$\mathcal{G}_0$ - tip 0 - fără restricții asupra formei regulilor

$\mathcal{G}_1$ - tip 1 - dependente de context - $uAv \to upv$, $A \in V_N$, $u,p,v \in V_G^*$, $p \neq \lambda$ admit $S \to \lambda$, $S \notin dr$

$\mathcal{G}_2$ - tip 2 - independente de context - $A \to p$, $A \in V_N$, $p \in V_G^*$

$\mathcal{G}_3$ - tip 3 - regulate $\begin{cases} A \to pB \\ C \to q \end{cases}$, $A, B, C \in V_N$, $p, q \in V_T^*$

$\mathcal{L}_i$ = lb. generate cu gram din familia $\mathcal{G}_i$, $i = \overline{0,3}$ $\quad \mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$

<u>Prop.</u> $\forall G \in \mathcal{G}_0$ $\exists G' \in \mathcal{G}_0$ echivalentă cu propr. că dacă o regulă conține sb. terminale atunci aceasta are forma "$A \to i$"

<u>Cazul gram. tip 2</u> - LEMA "$A \to i$" (corolar al prop. precedente)

$\forall G \in \mathcal{G}_2$ $\exists G' \in \mathcal{G}_2$ echivalentă cu propr. că singurele reguli ce produc terminale sunt de forma "$A \to i$"

Obs: lema nu e valabilă pt gr. tip 2.

<u>LEMA DE LOCALIZARE</u> PENTRU LIMBAJE INDEPENDENTE DE CONTEXT

Fie $G = (V_N, V_T, x_0, P) \in \mathcal{G}_2$, $x_1 \dots x_k \in V_G$ și $p \in V_G^*$

Dacă $x_1 \dots x_k \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} p$ atunci există o partiționare a cuvântului p

$p = p_1 \dots p_k$ cu proprietatea $x_i \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} p_i$, $i = \overline{1,k}$

#

<u>Dem.</u> prin inducție după lungimea derivării l

<u>Verificare</u> $l = 0$ Derivarea este $x_1 \dots x_k = p$. Considerăm $p = p_1 \dots p_k$ cu $p_i = x_i$.

$P(l) \Rightarrow P(l+1)$ Pres. adev. afirm pt deriv de lg l.

Consider o derivare de lg $l+1$

$x_1 \dots x_k \overset{(l+1)}{\Longrightarrow} p$

Detaliem ultimul pas al derivării

$\underbrace{x_1 \dots x_k \overset{(l)}{\Longrightarrow} q}\ \overline{\Rightarrow p}$

Din Ip ind. $\exists q = q_1 \dots q_k$ și $x_i \overset{*}{\Rightarrow} q_i$, $i = \overline{1,k}$

Presupun că în ultimul pas am folosit regula $A \to u \in P$

Fie q_t, $1 \le t \le k$ ai A apare în q_t. În deriv directă

se modifică doar q_t prin aplicarea regulii

$q_t = rAr' \underset{A \to u}{\Rightarrow} rur' = q_t'$

Considerăm urm. partiționare pt cuvântul p.

$p = p_1 \dots p_k$, $p_i = \begin{cases} q_i, & i \neq t \\ rur', & i = t \end{cases}$ $\quad x_i \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} p_i$, $i = \overline{1,k}$

<u>Def:</u> Fie $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_i$ și $\bullet$ o operație binară între limbaje.

Spunem că $\mathcal{L}_i$ este închisă la operația $\bullet$ dacă

$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_i \Rightarrow L_1 \bullet L_2 \in \mathcal{L}_i$ $\quad i = \overline{0,3}$

<u>TEOREMĂ</u> Familiile $\mathcal{L}_i$, $i = \overline{0,3}$ din clasificarea Chomsky sunt închise la operațiile regulate. $(\cup, \cdot, *)$

#

<u>Tipul 2 și 3</u>:

Fie $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_i$ $i = \overline{2,3}$ și $G_1 = (V_{N_1}, V_{T_1}, x_{0_1}, P_1)$, $G_2 = (V_{N_2}, V_{T_2}, x_{0_2}, P_2)$

$G_1, G_2 \in \mathcal{G}_i$ ai $L_1 = L(G_1)$ și $L_2 = L(G_2)$. Presupun $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \phi$.

<u>REUNIUNE</u>

Construim o gram. $G_\cup$ ce generează $L_1 \cup L_2$.

$G_\cup = (V_{N_1} \cup V_{N_2} \cup \{x_0\}, V_{T_1} \cup V_{T_2}, x_0, \{x_0 \to x_{0_1} | x_{0_2}\} \cup P_1 \cup P_2) \in \mathcal{G}_i$

Dem. că $L(G_\cup) = L_1 \cup L_2$

#

"$\subset$" fie $p \in L(G_\cup)$. $\exists$ deriv în $G_\cup$ $\quad x_0 \overset{*}{\underset{G_\cup}{\Rightarrow}} p$

Detaliem primul pas al derivării. Pres că prima regulă este $x_0 \to x_{0_2}$

$x_0 \underset{G_\cup}{\Rightarrow} x_{0_2} \overset{*}{\underset{G_\cup}{\Rightarrow}} p$ $\quad$ Din $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \phi$ avem $x_{0_2} \overset{*}{\underset{G_2}{\Rightarrow}} p \in L(G_2) = L_2 \subset L_1 \cup L_2$

Idem dacă prima regulă este $x_0 \to x_{0_1} \in G_\cup$

$p \in L_1 \subset L_1 \cup L_2$ $\quad$ q.e.d.

"$\supset$" fie $p \in L_1 \cup L_2 \Rightarrow p \in L_1$ sau $p \in L_2$.

Pres că $p \in L_1 \Rightarrow x_{0_1} \overset{*}{\underset{G_1}{\Rightarrow}} p$

Exista urm. derivare în $G_\cup$ $\quad$ q.e.d.

$x_0 \underset{G_\cup}{\Rightarrow} x_{0_1} \overset{*}{\underset{G_\cup}{\Rightarrow}} p \quad \in L(G_\cup)$

<u>PRODUS</u>: Construim o gram $G_\cdot$ pt generarea lb $L_1 \cdot L_2$

<u>Tipul 2</u>: $G_\cdot = (V_{N_1} \cup V_{N_2} \cup \{x_0\}, V_{T_1} \cup V_{T_2}, x_0, \{x_0 \to x_{0_1} x_{0_2}\} \cup P_1 \cup P_2) \in \mathcal{G}_2$.

$L(G_\cdot) = L_1 L_2$

#

"$\subset$" fie $p \in L(G_\cdot)$ atunci avem urm. derivare $x_0 \overset{*}{\underset{G_\cdot}{\Rightarrow}} p$

Detaliem primul pas al derivării

$x_0 \underset{G_\cdot}{\Rightarrow} x_{0_1} x_{0_2} \overset{*}{\underset{G_\cdot}{\Rightarrow}} p$

Din lema de localizare avem $p = p_1 p_2$ și

$x_{0_1} \overset{*}{\underset{G_\cdot}{\Rightarrow}} p_1$, $x_{0_2} \overset{*}{\underset{G_\cdot}{\Rightarrow}} p_2$

Dar $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \phi \Rightarrow x_{0_1} \overset{*}{\underset{G_1}{\Rightarrow}} p_1 \in L(G_1) = L_1$ și $x_{0_2} \overset{*}{\underset{G_2}{\Rightarrow}} p_2 \in L_2$

"$\supset$" $\quad$ Deci $p \in L_1 L_2$ q.e.d.

Tip 3 $\begin{cases} A \to pB \\ C \to q \end{cases}$, $A, B, C \in V_N$ $p, q \in V_T^*$ $x_0 \to \cancel{x_{01}x_{02}} \notin \mathcal{G}_3$!

$G_\circ = (V_{N_1} \cup V_{N_2}, V_{T_1} \cup V_{T_2}, x_{01}, P_1' \cup P_2)$ unde P_1' se obține din P_1 prin modificarea regulilor

$C \to q \in P_1$ se înlocuiește cu $C \to q x_{02} \in P_1'$ – se păstrează tipul gram.

Obs: P_1' conține doar reguli din prima categorie $A \to pB$!
Regulile din a doua categorie sunt cele ce termină orice derivare.

$L(G_\circ) = L_1 L_2$

"$\supset$" # Fie $p \in L_1 L_2$ și arăt că $x_{01} \overset{*}{\underset{G_\circ}{\Rightarrow}} p$

$p \in L_1 L_2 \Rightarrow p = p_1 p_2$ și $p_1 \in L_1, p_2 \in L_2$ avem derivările

$x_{01} \overset{*}{\underset{G_1}{\Rightarrow}} p_1$, $x_{02} \overset{*}{\underset{G_2}{\Rightarrow}} p_2$

Construim în $G_\circ$ urm. derivare

$x_{01} \overset{*}{\underset{G_\circ}{\Rightarrow}} p_1 x_{02} \overset{*}{\underset{G_\circ}{\Rightarrow}} p_1 p_2 \in L(G_\circ)$

<u>Op. Închidere Kleene</u> * $\boxed{G_1^*}$

<u>Tip 2</u>: $G_* = (V_{N_1} \cup \{x_0\}, V_{T_1}, x_0, \{x_0 \to \lambda \mid x_0 x_{01}\} \cup P_1) \in \mathcal{G}_2$

$L(G_*) = L_1^*$

#

$x_0 \Rightarrow \lambda \in L_1^*$

G_*: $x_0 \Rightarrow x_0 x_{01} \Rightarrow x_0 x_{01} x_{01} \Rightarrow \dots \Rightarrow x_0 \underbrace{x_{01} \dots x_{01}}_{k \text{ ori}} \Rightarrow \underbrace{x_{01} \dots x_{01}}_{k \text{ ori}} \Rightarrow p_1 \dots p_k$ și $p_i \in L_1$, $i = \overline{1,k}$

<u>Tip 3</u>: $G_* = (V_{N_1} \cup \{x_0\}, V_{T_1}, x_0, \{x_0 \to \lambda \mid x_{01}\} \cup P_1 \cup P_1')$

P_1' se obține din P_1 prin modificarea regulilor de categoria a doua

$C \to q \in P_1$ se înloc cu $C \to q x_{01} \in P_1'$

<u>LEMA DE ELIMINARE A REGULILOR DE ȘTERGERE PENTRU LB. INDEPENDENTE DE CONTEXT</u>

Se folosește pt demo. incluziunii $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$

<u>LEMA</u> $\forall G \in \mathcal{G}_2$ a.î. $L = L(G) \not\ni \lambda$ $\exists G' \in \mathcal{G}_2$ fără reguli de ștergere a.î. $L(G') = L$

#

Fie $G = (V_N, V_T, x_0, P) \in \mathcal{G}_2$

Se determină neterminalele din G care pot produce λ

$NULL(G) = \{x \in V_N \mid x_0 \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} \lambda\}$

Se construiește următorul șir crescător de mulțimi de neterminale

$\begin{cases} U_0 = \{x \in V_N \mid x \to \lambda \in P\} \\ U_{k+1} = U_k \cup \{x \in V_N \mid x \to p \in P \text{ și } p \in U_{k-1}^*\}, \quad k \geq 0. \end{cases}$

$U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots \subseteq U_k \subseteq \dots \subseteq V_N$, $|V_N| < \infty$

Am un elem. maxim U_f a.î.

$U_0 \subset U_1 \subset \subset U_f = U_{f+1} = \dots$

Se poate demonstra că $\boxed{NULL(G) = U_f}$

Se construiește $G' \in \mathcal{G}_2$ λ liberă astfel

$G' = (V_N, V_T, x_0, P')$

unde P' se obține din P prin înlocuirea regulilor

$A \to p \in P$ cu $A \to p'$ unde p' se obține din p

prin eliminarea în toate modurile posibile
a neterminalelor din NULL(G). Excepție
cazul obținerii regulii de ștergere.

<u>Ex</u>: d. $A \to BCD \in P$
și $B, D \in NULL(G)$ atunci introduc în G' urm reguli

$A \to BCD \mid CD \mid BC \mid C \in P'$

Se poate arăta că $L(G') = L(G) = L$. Observ că G' nu are reguli de ștergere

<u>Corolar</u>: $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$.

$uAv \to upv$,
$u = v = \lambda$

Fie $L \in \mathcal{L}_2$ și $G \in \mathcal{G}_2$ a.î. $L = L(G)$.

Aplic lema de eliminare a reg. de ștergere.

$\exists G'$ a.î. $L(G') = L \setminus \{\lambda\}$.

Construim urm gram de tip 1 G'' ce generează L

$G'' = (V_N \cup \{S\}, V_T, S, \{S \to \lambda \mid x_0'\} \cup P') \in \mathcal{G}_1$

$\Rightarrow L \in \mathcal{L}_1$. q.e.d.