Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 5

Serii Fourier.

EVA KASLIK, RALUCA MUREŞAN

SERII FOURIER - Introducere

Seria Fourier a unei funcţii continue pe porţiuni f definită pe intervalul $[-\pi, \pi]$ este seria

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_2 \sin 3x + \dots$$

unde coeficienţii Fourier a_n, b_n sunt daţi de relaţiile

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{pentru } n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad \text{pentru } n = 1, 2, ...$$

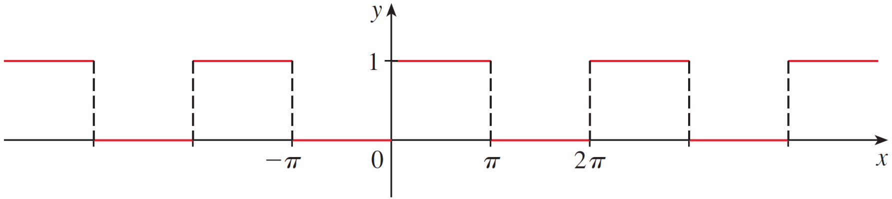
SERII FOURIER - Introducere

- Joseph Fourier (1768-1830) $\rightarrow$ conducţia termică
- Daniel Bernoulli şi Leonard Euler $\rightarrow$ corzi vibrante şi astronomie
- Exprimarea unei funcţii ca şi suma unei serii Fourier este de multe ori mai avantajoasă decât folosing serii de puteri.
- Fenomene din aria astronomiei, cardiologiei, mareea (flux şi reflux), corzi vibrante, etc. sunt caracterizate prin periodicitate $\Longrightarrow$ folosirea funcţiilor periodice în modelarea matematică.

Exemplul 1: funcţia "semnal dreptunghiular"

Considerăm funcţia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \in [-\pi, 0) \\ 1 & , \; x \in [0, \pi] \end{cases} \qquad \text{şi} \quad f(x + 2\pi) = f(x), \; \forall x \in \mathbb{R}.$$



FORMULE TRIGONOMETRICE IMPORTANTE:

$$\cos n\pi = (-1)^n$$

$$\sin n\pi = 0$$

Exemplul 1: "semnal dreptunghiular"

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} = 0 \quad , \forall n \ \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{-\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & , n \text{ - par} \\ \dfrac{2}{n\pi} & , n \text{ - impar} \end{cases}$$

Obţinem seria Fourier:

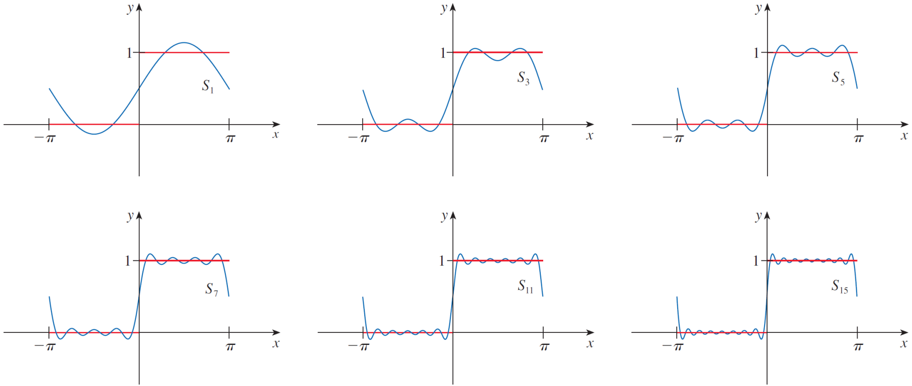
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)x.$$

De exemplu, suma parţială de ordin 7 a seriei Fourier este:

$$S_7(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \frac{2}{7\pi}\sin 7x.$$

Exemplul 1: "semnal dreptunghiular"

Diverse sume parţiale S_n ale seriei Fourier obţinute sunt reprezentate mai jos:



Pe măsură ce ordinul n creşte, suma parţială $S_n(x)$ devine o aproximare mai bună a funcţiei $f(x)$ (înafară de punctele în care funcţia f nu este continuă).

Teorema lui Fourier

Teoremă

Fie f o funcţie continuă pe porţiuni definită pe intervalul $[-\pi, \pi]$ şi extinsă prin periodicitate în afara acestuia.

Fie $S_n(x)$ suma parţială de ordin n a seriei Fourier a funcţiei f.

Dacă $f(x)$ are derivate laterale finite în toate punctele de discontinuitate, atunci:

- *dacă în punctul $x = x_0$ funcţia f este continuă, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0).$$

- *dacă în punctul $x = x_0$ funcţia f este discontinuă, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right].$$

Schimbarea originii intervalului fundamental

Dacă funcţia f este continuă pe porţinuni, definită pe intervalul fundamental $[\alpha - \pi, \alpha + \pi]$ şi extinsă prin periodicitate înafara acestuia, atunci coeficienţii Fourier sunt:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{pentru } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad \text{pentru } n = 1, 2, \ldots$$

Seria Fourier converge în fiecare punct de continuitate al funcţiei f şi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Schimbarea lungimii intervalului fundamental

Dacă funcţia f este continuă pe porţiuni, definită pe intervalul $[-L, L]$ şi extinsă prin periodicitate înafara acestuia, atunci coeficienţii Fourier sunt:

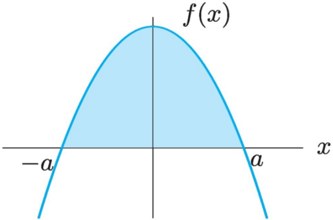
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \text{pentru } n = 0, 1, 2, \ldots$$

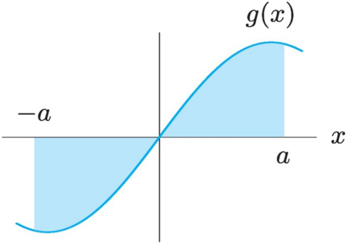
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \text{pentru } n = 1, 2, \ldots$$

Seria Fourier este convergentă în fiecare punct de continuitate al funcţiei f şi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Funcţii pare şi impare





Dacă funcţia $f(x)$ este pară: $f(-x) = f(x)$, avem:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Dacă funcţia $f(x)$ este impară: $f(-x) = -f(x)$, avem:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Serii Fourier pentru funcţii pare

Fie funcţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, extinsă prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

Dacă funcţia f este pară, atunci:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos nx}_{\text{pară}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin nx}_{\text{impară}} \, dx = 0$$

Deci, seria Fourier este o serie de cosinusuri:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots$$

Dacă intervalul fundamental este $[-L, L]$, rezultatul se modifică în mod corespunzător!

Serii Fourier pentru funcţii impare

Fie funcţia $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, extinsă prin periodicitate la $\mathbb{R}$.

Dacă funcţia f este impară, atunci:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos nx}_{\text{impară}} \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin nx}_{\text{pară}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Deci, seria Fourier este o serie de sinusuri:

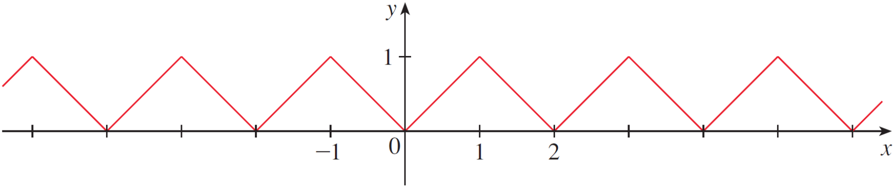
$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$

Dacă intervalul fundamental este $[-L, L]$, rezultatul se modifică în mod corespunzător!

Exemplul 2: "semnal triunghiular"

Găsiţi seria Fourier a funcţiei

$$f(x) = |x|,\ x \in [-1, 1] \quad \text{şi} \quad f(x+2) = f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$



Funcţia este pară: $|-x| = |x|$. Deci: $b_n = 0$.

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_0^1 x dx = x^2|_0^1 = 1.$$

Exemplul 2: "semnal triunghiular"

Pentru $n \geq 1$, avem:

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x dx = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx =$$

$$= 2\left(x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\big|_0^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}$$

Deci:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{, dacă n este par} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2} & \text{, dacă n este impar} \end{cases}$$

În concluzie, seria Fourier este:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\left((2k+1)\pi x\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 2: "semnal triunghiular"

Această serie Fourier ne permite evaluarea sumei seriei $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Într-adevăr, înlocuind $x = 1$ în seria Fourier, obţinem:

$$f(1) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \cos\left((2k+1)\pi\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}$$

Având în vedere că $f(1) = 1$, avem:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} = \frac{1}{2}$$

şi deci:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

Identitatea lui Parseval

Pentru o funcţie continuă pe porţiuni $f : [-L, L] \to \infty$, extinsă prin periodicitate la $\mathbb{R}$, cu coeficienţii Fourier a_n, b_n, are loc identitatea lui Parseval:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx$$

Exemplul 2. Folosind identitatea lui Parseval, obţinem:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{(2k+1)^4\pi^4} = \int_{-1}^{1} x^2 dx$$

deci:

$$\frac{16}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

În concluzie:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}$$