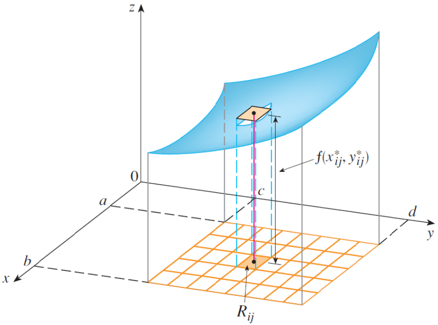
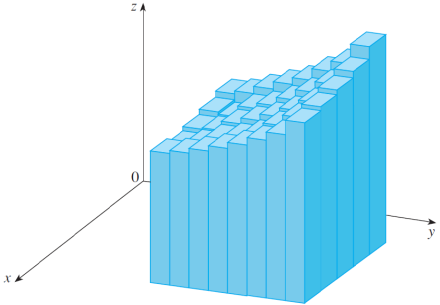
Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 10

Integrale duble.

EVA KASLIK, RALUCA MURESAN

Integrale duble





Mulţimi măsurabile Jordan în $\mathbb{R}^2$

Considerăm intervale I de forma

$$(a,b),\ [a,b),\ (a,b],\ [a,b],\quad \text{unde } a,b\in\mathbb{R}.$$

Produsul cartezian $\Delta = I_1 \times I_2$ este un dreptunghi în $\mathbb{R}^2$.

aria unui dreptunghi Δ este

$$\text{aria}(\Delta) = \text{lungimea}(I_1)\cdot\text{lungimea}(I_2).$$

Fie mulţimea $\mathcal{P}$ a tuturor reuniunilor finite de dreptunghiuri Δ:

$$P\in\mathcal{P}\quad \text{dnd.}\quad \exists\ \Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n \text{ a.î. } P=\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i.$$

- Dacă $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$, atunci $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}$ şi $P_1 \setminus P_2 \in \mathcal{P}$.
- Orice $P\in\mathcal{P}$ se poate scrie ca şi reuniunea unor dreptunghiuri disjuncte $\Delta_1,\Delta_2,...,\Delta_n$ ($\Delta_i\cap\Delta_j=\emptyset$ dacă $i\neq j$):

$$P=\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i$$

Mulţimi măsurabile Jordan în $\mathbb{R}^2$

Aria unei mulţimi $P \in \mathcal{P}$ este

$$\text{aria}(P) = \sum_{i=1}^{n} \text{aria}(\Delta_i), \quad \text{unde } P = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i \text{ şi } \Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n \text{ sunt disjuncte.}$$

Aria definită astfel verifică următoarele proprietăţi:

- aria$(P) > 0$ pentru orice $P \in \mathcal{P}$.
- dacă $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ şi $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, atunci
$$\text{aria}(P_1 \cup P_2) = \text{aria}(P_1) + \text{aria}(P_2).$$
- aria(P) este independentă de descompunerea mulţimii P într-o reuniune finită de dreptunghiuri disjuncte.

Mulţimi măsurabile Jordan în $\mathbb{R}^2$

Pentru o mulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}^2$, definim

$$\text{aria}_i(A) = \sup_{P \subset A, P \in \mathcal{P}} \text{aria}(P) \quad \text{şi} \quad \text{aria}_e(A) = \inf_{P \supset A, P \in \mathcal{P}} \text{aria}(P)$$

O mulţime mărginită $A \subset \mathbb{R}^2$ este măsurabilă Jordan dacă

$$\text{aria}_i(A) = \text{aria}_e(A).$$

Aria unei mulţimi măsurabile Jordan $A \subset \mathbb{R}^2$ este

$$\text{aria}(A) = \text{aria}_i(A) = \text{aria}_e(A)$$

- Dacă A_1, A_2 sunt măsurabile Jordan, atunci şi $A_1 \cup A_2$ şi $A_1 \setminus A_2$ sunt măsurabile Jordan.
- Dacă $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, atunci

$$\text{aria}(A_1 \cup A_2) = \text{aria}(A_1) + \text{aria}(A_2).$$

Integrala Riemann-Darboux: funcţii de două variabile

Considerăm o mulţime mărginită şi măsurabilă Jordan $A \subset \mathbb{R}^2$.

O partiţie P a mulţimii A este o mulţime finită de submulţimi disjuncte măsurabile Jordan $A_i \subset A$, $i = \overline{1, n}$ astfel încât:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

Diametrul unei mulţimi A_i este

$$d(A_i) = \max_{(x',y'),(x'',y'')\in A_i} \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}$$

Norma partiţiei P este

$$\nu(P) = \max\{d(A_1), d(A_2), \cdots, d(A_n)\}.$$

Sume Darboux şi Riemann

Fie $f : A \to \mathbb{R}^1$ o funcţie mărginită. Atunci f este mărginită pe fiecare submulţime A_i şi există m_i şi M_i a.î. $m_i \leq f(x,y) \leq M_i$ pe A_i.

Suma Darboux superioară a funcţiei f în raport cu partiţia P este

$$U_f(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \text{aria}(A_i), \quad \text{unde } M_i = \sup\{f(x,y) \,|\, (x,y) \in A_i\}.$$

Suma Darboux inferioară a funcţiei f în raport cu partiţia P este

$$L_f(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \text{aria}(A_i), \quad \text{unde } m_i = \inf\{f(x,y) \,|\, (x,y) \in A_i\}.$$

Suma Riemann a funcţiei f în raport cu partiţia P este

$$\sigma_f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria}(A_i) \quad \text{unde } (\xi_i, \eta_i) \in A_i.$$

Au loc inegalităţile

$$L_f(P) \leq \sigma_f(P) \leq U_f(P).$$

Integrala Riemann-Darboux: funcţii de două variabile

Fie numerele m şi M astfel ca $m \leq f(x,y) \leq M$ pentru orice $(x,y) \in A$.

$$m \cdot \text{aria}(A) = m \cdot \sum_{i=1}^{n} \text{aria}(A_i) \leq L_f(P) \leq U_f(P) \leq M \cdot \sum_{i=1}^{n} \text{aria}(A_i) = M \cdot \text{aria}(A)$$

Atunci, următoarele mulţimi sunt mărginite:

$$L_f = \{L_f(P) \mid P \text{ este o partiţie a mulţimii } A\}$$
$$U_f = \{U_f(P) \mid P \text{ este o partiţie a mulţimii } A\}$$

Deci, putem considera $\mathcal{L}_f = \sup_P L_f$ şi $\mathcal{U}_f = \inf_P U_f$.

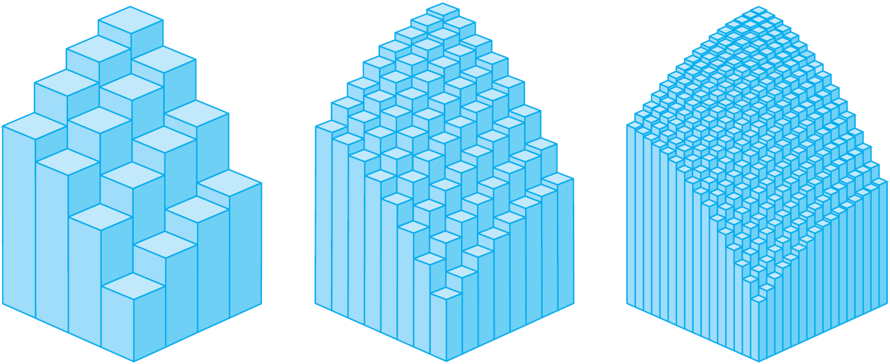
Dacă funcţia f este mărginită pe A, atunci

$$\mathcal{L}_f \leq \mathcal{U}_f.$$

Funcţia f este integrabilă Riemann-Darboux pe A dacă

$$\mathcal{L}_f = \mathcal{U}_f := \underbrace{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{integrala dublă a fcţ. } f \text{ pe } A}$$

Integrala Riemann-Darboux: funcţii de două variabile



Clase de funcţii integrabile Riemann-Darboux

Dacă f este continuă pe mulţimea măsurabilă Jordan A, atunci f este integrabilă Riemann-Darboux pe A.

O funcţie f se numeşte continuă pe porţiuni pe A dacă există o partiţie $P = \{A_1, \cdots, A_n\}$ a mulţimii A şi funcţii continue f_i, $i = \overline{1,n}$ definite pe A_i astfel încât $f(x) = f_i(x)$ pentru $x \in Int(A_i)$.

O funcţie continuă pe porţiuni este integrabilă Riemann-Darboux şi

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{A_i} f_i(x,y)\,dx\,dy.$$

Proprietăţile integralei Riemann-Darboux

Dacă f şi g sunt integrabile Riemann-Darboux pe A, atunci au loc:

$$\iint\limits_A [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\, dxdy = \alpha \iint\limits_A f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_A g(x,y)dxdy,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$$

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \iint\limits_{A_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{A_2} f(x,y)dxdy \text{ unde } A_1 \cup A_2 = A,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

dacă $f(x,y) \leq g(x,y)$ pe A, atunci $\displaystyle\iint\limits_A f(x,y)\, dx\, dy \leq \iint\limits_A g(x,y)\, dx\, dy$

Teorema de medie:

Dacă $f : A \to \mathbb{R}^1$ este integrabilă pe A şi $m \leq f(x,y) \leq M$ pentru orice $(x,y) \in A$, atunci:

$$m \cdot \text{aria}(A) \leq \iint\limits_A f(x,y)\, dx\, dy \leq M \cdot \text{aria}(A).$$

Integrale duble pe dreptunghiuri

Teoremă (Teorema lui Fubini)

Dacă A este un dreptunghi, $A = [a, b] \times [c, d]$ şi $f : A \to \mathbb{R}^1$ este o funcţie continuă, atunci:

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\,dy \right) dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$

$\Longrightarrow$ calculul unei integrale duble pe un domeniu dreptunghiular se reduce la calculul succesiv a două integrale simple.

Exemplu. Dacă $A = [0, 2] \times [1, 3]$ atunci

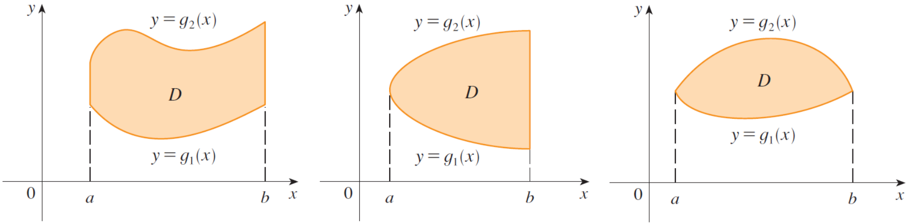
$$\begin{aligned}\iint_A (x - 3y^2)dxdy &= \int_0^2 \int_1^3 (x - 3y^2)dy\ dx = \int_0^2 (xy - y^3)\Big|_{y=1}^{y=3} dx \\ &= \int_0^2 (2x - 26)dx = (x^2 - 26x)\Big|_{x=0}^{x=2} = -48.\end{aligned}$$

Integrale duble pe domenii generale: tipul I

Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ este de tipul I dacă este mărginit de graficele a două funcţii continue ce depind de x, adică:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b \ \text{şi} \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

unde g_1, g_2 sunt continue şi $g_1(x) \le g_2(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$.



Pentru o funcţie continuă $f : D \to \mathbb{R}^1$ avem:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Exemplu: integrală dublă pe un domeniu de tipul I

Considerând funcţia $f(x,y) = x + 2y$ definită pe domeniul D de tipul I maginit de parabolele $y = 2x^2$ şi $y = 1 + x^2$, putem scrie:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \leq x \leq 1 \text{ şi } 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$$

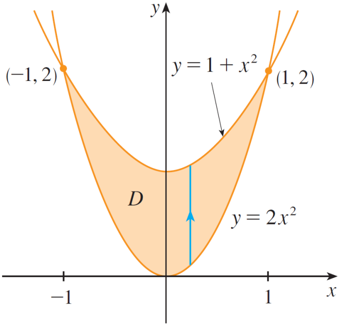
$$\iint_D (x+2y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (xy + y^2)\Big|_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[x(1-x^2) + (1+x^2)^2 - (2x^2)^2\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 + x + 2x^2 - x^3 - 3x^4)\,dx = \frac{32}{15}$$



Integrale duble pe domenii generale: tipul II

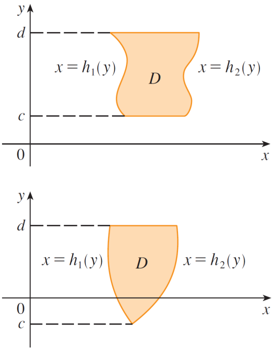
Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ este de tipul II dacă poate fi scris ca şi:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \leq y \leq d \ \text{şi} \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

unde h_1, h_2 sunt continue şi $h_1(y) \leq h_2(y)$ pentru orice $y \in [c, d]$.

Pentru o funcţie continuă $f : D \to \mathbb{R}^1$ avem:

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

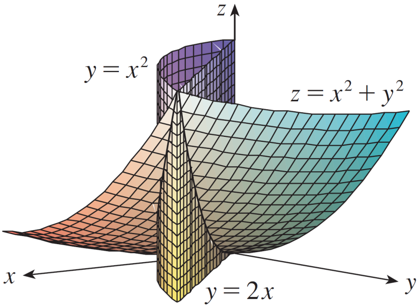


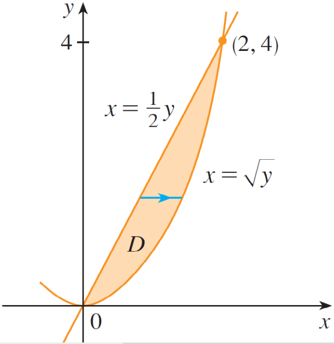
Exemplu: integrală dublă pe un domeniu de tipul II

Calculaţi volumul corpului aflat sub paraboloidul $z = x^2 + y^2$ şi deasupra domeniului D al planului xy mărginit de dreapta $y = 2x$ şi de parabola $y = x^2$. Putem scrie:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 2 \text{ şi } x^2 \le y \le 2x\} \quad \text{sau}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le 4 \text{ şi } \frac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y}\}$$





Exemplu: integrală dublă pe un domeniu de tipul II

Calculaţi volumul corpului aflat sub paraboloidul $z = x^2 + y^2$ şi deasupra domeniului D al planului xy mărginit de dreapta $y = 2x$ şi de parabola $y = x^2$.

Alegem să scriem domeniul D ca şi un domeniu de tipul II:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le 4 \text{ şi } \frac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y}\}$$

Volumul se calculează folosind formula

$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)dx\, dy =$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right)\Big|_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} - \frac{y^3}{24} + y^{5/2} - \frac{y^3}{2}\right) dy = \frac{216}{35}$$

Schimbări de variabile în integrale duble

Teoremă

Dacă $A, B \subset \mathbb{R}^2$ sunt două mulţimi măsurabile Jordan, $T : B \to A$ este o bijecţie astfel încât T şi T^{-1} au derivate parţiale continue şi $f : A \to \mathbb{R}^1$ este o funcţie integrabilă, atunci are loc:

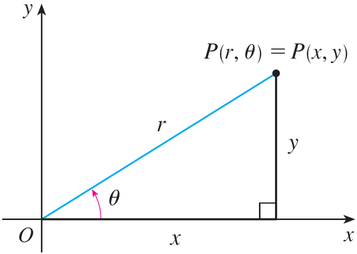
$$\iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_B f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi\,d\eta$$

În teorema de mai sus, schimbările de variabile sunt:

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$$

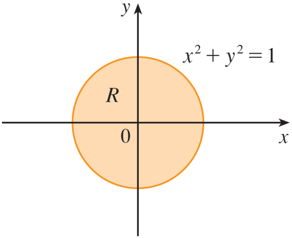
Integrale duble în coordonate polare

Coordonatele polare (r, θ) ale unui punct P din planul $\mathbb{R}^2$ sunt legate de coordonatele carteziene (x, y) prin relaţiile:

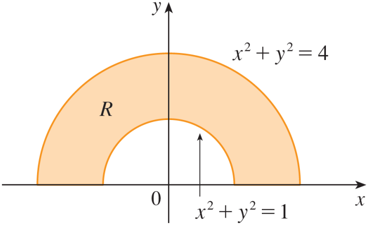


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r \geq 0, \;\; \theta \in [0, 2\pi]$$

Exemple:



(a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$



(b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Integrale duble în coordonate polare

Trecerea la coordonate polare în integrale duble:

Cu schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} , \quad (r,\theta) \in R$$

obţinem:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\; r\; dr\; d\theta$$

unde D este domeniul coordonatelor carteziene şi R este domeniul corespunzător al coordonatelor polare.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r\ !$$

Integrale duble în coordonate polare: exemplu

Găsiţi volumul corpului mărginit de planul $z = 0$ şi de paraboloidul $z = 1 - x^2 - y^2$.

Intersecţia paraboloidului cu planul xy:

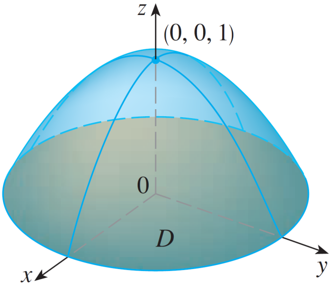
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Corpul se află deasupra discului:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Domeniul în coordonate polare - dreptunghi:

$$R = \{(r, \theta) : r \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi]\}$$



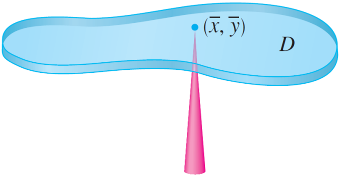
$$V = \iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dxdy = \iint_R (1 - r^2) r \ dr \ d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - r^3) dr \ d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Aplicaţii ale integralelor duble

- calculul volumelor: $V = \iint_D f(x,y)dxdy$
- densitate şi masă: masa unei placi ce ocupă regiunea D şi are funcţia de densitate $\rho(x,y)$ este
$$m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$$
- centrul de masă: coordonatele $(\bar{x},\bar{y})$ ale centrului de masă al unei plăci ce ocupa regiunea D având funcţia de densitate $\rho(x,y)$ sunt

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy$$



Aplicaţii ale integralelor duble

- calculul ariilor suprafeţelor: aria suprafeţei de ecuaţie $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, unde f_x şi f_y sunt continue este:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\, dx\, dy$$

Exemplu: Găsiţi aria suprafeţei paraboloidului $z = x^2 + y^2$ ce se află sub planul $z = 9$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\} \quad \longrightarrow \quad R = [0,3]\times[0,2\pi]$ pt. coordonate polare

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_D \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\, dx\, dy = \\ &= \iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dx\, dy \\ &= \iint_R \sqrt{4r^2+1} \cdot r\, dr\, d\theta = \\ &= 2\pi \frac{1}{8}\frac{2}{3}(4r^2+1)^{3/2}\Big|_{r=0}^{r=3} = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1) \end{aligned}$$