Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 7

Funcţii de mai multe variabile reale. Limită şi continuitate.

EVA KASLIK, RALUCA MUREŞAN

SPAŢIUL VECTORIAL $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R}^1, i = 1, 2, ..., n\}$.
Elementele mulţimii $\mathbb{R}^n$ se numesc vectori.
$\mathbb{R}^n$ este un spaţiu vectorial n-dimensional în raport cu suma şi cu înmulţirea cu un scalar definite astfel:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$k(x_1, x_2, \dots, x_n) = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$$

Pentru un vector $x \in \mathbb{R}^n$ norma (lungimea) acestuia este definită prin

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Distanţa dintre x şi $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ este $\|x - a\|$.
O vecinătate punctului $a \in \mathbb{R}^n$ este o mulţime $V \subset \mathbb{R}^n$ care conţine o hipersferă $S_r(a)$ centrată în a,

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\} \qquad r > 0$$

ŞIRURI ÎN $\mathbb{R}^n$

Un şir (x_k) de vectori din $\mathbb{R}^n$ este o funcţie cu domeniul de definiţie $\mathbb{N}$ şi cu valori în $\mathbb{R}^n$.

Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte limita şirului (x_k) dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = N(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \|x_k - x\| < \varepsilon,\ \forall k \geq N.$$

În acest caz, scriem $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.

Exemplu. $x_k = (x_k^1, x_k^2) = \left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{1}{k^2}\right)$ este un şir în $\mathbb{R}^2$.

Limita sa este calculată astfel:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = (0,0).$$

Proprietăţi

- Dacă limita unui şir (x_k) există, atunci ea este unică.
- Dacă un şir (x_k) converge la x, atunci şirul este mărginit: $\exists\, M > 0$ a.î. $\|x_k\| < M$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- Dacă şirul (x_k) converge la x, atunci orice subşir (x_{k_l}) al şirului (x_k) converge la x.
- Convergenţa pe componente
  Un şir (x_k), $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{nk}) \in \mathbb{R}^n$ converge la $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă şirul (x_{ik}) converge la x_i pentru orice $i = 1, 2, ..., n$.
- Teorema lui Bolzano-Weierstrass
  Orice şir mărginit de puncte (x_k) din $\mathbb{R}^n$ conţine un subşir convergent.
- Criteriul lui Cauchy de convergenţă
  Un şir $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ este convergent dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există N_ε astfel încât pentru orice $p, q > N_\varepsilon$ avem $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$.

FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

O funcţie reală de n variabile reale asociază oricărui vector $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ un număr real unic.

Formal, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ este dată de

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D \mapsto f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

Exemplu. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + \cos(x_1 + x_2)$$

este o funcţie reală de 2 variabile reale.

FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE REALE

O funcţie vectorială de n variabile reale asociază fiecărui vector $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ un vector unic $f(x)$ din $\mathbb{R}^m$.

Formal, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este dată de

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \mapsto f(x) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$$

Funcţiile $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, m}$, se numesc componente scalare ale funcţiei vectoriale f.

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_1 + x_2, \sin(x_1))$$

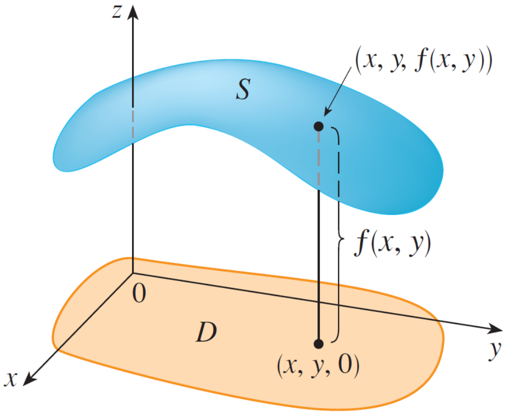
este o funcţie vectorială de 2 variabile reale.

Componentele sale scalare sunt:

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$$
$$f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$f_3(x_1, x_2) = \sin(x_1)$$

Graficul unei funcţii reale de două variabile

Graficul unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



LIMITE

Exemplu. Să comparăm comportamentul funcţiilor

$$f(x,y)=\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{şi} \quad g(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

atunci când x şi y se apropie de 0, adică $(x,y)\to(0,0)$.

Table 1 Values of $f(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
−0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
−0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1.000		1.000	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1.000	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
1.0	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

Table 2 Values of $g(x, y)$

$x \backslash y$	−1.0	−0.5	−0.2	0	0.2	0.5	1.0
−1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000
−0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
−0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0	−1.000	−1.000	−1.000		−1.000	−1.000	−1.000
0.2	−0.923	−0.724	0.000	1.000	0.000	−0.724	−0.923
0.5	−0.600	0.000	0.724	1.000	0.724	0.000	−0.600
1.0	0.000	0.600	0.923	1.000	0.923	0.600	0.000

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=1 \quad \text{şi} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \text{ nu există.}$$

LIMITE

Fie o funcţie reală $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ cu n variabile reale şi $a \in D'$ (adică, pentru orice vecinătate V a punctului a, avem $V \setminus \{a\} \cap D \neq \emptyset$).

Numărul real L se numeşte limita funcţiei $f(x)$ atunci când x tinde la a dacă

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } |f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall\, x :\ 0 < \|x - a\| < \delta.$$

Scriem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Fie o funcţie vectorială $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a şi $a \in D'$.

Vectorul $L \in \mathbb{R}^m$ se numeşte limita funcţiei $f(x)$ atunci când x tinde la a, dacă

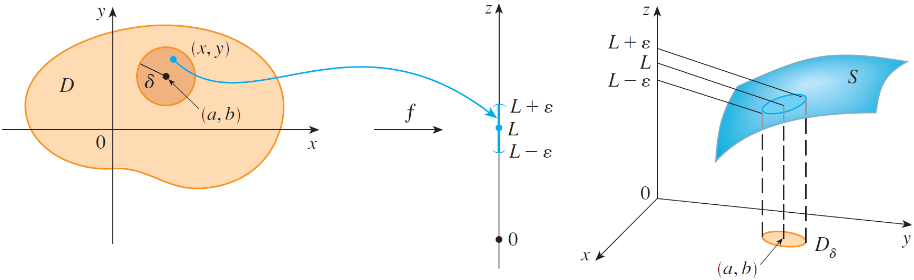
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ a.î. } \|f(x) - L\| < \varepsilon,\ \forall\, x :\ 0 < \|x - a\| < \delta.$$

Scriem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

LIMITE

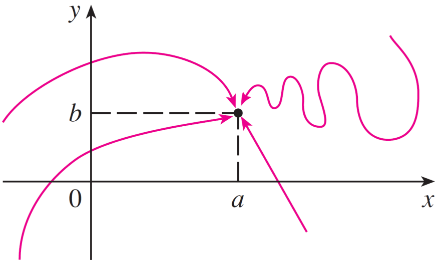
Pentru o funcţie reală de două variabile reale:

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ dacă valorile funcţiei $f(x,y)$ se aproprie de numărul L atunci când punctul (x,y) se apropie de punctul (a,b) de-a lungul oricărei curbe incluse în domeniul de definiţie al funcţiei f.



Limite pentru funcţii de două variabile reale

Pentru o funcţie de două variabile reale, putem să ne apropiem cu (x, y) de punctul (a, b) de-a lungul unor direcţii variate (avem o infinitate de direcţii posibile), cu condiţia ca (x, y) să rămână în domeniul de definiţie al funcţiei f.



Dacă

- $f(x, y) \to L_1$ atunci când $(x, y) \to (a, b)$ de-a lungul curbei C_1 şi
- $f(x, y) \to L_2$ atunci când $(x, y) \to (a, b)$ de-a lungul curbei C_2, cu $L_1 \neq L_2$,

atunci $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ nu există.

Exemple

Exemplul 1. Limita funcţiei $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ în punctul $(0, 0)$.

Folosind substituţia $u = x^2 + y^2$ şi limita remarcabilă, avem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1.$$

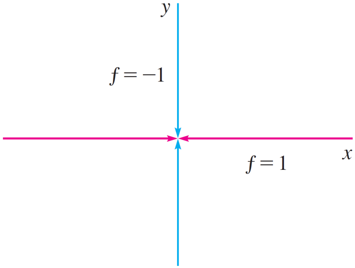
Exemplul 2. Funcţia $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ nu are limită în punctul $(0, 0)$:

De-a lungul axei orizontale: $Ox : \ y = 0$

$$f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \xrightarrow{x\to 0} 1$$

De-a lungul axei verticale: $Oy : \ x = 0$

$$f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1 \xrightarrow{y\to 0} -1$$



Exemple

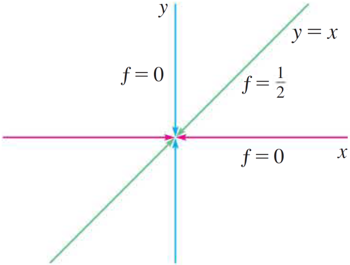
Exemplul 3. Funcţia $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ nu are limită în punctul $(0,0)$:

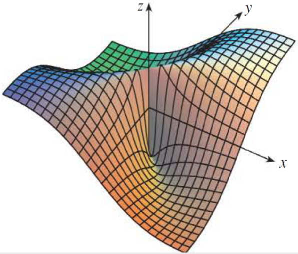
De-a lungul axei orizontale: $Ox:\ y=0$

$$f(x,0)=\frac{0}{x^2}=0\xrightarrow{x\to 0}0$$

De-a lungul primei bisectoare: $y=x$

$$f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}\xrightarrow{x\to 0}\frac{1}{2}$$





Proprietăţi importante

- Dacă $f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))$ şi $L = (L_1,\ldots,L_m)$, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ d.n.d $\lim\limits_{x\to a} f_i(x) = L_i$ pentru orice $i = \overline{1,m}$.
- Avem aceleaşi reguli de calcul pentru limite ca şi în cazul funcţiilor de o singură variabilă reală.
- Criteriul lui Heine pentru limită
  Funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ are limită atunci când x tinde la a dacă şi numai dacă pentru orice şir (x_k), $x_k \in D$, $x_k \neq a$, şi $x_k \to a$ atunci când $k \to \infty$, şirul $(f(x_k))$ este convergent.
- Criteriul lui Cauchy-Bolzano pentru limită
  Funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ are limită atunci când $x \to a$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât dacă $0 < \|x' - a\| < \delta$ şi $0 < \|x'' - a\| < \delta$ atunci $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

CONTINUITATE

O funcţie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă în $a \in D$ dacă $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Reguli pentru continuitate:

- Dacă funcţiile reale de n variabile reale f şi g sunt cotinue în punctul a atunci şi funcţiile $f+g$, $f \cdot g$ şi $\dfrac{1}{f}$ sunt continue în a.
- Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ este continuă în $a \in A$ şi $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ este continuă în $f(a) = b \in \mathbb{R}^m$, atunci şi funcţia compusă $g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ este continuă în a.

O funcţie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se numeşte uniform continuă (pe D) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi $x', x'' \in D$, cu $\|x' - x''\| < \delta$ atunci $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Exemplu

Exemplul 4. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Avem:

$$|f(x,y)| = 3|y| \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq 3|y| \xrightarrow{y\to 0} 0.$$

Folosind regula cleştelui (majorării), deducem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Deoarece $f(0,0) = 0 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, rezultă că f este continuă în $(0,0)$.

Deoarece $f(x,y) = \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$, pentru $(x,y) \neq (0,0)$, funcţia f este continuă în orice punct $(x,y) \neq (0,0)$. $\Longrightarrow$ f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Proprietăţi importante

Continuitatea componentelor scalare:

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ şi $a \in D$.
Funcţia f este continuă în $a \in D$ d.n.d. componentele scalare f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ sunt continue în a.

Criteriul lui Heine pentru continuitate

Funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă în $a \in A$ d.n.d. pentru orice şir $(x_k) \subset D$ convergent la punctul a, şirul $(f(x_k))$ converge la $f(a)$.

Criteriul lui Cauchy-Bolzano pentru continuitate

Funcţia $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă în $a \in D$ d.n.d. pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel incât dacă $\|x' - a\| < \delta$ şi $\|x'' - a\| < \delta$ atunci $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Proprietatea de mărginire

Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este continuă pe mulţimea compactă (închisă şi mărginită) D, atunci mulţimea $f(D)$ este mărginită şi există $a \in D$ astfel ca $\|f(a)\| = \sup \|f(D)\|$.