5 Matrice. Determinanţi. Sisteme de ecuaţii liniare

5.1 Matrice. Operaţii

P 1. a) Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$ două matrice oarecare. Arătaţi că

$$^{t}(A \cdot B) = {}^{t}B \cdot {}^{t}A\,.$$

b) Dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este inversabilă, atunci

$$({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})\,.$$

P 2. Fie $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ şi $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ oarecare. Arătaţi că

$$tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)\,.$$

P 3. Fie funcţia $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definită prin

$$f(a + b \cdot i) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad , \ (\forall)a, b \in \mathbb{R}.$$

Arătaţi că f este injectivă, $f(z + w) = f(z) + f(w)$, $f(z \cdot w) = f(z) \cdot f(w)$, pentru orice $z, w \in \mathbb{C}$ şi $f(1) = I_2$.

P 4. Fie $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ şi $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Arătaţi că dacă matricea A este inversabilă, atunci are loc echivalenţa:

$$A \cdot X = Y \Longleftrightarrow X = A^{-1} \cdot Y.$$

P 5. Determinaţi inversele matricelor următoare:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \dots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a^{n-5} & a^{n-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{bmatrix}.$$

P 6. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A \cdot B = A + B$. Arătaţi că $A \cdot B = B \cdot A$.

5.2 Determinanţi

P 7. Arătaţi că următorii determinanţi sunt nuli:

$$a) \begin{vmatrix} \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) & 1 \\ \sin^2(\beta) & \cos^2(\beta) & 1 \\ \sin^2(\gamma) & \cos^2(\gamma) & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) & \cos(2\alpha) \\ \sin^2(\beta) & \cos^2(\beta) & \cos(2\beta) \\ \sin^2(\gamma) & \cos^2(\gamma) & \cos(2\gamma) \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & \sin(\beta+\delta) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix},$$

$$d) \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & ax_1 + by_1 \\ x_2 & y_2 & ax_2 + by_2 \\ x_3 & y_3 & ax_3 + by_3 \end{vmatrix}, \quad e) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & b+a \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2+b^2 & ab \\ (c+d)^2 & c^2+d^2 & cd \\ (e+f)^2 & e^2+f^2 & ef \end{vmatrix}, \quad g) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & (1-t)x_1 + tx_2 & (1-t)y_1 + ty_2 \end{vmatrix}.$$

P 8. Demonstraţi identităţile:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

P 9. Calculaţi determinanţii:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 43 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_1-b_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2-b_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

P 10. Fie $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ şi $B = (b_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ două matrice, cuproca $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$ pentru orice $i, j = \overline{1,n}$. Arătaţi că

$$\det(B) = \overline{\det(A)}.$$

P 11. Arătaţi că pentru orice matrice pătrată $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ au loc egalităţile

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det(A) \cdot I_n.$$

5.3 Minori. Rang. Regula lui Laplace. Transformări elementare

P 12. Câţi minori de ordin k are o matrice $m \times n$?

P 13. Calculaţi determinanţii următori, folosind regula lui Laplace:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

P 14. Demonstraţi următoarele identităţi, fără a deschide parantezele:
a) $(ab'-a'b)(cd'-c'd)-(ac'-a'c)(bd'-b'd)+(ad'-a'd)(bc'-b'c)=0.$
b) $(a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n)(b_1d_1+b_2d_2+\cdots+b_bd_n)-(a_1d_1+a_2d_2+\cdots+a_nd_n)(b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_nc_n)=$
$=\sum\limits_{1\le 1<k\le n}(a_ib_k-a_kb_1)(c_id_k-c_kd_i).$

P 15. Arătaţi că rangul unei matrice nu se modifică atunci când este înmulţită cu o matrice inversabilă.

P 16. Arătaţi că următoarele operaţiuni nu modifică rangul unei matrice:
1) adunarea unei linii(coloane) înmulţite cu o constantă la o altă linie(coloană);
2) înmulţirea unei linii(coloane) cu o constantă nenulă;
3) permutarea a două linii(coloane).

P 17. Fie $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă, iar $1\le r\le\min(m,n)$. Arătaţi că A are rangul r dacă şi numai dacă există două matrice inversabile $U\in\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ şi $V\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că

$$U\cdot A\cdot V=\begin{pmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)}\\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}.$$

P 18. Fie $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ o matrice nenulă, iar $1\le r\le\min(m,n)$. Arătaţi că că dacă A are rangul r, atunci există două matrice $X\in\mathcal{M}_{m\times r}(\mathbb{C})$ şi $Y\in\mathcal{M}_{r\times n}(\mathbb{C})$, cu $rang(X)=rang(Y)=r$, astfel încât $A=X\cdot Y$.

P 19. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice de rang 1. Arătaţi că

$$A^2=tr(A)\cdot A\,.$$

5.4 Sisteme de ecuaţii liniare. Regula lui Cramer

P 20. Rezolvaţi sistemele de ecuaţii liniare:
a) $\begin{cases}2x+5y=7\\5x+12y=17\end{cases}$, b) $\begin{cases}x+y+z=2\\3x-4y+2z=5\\6x+3y-5z=1\end{cases}$, c) $\begin{cases}x+ay+a^z=a^3\\x+by+b^2z=b^3\\x+cy+c^2z=c^3\end{cases}$, d) $\begin{cases}x+y+z=1+a^2\\x+(2+a^2)y+z=2+2a^2\\x+y+(2+2a^2)z=0\end{cases}$

P 21. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătrată. Arătaţi că $\det(A)=0$ dacă şi numai dacă sistemul liniar $AX=O_{n\times 1}$ admite soluţii nenule $X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$.

P 22. Arătaţi că pentru orice $a,b,c\in\mathbb{Z}$ sistemul

$$\begin{cases}2ax+2by+2cz=x\\2cx+2ay+2bz=y\\2bx+2cy+2az=z\end{cases}$$

admite doar soluţia nulă.

5.5 Valori proprii şi vectori proprii. Teorema Hamilton-Cayley

P 23. Determinaţi valorile proprii şi subspaţiile proprii asociate matricelor:

$$A=\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&-3&2\\6&-4&4\\4&-4&5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$$

P 24. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătrată, iar $X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Dacă X este vector propriu al matricei A, asociat valorii proprii λ, arătaţi că pentru orice polinom $P\in\mathbb{C}[t]$, X este vector propriu al matricei $P(A)$, asociat valorii proprii $P(\lambda)$.

P 25. Fie $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătrată inversabilă, iar $X\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C})$. Dacă X este vector propriu al matricei A, asociat valorii proprii λ, arătaţi că X este vector propriu al matricei A^{-1} asociat valorii proprii λ^{-1}.

P 26. Fie A o matrice pătrată, iar p_A polinomul său caracteristic. Arătaţi că $p_A(A)=O_{n\times n}$.

P 27. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$ cu $m\ne n$. Arătaţi că pentru orice $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ şi $B\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ are loc egalitatea de polinoame

$$X^n\cdot p_{AB}(X)=X^m\cdot p_{BA}(X).$$

P 28. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătrată de rang $r < n$. Arătaţi că există un polinom P de grad $r+1$ cu proprietatea că $P(A) = O_{n\times n}$.

P 29. Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă, $f = p_A$ polinomul său caracteristic, iar $g = p_{A^{-1}}$ polinomul caracteristic al inversei A^{-1}. Arătaţi că

$$g(X) = \frac{(-1)^n}{\det(A)} \cdot X^n \cdot f\left(\frac{1}{X}\right).$$