Tema 10

Termen: săptămâna 13

1. Fie $\prec$ un simbol predicativ binar.

   (a) Se cunosc următoarele:

$$\underset{x,y,z}{\forall}(x \prec y \land y \prec z \Rightarrow x \prec z), \quad (tranzitivitate)$$

$$\underset{x}{\forall}\neg(x \prec x). \qquad (ireflexivitate)$$

Demonstrați [1] (cunoscând formulele de mai sus):

$$\underset{x,y}{\forall}(x \prec y \Rightarrow \neg(y \prec x)). \qquad (asimetrie)$$

Demonstrație[2]:
Pentru a demonstra (*asimetrie*), luăm x_0 o constantă arbitrară dar fixată și demonstrăm:

$$\underset{y}{\forall}(x_0 \prec y \Rightarrow \neg(y \prec x_0)). \qquad (D1)$$

`[Comentariu] Pentru formula de demonstrat, simbolul dominant este ∀ (este o formulă cuantificată universal), astfel alegem regula „arbitrar dar fixat". Pentru formula nouă de demonstrat, simbolul dominant este tot ∀, deci se aplică aceeași regulă. Observați că baza de cunoștințe nu se modifică .`

Pentru a demonstra ($D1$), luăm y_0 o constantă arbitrară dar fixată și demonstrăm:

$$x_0 \prec y_0 \Rightarrow \neg(y_0 \prec x_0). \qquad (D2)$$

`[Comentariu] Acum simbolul dominant în (D2) este ⇒. Aplicăm regula pentru implicație:`

Pentru a demonsta ($G2$), presupunem

$$x_0 \prec y_0 \qquad (P1)$$

și demonstrăm

$$\neg(y_0 \prec x_0). \qquad (D3)$$

[1] Acesta este un exemplu dat de A. Crăciun. Restul trebuie demonstrate ca parte a temei.
[2] Demonstrația are comentarii incluse, `identificate cu acest font`. Aceste comentarii se referă la alegerea regulilor de inferență, și aplicarea acestora. Ele nu trebuie incluse în demonstrațiile generate, dar este de așteptat ca studenții să poată oferi aceste explicații.

`[Comentariu] Pentru a demonsta negația (`$G3$`), aplicăm regula de demonstrație prin reducere la absurd.`

Demonstrăm $(D3)$ prin reducere la absurd:

Presupunem

$$y_0 \prec x_0. \qquad (P2)$$

Din moment ce știm (*tranzitivitate*), în particular știm:

$$x_0 \prec y_0 \wedge y_0 \prec x_0 \Rightarrow x_0 \prec x_0, \qquad (P3)$$

Din $(P1), (P2)$, și $(P3)$, aplicând „modus ponens" $x_0 \prec x_0$. Dar aceasta este în contradicție cu $(ireflexivitate)$. Demonstrația este completă (am derivat o contradicție).

(b) Acum, presupunând (*tranzitivitate*) și (*asimetrie*), demonstrați $(ireflexivitate)$ (formulele sunt cele de mai sus).

(c) Dați exemple de predicate care satisfac (*tranzitivitate*), (*asimetrie*) și $(ireflexivitate)$.

2. Fie $\approx$ un predicat binar.

   (a) Se presupune:

$$\underset{x,y,z}{\forall}(x \approx y \wedge y \approx z \Rightarrow x \approx z), \quad (tranzitivitate)$$

$$\underset{x,y}{\forall}(x \approx y \Rightarrow y \approx x), \qquad (simetrie)$$

$$\underset{x}{\forall}(x \approx x). \qquad (reflexivitate)$$

   Să se demonstreze

$$\underset{x,y,z,u}{\forall}((x \approx y \wedge x \approx z \wedge y \approx u) \Rightarrow z \approx u). \quad (doubla\ tranzitivitate)$$

   (b) Dați exemple de predicate care satisfac proprietățile predicatului $\approx$, așa cum ay fost definite mai sus.

3. Pornind de la următoarea poveste:

   „Dacă Superman ar putea şi ar vrea să prevină răul, ar face asta. Dacă Superman nu ar putea să prevină răul, ar fi lipsit de puteri; dacă nu ar vrea să prevină răul, ar fi malefic. Superman nu previne răul. Dacă Superman există, el nu este lipsit de puteri sau malefic."

   Demonstrați că Superman nu există.

   Sugestie: folosiți pașii de demonstrație prezentați la curs.

4. *Teoria grupurilor* $\mathcal{GR}$ este descrisă de:

   - *simbolurile limbajului*:
     - simboluri funcționale, $\mathcal{F}_{\mathcal{GR}} = \{\circ, ^{-1}\}$, unde $\circ$ este binar, și $^{-1}$, funcția inversă, unară,
     - simbolurile predicative,$\mathcal{P}_{\mathcal{GR}} = \{=\}$,= binar,

- constante, $\mathcal{C}_{\mathcal{GR}} = \{e\}$, e este elementul neutru.

- *baza de cunoștințe* $\mathcal{BC}_{GR}$:
  - axiomele gruprilor:

$$\underset{x}{\forall}(x \circ e = x), \qquad (identitate\ la\ dreapta)$$

$$\underset{x}{\forall}(x \circ x^{-1} = e), \qquad (inversa\ la\ dreapta)$$

$$\underset{x,y,z}{\forall}((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)). \qquad (asociativitate)$$

- *sistemul de raționament* $\mathcal{SR}_{GR)}$ este format din regulile de inferență ale logicii predicatelor și regulile de inferență pentru egalitate (îlocuirea de termeni cu termeni egali).

(a) Demonstrați:

$$\underset{x,y,z}{\forall}(x \circ z = y \circ z \Rightarrow x = y), \quad (eliminarela\ dreapta)$$

$$\underset{x}{\forall}(e \circ x = x), \qquad (identitate\ la\ stanga)$$

$$\underset{x}{\forall}(x^{-1} \circ x = e), \qquad (inversa\ la\ stanga)$$

$$\underset{x,y,z}{\forall}(z \circ x = z \circ y \Rightarrow x = y) \quad (eliminare\ la\ stanga)$$

$$\underset{x}{\forall}(x \circ x = x \Rightarrow x = e). \qquad (nonidempotenta)$$

(b) Dați 3 exemple de grupuri.