbele C_1 and C_2 determinate de intersecţia suprafeţei S cu planele $y = b$ şi respectiv, cu $x = a$.



Derivate parţiale - exemplu

Indicele de masă corporală al unei persoane se defineşte ca

$$B(m,h) = \frac{m}{h^2}, \quad \text{unde } m \text{ şi } h \text{ sunt greutatea şi înălţimea persoanei.}$$

$$\frac{\partial B}{\partial m} = \frac{1}{h^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial m}(64, 1.68) = \frac{1}{(1.68)^2} \simeq 0.35 \ (kg/m^2)/kg$$

Aceasta este rata de modificare a IMC în raport cu greutatea, pentru o persoană cu greutatea de $64\ kg$ şi înălţimea de $1.68\ m$. Dacă greutatea creşte cu $1\ kg$, şi înălţimea rămâne neschimbată, IMC creşte cu aproximativ 0.35.

$$\frac{\partial B}{\partial h} = \frac{-2m}{h^3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial B}{\partial h}(64, 1.68) = -\frac{128}{(1.68)^3} \simeq -27 \ (kg/m^2)/m^2$$

Aceasta este rata de modificare a IMC în raport cu înălţimea, pentru o persoană cu greutatea de $64\ kg$ şi înălţimea de $1.68\ m$. Dacă persoana se află în creştere şi greutatea sa rămâne neschimbată, o creştere de $1\ cm$ în înălţime implică o descreştere a IMC cu aproximativ $27(0.01) = 0.27$.

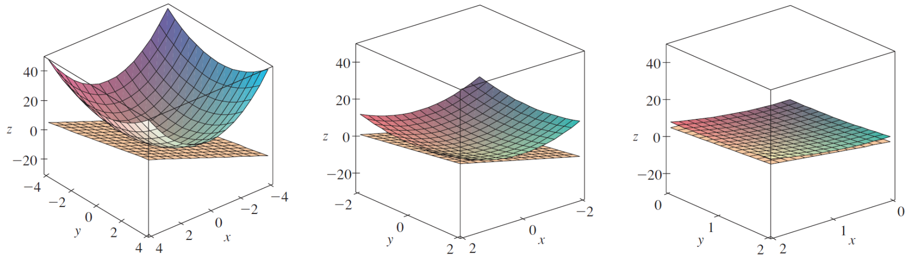
Planul tangent şi derivatele parţiale

Dacă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ are derivate parţiale continue, ecuaţia planului tangent la suprafaţa $z = f(x, y)$ în punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ este

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemplu. Ecuaţia planului tangent la paraboloidul eliptic $z = 2x^2 + y^2$ în punctul $P(1, 1, 3)$ este:

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \qquad \Longrightarrow \qquad z = 4x + 2y - 3$$



Derivatele după o direcţie dată

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ o funcţie reală de n variabile reale, $a \in \mathrm{Int}(A)$ şi un vector $u \in \mathbb{R}^n$ a.î. $\|u\| = 1$.

Dacă următoarea limită există şi este finită

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\cdot u) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, a_2 + hu_2, ..., a_n + hu_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h}$$

atunci ea se numeşte derivata după direcţia u a funcţiei f în punctul a şi se notează cu $\nabla_u f(a)$.

! Derivatele parţiale sunt cazuri particulare ale derivatelor după o direcţie dată: derivata parţială a f în a după direcţia $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ este

$$\nabla_{e_i} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \qquad i = \overline{1, n}$$

! Legătura dintre derivata după o direcţie dată şi gradient:

$$\nabla_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u \qquad (\text{unde } \|u\| = 1)$$

Derivata după o direcţie dată - exemple

Exemplu. Calculaţi derivata după o direcţie dată a funcţiei

$f(x, y, z) = x^2 + xy + z^2$ după direcţia $u = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ în punctul $a = (1, 2, 3)$

Calculăm mai întâi gradientul:

$$\nabla f = (2x + y, x, 2z) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(a) = (4, 1, 6)$$

Deci, derivata după direcţia u este:

$$\nabla_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u = (4, 1, 6) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 4 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 6.$$

Derivata după o direcţie dată - exemple

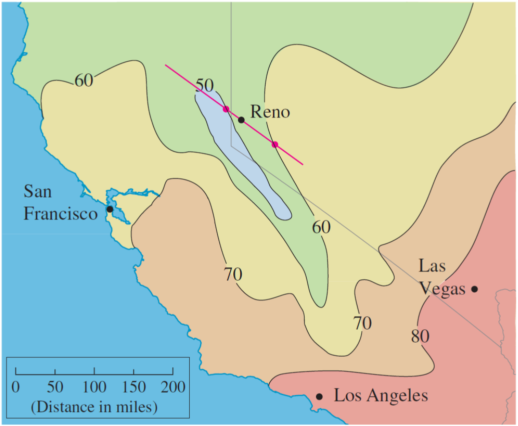
Exemplu. Harta temperaturilor.

Vectorul unitate în direcţia sud-est:

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Rata de variaţie a temperaturii când călătorim în direcţia sud-est este:

$$\nabla_u T \simeq \frac{60-50}{75} \simeq 0.13^\circ \text{F/mi}$$



Diferenţiabilitate

Teoremă

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ o funcţie de n variabile, şi $a \in Int(A)$.

Dacă derivatele parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$ există într-o vecinătate a punctului a şi sunt continue în a, atunci are loc următoarea egalitate:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \nabla f(a) \cdot h}{\|h\|} = 0$$

Consecinţă: Într-o vecinătate a punctului a (când $\|h\|$ este mic), are loc următoarea aproximare liniară:

$$f(a+h) \simeq f(a) + \nabla f(a) \cdot h \quad \text{(pentru } \|h\| \text{ mic)}$$

Diferenţiabilitate - definiţie

O funcţie reală de n variabile $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este diferenţiabilă în a dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

- este derivabilă parţial în punctul a în raport cu fiecare variabilă x_i
- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - \nabla f(a) \cdot h}{\|h\|} = 0.$

Derivata Fréchet a funcţiei f în a: funcţia $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ definită prin

$$d_a f(h) = \nabla f(a) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i$$

- Derivata Fréchet $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este o funcţie liniară pe $\mathbb{R}^n$ (polinom de gradul 1 în $h_1, h_2, ..., h_n$).
- Pentru $\|h\| = 1$, avem $d_a f(h) = \nabla_h f(a)$.
- Dacă $f : \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este diferenţiabilă în $a \in A$, atunci este continuă în a.

Diferenţiabilitate - definiţie

O funcţie vectorială de n variabile $f = (f_1, \dots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în $a \in \mathrm{Int}(A)$ dacă fiecare componentă scalară $f_j, j = \overline{1, m}$ a funcţiei f este diferenţiabilă în a.

Derivata Fréchet a funcţiei f în a este funcţia $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definită prin

$$d_a f(h) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \right) \cdot e_j \qquad \text{unde } e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m.$$

Matricea funcţiei liniare $d_a f$ se numeşte matricea Jacobi a funcţiei f în a:

$$J_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{m \times n}$$

Avem: $d_a f(h) = J_a(f) \cdot h$.

Diferenţiabilitate - exemple

Exemplul 1. Pentru funcţia reală $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$, derivata Fréchet în punctul $a = (1,2,3)$ este funcţia $d_a f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dată de:

$$d_a f(h) = \nabla f(1,2,3) \cdot (h_1, h_2, h_3) = (4,1,6) \cdot (h_1, h_2, h_3) = 4h_1 + h_2 + 6h_3$$

Exemplul 2. Pentru funcţia vectorială $f(x,y,z) = (x^2 + z^2, xy)$, matricea Jacobi este:

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

şi deci, matricea Jacobi în punctul $a = (1,2,3)$ este

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Derivata Fréchet este funcţia $d_a f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definită prin:

$$d_a f(h) = J_a(f) \cdot h = \begin{pmatrix} 2h_1 + 6h_3 \\ 2h_1 + h_2 \end{pmatrix}$$

Diferenţiabilitate - exemple

Exemplul 3. Pentru funcţia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

am văzut că derivatele parţiale în punctul $(0,0)$ sunt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(0,0) = (1,0).$$

Pe baza definiţiei, verificăm dacă funcţia este diferenţiabilă în $(0,0)$ calculând limita:

$$L = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - 0 - (1,0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Diferenţiabilitate - exemple

Simplificând expresia anterioară, obţinem:

$$L = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\frac{-h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}}_{g(h_1,h_2)}$$

Observăm că în limita de mai sus avem raportul a două expresii de ordin 3, şi arătăm că limita nu există:

de-a lungul axei orizontale: $g(h_1,0) = 0 \stackrel{h_1\to 0}{\longrightarrow} 0$

de-a lungul primei bisectoare: $g(h_1,h_1) = \dfrac{-h_1^3}{(2h_1^2)^{3/2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \stackrel{h_1\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Concluzie: Funcţia f nu este diferenţiabilă în $(0,0)$.

Proprietăţi

Regula compusei.

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ şi $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.

Dacă f este diferenţiabilă în $a \in \mathrm{Int}(A)$ şi g este diferenţiabilă în $f(a) = b \in \mathrm{Int}(B)$, atunci $h = g \circ f$ este diferenţiabilă în a şi

$$d_a h = d_b g \circ d_a f$$

Matricea Jacobi a funcţiei h în a este produsul dintre matricea Jacobi a funcţiei g în b şi matricea Jacobi a funcţiei f în a:

$$J_a(g \circ f) = J_b(g) J_a(f).$$

Regula inversei.

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^n$ o funcţie bijectivă unde A, B sunt mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$.

Dacă f este diferenţiabilă în $a \in A$ şi f^{-1} este diferenţiabilă în $b = f(a)$, atunci $d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este bijectivă şi

$$(d_a f)^{-1} = d_{f(a)} f^{-1}$$