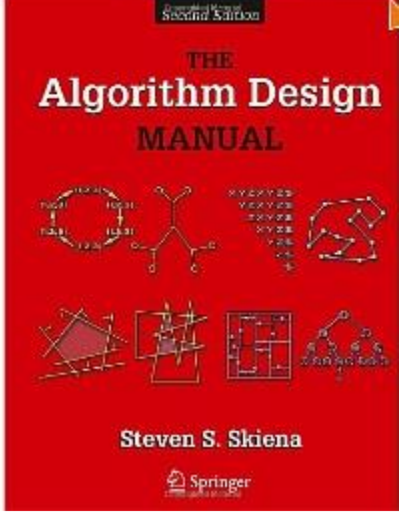
CURS 6:

Analiza metodelor de sortare

Motivatie



S. Skiena – The Algorithm Design Manual

http://sist.sysu.edu.cn/~isslxm/DSA/textbook/Skiena.-.TheAlgorithmDesignManual.pdf

Interview Problems

4-40. *[3]* If you are given a million integers to sort, what algorithm would you use to sort them? How much time and memory would that consume?

4-41. *[3]* Describe advantages and disadvantages of the most popular sorting algorithms.

Structura

- Problema sortării

- Sortare prin inserție – analiza corectitudinii și a eficienței

- Sortare prin selecție – analiza corectitudinii și a eficienței

- Sortare prin interschimbarea elementelor vecine – analiza corectitudinii și a eficienței

Problema sortării

Considerăm:

- O secvență de "entități" (numere, structuri conținând mai multe informații etc)

- Fiecare entitate posedă o caracteristică numită cheie de sortare. Valorile posibile ale cheii de sortare aparțin unei mulțimi pe care există o relație totală de ordine

- Sortarea secvenței = aranjarea elementelor astfel încât valorile cheii de sortare să fie în ordine crescătoare (sau descrescătoare)

Problema sortării

Exemple:

1. Secvența de numere: (5,8,3,1,6)
   Cheia de sortare este chiar elementul din secvență
   Rezultatul sortării crescătoare este (1,3,5,6,8)

2. Secvența de entități (numite înregistrări sau articole) ce conțin două câmpuri: nume și nota
   ((Paul,9), (Ioana, 10), (Victor,8), (Ana,9))

In acest caz există două criterii posibile de sortare:

nume și nota

Sortare crescătoare după nume:

((Ana,9),(Ioana,10),(Paul,9),(Victor,8))

Sortare descrescătoare după notă:

((Ioana,10),(Paul,9),(Ana,9),(Victor,8))

Problema sortării

Ceva mai formal…

Ordonarea (crescătoare) a secvenței $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ este echivalentă cu găsirea unei permutari (p(1),p(2),…,p(n)) a indicilor astfel încât:

$cheie(x_{p(1)})<=cheie(x_{p(2)}) <= \ldots <=cheie(x_{p(n)})$

In cele ce urmează vom considera cheia de sortare ca fiind reprezentată de întregul element (secvența este constituită din valori aparținând unei mulțimi pe care există o relație de ordine)

In această ipoteză secvența este considerată ordonată crescător dacă satisface:

$$x_{p(1)}<=x_{p(2)} <= \ldots <=x_{p(n)}$$

Problema sortării

Alte ipoteze:

- Presupunem ca secvența este stocată sub forma unui tablou astfel că este asigurat accesul rapid la oricare dintre elementele ei. Aceasta înseamnă că este vorba despre sortare internă

  Sortarea externă corespunde cazului în care nu se poate accesa simultan întreaga secvență (de exemplu secvența este foarte mare astfel că nu poate fi încărcată în întregime în memoria internă a calculatorului) ceea ce necesită metode specifice de sortare

- Vom analiza doar metode care transformă tabloul curent fără a construi un alt tablou (spațiul adițional de memorie are dimensiunea de ordin O(1)).

Proprietăți ale metodelor de sortare

1. Eficiența

   Metoda de sortare ar trebui să necesite un volum rezonabil de resurse (timp de execuție)

2. Stabilitate

   O metoda de sortare este stabilă dacă păstrează ordinea relativă a elementelor având aceeași valoare a cheii de sortare

3. Simplitate

   Metoda de sortare ar trebui sa fie simplu de înțeles și de implementat

4. Naturalețe

   O metodă de sortare este considerată naturală dacă numărul de operații necesare este proporțional cu gradul de “dezordine” al secvenței inițial (care poate fi măsurat prin numărul de inversiuni din permutarea corespunzătoare secvenței sortate)

Stabilitate

Exemplu:

Configurația inițială:

((Ana,9), (Ioana, 10), (Paul,9), (Victor,8))

Sortare stabilă:

((Ioana,10),(Ana,9),(Paul,9),(Victor,8))

Sortare instabilă:

((Ioana,10), (Paul,9),(Ana,9), (Victor,8))

Metode elementare de sortare

Sunt simple, intuitive dar nu foarte eficiente…

Reprezintă, totuși, puncte de pornire pentru metodele mai avansate.

Exemple:

- Sortare prin inserție
- Sortare prin selecție
- Sortare prin interschimbarea elementelor vecine

Sortare prin inserție

Idee de bază:

Fiecare element al tabloului, începând cu al doilea, este inserat în subtabloul care îl precede astfel încât acesta sa rămână ordonat:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots x_n)$$

Subtablou deja ordonat
(subtablou destinație)

Element de inserat

Sortare prin inserție - exemplu

WHILE (j>=1) AND (aux<x[j])

FOR i←2,n

i	j		i-1	i-2	i-3	i-4
		aux=5				
2	8 5 9 8 1		8 8 9 8 1	5 8 9 8 1		
		aux=9				
3	5 8 9 8 1		5 8 9 8 1			
		aux=8				
4	5 8 9 8 1		5 8 9 9 1	5 8 8 9 1		
		aux=1				
5	5 8 8 9 1		5 8 8 9 9	5 8 8 8 9	5 8 8 8 9	5 5 8 8 9
						1 5 8 8 9

Sortare prin inserție – algoritm

Structura generală

```
FOR i ← 2,n DO
<insereaza x[i] în subtabloul
    x[1..i-1] astfel încât x[1..i]
    să fie sortat>
ENDFOR
```

Algoritm

```
Inserție(x[1..n])
FOR i ← 2,n DO
    aux ← x[i]
    j ← i-1
    WHILE (j>=1) AND (aux<x[j])) DO
        x[j+1] ← x[j]
        j ← j-1
    ENDWHILE
    x[j+1] ← aux
ENDFOR
 RETURN x[1..n]
```

Sortare prin inserție – variantă

```
Insertie(x[1..n])
FOR i ← 2,n DO
    aux ← x[i]
    j ← i-1
    WHILE (j>=1) AND (aux<x[j]) DO
        x[j+1] ← x[j]
        j ← j-1
     ENDWHILE
    x[j+1] ← aux
ENDFOR
RETURN x[1..n]
```

Variantă (x[0] este folosit ca zonă de manevră):

```
Insertie2(x[0..n])
FOR i ← 2,n DO
    x[0]←x[i]
    j:=i-1
    WHILE (x[0]<x[j]) DO
        x[j+1] ← x[j]
        j ← j-1
    ENDWHILE
    x[j+1] ← x[0]
ENDFOR
 RETURN x[1..n]
```

Sortare prin insertie – verificare corectitudine

```
Insertie(x[1..n])
i←2                          Inv:   {x[1..i-1] e sortat}
WHILE i<=n
    aux ← x[i]
    j ← i-1                  Inv:   {x[1..j] e sortat,  aux<=x[j+1]<=..<=x[i]}
    WHILE (j>=1) AND (aux<x[j]) DO
        x[j+1] ← x[j]        {x[1..j-1] e sortat, aux<x[j]=x[j+1]<= … <=x[i]}
        j ← j-1              {x[1..j] e sortat, aux<x[j+1]=x[j+2]<= … <=x[i]}
    ENDWHILE
    Este satisfacută fie {aux>=x[j]  si x[1]<=…x[j]<=aux<x[j+1]=x[j+2]<=…<=x[i]}
    fie {(j=0)  și  aux<x[1]=x[2]<=…<=x[i]}
    x[j+1] ← aux   {x[1]<=x[2]<=…x[j+1]<=x[j+2]<=…<=x[i]} (x[1..i] e sortat)
    i ← i+1        {x[1..i-1]  e sortat}
ENDWHILE
RETURN x[1..n]
```

Sortare prin insertie – verificare corectitudine

Deci am obținut că…

Invariant pentru ciclul exterior poate fi considerat: **{x[1..i-1] sortat}**

Invariant pentru ciclul interior:

{x[1..j] e sortat, aux<=x[j+1]=x[j+2]<=..<=x[i]}

Ambele cicluri sunt finite:

funcție de terminare pentru ciclul exterior: $F(p)=n+1-i_p$

funcție de terminare pentru ciclul interior:

$$F(p)=\begin{cases} j_p & \text{dacă } aux < x[j_p] \\ 0 & \text{dacă } aux >= x[j_p] \text{ sau } j_p=0 \end{cases}$$

Sortare prin inserție – analiza eficienței

```
Insertie(x[1..n])
FOR i ← 2,n DO
    x[0] ← x[i]
    j ← i-1
    WHILE x[0]<x[j] DO
        x[j+1] ← x[j]
        j ← j-1
    ENDWHILE
    x[j+1] ← x[0]
ENDFOR
RETURN x[1..n]
```

Dimensiune problemă: n

Operații:

- Comparații ($T_C(n)$)
- Mutări ale elementelor ($T_M(n)$)

Cel mai favorabil caz:

x[1]<=x[2]<=...<=x[n]

Cel mai defavorabil caz:

x[1]>x[2]>...>x[n]

Pentru fiecare i (2 <=i <= n):

$1 \le T_C(n) \le i$

Pentru toate valorile lui i:

$(n-1) \le T_C(n) \le n(n+1)/2-1$

Sortare prin inserție – analiza eficienței

```
Insertie(x[1..n])
FOR i ← 2,n DO
    x[0] ← x[i]
    j ← i-1
    WHILE x[0]<x[j] DO
        x[j+1] ← x[j]
        j ← j-1
    ENDWHILE
    x[j+1] ← x[0]
 ENDFOR
 RETURN x[1..n]
```

Dimensiune problemă: n

Operații:

- Comparații ($T_C(n)$)
- Mutări ale elementelor($T_M(n)$)

Pentru fiecare i (2 <=i <= n):

$$0+2 \le T_M(n) \le (i-1)+2=i+1$$

Pentru toate valorile lui i:

$$2\,(n-1) \le T_M(n) \le (n+1)(n+2)/2-3$$

Sortare prin inserție – analiza eficienței

Comparații:

$$(n-1) <= T_C(n) <= (n+2)(n-1)/2$$

Mutări:

$$2\,(n-1) <= T_M(n) <= (n+1)(n+2)/2-3$$

Total:

$$3(n-1) <= T(n) <= n^2+2n-3$$

Clase de complexitate (eficiența):

$$T(n) \in \Omega(n)$$
$$T(n) \in O(n^2)$$

Sortare prin inserție – stabilitate

8 5 9 8' 1 → 5 8 9 8' 1

5 8 9 8' 1 → 5 8 9 8' 1

5 8 9 8' 1 → 5 8 8' 9 1

5 8 8' 9 1 → 1 5 8 8' 9

Sortarea prin inserție este stabilă

Sortare prin selecție

Ideea de bază:

Pentru fiecare poziție , i (începând cu prima) se caută minimul din subtabloul x[i..n] și acesta se interschimbă cu elementul de pe poziția i.

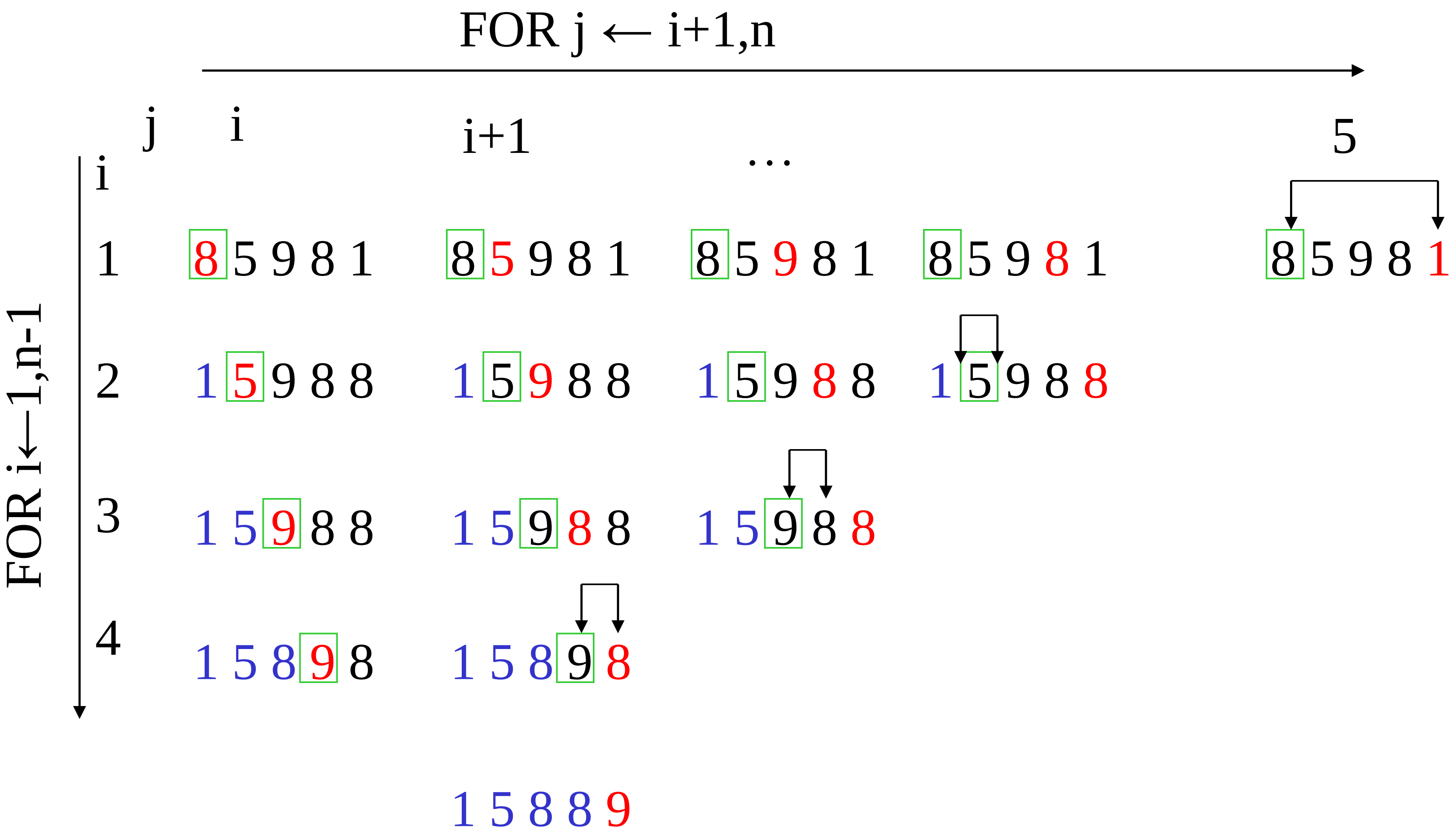
$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \boxed{x_i}, x_{i+1}, \ldots x_n)$$

Subtablou deja sortat

Subtablou unde se caută minimul

Poziția pe care se plasează minimul

Sortare prin selecție



Sortare prin selecție

Structura generală

FOR i ← 1,n-1 DO

<se caută minimul lui x[i..n] și se interschimbă cu x[i]>

ENDFOR

Algoritm

```
Selectie (x[1..n])
FOR i←1,n-1 DO
   k ← i;
   FOR j ← i+1,n DO
      IF x[k]>x[j] THEN k ← j ENDIF
   ENDFOR
   IF k!=i
      THEN  x[i]↔x[k]
   ENDIF
ENDFOR
RETURN x[1..n]
```

Sortare prin selectie – verificare corectitudine

Algoritm

```
Selection (x[1..n])
i ← 1                              {x[1..i-1] sortat si x[i-1]<=x[j], j=i..n}
WHILE i<=n-1 DO
   k ← i
   j ← i+1                 {x[k]<=x[r]  pentru orice r=i..j-1}
   WHILE j<=n  DO
     IF x[k]>x[j] THEN k ← j ENDIF
     j ← j+1
   ENDWHILE                          {x[k]<=x[r]  pentru orice r=i..n}
   IF k!=i THEN x[i] ↔ x[k]  {x[1..i] sortat si x[i]<=x[j], j=i..n}
   i ← i+1
ENDWHILE                          {x[1..i-1] sortat si x[i-1]<=x[j], j=i..n}
RETURN x[1..n]
```

Sortare prin selecție – verificare corectitudine

Deci am obtinut că…

Invariant pentru ciclul exterior poate fi considerat:

{x[1..i-1] sortat și x[i-1]<=x[j], j=i..n}

Invariant pentru ciclul interior poate fi considerat:

{x[k]<=x[r] pentru orice r=i..j-1}

Ambele cicluri sunt finite:

funcție de terminare pentru ciclul exterior: $F(p)=n-i_p$

funcție de terminare pentru ciclul interior: $F(p)=n+1-j_p$

Sortare prin selecție – analiza eficienței

```
Selectie (x[1..n])
FOR i ← 1,n-1 DO
   k ← i
   FOR j ← i+1,n DO
     IF x[k]>x[j] THEN k ← j
   ENDFOR
   IF k!=i THEN x[i] ↔ x[k]
ENDFOR
RETURN x[1..n]
```

Dimensiune problemă: n

Operații:

- Comparații ($T_C(n)$)
- Mutări ale elementelor($T_M(n)$)

Pentru fiecare i (1 <=i <= n-1):

$T_C(n,i) = n-i$

Pentru toate valorile lui i:

$T_C(n) = n(n-1)/2$

Sortare prin selecție – analiza eficienței

```
Selectie (x[1..n])
FOR i ← 1,n-1 DO
   k ← i
   FOR j ← i+1,n DO
     IF x[k]>x[j] THEN k ← j
   ENDFOR
   IF k!=i THEN x[i] ↔ x[k]
ENDFOR
RETURN x[1..n]
```

Dimensiune problemă: n

Operații:

- Comparații ($T_C(n)$)
- Mutări ale elementelor($T_M(n)$)

Pentru fiecare i (2 <=i <= n):

$$0 <= T_M(n,i) <=3$$

Obs: o interschimbare (↔) necesită 3 asignări

Pentru toate valorile lui i:

$$0 <= T_M(n) <= 3(n-1)$$

Sortare prin selecție – analiza eficienței

Comparații:

$$T_C(n) = n(n-1)/2$$

Mutări:

$$0 <= T_M(n) <= 3(n-1)$$

Total:

$$n(n-1)/2 <= T(n) <= n(n-1)/2+3(n-1)$$

Clasa de eficiență (complexitate): $T(n) \in \Theta(n^2)$

Sortare prin selecție - stabilitate

8 5 9 8’1   8 5 9 8’1   8 5 9 8’1   8 5 9 8’1   8 5 9 8’1

1 5 9 8’8   1 5 9 8’8   1 5 9 8’8   1 5 9 8’8

1 5 9 8’8   1 5 9 8’8   1 5 9 8’8

1 5 8’9 8   1 5 8’9 8

1 5 8’8 9

Sortarea prin selecție nu e stabilă

Sortare prin interschimbarea elementelor vecine

Idee de bază:

Tabloul este parcurs de la stânga spre dreapta și elementele adiacente sunt comparate. Dacă nu sunt in ordinea dorită atunci se interschimbă. Procesul este repetat până când tabloul ajunge să fie ordonat

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots x_n)$$

Subtablou deja ordonat

Sortare prin interschimbarea elementelor vecine

FOR j ← 1,i-1

FOR i ← n,2,-1

i \ j	1	2	…	4	
5	8 5 9 8 1	5 8 9 8 1	5 8 9 8 1	5 8 8 9 1	5 8 8 1 9
4	5 8 8 1 9	5 8 8 1 9	5 8 8 1 9	5 8 1 8 9	
3	5 8 1 8 9	5 8 1 8 9	5 1 8 8 9		
2	5 1 8 8 9	1 5 8 9 8			

Sortare prin interschimbarea elementelor vecine

Structura generală

FOR i ← n,2,-1 DO

< se parcurge x[1..i-1], se compară elementele adiacente și se interschimbă dacă este cazul>

ENDFOR

Algoritm

```
Bubblesort(x[1..n])
FOR i ← n,2,-1 DO
  FOR j ← 1,i-1 DO
   IF x[j]>x[j+1]
        THEN x[j] ↔ x[j+1]
   ENDIF
  ENDFOR
ENDFOR
RETURN x[1..n]
```

Bubble sort – analiza corectitudine

```
Bubblesort(x[1..n])
i ← n        {x[i+1..n] este sortat si x[i+1]>=x[j], j=1..i}
WHILE i>=2 DO
   j ← 1                                   {x[j]>=x[k], k=1..j-1}
  WHILE j<=i-1 DO
      IF x[j]>x[j+1]  THEN x[j]<->x[j+1]   {x[j+1]>=x[k], k=1..j}
      j ← j+1                              {x[j]>=x[k], k=1..j-1}
   ENDWHILE                                {x[i-1]>=x[j], j=1..i-1}
          {x[i..n] este sortat si x[i]>=x[j], j=1..i-1}
  i ← i-1
ENDWHILE          {x[i+1..n] este sortat si x[i+1]>=x[j], j=1..i}
RETURN x[1..n]
```

Bubble sort – analiza corectitudine

Deci am obținut că …

Invariant pentru ciclul exterior poate fi:

{x[i+1..n] este sortat și x[i+1]>=x[j], j=1..i}

Un invariant pentru ciclul interior poate fi:

{x[j]>=x[k], k=1..j-1}

Ambele cicluri sunt finite:

funcție de terminare pentru ciclul exterior: $F(p)=i_p-1$

funcție de terminare pentru ciclul interior: $F(p)=i_p-j_p$

Bubble sort – analiza eficienței

```
Bubblesort(x[1..n])
FOR i ← n,2,-1 DO
   FOR j ← 1,i-1 DO
     IF x[j]>x[j+1]
          THEN x[j] ↔ x[j+1]
     ENDIF
  ENDFOR
ENDFOR
RETURN x[1..n]
```

Dimensiune problemă: n

Operații:

Comparații ($T_C(n)$)

Mutări ale elementelor ($T_M(n)$)

Pentru fiecare i (1 <=i <= n-1):

$$T_C(n,i) = i-1$$

Pentru toate valorile lui i:

$$T_C(n) = n(n-1)/2$$

Bubble sort – analiza eficientei

```
Bubblesort(x[1..n])
FOR i ← n,2,-1 DO
   FOR j ← 1,i-1 DO
     IF x[j]>x[j+1]
            THEN x[j] ↔ x[j+1]
     ENDIF
  ENDFOR
ENDFOR
RETURN x[1..n]
```

Dimensiune problemă: n

Operatii:

Comparații ($T_C(n)$)

Mutări ale elementelor ($T_M(n)$)

Pentru fiecare i ($2 <= i <= n$):

$$0 <= T_M(n,i) <= 3(i-1)$$

Pentru toate valorile lui i:

$$0 <= T_M(n) <= 3n(n-1)/2$$

Bubble sort – analiza eficienței

Comparații:

$$T_C(n) = n(n-1)/2$$

Mutări:

$$0 <= T_M(n) <= 3n(n-1)/2$$

Total:

$$n(n-1)/2 <= T(n) <= 2n(n-1)$$

Clasa de eficienta (complexitate): $T(n) \in \Theta(n^2)$

Obs. Aceasta variantă de implementare este cea mai puțin eficientă. Variantele mai bune evită execuția de (n-1) ori a ciclului exterior, oprind prelucrarea când tabloul este sortat deja

Bubble sort – alte variante

Idee: se reia parcurgerea tabloului doar dacă a fost necesară cel puțin o interschimbare la parcurgerea anterioară

```
Bubblesort(x[1..n])
sw ← TRUE
WHILE sw=TRUE DO
  sw ← FALSE
  FOR j ← 1,n-1 DO
    IF x[j]>x[j+1]
          THEN x[j] ↔ x[j+1]
               sw ← TRUE
    ENDIF
  ENDFOR
ENDWHILE
RETURN x[1..n]
```

$n-1 <= T_C(n) <= n(n-1)$

Idee: se parcurge tabloul doar până la poziția ultimei interschimbari efectuate la parcurgerea anterioară

```
Bubblesort(x[1..n])
t ← n
WHILE t>1 DO
  m ← t;   t ← 0
  FOR j ← 1,m-1 DO
    IF x[j]>x[j+1]
          THEN x[j] ↔ x[j+1];   t ← j
    ENDIF
  ENDFOR
ENDWHILE
RETURN x[1..n]
```

$n-1 <= T_C(n) <= n(n-1)/2$

Bubble sort - stabilitate

8 5 9 8’ 1   5 8 9 8’ 1   5 8 9 8’ 1   5 8 8’9 1   5 8 8’ 1 9

5 8 8’1 9   5 8 8’1 9   5 8 8’1 9   5 8 1 8’ 9

5 8 1 8’ 9   5 8 1 8’ 9   5 1 8 8’ 9

5 1 8 8’ 9   1 5 8 9 8’

Bubble sort este stabilă
(cu conditia sa se foloseasca inegalitate stricta: x[j]>x[j+1])

Link-uri utile…

http://www.sorting-algorithms.com/

http://www.softpanorama.org/Algorithms/sorting.shtml

http://www.brian-borowski.com/Software/Sorting/

http://www.youtube.com/watch?v=INHF_5RIxTE ☺

Sumar

- Tehnicile clasice de sortare (inserție, selecție, interschimbarea elementelor vecine) au complexitate pătratică - practice doar pentru tablouri cu număr mic de elemente (de ordinul sutelor).

  - Inserție: avantajos dacă tabloul este “aproape sortat”; stabil
  - Selecție: util când e necesară sortare parțiala (ex: se caută primele k < n elemente în ordine crescătoare; instabil
  - Bubblesort: de evitat (în special prima variantă)

- Pentru n=1000000 și durata de o nanosecundă/operație ar necesita cca 17 minute
- Daca T(n) ar fi din O(nlogn) atunci pentru aceeași valoarea a lui n ar fi suficiente 0.019 secunde

Cursul următor va fi despre…

… tehnici de proiectare a algoritmilor

… tehnica reducerii

… recursivitate

Intrebare de final

Se consideră un tablou x cu 10000 de elemente (numere reale) si se pune problema determinării celui de al 10-lea element în ordine descrescătoare.

De la care dintre algoritmii urmatori ati porni pentru a rezolva problema?

Obs: nu e necesar sa se ordoneze intregul tablou

Variante de răspuns:

a) Sortare prin inserție
b) Sortare prin selecție
c) Sortare prin interschimbarea elementelor vecine
d) Alt algoritm (precizati care)