Curs 9:

Tehnica divizării (II).

Sortare eficientă

- Metodele elementare de sortare aparțin lui $O(n^2)$
- Idee de eficientizare a procesului de sortare:
  - Se împarte secvența inițială în două subsecvențe
  - Se sortează fiecare subsecvență
  - Se combină subsecvențele sortate

Sortare prin interclasare (Merge sort)

Sortare rapidă (Quicksort)

Divizare	In fctie de poziție	In fcție de valoare
Combinare	Interclasare	Concatenare

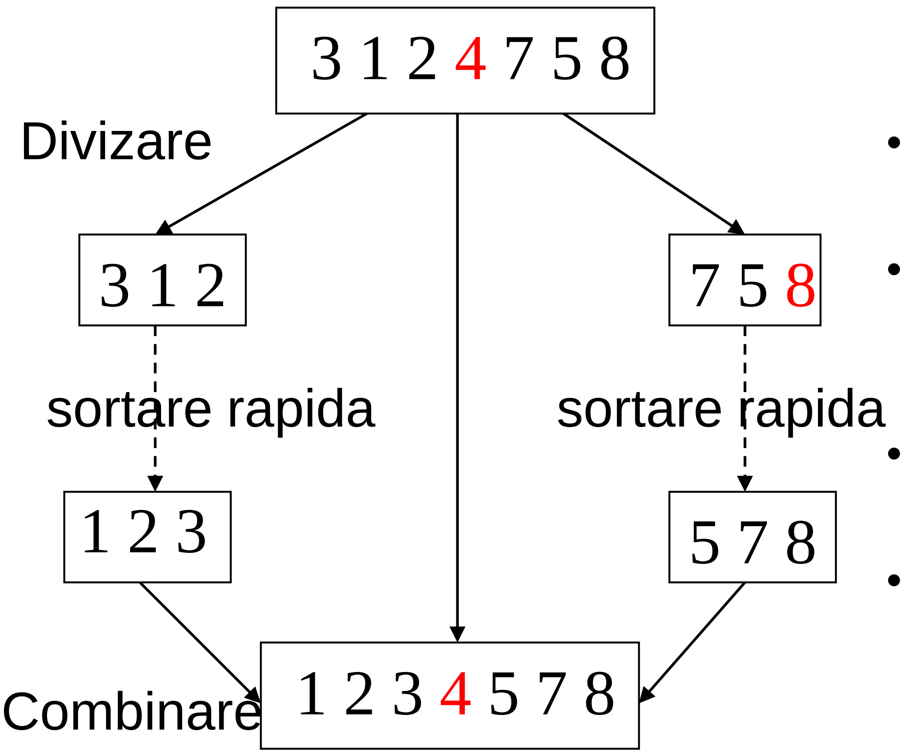
Sortare rapidă (quicksort)

Idee:

- Se reorganizează și se imparte tabloul x[1..n] în două subtablouri x[1..q] și x[q+1..n] astfel încât elementele lui x[1..q] sunt mai mici decât x[q+1..n]
- Se sortează fiecare dintre subtablouri aplicând aceeași strategie
- Se concatenează subtablourile sortate
- Creator: Tony Hoare (1962)

Sortare rapidă

Exemplu 1



- Un element x[q] având proprietățile:

  (a) x[q]>=x[i], for all i<q

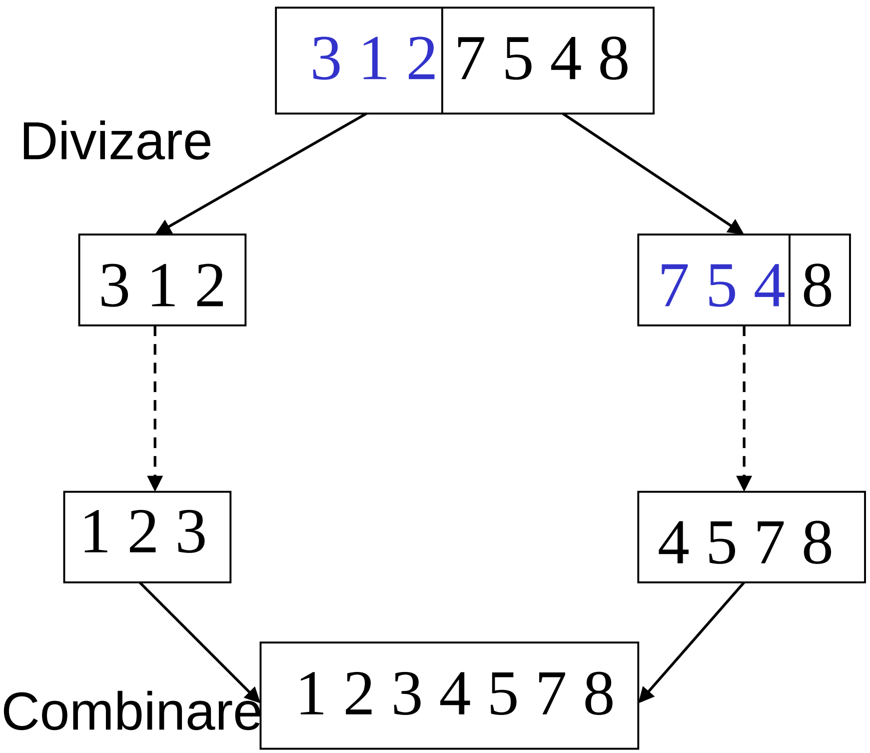
  (b) x[q]<=x[i], for all i>q

  este denumit pivot
- Un pivot este un element aflat pe poziția sa finală
- Un bun pivot împarte tabloul curent în două subtablouri având dimensiuni apropiate (partiționare echilibrată)
- Uneori pivotul împarte tabloul în mod neechilibrat
- Alteori nu există un astfel de pivot

  (de ex. (3 1 2)). In acest caz trebuie creat un pivot prin interschimbarea elementelor

Sortare rapidă

Exemplu 2



- O poziție q având proprietatea:

  (a) x[i]<=x[j], pentru 1<=i<=q si q+1<=j<=n

  Este denumită poziție de partiționare

- O poziție de partiționare bună divide tabloul curent în subtablouri de dimensiuni apropiate
- Uneori poziția de partiționare divide tabloul în mod neechilibrat
- Alteori nu există o poziție de partiționare. In acest caz se creează o astfel de poziție prin interschimbarea unor elemente

Sortare rapidă

Varianta ce utilizează pivot:

```
quicksort1(x[s..d])
IF s<d THEN
  q ← pivot(x[s..d])
  x[s..q-1] ← quicksort1(x[s..q-1])
  x[q+1..d] ← quicksort1(x[q+1..d])
ENDIF
RETURN x[s..d]
```

Varianta ce utilizează poziție de partiționare:

```
quicksort2(x[s..d])
IF s<d THEN
 q ← partitie(x[s..d])
 x[s..q] ← quicksort2(x[s..q])
 x[q+1..d] ← quicksort2(x[q+1..d])
ENDIF
RETURN x[s..d]
```

Sortare rapidă

Construirea unui pivot:

- Se alege o valoare arbitrară din tablou (prima, ultima sau una aleatoare) – aceasta va reprezenta valoarea pivotului
- Se rearanjează elementele tabloului astfel încât toate elementele care sunt mai mici decât valoarea aleasă să se afle în prima parte a tabloului iar valorile mai mari decât pivotul să se afle în partea a doua a tabloului
- Se plasează valoarea pivotului pe poziția sa finală (astfel încât toate elementele din stânga sa să fie mai mici iar toate elementele din dreapta sa să fie mai mari)

Sortare rapidă

O idee de rearanjare a elementelor:

- Se folosesc doi indicatori: unul care pornește de la primul element iar celălalt care pornește de la ultimul element

- Se măresc respectiv micșorează indicatorii până când se identifică o inversiune.

Inversiune: pereche de indici i<j cu proprietatea că x[i]>pivot și x[j]<pivot

- Se repară inversiunea prin interschimbarea elementelor

- Se continuă procesul până când indicatorii se “intersectează”

Sortare rapidă

Construirea unui pivot

1 7 5 3 8 2 4

Valoare pivot

0 1 2 3 4 5 6 7

4 1 7 5 3 8 2 4

- Se alege valoarea pivotului: 4 (ultima valoare din tablou)
- Se plasează o santinelă înaintea primei poziții a tabloului (doar pentru tabloul inițial)

i=0, j=7

4 1 7 5 3 8 2 4

i=2, j=6

4 1 2 5 3 8 7 4

i=3, j=4

4 1 2 3 5 8 7 4

i=4, j=3 (indicatorii s-au încrucișat)

4 1 2 3 4 8 7 5

Pivotul este plasat pe poziția sa finală

Sortare rapidă

```
pivot(x[s..d])
  v ← x[d]
  i ← s-1
  j ← d
  WHILE i<j DO
     REPEAT i ← i+1 UNTIL x[i]>=v
     REPEAT j ← j-1 UNTIL x[j]<=v
     IF i<j THEN x[i]↔x[j] ENDIF
 ENDWHILE
 x[i] ↔ x[d]
 RETURN i
```

Observatii:

- x[d] joacă rolul unei santinele la extremitatea dreaptă
- La extremitatea stângă se plasează explicit o valoare santinelă x[0]=v (doar pentru tabloul inițial x[1..n])
- Condițiile x[i]>=v, x[j]<=v permit oprirea căutarii când sunt întâlnite santinelele. De asemenea permit obținerea unei partiționări echilibrate atunci cand tabloul conține elemente identice
- La sfârșitul ciclului while indicatorii satisfac fie i=j fie i=j+1

Sortare rapidă

```
pivot(x[s..d])
  v ← x[d]
  i ← s-1
  j ← d
  WHILE i<j DO
      REPEAT i ← i+1 UNTIL x[i]>=v
      REPEAT j ← j-1 UNTIL x[j]<=v
      IF i<j THEN x[i] ↔x[j] ENDIF
  ENDWHILE
  x[i] ↔x[d]
  RETURN i
```

Corectitudine:

Invariant:

Dacă i<j atunci x[k]<=v for k=s..i
x[k]>=v for k=j..d

Dacă i>=j atunci x[k]<=v for k=s..i
x[k]>=v for k=j+1..d

Sortare rapidă

```
pivot(x[s..d])
   v ← x[d]
   i ← s-1
   j ← d
   WHILE i<j DO
       REPEAT i ← i+1 UNTIL x[i]>=v
       REPEAT j ← j-1 UNTIL x[j]<=v
       IF i<j THEN x[i] ↔x[j] ENDIF
   ENDWHILE
  x[i] ↔x[d]
  RETURN i
```

Eficiența:

Dimensiune pb.: n=d-s+1

Op. dominantă: comparația în care intervin elemente ale lui x

T(n)=n+c,

c=0 daca i=j

și

c=1 daca i=j+1

Deci T(n) aparține lui Θ (n)

Sortare rapidă

Obs: poziția pivotului nu împarte întotdeauna tabloul în mod echilibrat

Partiționare echilibrată:

- Tabloul este împărțit în două subtablouri de dimensiuni apropiate de n/2
- Dacă fiecare partiționare este echilibrată atunci algoritmul execută mai puține operații (corespunde celui mai favorabil caz)

Partiționare neechilibrată:

- Tabloul este împărțit într-un subtablou cu (n-1) elemente, pivotul și un subtablou vid
- Dacă fiecare partiționare este neechilibrată atunci algoritmul execută mai multe operații (corespunde celui mai defavorabil caz)

Sortare rapidă

Analiza în cazul cel mai defavorabil:

$$T(n)=\begin{cases} 0 & \text{if } n=1 \\ T(n-1)+n+1, & \text{if } n>1 \end{cases}$$

Substituție inversă:

T(n)=T(n-1)+(n+1)

T(n-1)=T(n-2)+n

…

T(2)=T(1)+3

T(1)=0

T(n)=(n+1)(n+2)/2-3

In cel mai defavorabil caz algoritmul este de complexitate pătratică

Deci sortarea rapidă aparține lui $O(n^2)$

Sortare rapidă

Analiza în cazul cel mai favorabil:

$$T(n)=\begin{cases} 0, & \text{if } n=1 \\ 2T(n/2)+n, & \text{if } n>1 \end{cases}$$

Aplicând cazul al doilea al teoremei "master" (pentru k=2,m=2,d=1) rezultă că în cel mai favorabil caz ordinul de complexitate este nlog(n)

Deci algoritmul de sortare rapidă aparține lui $\Omega(n\log(n))$ si lui $O(n^2)$

Analiza în cazul mediu ar putea fi utilă

Sortare rapidă

Analiza în cazul mediu.

Ipoteze:

- Fiecare pas de partiționare necesită cel mult ($n+1$) comparații

- Există n poziții posibile pentru pivot. Presupunem că fiecare dintre aceste poziții are aceeași șansă de a fi selectată ($Prob(q)=1/n$)

- Dacă pivotul se află pe poziția q atunci numărul de comparații satisface

$$T_q(n)=T(q-1)+T(n-q)+(n+1)$$

Sortare rapidă

Numărul mediu de comparații este

$T_a(n)=(T_1(n)+\ldots+T_n(n))/n$

$=((T_a(0)+T_a(n-1))+(T_a(1)+T_a(n-2))+\ldots+(T_a(n-1)+T_a(0)))/n + (n+1)$

$=2(T_a(0)+T_a(1)+\ldots+T_a(n-1))/n+(n+1)$

Deci

$n\,T_a(n) \quad = 2(T_a(0)+T_a(1)+\ldots+T_a(n-1))+n(n+1)$

$(n-1)T_a(n-1)= 2(T_a(0)+T_a(1)+\ldots+T_a(n-2))+(n-1)n$

Calculând diferența dintre ultimele două egalități:

$$nT_a(n)=(n+1)T_a(n-1)+2n$$

$$T_a(n)=(n+1)/n\ T_a(n-1)+2$$

Sortare rapidă

Analiza în cazul mediu.

Prin substituție inversă:

$T_a(n) \;\; = (n+1)/n \;\; T_a(n-1)+2$

$T_a(n-1)= n/(n-1) \;\; T_a(n-2)+2 \qquad |*(n+1)/n$

$T_a(n-2)= (n-1)/(n-2) \;\; T_a(n-3)+2 \;|*(n+1)/(n-1)$

…

$T_a(2) \;\; = 3/2 \;\; T_a(1)+2 \qquad |*(n+1)/3$

$T_a(1) \;\; = 0 \qquad |*(n+1)/2$

$T_a(n) \;\; = 2+2(n+1)(1/n+1/(n-1)+\ldots+1/3) \approx 2(n+1)(\ln n-\ln 3)+2$

In cazul mediu ordinul de complexitate este nlog(n)

Sortare rapidă -variante

Alta variantă de construire a pivotului

```
pivot(x[s..d])
   v ← x[s]
   i ← s
   FOR j ← s+1,d
      IF x[j]<=v THEN
          i ← i+1
          x[i] ↔ x[j]
      ENDIF
   ENDFOR
x[s] ↔x[i]
RETURN i
```

Invariant: x[k]<=v pentru s<=k<=i
x[k]>v pentru i<k<=j-1

3 7 5 2 1 4 8 v=3, i=1,j=2

3 7 5 2 1 4 8 i=2, j=4

3 2 5 7 1 4 8 i=3, j=5

3 2 1 7 5 4 8 i=3, j=8

Plasare pivot:

1 2 3 7 5 4 8

Pozitie pivot: 3

Ordin complexitate construire pivot: O(n)

Sortare rapidă-variante

Construirea unei poziții de partitionare

```
Partiție(x[s..d])
   v ← x[s]
   i ← s-1
   j ← d+1
   WHILE i<j DO
       REPEAT i ← i+1 UNTIL x[i]>=v
       REPEAT j ← j-1 UNTIL  x[j]<=v
       IF i<j THEN x[i] ↔x[j]
       ENDIF
  ENDWHILE
RETURN j
```

3 7 5 2 1 4 8	v=3
3 7 5 2 1 4 8	i=2, j=5
3 1 5 2 7 4 8	i=3, j=4
3 1 2 5 7 4 8	i=4, j=3

Poziție de partiționare: 3

Ordin complexitate: O(n)

Obs: Algoritmul de partiționare este folosit în algoritmul quicksort2

Sumar

MergeSort – O(nlog(n))

QuickSort - O(nlog(n))

	Merge sort	Quicksort
Divizare	O(1) Determinare indice mijloc	O(n) Construire pivot
Combinare	O(n) Interclasare	O(1) Concatenare

Intrebare (intermediară)

Există algoritm de sortare bazat pe compararea elementelor din tablou care să necesite mai puțin de nlog(n) comparații (în cel mai defavorabil caz)?

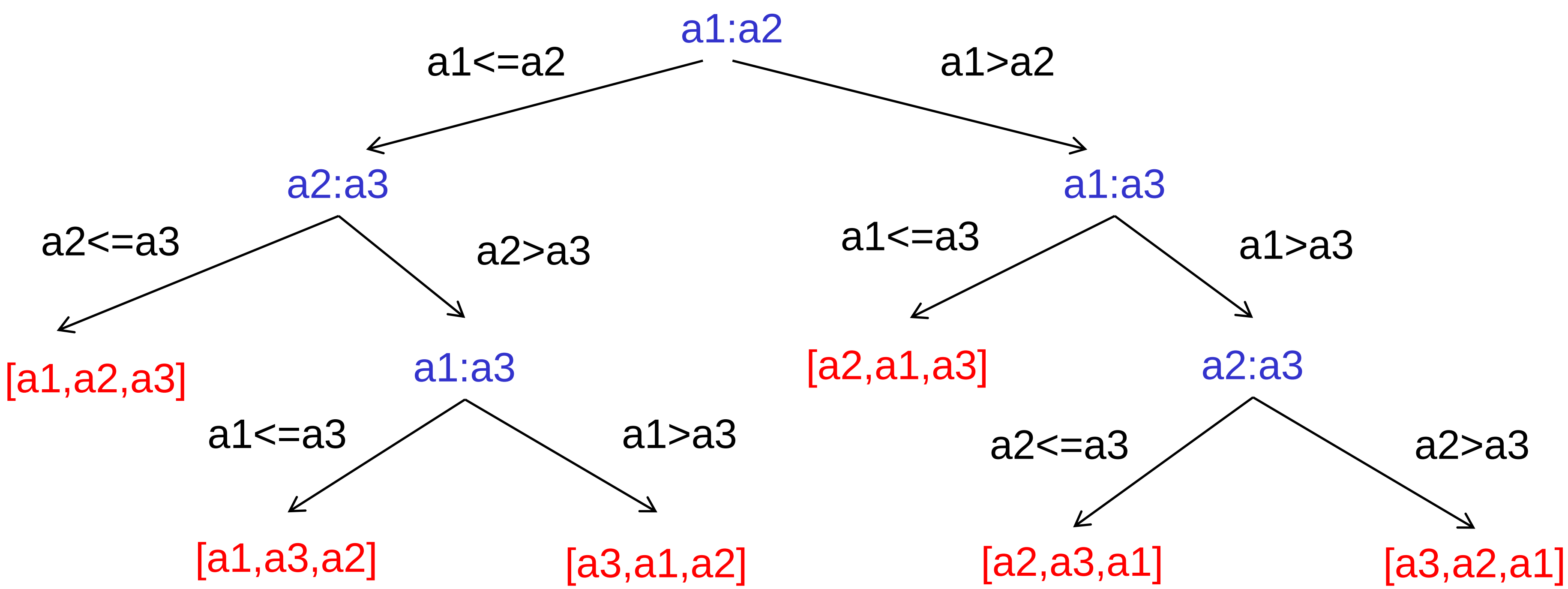
Răspuns: NU

Justificare:

- algoritmii de sortare bazați pe comparații efectuează la fiecare etapă o comparație pentru a decide dacă schimbă sau nu poziția unor elemente;
- principiul funcționării acestor algoritmi poate fi descris utilizând un arbore binar de decizie

Complexitatea sortării bazate pe comparații

Exemplu de arbore binar de decizie (n=3, [a1,a2,a3]):



Obs: fiecare dintre cele n! variante de rearanjare a listei de valori trebuie să apară în cel puțin o frunză a arborelui

Complexitatea sortării bazate pe comparații

Obs:

- fiecare dintre cele n! variante de rearanjare a listei de valori trebuie să apară în cel puțin o frunză a arborelui
- Procesul de sortare corespunzător unei liste date corespunde parcurgerii unei ramuri în arbore pornind de la rădăcină până la un nod frunză
- Numărul de comparații în cazul cel mai defavorabil este corelat cu lungimea celei mai lungi ramuri din arbore = înălțimea arborelui = h
- Numărul maxim de frunze ale unui arbore binar de înalțime h este 2^h

Deci

$$n! <= \text{nr frunze} <= 2^h$$

Complexitatea sortării bazate pe comparații

Deci

$n! <= \text{nr frunze} <= 2^h$

Adică

$\log n! <= h$

Folosind aproximarea $n! \cong \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ (formula lui Stirling)

Rezultă că $h >= \log n! = \Theta(n\log n)$

Alte aplicații ale divizării: selecția celui de al k-lea element

Fiind dat un tablou x[1..n] (neordonat), se consideră problema determinării celui de al k-lea element în ordine crescătoare

Exemplu: x=[4,1,5,3,8,6]

k=1 => 1 (cel mai mic element)

k=3 => 4

K=6 => 8 (cel mai mare element)

Variante de rezolvare:

- Sortare x[1..n] => O(nlogn)
- Sortare parțială prin selecție => O(kn) – eficient doar pentru k mic (sau apropiat de n)

Există variantă mai eficientă?

Alte aplicații ale divizării: selecția celui de al k-lea element

Idee: se folosește strategia de partiționare de la quicksort și, în funcție de relația dintre valoarea curentă a lui k și numărul de elemente din x[s..q] se continuă căutarea în prima parte (x[s..q]) sau în a doua parte (x[q+1..d])

Obs: dacă pentru apelul inițial k este între 1și n, la fiecare dintre apeluri, k va fi între 1 și d-s+1 (k e rangul unui element dar nu indicele elementului)

```
Selectie(x[s..d],k)
  if s==d then return x[s]
  else
     q←partitie(x[s..d])
     r ← q-s+1
     if k<=r then return selectie(x[s..q],k)
               else return selectie(x[q+1..d],k-r)
     endif
  endif
```

Alte aplicații ale divizării: selecția celui de al k-lea element

```
Selectie(x[s..d],k)
  if s==d then return x[s]
  else
    q←partitie(x[s..d])
    r ← q-s+1
    if k<=r then return selectie(x[s..q],k)
             else return selectie(x[q+1..d],k-r)
    endif
  endif
```

Cazul cel mai favorabil (partiționare echilibrată):

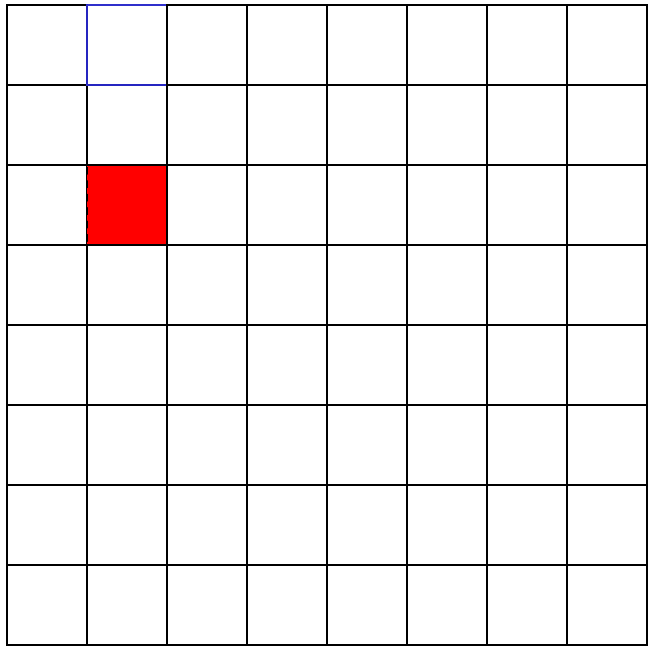
$$T(n)=\begin{cases} 0 & n=1 \\ T(n/2)+n & n>1 \end{cases}$$

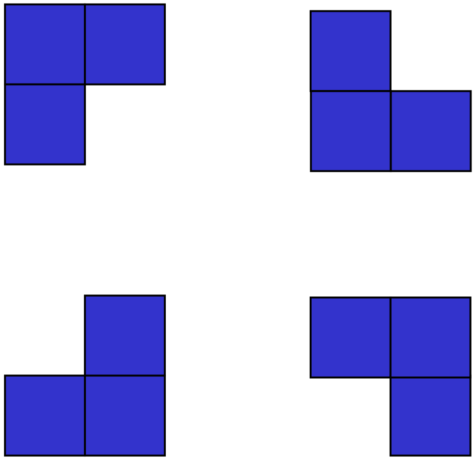
$\Rightarrow$ (t. Master, caz 1: m=2,k=1,d=1)

T(n) aparține lui O(n)

Alte aplicații ale divizării: Triomino

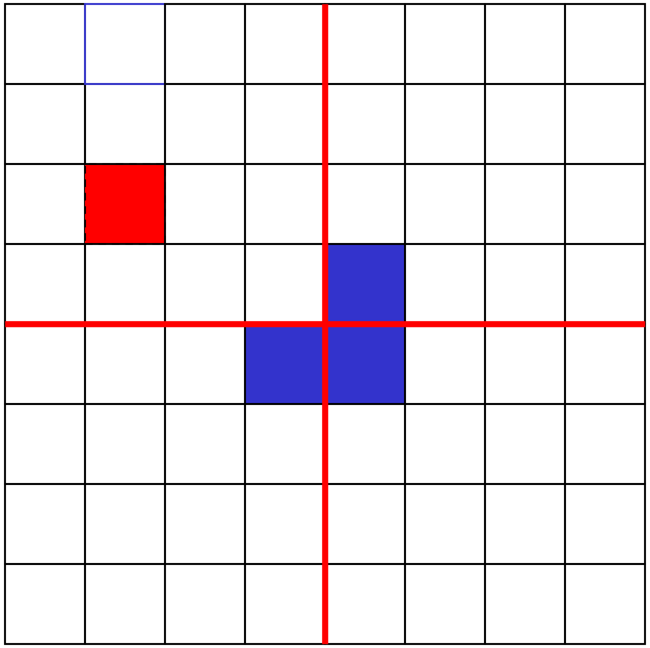
Se consideră o grilă pătratică de latură $n=2^k$ în care una dintre celule este marcată (interzisă). Se pune problema acoperirii grilei cu piese constituite din 3 celule plasate în forma de L (patru variante ce pot fi obținute prin rotire cu câte 90 grade)

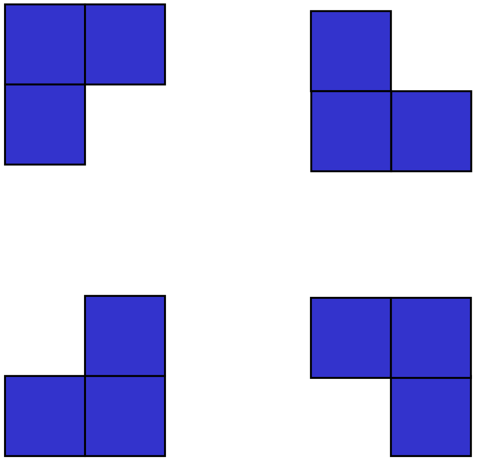




Alte aplicații ale divizării: Triomino

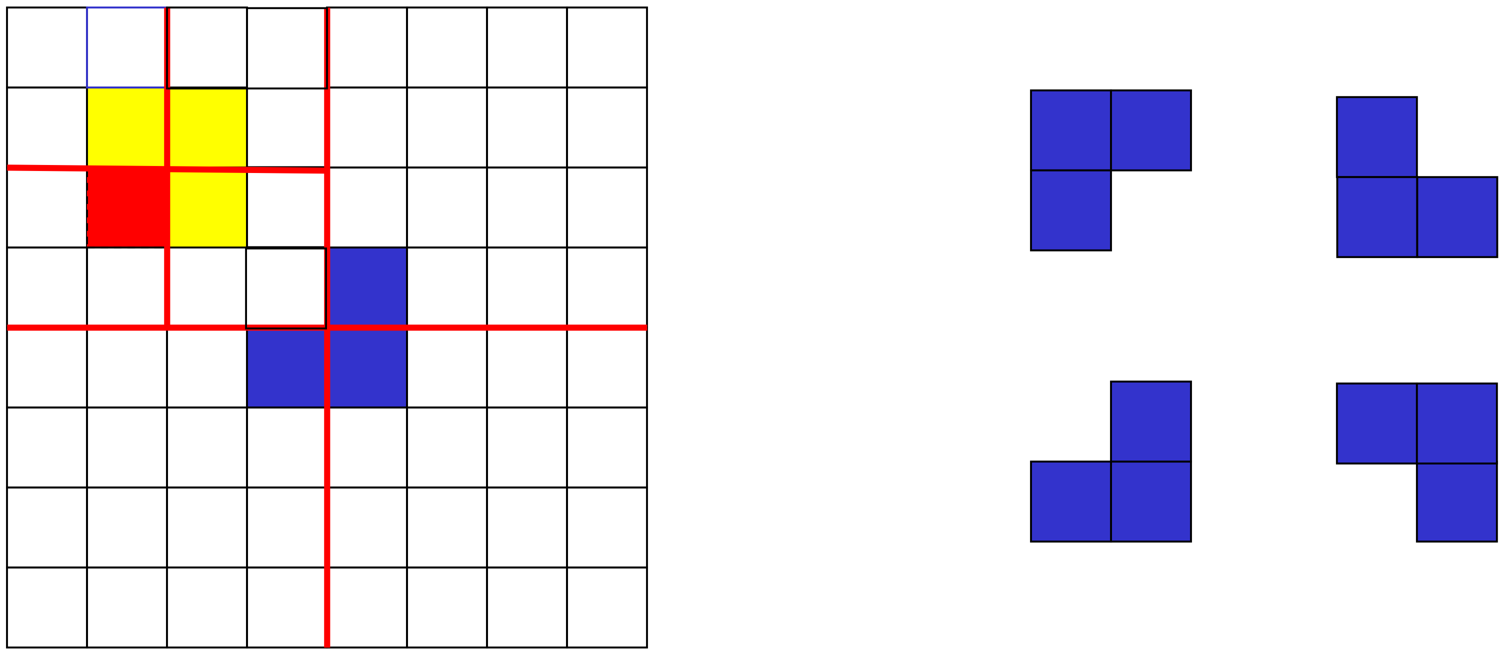
Idee: se reduce problema la 4 probleme similare de dimensiune 2^k prin plasarea unei piese în zona centrală, astfel încât să se ocupe o celulă în fiecare dintre cele 3 zone care au toate celulele libere





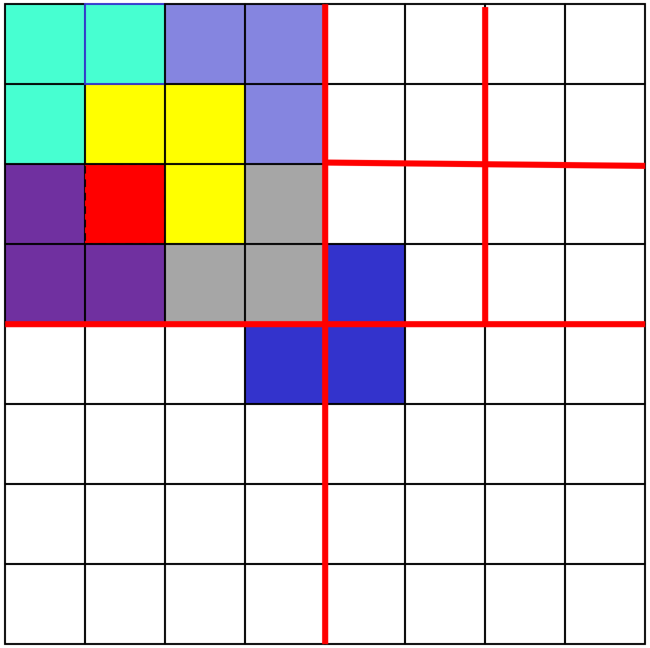
Alte aplicații ale divizării: Triomino

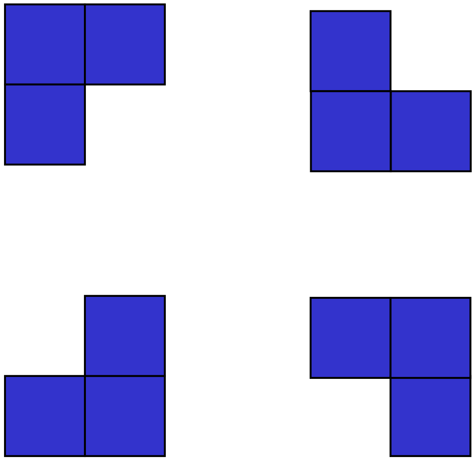
Idee: se aplică aceeași strategie pentru zona din stânga sus



Alte aplicații ale divizării: Triomino

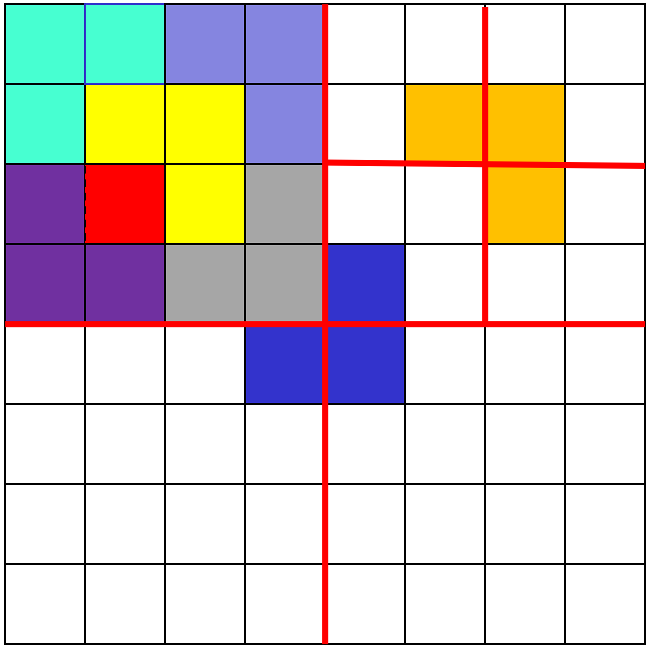
Idee: ... se aplică aceeași strategie pentru zona din dreapta sus

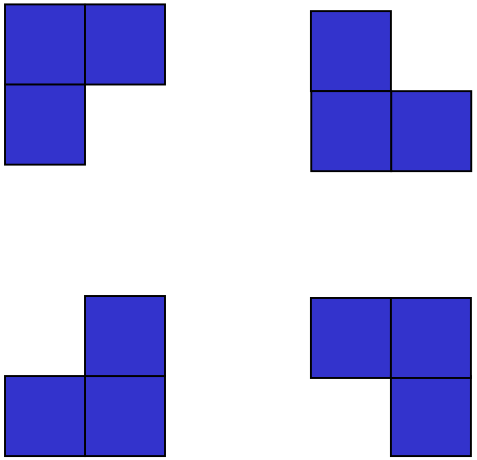




Alte aplicații ale divizării: Triomino

Idee: ... se aplică aceeași strategie pentru zona din dreapta sus

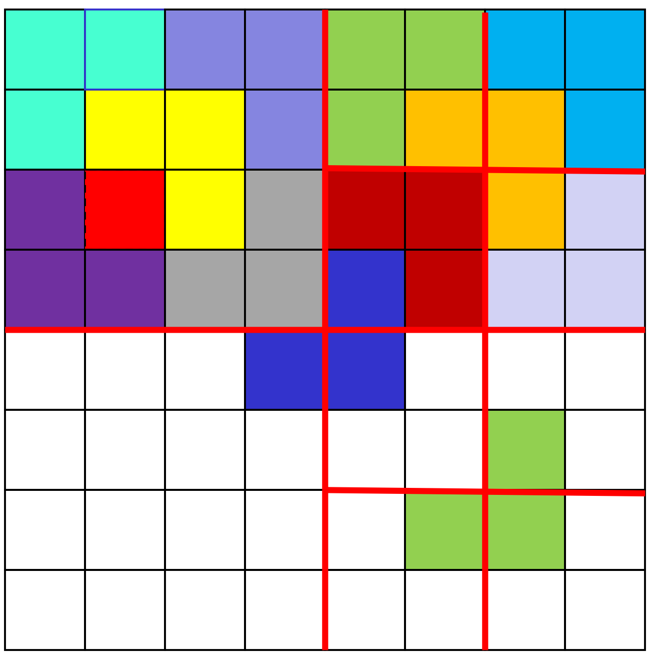


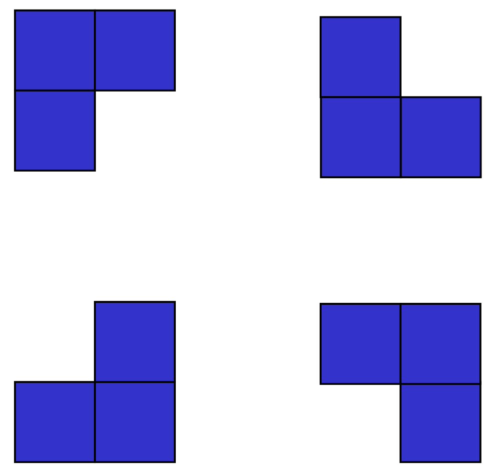


Alte aplicații ale divizării: Triomino

Idee: apoi pentru zona din dreapta jos și în final pentru zona din stânga jos

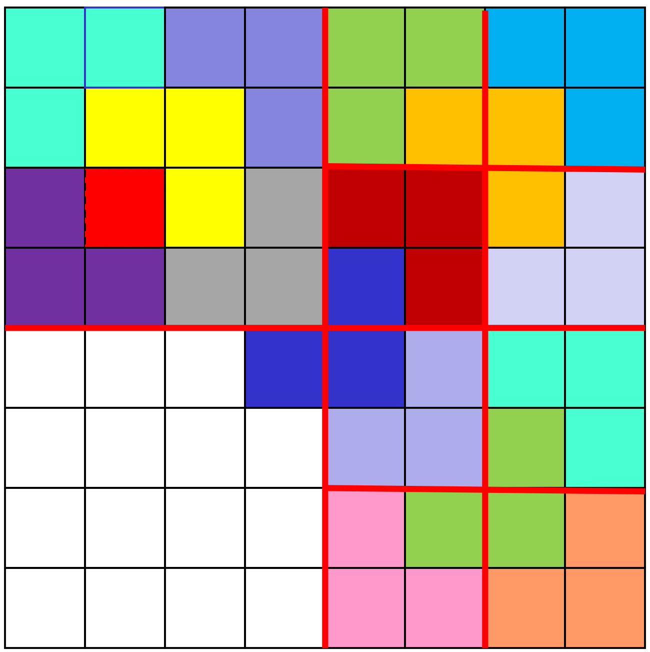
Obs: nu contează ordinea în care sunt rezolvate subproblemele

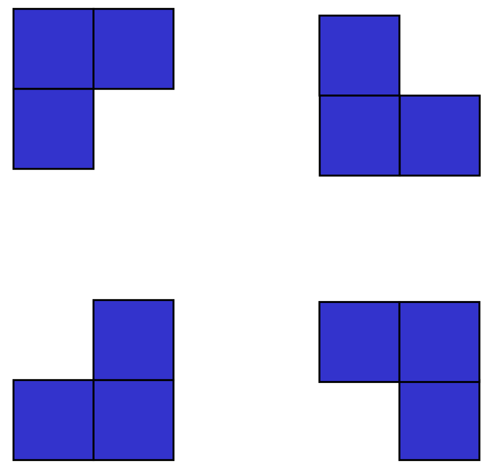




Alte aplicații ale divizării: Triomino

Idee: apoi pentru zona din dreapta jos

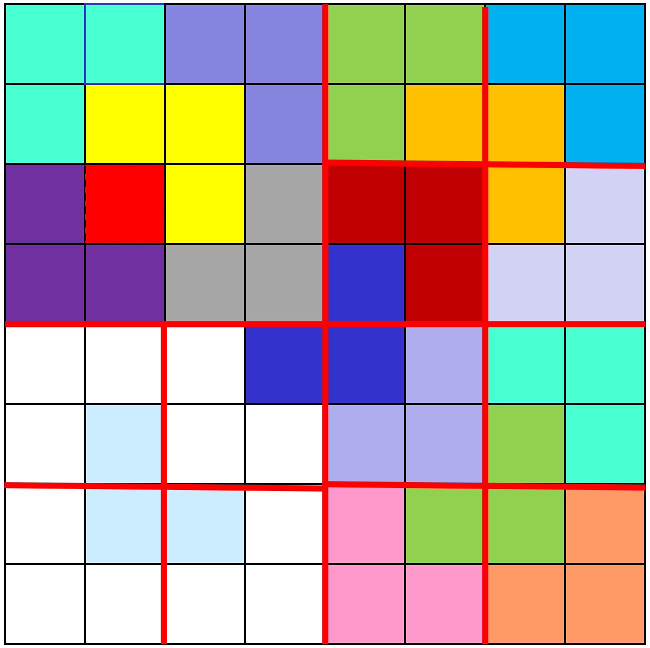


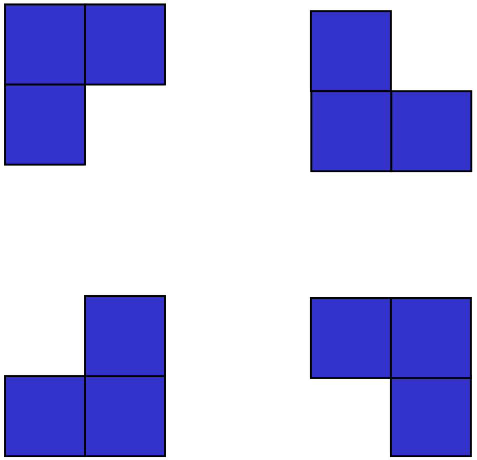


Alte aplicații ale divizării: Triomino

Idee: ... și în final pentru zona din stânga jos

Obs: nu contează ordinea în care sunt rezolvate subproblemele





Alte aplicații ale divizării: Triomino

Idee algoritm:

```
nr ← 0; // nr ordine piesa
Triomino(i1,j1,i2,j2,ih,jh) // i1,j1,i2,j2=indici colturi grila,  ih,jh=indici celula ocupata
  if ((i2-i1==1) and (j2-j1==1))  then <completare cele 3 celule libere>
  else
     imij ←(i1+i2)/2;  jmij ←(j1+j2)/2  // calcul indici mijloc
     if (ih<=imij) and (jh<=jmij) then    // celula ocupata e in subgrila stanga sus
          a[imij][jmij+1] ← nr; a[imij+1][jmij] ← nr; a[imij+1][jmij+1] ← nr;  nr=nr+1;
           triomino(i1,j1,imij,jmij,ih,jh);                              // subgrila stanga jos
           triomino(i1,jmij+1,imij,j2,imij,jmij+1);          // subgrila dreapta sus
           triomino(imij+1,jmij+1,i2,j2,imij+1,jmij+1);  // subgrila dreapta jos
           triomino(imij+1,j1,i2,jmij,imij+1,jmij);         // subgrila stanga jos
    if ((ih<=imij) and (jh>jmij)) then ....   // subgrila dreapta sus
    if ((ih>imij) and (jh>jmij)) then ....     // subgrila dreapta jos
    if ((ih>imij) and (jh<=jmij)) then ....   // subgrila stanga jos
```

Cursul următor va fi despre…

… tehnica căutarii local optimale

… și aplicații

Intrebare de final

Se consideră tabloul:

[6,9,8,5,3,2,4]

Care dintre valorile următoare poate fi considerată pivot în cazul în care se dorește ordonare descrescătoare folosind quicksort?

a) 9
b) 5
c) 4
d) 6