Calcul diferenţial şi integral - Curs 6

Analiza curbelor parametrice

EVA KASLIK, RALUCA MUREŞAN

Curbe elementare în $\mathbb{R}^2$

O curbă elementară în $\mathbb{R}^2$ este o mulţime de puncte $C \subset \mathbb{R}^2$ pentru care există o funcţie de clasă C^1 $\varphi : [a, b] \to C$ care este bijectivă pe $[a, b)$.

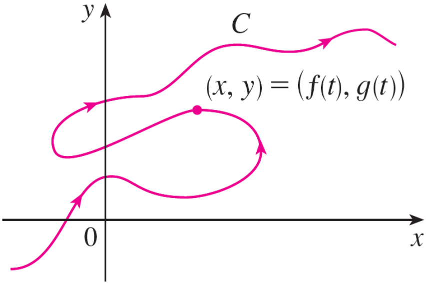
Capetele curbei $A = \varphi(a)$ şi $B = \varphi(b)$ se numesc punct iniţial şi, respectiv, punct final al curbei.

Funcţia $\varphi(t) = (f(t), g(t))$ se numeşte reprezentarea parametrică a curbei.

Ecuaţiile parametrice:

$$C : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

unde f şi g sunt componentele scalare ale funcţiei φ.



Example

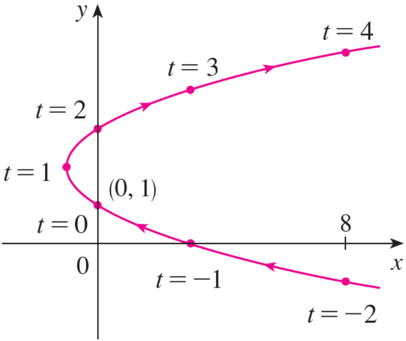
Curba dată de ecuaţiile parametrice

$$x = t^2 - 2t \qquad y = t + 1$$

este parabola

$$x = y^2 - 4y + 3$$

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5



Curbe elementare în $\mathbb{R}^2$

O curbă elementară închisă este o curbă cu reprezentarea parametrică φ a.î.

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Remarci:

- Orice curbă elementară are o infinitate de reprezentări parametrice.
- Capetele unei curbe elementare sunt independente de reprezentarea parametrică a curbei.

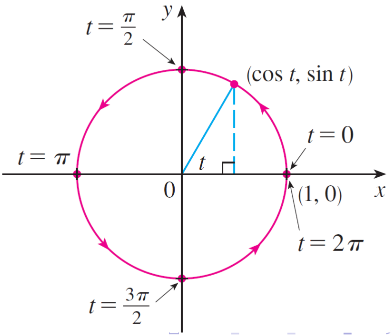
Examplu: O reprezentare parametrică a cercului $x^2 + y^2 = 1$ este

$$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\cos t, \sin t).$$

Ecuaţiile parametrice:

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \ t \in [0, 2\pi]$$

Curbă închisă: $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = (1, 0)$.



Tangente

Pentru curba cu ecuaţiile parametrice

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

panta tangentei într-un punct arbitrar de pe curbă este

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad \text{(formula de derivare a unei funcţii compuse)}$$

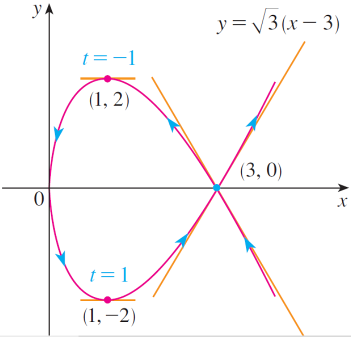
Vectorul $\varphi'(t) = (f'(t), g'(t))$ este un vector tangent în $\varphi(t)$.

Examplu: Curba C definită de

$$x = t^2 \qquad y = t^3 - 3t$$

are două tangente în punctul $(3, 0)$.

Găsiţi punctele de pe C în care tangentele sunt orizontale sau verticale.



Arii

Aria de sub graficul curbei C dată explicit de $y = F(x)$ de la a la b este:

$$\int_a^b F(x)dx$$

Dacă curba C are ecuaţiile parametrice

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad , \, t \in [\alpha, \beta]$$

aria se obţine folosind schimbarea de variabilă:

$$\mathcal{A} = \int_a^b y dx = \int_\alpha^\beta g(t) f'(t) dt$$

Lungimea unei curbe în $\mathbb{R}^2$

Lungimea curbei elementare $C \subset \mathbb{R}^2$ cu reprezentarea parametrică $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ este dată de:

$$l = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \, dt$$

unde $\varphi = (f, g)$.

Remarcă: Lungimea unei curbe C este independentă de reprezentarea sa parametrică!

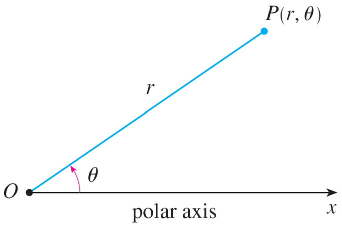
Lungimea de arc a unei curbe elementare C cu reprezentarea parametrică φ este definită ca:

$$ds = \|\varphi'(t)\| \, dt = \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} \, dt$$

Examplu: lungimea cercului $x^2 + y^2 = 1$ este

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Coordonate polare



Un sistem de coordonate reprezintă un punct în plan printr-o pereche ordonată de numere reale.

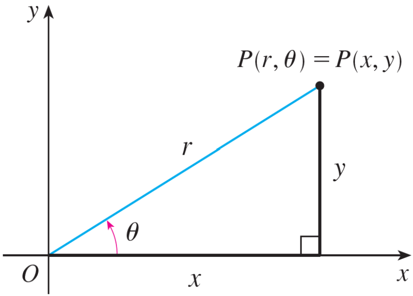
Coordonate carteziene:
distanţele de la două axe perpendiculare.

Coordonate polare:
r - distanţa de la punctul P la polul O;
θ - unghiul dintre axa polară şi dreapta OP (pozitiv dacă este măsurat în sens trigonometric de la axa polară şi negativ în sens invers).

Dacă punctul P are coordonatele carteziene (x, y) şi coordonatele polare (r, θ), atunci au loc:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

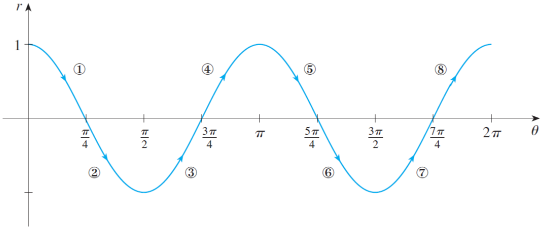
$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

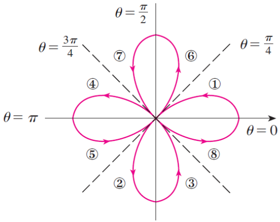


Curbe polare: exemple

Graficul unei ecuaţii polare $r = f(\theta)$ sau mai general $F(r, \theta) = 0$ constă din toate punctele P care au cel puţin o reprezentare polară (r, θ) a căror coordonate satisfac ecuaţia.

Examplu: Trifoiul cu patru foi: $r = \cos(2\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

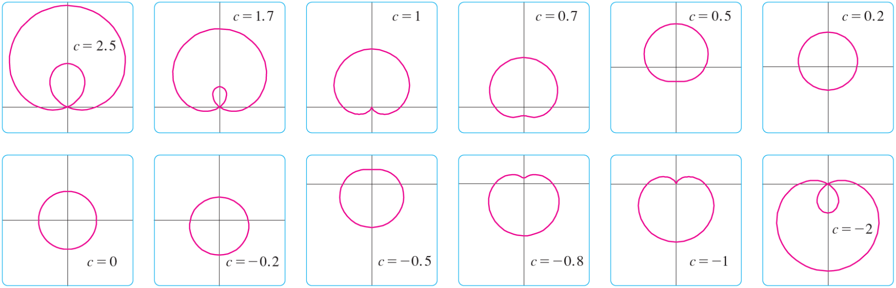




Curbe polare: exemple

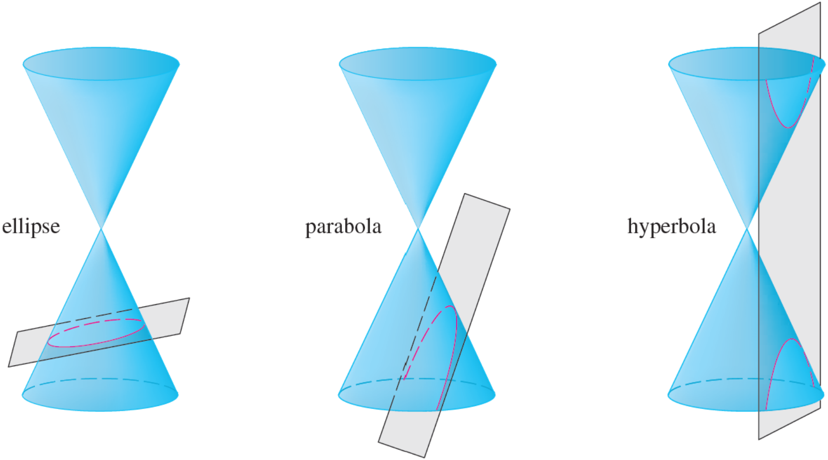
Limaçoni: Familie de curbe polare $r = 1 + c\sin\theta$

Limaçonii apar în studiul miscării planetare. Traiectoria planetei Marte, vazută de pe Terra, a fost modelată de un limaçon cu o buclă ($|c| > 1$).



Secţiuni conice

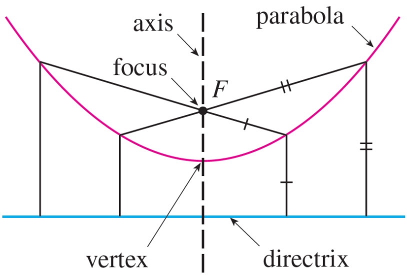
Parabolele, elipsele şi hiperbolele se numesc secţiuni conice, sau conice, deoarece rezultă din intersecţia unui con cu un plan.



Parabola

O parabolă este o mulţime de puncte în plan ce sunt echidistante faţă de un punct fix F (numit focar) şi de o dreaptă fixă (numită dreapta directoare).

- În secolul 16, Galileo a arătat că traiectoria unui proiectil ce este lansat în aer sub un anumit unghi este o parabolă.
- Parabolele au fost folosite în design-ul farurilor de automobile, telescoapelor de reflecţie, podurilor de suspensie, etc.



Ecuaţia unei parabole

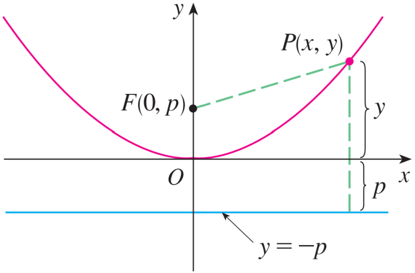
Se consideră parabola cu focarul $F(0,p)$ şi dreapta directoare $d:\ y=-p$.

- distanţa de la P la focarul F:

$$|PF|=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

- distanţa de la P la dreapta directoare $d:\ y=-p$:

$$d(P,d)=|y+p|$$



Cum cele două distanţe sunt egale, se deduce că:

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|$$

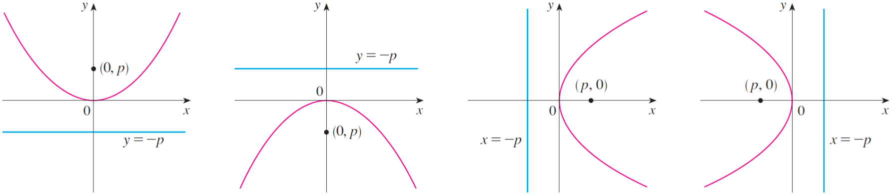
ceea ce este echivalent cu

$$x^2=4py.$$

Dacă interschimbăm x cu y (focarul $F(p,0)$ şi dreapta directoare $x=-p$) se obţine:

$$y^2=4px$$

Parabola

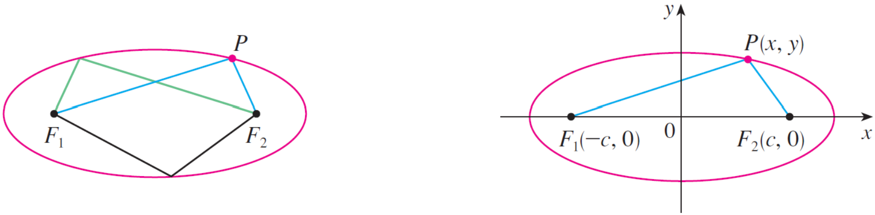


(a) $x^2 = 4py$, $p > 0$ (b) $x^2 = 4py$, $p < 0$ (c) $y^2 = 4px$, $p > 0$ (d) $y^2 = 4px$, $p < 0$

Examplu: Determinaţi focarul şi dreapta directoare pentru parabola $y^2 + 10x = 0$.

Elipsa

O elipsă este o mulţime de puncte în plan a.î. suma distanţelor la două puncte fixe F_1 şi F_2 (numite focare) este constantă.



- Una dintre legile lui Kepler afirmă că orbitele planetelor în sistemul nostru solar sunt elipse cu Soarele într-unul dintre focare.

Punând focarele pe axa Ox în punctele $(-c, 0)$ şi $(c, 0)$, a.î. originea axelor este la jumătatea distanţei dintre cele două focare, şi considerând că suma distanţelor de la un punct de pe elipsă la focare este $2a > 0$, se obţine:

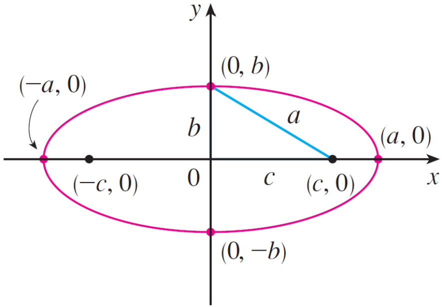
$$|PF_1| + |PF_2| = 2a \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Elipsa

Notând $b^2 = a^2 - c^2$, are loc $b < a$ şi se obţine:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vârfurile elipsei sunt punctele $(a, 0)$ şi $(-a, 0)$.
Segmentul care uneşte cele două vârfuri se numeşte axa mare.
Segmentul care uneşte punctele $(0, -b)$ şi $(0, b)$ se numeşte axa mică.



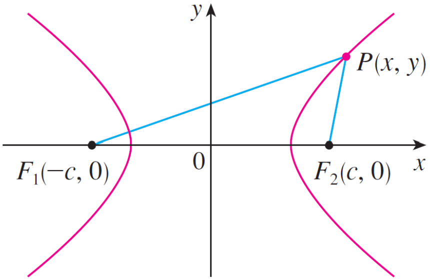
Hiperbola

O hiperbolă este o mulţime de puncte în plan a.î. diferenţa distanţelor de la aceste puncte la două puncte fixe F_1 şi F_2 (focare) este constantă.

Ecuaţia unei hiperbole se deduce în mod similar cu cea a unei elipse, astfel încât are loc:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pentru o hiperbolă cu focarele $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$.

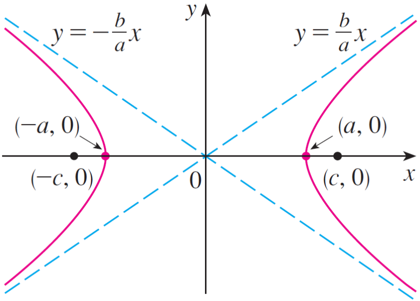


Hiperbola

O hiperbolă constă din două părţi ($x \geq a$ şi $x \leq -a$), numite ramuri.

Vârfurile hiperbolei sunt punctele $(a, 0)$ şi $(-a, 0)$.

Asimptotele unei hiperbole sunt dreptele $y = \pm \frac{b}{a} x$



Conice în coordonate polare

Theorem

Fie F un punct fix (numit focar) şi l o dreaptă fixă (numită dreapta directoare) în plan. Fie e un număr fixat pozitiv (numit eccentricitatea). Mulţimea tuturor punctelor P din plan astfel încât

$$\frac{|PF|}{|Pl|} = e$$

(i.e, raportul distanţelor de la P la F şi respectiv la d este constanta e) este o secţiune conică.
Conica este:

(a) *o elipsă dacă $e < 1$;*

(b) *o parabolă dacă $e = 1$;*

(c) *o hiperbolă dacă $e > 1$.*

Conice în coordonate polar

Demonstraţie:

Dacă $e = 1 \iff |PF| = |Pl|$ se obţine o parabolă.

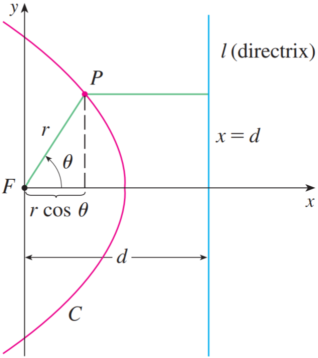
Focarul F se plasează în origine şi dreapta directoare l se consideră paralelă cu axa Oy, astfel încât $l : x = d$.

Dacă P are coordonatele polare (r, θ), atunci:

$$|PF| = r \qquad |Pl| = d - r\cos\theta$$

şi ecuaţia $\dfrac{|PF|}{|Pl|} = e$ devine:

$$r = e(d - r\cos\theta) \iff r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$



Ridicând la pătrat şi convertind la coordonate carteziene (x, y) se obţine:

$$\left(x + \frac{e^2 d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Dacă $e < 1$ se obţine o elipsă. Dacă $e > 1$ se obţine o hiperbolă.

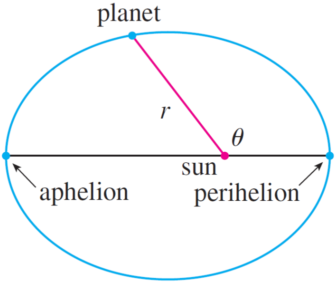
Legile lui Kepler

1. O planetă se roteşte în jurul Soarelui pe o orbită eliptică, având Soarele într-unul dintre focare.
2. Dreapta care uneşte Soarele cu o planetă trasează arii egale în perioade de timp egale.
3. Pătratul perioadei de revoluţie a unei planete este proporţional cu cubul lungimii axei mari a orbitei sale.

Poziţiile unei planete care sunt cea mai apropiată şi cea mai îndepărtată de Soare se numesc periheliu şi afeliu.

Fie a semiaxa mare.

Distanţa dintre periheliu şi Soare este $a(1-e)$, iar cea dintre afeliu şi Soare este $a(1+e)$.



Pentru Pământ, $a = 1.495 \times 10^8$ km şi $e = 0.017$. Deci distanţa perihelică este aprox. 1.47×10^8 km (începutul lunii ianuarie) şi distanţa afelică este 1.52×10^8 (începutul lunii iulie).