7 Geometrie analitică

7.1 Dreapta

P 1. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(3,2)$ şi $B(2,-1)$. Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie ale dreptei AB cu axele Ox şi Oy.

P 2. Determinaţi unghiul format de dreptele $d_1 : 3x + y - 11 = 0$ şi $d_2 : 7x + y - 5 = 0$.

P 3. Determinaţi ecuaţiile dreptelor care trec prin punctul $A(-4,2)$ şi fac unghiuri de $\frac{\pi}{4}$ cu dreapta de ecuaţie $x-3y+6 = 0$.

P 4. Pe dreapta $d : 2x + 3y - 6 = 0$ se consideră punctele A, B, C, D de abscise -1, 1, 2, 5. Fie A', B', C', D' punctele în care dreptele OA, OB, OC, respectiv OD, intersectează dreapta $d' : 3x + 4,5y - 12 = 0$. Arătaţi că

$$(A, B \,|\, C, D) = (A', B' \,|\, C', D').$$

P 5. Dreapta $d : ax + by + c = 0$ intersectează dreapta AB în punctul M. Arătaţi că

$$(A, B \,|\, M) = -\frac{ax_A + by_A + c}{ax_B + ay_B + c}.$$

P 6. *(***teorema lui Menelaos***).* Fie d o dreaptă care intersectează laturile BC, CA, AB ale unui triunghi $\Delta\, ABC$ în punctele M, N, P. Arătaţi că

$$(B, C \,|\, M) \cdot (C, A \,|\, N) \cdot (A, B \,|\, P) = -1.$$

P 7. *(***teorema lui Ceva***)* Fie Q un punct în plan, iar M, N, P punctele în care dreptele QA, QB, respectiv QC, intersectează laturile BC, CA, AB ale unui triunghi $\Delta\, ABC$. Arătaţi că

$$(B, C \,|\, M) \cdot (C, A \,|\, N) \cdot (A, B \,|\, P) = 1.$$

P 8. Fie date punctele $A(3,4)$, $B(5,6)$, $C(4,7)$ şi $D(6,9)$.
a) Arătaţi că $ABCD$ este un paralelogram. Determinaţi lungimile laturilor şi diagonalelor sale.
b) Calculaţi aria paralelogramului şi unghiurile sale interioare.

P 9. Rezolvaţi grafic inecuaţia

$$(x + 4y + 5)(2x - 5y - 10)(x + 2y - 2) < 0.$$

P 10. Fie triunghiul $\Delta\, ABC$ cu laturile pe dreptele $BC : x + 4y + 5 = 0$, $CA : 2x - 5y - 10 = 0$ şi $AB : x + 2y - 2 = 0$. Determinaţi
a) coordonatele vârfurilor sale;
b) ecuaţiile medianelor sale şi coordonatele centrului său de greutate;
c) ecuaţiile mediatoarelor sale şi coordonatele centrului cercului său circumscris;
d) ecuaţiile înălţimilor sale şi coordonatele ortocentrului său;
e) ecuaţiile bisectoarelor sale şi coordonatele centrului cercului său înscris;
f) aria orientată a triunghiului.

P 11. Fie M un punct în planul triunghiului $\Delta\, ABC$. Arătaţi că

$$\overline{aria[MBC]} + \overline{aria[MCA]} + \overline{aria[MAB]} = \overline{aria[ABC]}.$$

P 12. Fie A', B' şi C' proiecţiile punctelor $A(3,5)$, $B(-2,1)$ şi $C(1,-4)$ pe dreapta $d : 3x - 2y + 12 = 0$. Arătaţi că perpendicularele duse din A', B', C' pe dreptele BC, CA, respectiv AB sunt concurente.

P 13. Fie $A(4,7)$ şi $B(-2,5)$ două puncte în plan. Determinaţi locul geometric al punctelor P din plan cu proprietatea că $PA^2 - PB^2 = 7$.

P 14. Vârfurile $A(1,0)$ şi $B(0,2)$ ale unui triunghi $\Delta\, ABC$ sunt fixe, iar vârful C este variabil, mişcându-se pe dreapta $d : 2x + y - 5$. Determinaţi locul geometric descris de centrul de greutate al triunghiului.

7.2 Cercul

P 15. Determinaţi ecuaţia cercului circumscris triunghiului $\Delta\, ABC$ cu laturile $BC:\ 4x-3y=0$, $CA:\ x+3y-15=0$, $AB:\ 3x-y+5=0$.

P 16. Verificaţi dacă cercul care trece prin punctele $O(0,0)$, $A(3,2)$ şi $B(-4,6)$ sete tangent dreptei $d:\ x-8y+65=0$.

P 17. Fie $a\in\mathbb{R}^*$ variabil şi M_a punctul diferit de originea axelor în care cercul

$$\mathcal{C}_a:\quad x^2+y^2=\left(p-\frac{q}{a}\right)\left(x+\frac{y}{a}\right)$$

intersectează axa Ox. Arătaţi că tangenta în M_a la $\mathcal{C}_a$ trece prin punctul fix $N(p,q)$.

P 18. Determinaţi coordonatele centrelor şi razele cercurilor date de ecuaţiile:
a) $x^2+y^2-4x-14y+28=0$;
b) $3x^2+3y^2-4z-6y-15=0$;
c) $x^2+y^2-2y=0$;
d) $x^2+y^2-10x+16=0$.

P 19. Se dau cercurile

$$\mathcal{C}_1:\ x^2+y^2-25=0,\qquad \mathcal{C}_2:\ x^2+y^2-6x-8y=0,\qquad \mathcal{C}_3:\ x^2+y^2+x-7y-1=0.$$

Determinaţi axele lor radicale şi centrul radical.

P 20. Fie $a\in\mathbb{R}$ variabil, cercul

$$\mathcal{C}_a:\quad x^2+y^2-6ax+(a+6)y-a=0$$

şi dreapta p_a care este polara originii axelor în raport cu cercul $\mathcal{C}_a$.
a) Arătaţi că dreptele p_a trec printr-un punct fix.
b) Determinaţi valoarea parametrului $a\in\mathbb{R}$ pentru care dreapta p_a este paralelă cu prima bisectoare.

P 21. Fie A şi B două puncte fixe în plan, iar $k>0$, $k\neq 1$, un număr fixat. Arătaţi că locul geometric al punctelor P din plan pentru care

$$\frac{PA}{PB}=k$$

este un cerc.

P 22. Determinaţi punctele de intersecţie şi unghiul dintre cercurile

$$\mathcal{C}_1:\ x^2+y^2-8x+4y-17=0\qquad \text{şi}\qquad \mathcal{C}_2:\ x^2+y^2-41=0.$$

P 23. Determinaţi poziţia dreptei $d:\ x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)-p=0$ faţă de cercul $\mathcal{C}:\ x^2+y^2-r^2=0$.

7.3 Elipsa

P 24. Determinaţi ecuaţia unei elipse care are axele Ox şi Oy ca axe de simetrie şi care trece prin punctele $M(9,4)$ şi $N(12,3)$.

P 25. Determinaţi semiaxele şi excentricitatea elipsei

$$\mathcal{E}:\quad 25x^2+9y^2=225.$$

P 26. Determinaţi poziţiile punctelor $A(7,-6)$, $B(-1,4)$, $C(3,5)$ faţă de elipsa $\mathcal{E}:\ 25x^2+9y^2=450$.

P 27. Determinaţi excentricitatea unei elipse cu proprietatea că dintr-un focar al ei axa mică se vede sub un unghi drept.

P 28. *(***proprietatea optică a elipsei***)* Arătaţi că razele focale formează în orice punct al unei elipse unghiuri egale cu tangenta în acel punct la elipsă.

P 29. Determinaţi punctele de intersecţie ale elipsei $\mathcal{E}:\ 2x^2+5y^2-88=0$ cu dreapta $d:\ 3x-5y+14=0$.

P 30. Aflaţi lungimea coardei determinate de dreapta $d:\ y=2x-3$ în elpisa $\mathcal{E}:\ 3x^2+4y^2-16=0$.

P 31. Determinaţi punctele de intersecţie ale elipsei $\mathcal{E}:\ 9x^2+25y^2-225=0$ cu cercul $\mathcal{C}:\ x^2+y^2-16=0$.

7.4 Hiperbola

P 32. Determinaţi coordonatele focarelor, excentricitatea şi ecuaţiile asimptotelor hiperbolei

$$\mathcal{H}: \qquad 16x^2 - 25y^2 - 400 = 0.$$

P 33. Un segment care trece prin centrul hiperbolei $\mathcal{H}: 4x^2 - 9y^2 - 320 = 0$ are capetele pe hiperbolă şlungimea de $4\sqrt{29}$. Aflaţi ecuaţia dreptei din care face parte segmentul.

P 34. Determinaţi punctele de intersecţie ale hiperbolei $\mathcal{H}: 9x^2 - 10y^2 - 54 = 0$ cu dreapta $d: 2x + 3y - 17 = 0$.

P 35. Arătaţi că produsul distanţelor unui punct oarecare al unei hiperbole la asimptotele hiperbolei este constant.

P 36. *(***proprietatea optică a hiperbolei***)* Arătaţi că razele focale ale unui punct al unei hiperbole fac unghiuri egale cu tangenta la hiperbolă în acel punct.

P 37. Tangenta la o hiperbolă într-un punct M al ei intersectează asimptotele hiperbolei în punctele A şi B, iar normala la hiperbolă în M intersectează axele hiperbolei în punctele C şi D. Arătaţi că
a) Punctele A şi B se află pe cercul de diametru $[CD]$.
b) Raportul $\frac{AB}{CD}$ este constant când M descrie hiperbola.

7.5 Parabola

P 38. Determinaţi ecuaţiile tangentei şi normalei la parabola $\mathcal{P}: y^2 = 3x$ în punctul de abscisă $x = 3$.

P 39. Fie $\mathcal{P}_1$ şi $\mathcal{P}_2$ două parabole care au aceeaşi dreaptă directoare. Arătaţi că dreapta determinată de punctele lor de intersecţie este mediatoarea segmentului care uneşte focarele lor.

P 40. *(***proprietatea optică a parabolei***)* Arătaţi că normala într-un punct oarecare al unei parabole face unghiuri egale cu raza focală şi cu axa parabolei.

P 41. Aflaţi unghiul de intersecţie al cercului $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 8$ cu parabola $\mathcal{P}: x^2 = 2y$.

P 42. Determinaţi vârful, axa, focarul şi directoarea parabolei

$$\mathcal{P}: \quad y^2 + 4y - 6x + 7 = 0.$$

P 43. Pe o parabolă se consideră de aceeaşi parte a axei parabolei două puncte variabile M şi N, astfel încât produsul distanţelor lor la axa parabolei să fie constant. Arătaţi că dreapta MN trece printr-un punct fix.