Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 2

Funcţii de o singură variabilă reală.
Limite. Continuite. Derivabilitate.

EVA KASLIK, RALUCA MUREŞAN

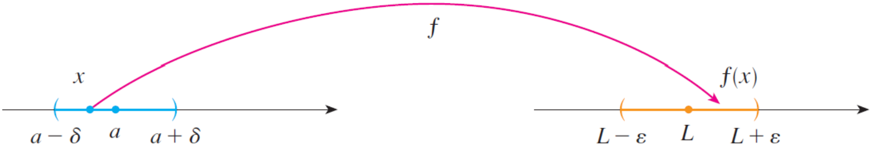
Limita unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f(x)$ definită pe un interval deschis ce conţine punctul a.

Spunem că L este limita funcţiei f când x tinde la a dacă

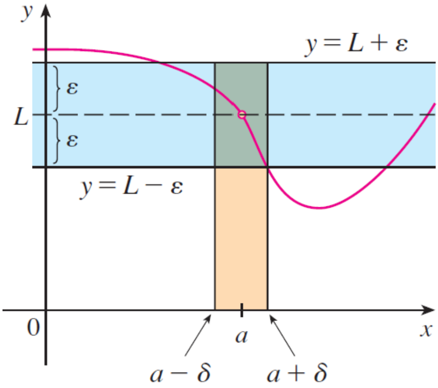
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \text{ a.î. } \forall x\ :\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Cu alte cuvinte: când x se apropie de a, valorile funcţiei $f(x)$ se apropie de L.



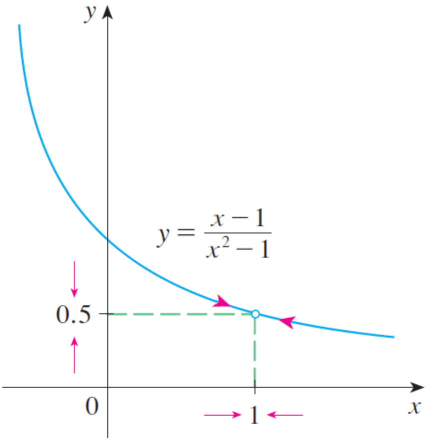
Limita unei funcţii într-un punct

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0,\ \text{a.î. } \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$



Exemplu

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \to 1} \frac{1}{2}$$



Criteriul lui Heine pentru limită

Teoremă (Criteriul lui Heine)

Funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *are limită când* x *tinde la* a *d.n.d. pentru orice şir* $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ *a.î.* $x_n \to a$ *când* $n \to \infty$, *şirul* $(f(x_n))$ *este convergent.*

Corolar

Dacă există un şir $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ *a.î.* $x_n \to a$ *când* $n \to \infty$ *şi şirul* $(f(x_n))$ *este divergent, atunci funcţia* f *nu are limită în punctul* a.

Corolar

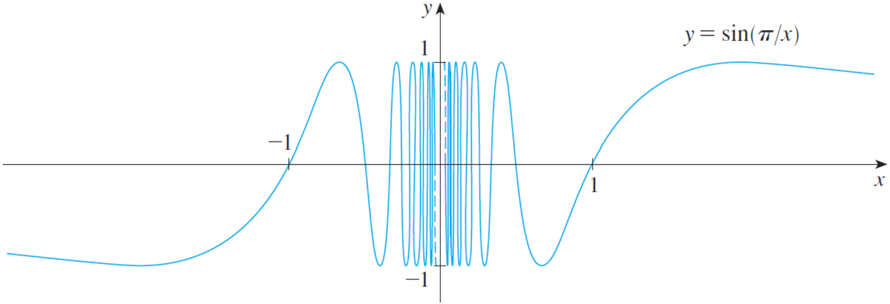
Dacă există două şiruri $(x_n), (y_n) \subset A \setminus \{a\}$ *a.î.* $x_n \to a$, $y_n \to a$ *şi* $(f(x_n))$, $(f(y_n))$ *converg la limite diferite când* $n \to \infty$, *atunci funcţia* f *nu are limită în punctul* a.

Criteriul lui Heine pentru limită - exemplu

Exemplu: Fie $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$. Limita $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ NU există:

$$x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{şi} \quad f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$y_n = \frac{2}{4n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{şi} \quad f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$$



Reguli de calcul pentru limite

Dacă k este o constantă, atunci $\lim\limits_{x \to a} k = k$.

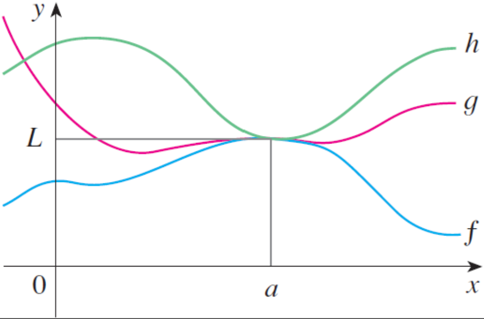
Dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ şi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, atunci $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$.

Dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ şi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, atunci $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$.

Dc. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $g(x) \neq 0$ şi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, atunci $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Regula substituţiei:
Dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ şi $\lim\limits_{y \to L} g(y) = M$, atunci $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = M$.

Regula cleştelui



Regula cleştelui:

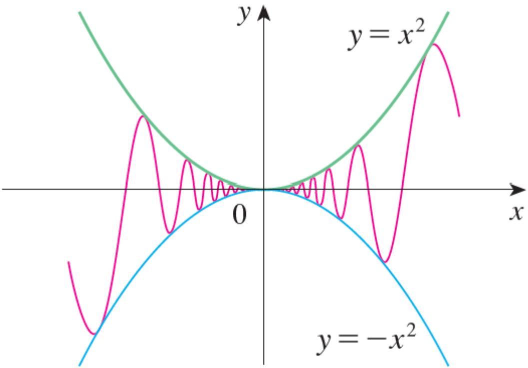
Presupunem că are loc inegalitatea $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pentru orice x într-un interval centrat în a ($x \neq a$).

Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ atunci şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$..

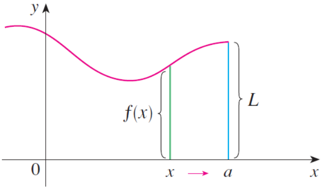
Regula cleştelui - exemplu

Exemplu: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ pentru că

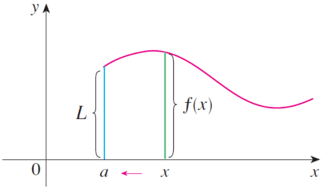
$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$$



Limite laterale



(a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$



(b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

L este limita la stânga a fcţ. f în a (notată $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ sau $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$) dacă

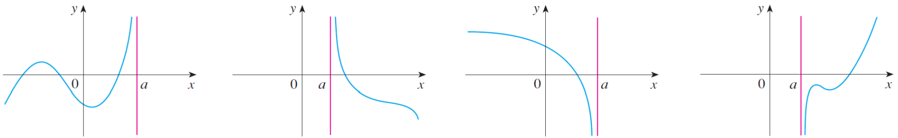
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } |f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall x \in (a - \delta, a)$$

L este limita la dreapta a fcţ. f în a (notată $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ sau $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$) dc.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } |f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall x \in (a, a + \delta)$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Limite infinite



(a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

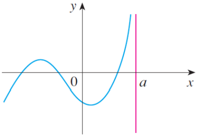
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, adică funcţia f are limita la stânga $+\infty$ în a, dacă

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } f(x) > M,\ \forall x \in (a-\delta, a)$$

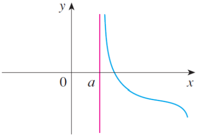
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, adică funcţia f are limita la dreapta $+\infty$ în a, dacă

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } f(x) > M,\ \forall x \in (a, a+\delta)$$

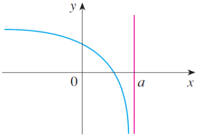
Limite infinite



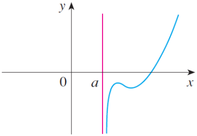
(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$, adică funcţia f are limita la stânga $-\infty$ în a, dacă

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } f(x) < -M,\ \forall x \in (a - \delta, a)$$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, adică funcţia f are limita la dreapta $-\infty$ în a, dacă

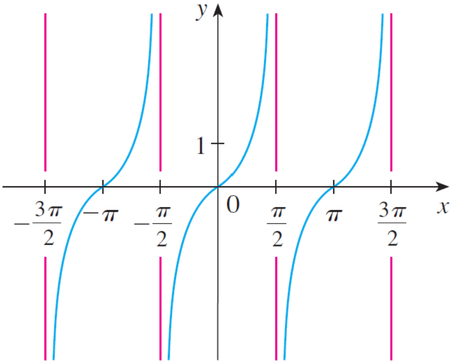
$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ a.î. } f(x) < -M,\ \forall x \in (a, a + \delta)$$

Limite infinite - exemplu

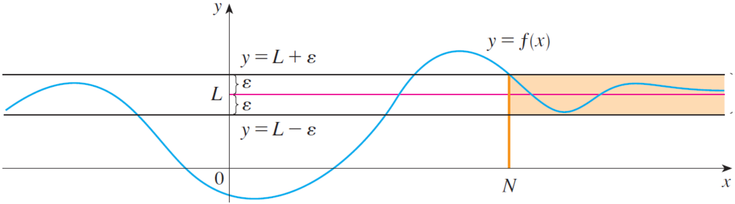
Exemplu: Pentru funcţia $f(x) = \tan(x)$ avem:

$$\lim_{x \to \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{x \to \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = -\infty$$

deci, dreapta $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei.



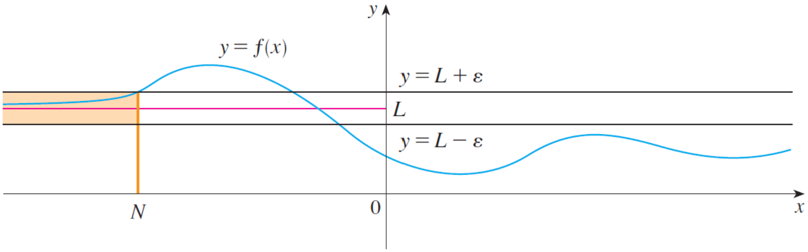
Limite la infinit



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, adică L e limita funcţiei $f(x)$ când x tinde la $+\infty$ dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 \text{ a.î. } |f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall x > N$$

Limite la infinit



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, adică L e limita funcţiei $f(x)$ când x tinde la $-\infty$ dacă

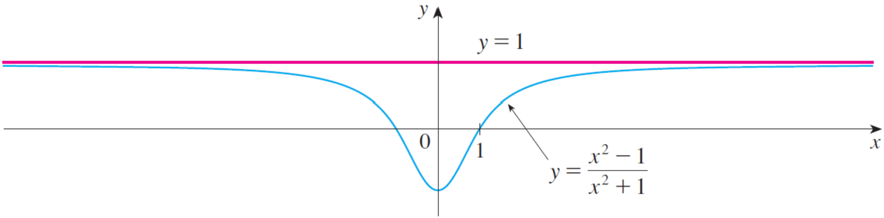
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0$ a.î. $|f(x) - L| < \varepsilon,\ \forall x < -N$

Limite la infinit - exemplu

Exemplu: Pentru funcţia $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ avem:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

deci, $y = 1$ este asimptotă orizontală la curba $y = f(x)$.



Puncte limită

Numărul L este un punct limită al funcţiei $f(x)$ în a dacă există un şir $(x_n) \in A \setminus \{a\}$ a.î. $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ şi $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$.

Mulţimea tuturor punctelor limită a funcţiei $f(x)$ în a se notează cu $\mathcal{L}_a(f)$.

$\inf \mathcal{L}_a(f)$ este limita inferioară a funcţiei f în a şi se notează cu $\varliminf_{x\to a} f(x)$.

$\sup \mathcal{L}_a(f)$ este limita superioară a funcţiei f în a şi se notează $\varlimsup_{x\to a} f(x)$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \varliminf_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a} f(x) = L.$$

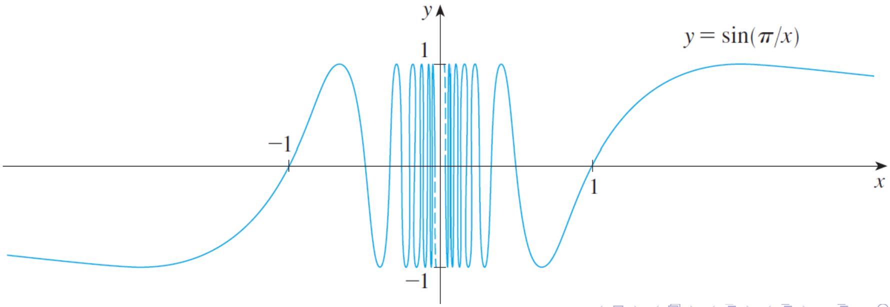
Puncte limită - exemplu

Exemplu: Mulţimea punctelor limită a funcţiei $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$ în $x = 0$ este

$$\mathcal{L}_0(f) = [-1, 1]$$

Pentru orice $L \in [-1, 1]$ avem:

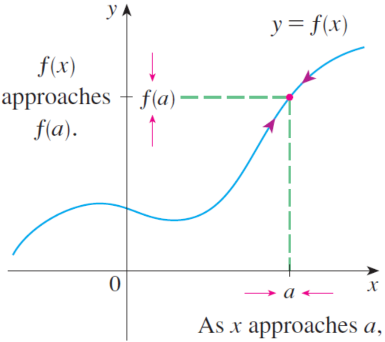
$$x_n = \frac{1}{2n + \frac{\arcsin(L)}{\pi}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{şi} \quad f(x_n) = \sin\left(2n\pi + \arcsin(L)\right) = L \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} L$$



CONTINUITATE - definiţie

Funcţia f este continuă în punctul a dacă $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Funcţia f este continuă în a dacă $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.



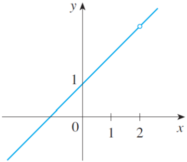
Criteriul lui Heine pentru continuitate

Teoremă (Criteriul lui Heine)

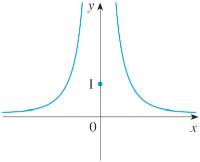
Funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este continuă în* $a \in A$ *d.n.d. pentru orice şir* $(x_n) \subset A$ *cu proprietatea* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*, şirul* $(f(x_n))$ *converge la* $f(a)$*.*

! Consecinţe similare ca şi în cazul criteriului lui Heine pentru limită.

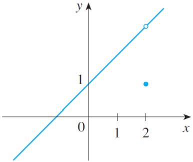
Continuitate - exemple



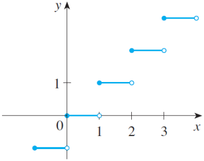
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$



(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$



(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{if } x \neq 2 \\ 1 & \text{if } x = 2 \end{cases}$



(d) $f(x) = [\![x]\!]$

Reguli pentru continuitate

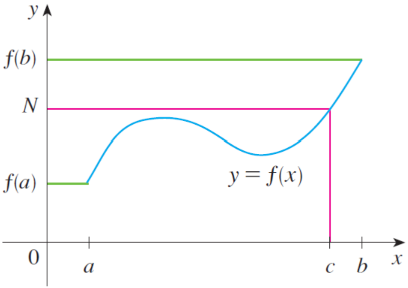
Regula sumei:
Dacă f şi g sunt continue în a, atunci $f + g$ este continuă în a.

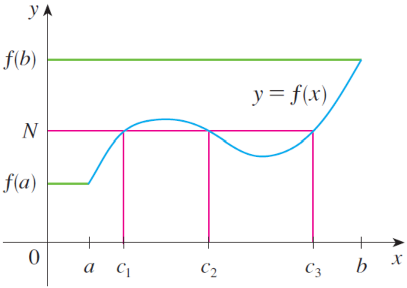
Regula produsului:
Dacă f şi g sunt continue în a, atunci $f \cdot g$ este continuă în a.

Regula reciprocei:
Dacă f este continuă în a şi $f(x) \neq 0$, atunci $\dfrac{1}{f}$ este continuă în a.

Regula compusei:
Dacă f şi g sunt continue în a şi în $f(a)$, atunci $g \circ f$ este continuă în a.

Proprietate valorii intermediare (Darboux)





Proprietatea valorii intermediare:
Fie f o funcţie continuă pe $[a, b]$.
Pentru orice număr real N cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există cel puţin un număr $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = N$.

Alte proprietăţi

Continuitatea inversei:
Fie $f : A \to B$ o funcţie bijectivă, unde A şi B sunt intervale. Dacă f este continuă pe A, atunci f^{-1} este continuă pe B.

Proprietatea de mărginire:
Dacă f este continuă pe intervalul $[a, b]$, atunci f este mărginită pe $[a, b]$ şi îşi atinge marginile.

Teorema intervalului:
Dacă f este continuă pe intervalul $I = [a, b]$. atunci $f(I)$ este un interval închis şi mărginit.

Teorema punctului fix:
Dacă $f : [a, b] \to [a, b]$ este o funcţie continuă atunci există cel puţin un număr $c \in [a, b]$ astfel încât $f(c) = c$.

Derivabilitate - definiţie

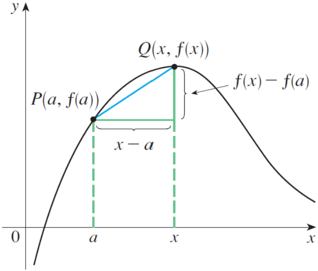
O funcţie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $a \in A$ dacă $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ există şi este finită.

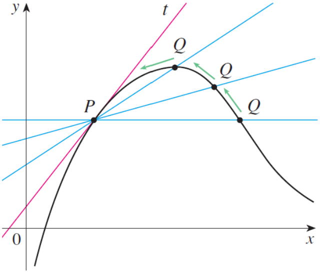
Valoarea acestei limite se notează cu $f'(a)$ şi se numeşte derivata funcţiei f în a.

Ecuaţia dreptei tangente la graficul funcţiei f în punctul de coordonate $(a, f(a))$ este

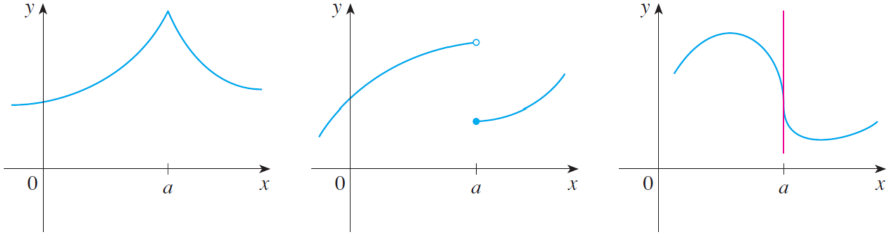
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

! Dacă f este derivabilă în a, atunci f este continuă în a.





Exemple de funcţii care nu sunt derivabile



Reguli pentru calculul derivatelor

Regula sumei: Dacă $f, g \in \mathcal{D}_a$ atunci $f + g \in \mathcal{D}_a$ şi

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

Regula produsului: Dacă $f, g \in \mathcal{D}_a$ atunci $f \cdot g \in \mathcal{D}_a$ şi

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

Regula reciprocei: Dacă $f \in \mathcal{D}_a$ şi $f(x) \neq 0$, atunci $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{D}_a$ şi

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

Reguli pentru calculul derivatelor

Regula raportului: Dacă $f, g \in \mathcal{D}_a$ şi $g(x) \neq 0$, atunci $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{D}_a$ şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$$

Regula compusei: Dacă $f \in \mathcal{D}_a$ şi $g \in \mathcal{D}_{f(a)}$, atunci $g \circ f \in \mathcal{D}_a$ şi

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

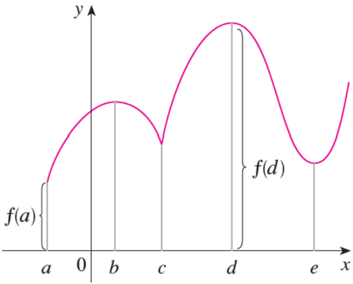
Regula inversei: Presupunem că $f : A \to B$ este o funcţie continuă şi bijectivă, iar A şi B sunt intervale. Dacă $f \in \mathcal{D}_a$ este derivabilă în $a \in A$ şi $f'(a) \neq 0$, atunci f^{-1} este derivabilă în $b = f(a)$ şi

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

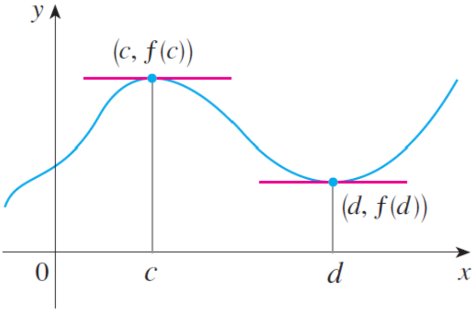
Puncte de extrem

O funcţie f are o valoare de maxim local în punctul c dacă c aparţine unui interval deschis I pentru care $f(x) \leq f(c)$ pentru orice $x \in I$.

O funcţie f are o valoare de minim local în punctul c dacă c aparţine unui interval deschis I pentru care $f(x) \geq f(c)$ pentru orice $x \in I$.



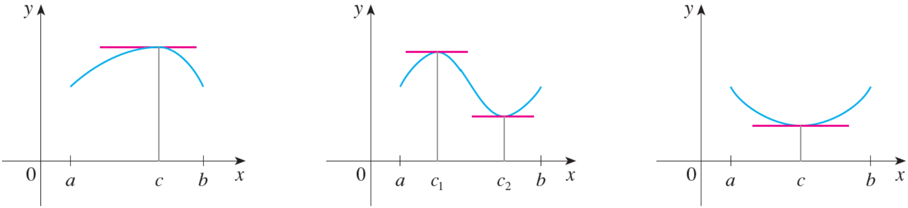
Teorema lui Fermat



Teoremă (Teorema lui Fermat)

Dacă f este derivabilă în c şi are o valoare de extrem în punctul c, atunci $f'(c) = 0$.

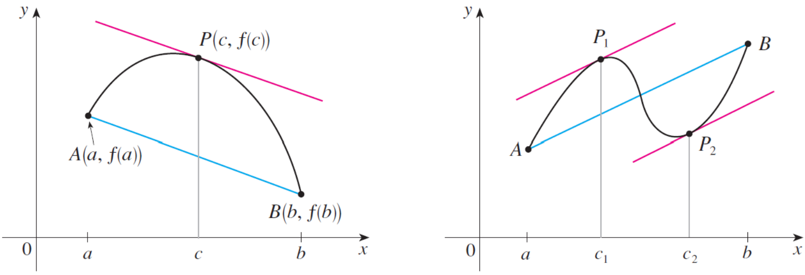
Teorema lui Rolle



Teoremă (Teorema lui Rolle)

Fie f o funcţie derivabilă pe (a,b) şi continuă pe $[a,b]$. Dacă $f(a)=f(b)$, atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

Teorema lui Lagrange

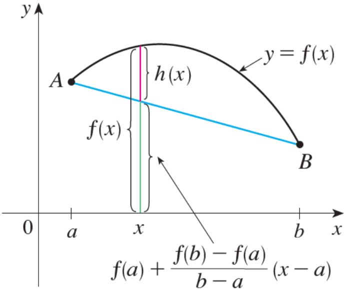


Teoremă (Teorema lui Lagrange)

Fie f o funcţie derivabilă pe (a, b) şi continuă pe $[a, b]$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstraţia teoremei lui Lagrange



Demonstraţie: Aplicăm teorema lui Rolle pentru funcţia

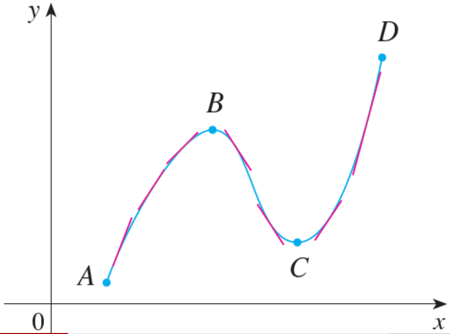
$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

care satisface proprietatea $h(a) = h(b) = 0$. Deci, există $c \in (a, b)$ astfel încât $h'(c) = 0$, ceea ce conduce la rezultatul dorit.

Testul monotoniei

Dacă f este derivabilă pe (a, b) şi continuă pe $[a, b]$ atunci:

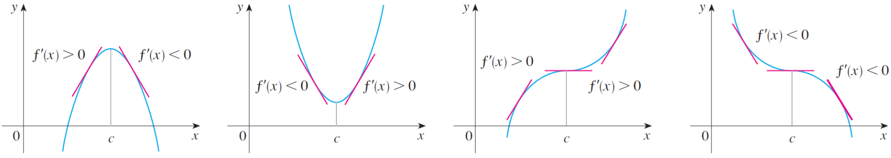
- $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a, b)$ implică f e strict crescătoare pe $[a, b]$
- $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a, b)$ implică f e strict descrescătoare pe $[a, b]$
- $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a, b)$ implică f e constantă pe $[a, b]$



Testul derivatei de ordinul întâi

Presupunem că c este un punct critic ($f'(c) = 0$) al funcţiei derivabile f, şi f' este continuă.

- Dacă f' schimbă semnul de la pozitiv la negativ în c, atunci c este un punct de maxim local pentru f.
- Dacă f' schimbă semnul de la negativ la pozitiv în c, atunci c este un punct de minim local pentru f.
- Dacă f' păstrează acelaşi semn în dreapta şi în stânga punctului c, atunci punctul c nu este un punct de extrem local pentru f.

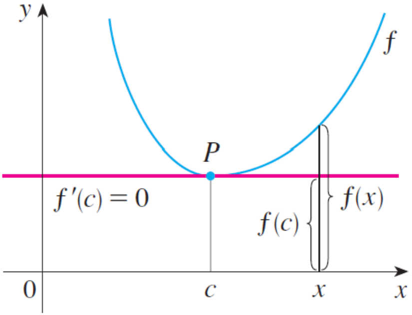


(a) Local maximum (b) Local minimum (c) No maximum or minimum (d) No maximum or minimum

Testul derivatei de ordinul doi

Presupunem că c este un punct critic ($f'(c) = 0$) al funcţiei f şi f'' este continuă.

- Dacă $f''(c) < 0$ atunci c este un punct de maxim local.
- Dacă $f''(c) > 0$ atunci c este un punct de minim local.



Teorema lui L′Hôspital

Teoremă (Teorema lui L′Hôspital)

Fie două funcţii f şi g derivabile pe intervalul I, $a \in I$ şi $g'(x) \neq 0$ (exceptând punctul a). Presupunem că una din condiţiile de mai jos este îndeplinită

a. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *sau*

b. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *şi* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Atunci

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dacă limita din partea dreaptă există.