# 11 Structuri algebrice

## 11.1 Operaţii binare. Grupoizi. Semigrupuri. Monoizi

**P 1.** Fie $(M,\cdot)$ un grupoid în care sunt verificate relaţiile:
i) $x\cdot x=x$, $(\forall)x\in M$.
ii) $(x\cdot y)\cdot z=(y\cdot z)\cdot x$, $(\forall)x,y,z\in M$.
Arătaţi că operaţia $\cdot$ este comutativă.

**P 2.** Fie $(M,\cdot)$ un grupoid în care sunt verificate relaţiile:
i) $(x\cdot y)\cdot y=x$, $(\forall)x,y\in M$.
ii) $x\cdot(x\cdot y)=y$, $(\forall)x,y\in M$.
Arătaţi că operaţia $\cdot$ este comutativă.

**P 3.** Fie $(M,\cdot)$ un grupoid în care sunt verificate relaţiile:
i) $(x\cdot y)\cdot x=y\cdot x$, $(\forall)x,y\in M$.
ii) $(\exists)u\in M:\ x\cdot u=x$, $(\forall)x\in M$.
iii) $x\cdot x=u$, $(\forall)x\in M$.
Arătaţi că $|M|=1$.

**P 4.** Fie $(M,\cdot)$ un grupoid în care sunt verificate relaţiile:
i) $(a\cdot b)\cdot(c\cdot d)=(a\cdot c)\cdot(b\cdot d)$, $(\forall)a,b,c,d\in M$.
ii) $a\cdot a=a$, $(\forall)a\in M$.
Arătaţi că
a) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot(a\cdot c)$, $(\forall)a,b,c\in M$.
b) $(a\cdot b)\cdot c=(a\cdot c)\cdot(b\cdot c)$, $(\forall)a,b,c\in M$.
c) Dacă în plus operaţia admite un element neutru, atunci ea este asociativă şi comutativă.

**P 5.** Fie $(M,\cdot)$ un grupoid în care sunt verificate relaţiile:
i) $a\cdot(a\cdot b)=b$, $(\forall)a,b\in M$.
ii) $a\cdot b=b\cdot a$, $(\forall)a,b\in M$.
iii) $(a\cdot b)\cdot(c\cdot d)=(a\cdot c)\cdot(b\cdot d)$, $(\forall)a,b,c,d\in M$.
Arătaţi că
a) $((a\cdot b)\cdot c)\cdot d=((a\cdot d)\cdot c)\cdot b$, $(\forall)a,b,c,d\in M$.
Dacă în plus este verificată relaţia
iv) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)\Longrightarrow a=c$
arătaţi că
b) $a\cdot a=b\cdot b\Longrightarrow a=b$.
c) $(a\cdot a)\cdot(b\cdot b)=c\cdot c\Longrightarrow a\cdot b=c$.
Dacă în plus mulţimea $M$ este finită, arătaţi că
d) $|M|$ este un număr impar.

**P 6.** Fie $(M,\cdot)$ un semigrup cu proprietatea că există un element $a\in M$ astfel încât

$$(\forall)x\in M\ (\exists)y\in M:\ x=a\cdot y\cdot a\,.$$

Arătaţi că $(M,\cdot)$ este un monoid.

**P 7.** Fie $(M,\cdot,u)$ un monoid.
a) Arătaţi că $a,b\in U(M)\Longrightarrow a\cdot b\in U(M)$.
b) Dacă există un element $z\in M\setminus\{u\}$ care este absorbant la dreapta(i.e., $x\cdot z=z$, $(\forall)x\in M$), iar $u,z$ sunt singurele elemente idempotente din $M$, arătaţi că

$$a\cdot b\in U(M)\Longrightarrow a,b\in U(M)\,.$$

**P 8.** Pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ a numerelor naturale nenule se consideră operaţia binară $*$ definită prin

$$m*n=m^n\quad,\ (\forall)m,n\in\mathbb{N}^*\,.$$

Determinaţi toate tripletele $(m,n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $(m*n)*p=m*(n*p)$.

**P 9.** Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Definim pe $\mathbb{Z}$ o operaţie binară $*$ prin

$$x * y = axy + b(x+y) + c \quad , (\forall)x, y \in \mathbb{Z}\,.$$

Arătaţi că
a) $(\mathbb{Z}, *)$ este semigrup dacă şi numai dacă $ac + b - b^2 = 0$.
b) $(\mathbb{Z}, *)$ este monoid dacă şi numai dacă $ac + b - b^2 = 0$ şi $b|c$.

**P 10.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural nenul şi $a, b \in \mathbb{Z}^*$ două numere întregi fixate. Definim pe $\mathbb{Z}_n$ o operaţie binară $*$ prin

$$\widehat{x} * \widehat{y} = \widehat{ax + by} \quad , (\forall)x, y \in \mathbb{Z}\,.$$

Arătaţi că
a) operaţia $*$ este comutativă dacă şi numai dacă $n|a - b$.
b) operaţia $*$ este asociativă dacă şi numai dacă $n|a(a-1)$ şi $n|b(b-1)$.
c) operaţia $*$ admite un element neutru dacă şi numai dacă $*$ coincide cu operaţia de adunare pe $\mathbb{Z}_n$.

**P 11.** Fie $(M, \cdot)$ un semigrup finit cu proprietatea că

$$x, y \in M \wedge (\exists)a, b \in M : x = a \cdot y \wedge y = b \cdot x \Longrightarrow x = y\,.$$

Arătaţi că $M$ conţine cel puţin un element absorbant la dreapta.

## 11.2 Grupuri

**P 12.** Fie $(G, \cdot)$ un grupoid în care sunt verificate proprietăţile:
1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $(\forall)a, b, c \in G$;
2) $(\exists)u \in G : u \cdot a = a \cdot u = a$, $(\forall)a \in G$;
3) $(\forall)a \in G(\exists)a' \in G :\ a \cdot a' = u \vee a' \cdot a = u$.
Arătaţi că $(G, \cdot)$ este un grup.

**P 13.** Fie $(S, \cdot)$ un semigrup finit în care sunt valabile proprietatea de simplificare la stânga

$$(\forall)a \in S, x, y \in S :\ a \cdot x = a \cdot y \Longrightarrow x = y\,,$$

şi proprietatea de simplificare la dreapta

$$(\forall)a \in S, x, y \in S :\ x \cdot a = y \cdot a \Longrightarrow x = y\,.$$

Arătaţi că $(S, \cdot)$ este un grup.

**P 14.** Fie $(G, \cdot)$ un grupoid în care sunt verificate proprietăţile:
1) $a \cdot (b \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c$, $(\forall)a, b, c \in G$;
2) $(\exists)u \in G : u \cdot a = a$, $(\forall)a \in G$;
3) $(\forall)a \in G(\exists)a' \in G :\ a' \cdot a = u$.
Arătaţi că $(G, \cdot)$ este un grup abelian.

**P 15.** Fie $G$ o mulţime în care sunt definite o operaţie binară $(a, b) \longmapsto a \cdot b$ şi o operaţie unară $a \longmapsto a'$, astfel încât pentru orice $a, b, c, d, e \in G$ este adevărată implicaţia

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot d) \cdot e \Longrightarrow b = d \cdot (e \cdot c')\,.$$

Arătaţi că $(G, \cdot)$ este un grup.

**P 16.** Determinaţi tablele Cayley ale grupurilor următoare:
$(\mathbb{Z}_2, +)$, $(\mathbb{Z}_3, +)$, $(\mathbb{Z}_4, +)$, $(S_3, \cdot)$, $\langle a, b |\, a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1\rangle$.

**P 17.** Verificaţi dacă grupoizii cu următoarele table Cayley sunt grupuri:

| $*$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ |
| $b$ | $b$ | $a$ |

| $*$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ |
| $b$ | $b$ | $c$ | $a$ |
| $c$ | $c$ | $a$ | $b$ |

| $*$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $y$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $z$ | $y$ | $z$ | $x$ |

| $*$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 4 | 2 | 4 | 1 | 3 |

**P 18.** Completaţi următoarea tablă Cayley a unui grup:

| $\cdot$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | | $b$ | | | | |
| $b$ | | $c$ | $a$ | $e$ | | |
| $c$ | | | | | | |
| $d$ | | $f$ | | $a$ | | |
| $e$ | | | | | | |
| $f$ | | | | | | |

**P 19.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $a, b \in G$ cu proprietatea că $a \cdot b = b \cdot a$. Arătaţi că $a^m \cdot b^n = b^n \cdot a^m$, $(\forall)m, n \in \mathbb{Z}$.

**P 20.** Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că $x^2 = 1$, $(\forall)x \in G$. Arătaţi că grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

**P 21.** Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$, $(\forall)x, y \in G$. Arătaţi că grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

**P 22.** Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$, $(\forall)x, y \in G$. Arătaţi că grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

**P 23.** Fie $(G, \cdot)$ un grup cu proprietatea că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(x \cdot y)^i = x^i \cdot y^i$, $(\forall)x, y \in G$, $(\forall)i \in \{k-1, k, k+1\}$. Arătaţi că grupul $(G, \cdot)$ este abelian.

**P 24.** Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi $A, B \subseteq G$ cu proprietatea că $|A| + |B| > |G|$. Arătaţi că $A \cdot B = G$.

**P 25.** Fie $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1\}$. Arătaţi că $\mathbb{T} \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

**P 26.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $U_n := \{z \in \mathbb{C} |\, z^n = 1\}$. Arătaţi că $U_n \leq \mathbb{T}$.

**P 27.** Fie $p$ un număr prim şi $U_{p^\infty} := \bigcup_{k=0}^{\infty} U_{p^k}$. Arătaţi că $U_{p^\infty} \leq \mathbb{T}$.

**P 28.** Fie $p$ un număr prim şi $\mathbb{Q}_p := \left\{\frac{m}{p^k} |\, m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\right\}$, respectiv $\mathbb{Q}_{p'} := \left\{\frac{m}{n} |\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, (n,p) = 1\right\}$. Arătaţi că $\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_{p'} \leq (\mathbb{Q}, +)$ şi $\mathbb{Q}_p \cap \mathbb{Q}_{p'} = \mathbb{Z}$.

**P 29.** Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu $|G| \equiv 0 (mod\, 2)$. Arătaţi că există $x \in G$ cu $ord(x) = 2$.

**P 30.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$ elemente oarecare. Arătaţi că $ord(x \cdot y) = ord(y \cdot x)$.

**P 31.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x \in G$ un element de ordin finit $ord(x) = n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că

$$|x^m| = \frac{n}{(m,n)} \quad , (\forall)m \in \mathbb{Z}.$$

**P 32.** Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $x, y \in G$ elemente de ordine finite $ord(x) = m, ord(y) = n$, cu proprietatea că $x \cdot y = y \cdot x$ şi $(m, n) = 1$. Arătaţi că $ord(x \cdot y) = m \cdot n$.

**P 33.** Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar $x \in G$ un element de ordin finit $ord(x) = m \cdot n$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$ sunt relativ prime, $(m, n) = 1$. Arătaţi că există $y, z \in G$ cu $ord(y) = m, |z| = n$, astfel încât $x = y \cdot z = z \cdot y$.

**P 34.** Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian finit cu $|G| = n$. Arătaţi că $g^n = 1$, $(\forall)g \in G$.

**P 35.** Demonstraţi *mica teoremă a lui Fermat*:
Dacă $p \in \mathbb{N}^*$ este un număr prim, iar $a \in \mathbb{Z}$ nu se divide prin $p$, atunci $a^{p-1} \equiv 1 (mod\, p)$.

**P 36.** Demonstraţi *teorema lui Euler*:
Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, iar $a \in \mathbb{Z}$ este coprim cu $n$, atunci $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (mod\, n)$.

**P 37.** Arătaţi că în orice grup abelian finit, produsul tuturor elementelor este egal cu produsul tuturor elementelor de ordin 2.

**P 38.** Demonstraţi *teorema lui Wilson*:
Dacă $p$ este un număr prim, atunci $(p-1)! \equiv -1 (mod\, p)$.

**P 39.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $A \subseteq G$. Arătaţi că *normalizatorul în G al submulţimii A*

$$N_G(A) := \{g \in G |\, gA = Ag\}$$

este un subgrup al lui $G$.

**P 40.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $A \subseteq G$. Arătaţi că *centralizatorul în G al submulţimii A*

$$C_G(A) := \{g \in G |\, ga = ag,\, (\forall) a \in A\}$$

este un subgrup al lui $G$, cu $C_G(A) \subseteq N_G(A)$.

**P 41.** Arătaţi că pentru orice grup $G$, centrul său

$$Z(G) := \{g \in G |\, gx = xg,\, (\forall) x \in G\}$$

este un subgrup al lui $G$.

**P 42.** Fie $(G, \cdot)$ un grup, $H \leq G$ şi $g \in G$. Dacă $|g| = n$ şi $g^m \in H$, unde $n, m \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, atunci $g \in H$.

**P 43.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H, K \leq G$, cu $H \leq K$. Arătaţi că

$$[G : H] = [G : K] \cdot [K : H] .$$

**P 44.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H, K, L \leq G$, cu $H \leq K$. Arătaţi că

$$[K : H] \geq [K \cap L : H \cap L] .$$

**P 45.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H, K \leq G$. Arătaţi că

$$[G : K] \geq [H : H \cap K] .$$

**P 46.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H, K \leq G$. Arătaţi că

$$[G : H] \cdot [G : K] \geq [G : H \cap K] .$$

**P 47.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H, K \leq G$ finite. Arătaţi că

$$|HK| \cdot |H \cap K| = |H| \cdot |K| .$$

**P 48.** Fie $(X, d)$ un spaţiu metric. O funcţie bijectivă $\varphi : X \longrightarrow X$ se numeşte izometrie a spaţiului metric $(X, d)$ dacă

$$((x)\varphi, (y)\varphi)d = (x, y)d\,, \quad (\forall) x, y \in X\,.$$

a) Arătaţi că $Izom(X) = \{\varphi \in S_X |\, \varphi - \text{izometrie}\} \leq S_X$.
b) Dacă $Y \subseteq X$, arătaţi că $S_X(Y) = \{\varphi \in Izom(X) |\, (Y) = (Y)\varphi\} \leq Izom(X)$.
c) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, şi $[A_1 A_2 \ldots A_n]$ un poligon regulat cu $n$ laturi în planul euclidian $\mathcal{P}$. Determinaţi grupul $S_{\mathcal{P}}([A_1 A_2 \ldots A_n])$. Acest grup se notează în general cu $D_n$ şi se numeşte *grupul diedral de grad n*.

**P 49.** Determinaţi ordinele grupurilor următoare prezentate în termeni de generatori şi relaţii:
a) $G = \langle x, y |\, x^3 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle$.
b) $G = \langle x, y |\, x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1\rangle$.
c) $G = \langle x, y |\, xy^2 = y^3 x, yx^3 = x^2 y\rangle$.

**P 50.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H \leq G$. Arătaţi că $H \trianglelefteq G$ dacă şi numai dacă

$$(\forall)a,b \in G: \quad ab \in H \Longleftrightarrow ba \in H\,.$$

**P 51.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H,K \trianglelefteq G$, cu $H \cap K = 1$. Arătaţi că $hk = kh$, $(\forall)h \in H, k \in K$.

**P 52.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H \leq Z(G)$. Arătaţi că $H \trianglelefteq G$. În particular, $Z(G) \trianglelefteq G$.

**P 53.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, $G' = \langle [a,b] |\, a,b \in G\rangle$ subgrupul său comutator şi $H \leq G$, cu $G' \leq H$. Arătaţi că $H \trianglelefteq G$. În particular, $G' \trianglelefteq G$.

**P 54.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $G^{[2]} = \langle a^2 |\, a \in G\rangle$. Arătaţi că $G^{[2]} \trianglelefteq G$.

**P 55.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $a \in G$ un element cu proprietatea că $a$ este unicul element de ordin 2 din $G$. Arătaţi că $a \in Z(G)$.

**P 56.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $g \in G$. Arătaţi că aplicaţia $i_g : G \longrightarrow G : x \longmapsto gxg^{-1}$ este un automorfism al grupului $G$(numit *automorfismul interior al grupului* $G$*, asociat elementului* $g$). Verificaţi că $i_g \cdot i_h = i_{gh}$ şi $i_{g^{-1}} = (i_g)^{-1}$.

**P 57.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H \leq G$. Arătaţi că $H^x \leq G$. Dacă $H$ este abelian(resp. ciclic, generat de elementul $a$), atunci $H^x$ este de asemenea abelian(resp. ciclic, generat de elementul $a^x$).

**P 58.** Fie $Inn(G) := \{i_g |\, g \in G\}$ mulţimea automorfismelor interioare. Arătaţi că $Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$ şi $Inn(G) \cong G/Z(G)$.

**P 59.** Fie $\mathbb{K}$ un corp şi $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) |\, det(A) \neq 0\}$ *grupul liniar general de grad* $n$ *peste corpul* $\mathbb{K}$, iar $SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) |\, det(A) = 1\}$ *grupul liniar special de grad* $n$ *peste corpul* $\mathbb{K}$. Arătaţi că $SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$ şi $GL_n(\mathbb{K})/SL_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$.

**P 60.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H \trianglelefteq G$, cu $|G/H| = n$. Arătaţi că
a) $g^n \in H$, $(\forall)g \in G$.
b) dacă $g^m \in H$, unde $m \in \mathbb{Z}$, astfel încât $(m,n) = 1$, atunci $g \in H$.

**P 61.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H \trianglelefteq G$, cu $|H| = m$, iar $n \in \mathbb{N}^*$, cu $(m,n) = 1$. Arătaţi că
a) dacă $x \in G$ are $|x| = n$, atunci $|xH| = n$ în grupul factor $G/H$.
b) dacă $x \in G$ are proprietatea că $|xH| = n$ în grupul factor $G/H$, atunci există $y \in xH$, astfel încât $|y| = n$.

**P 62.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, $H \leq G$ şi $N \trianglelefteq G$, astfel încât $|H| = m$, $[G:N] = n$, cu $m,n \in \mathbb{N}^*$, $(m,n) = 1$. Arătaţi că $H \subseteq N$.

**P 63.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, $H \leq G$ şi $N \trianglelefteq G$, astfel încât $|N| = m$, $[G:H] = n$, cu $m,n \in \mathbb{N}^*$, $(m,n) = 1$. Arătaţi că $N \subseteq H$.

**P 64.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $\emptyset \neq A \subseteq G$. Arătaţi că $C_G(A) \trianglelefteq N_G(A)$ şi $N_G(A)/C_G(A)$ este izomorf cu un subgrup al grupului simetric $S_A$ al mulţimii $A$.

**P 65.** Fie $(G,\cdot)$ un grup, $H \leq G$ şi $core_G(H) = \bigcap\limits_{x \in G} H^x$. Arătaţi că
a) $core_G(H) \trianglelefteq G$ şi $core_G(H) \subseteq H$.
b) dacă $K \trianglelefteq G$, cu $K \subseteq H$, atunci $K \subseteq core_G(H)$.
c) $G/core_G(H)$ este izomorf cu un subgrup al grupului simetric $S_{(G/H)_s}$ al mulţimii $(G/H)_s$ a claselor laterale la stânga ale lui $H$ în $G$.
d) dacă $[G:H] = n$, atunci $[G:core_G(H)] \mid n!$.
e) $H \trianglelefteq G \Longleftrightarrow H = core_G(H)$.

**P 66.** Fie $(G,\cdot)$ un grup finit, $p$ cel mai mic divizor prim al ordinului grupului $G$ şi $H \leq G$, astfel încât $[G:H] = p$. Arătaţi că $H \trianglelefteq G$.

**P 67.** Fie $(G,\cdot)$ un grup. Arătaţi că $G/G'$ este abelian, iar dacă $H \trianglelefteq G$, atunci $G/H$ este abelian dacă şi numai dacă $G' \leq H$.

**P 68.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H,K \leq G$. *Comutatorul subgrupurilor* $H$ *şi* $K$ este $[H,K] = \langle [h,k] |\, h \in H, k \in K\rangle$. Arătaţi că
a) $H \trianglelefteq G \Longleftrightarrow [H,G] \leq H$.
b) dacă $K \trianglelefteq G$ şi $K \leq H \leq G$, atunci $H/K \leq Z(G/K) \Longleftrightarrow [H,G] \leq K$.

**P 69.** Fie $(G,\cdot)$ un grup şi $H \leq Z(G)$. Arătaţi că dacă $G/H$ este un grup ciclic, atunci $G$ este abelian.

**P 70.** Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că grupul tuturor automorfismelor $Aut(G)$ este ciclic. Arătaţi că $G$ este abelian.

## 11.3 Grupuri de permutări

**P 71.** Fie permutarea $\alpha \in S_5$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculaţi $\alpha^2$ şi $\alpha^3$. Determinaţi cel mai mic $k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $\alpha^k = id$.

**P 72.** În grupul $S_3$ considerăm permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculaţi $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\beta^2$, $\alpha\beta$ şi $\alpha^2\beta$. Arătaţi că , împreună cu $\alpha$ şi $\beta$, acestea sunt toate permutările din $S_3$. Verificaţi că $\alpha^2 = \alpha^{-1}$, $\beta = \beta^{-1}$ şi $\beta\alpha = \alpha^2\beta$.

**P 73.** Determinaţi toate ciclurile de lungime 3 din $S_4$.

**P 74.** Câte cicluri de lungime $l$ se află în $S_n$.

**P 75.** Două permutări $\alpha, \beta \in S_n$ se numesc disjuncte dacă

$$(\alpha(i) - i) \cdot (\beta(i) - i) = 0 , \quad (\forall) i = \overline{1, n} .$$

Dacă $\alpha, \beta \in S_n$ sunt două permutări disjuncte, arătaţi că
a) $\alpha(i) \neq i \Longrightarrow \beta(\alpha(i)) = \alpha(i)$.
b) $\alpha\beta = \beta\alpha$.

**P 76.** Descompuneţi următoarele permutări în produse de cicluri disjuncte:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 & 8 & 3 & 9 \end{pmatrix} , \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 5 & 4 & 2 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} .$$

**P 77.** Descompuneţi permutările de la exerciţiul precedent în produse de transpoziţii.

**P 78.** Determinaţi parităţile tuturor permutărilor din $S_3$ şi din $S_4$.

**P 79.** Determinaţi ordinul maxim pe care îl poate avea o permutare din $S_n$, pentru $n = \overline{2, 10}$.

**P 80.** Verificaţi identităţile următoare:
a) $(a, b)(a, b) = id$, $(a, b)(a, c) = (a, c, b)$, $(a, b)(c, d) = (a, d, c)(a, b, c)$;
b) $(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{l-1}, i_l) = (i_1, i_l)(i_1, i_{l-1}) \ldots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$;
c) $(i, j) = (i, i + 1)(i + 1, i + 2) \ldots (j - 2, j - 1)(j - 1, j)(j - 2, j - 1) \ldots (i + 1, i + 2)(i, i + 1)$, $(\forall) i < j$;
d) $\alpha(i_1, i_2, \ldots, i_l)\alpha^{-1} = (\alpha(i_1), \alpha(i_2), \ldots, \alpha(i_l))$.

**P 81.** Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $M \subseteq G$, $M \neq \emptyset$. Arătaţi că subgrupul $\langle M \rangle$ generat de $M$ este cea mai mică submulţime $H \subseteq G$ cu proprietatea că $M \subseteq H$ şi $H \cdot (M \cup M^{-1}) \subseteq H$. Arătaţi că dacă grupul $G$ este finit, atunci $\langle M \rangle$ este cea mai mică submulţime a lui $G$ cu proprietatea că $M \subseteq H$ şi $H \cdot M \subseteq H$.

**P 82.** Arătaţi că dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit, iar $M \subseteq G$, $M \neq \emptyset$, atunci algoritmul următor permite determinarea subgrupului generat de $M$:

1) $S := \{1\}$
2) $H := \{1\}$
3) $S := S \cdot M \setminus H$
4) if $S = \emptyset$, then stop[$\Longrightarrow H = \langle M \rangle$]
5) $H := H \cup S$, go to 3)

(alternativ putem descrie algoritmul prin următoarele recurenţe:

$$\begin{aligned} & S_0 := \{1\}, H_0 := \{1\}, \\ & S_{n+1} := S_n \cdot M \setminus H_n, \ (\forall) n \in \mathbb{N} \\ & \text{if } S_{n+1} = \emptyset, \text{ then } \langle M \rangle = H_n, \\ & \text{else } H_{n+1} := H_n \cup S_{n+1} \end{aligned}$$

care conduc de asemenea la subgrupul generat de submulţimea nevidă $M$).

**P 83.** Utilizaţi algoritmul din problema precedentă pentru a construi subgrupul $\langle M \rangle \leq S_4$, generat de $M = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\}$.

**P 84.** Determinaţi toate subgrupurile grupurilor $S_3$ şi $S_4$. Construiţi diagramele Hasse ale laticelor subgrupurilor lui $S_3$ şi $S_4$.

**P 85.** În grupul $S_3$ considerăm subgrupurile $H_1 = \langle(1,2)\rangle$ şi $H_2 = \langle(1,2,3)\rangle$. Determinaţi $(S_3/H_1)_s$, $(S_3/H_1)_d$, $(S_3/H_2)_s$, $(S_3/H_2)_d$.

**P 86.** Arătaţi că dacă $(G,\cdot)$ este un grup, iar $H \leq G$ are $[G : H] = 2$, atunci $(G/H)_s = (G/H)_d$.

**P 87.** Arătaţi că :
a) $S_n = \langle(i,i+1)|\, i = \overline{1,n-1}\rangle$;
b) $S_n = \langle(1,i)|\, i = \overline{2,n}\rangle$;
c) $S_n = \langle(1,2),(1,2,\ldots,n-1,n)\rangle$;
d) $S_n = \langle(1,2),(2,3,\ldots,n-1,n)\rangle$;
e) $S_n = \langle(1,2,\ldots,n-1),(1,2,\ldots,n-1,n)\rangle$;
f) $A_n = \langle(i,j,k)|\, 1 \leq i < j < k \leq n\rangle$;
g) $A_n = \langle(1,2,i)|\, i = \overline{3,n}\rangle$.

**P 88.** a) Arătaţi că elementele grupului altern $A_5$ au formele $id$, $(i,j)(k,l)$, $(i,j,k)$, sau $(i,j,k,l,m)$.
b) Arătaţi că $A_5$ conţine 20 de 3−cicluri, 24 de 5−cicluri şi 15 produse de câte două transpoziţii disjuncte.

**P 89.** Fie $\sigma = (1,2,\ldots,m)$. Arătaţi că
a) $\sigma^k$ este un ciclu de lungime $m$ dacă şi numai dacă $(k,m) = 1$.
b) Dacă $(k,m) = d$, atunci $\sigma^k$ este un produs de $d$ cicluri de lungimi egale.

**P 90.** Fie $p,q,r,s \in S_8$ permutările date de următoarele produse de cicluri:

$$\begin{array}{ll} p = (1,4,3,8,2)(1,2)(1,5), & q = (1,2,3)(4,5,6,8), \\ r = (1,2,8,7,4,3)(5,6), & s = (1,3,4)(2,3,5,7)(1,8,4,6)\,. \end{array}$$

Calculaţi $qpq^{-1}$ şi $r^{-2}sr^2$.

**P 91.** Determinaţi numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ ale căror descompuneri în cicluri disjuncte conţin $k_1$ cicluri de lungime 1, $k_2$ cicluri de lungime 2, ..., $k_n$ cicluri de lungime $n$.

**P 92.** Arătaţi că grupul altern $A_n$ poate fi generat de ciclurile
a) $(1,2,3)$ şi $(1,2,3,\ldots,n)$ dacă $n$ este impar.
b) $(1,2,3)$ şi $(2,3,\ldots,n)$ dacă $n$ este par.

**P 93.** Fie $m,n \in \mathbb{N}^*$ cu $m < n-1$ şi $G = \langle\sigma_{m+1},\sigma_{m+2},\ldots,\sigma_n\rangle \leq S_n$, unde

$$\sigma_{m+1} = (1,2,\ldots,m,m+1)\,, \quad \sigma_{m+2} = (1,2,\ldots,m,m+2)\,, \quad \ldots, \quad \sigma_n = (1,2,\ldots,m,n)\,.$$

Arătaţi că $G = S_n$ dacă $m$ este impar, respectiv $G = A_n$ dacă $m$ este par.

## 11.4 Acţiuni de grupuri

**P 94.** Arătaţi că aplicaţia $\alpha : G \times G \longrightarrow G : (x,g) \longmapsto g^{-1}xg$ defineşte o acţiune la dreapta a grupului $G$ pe propria sa mulţime-suport, acţiunea prin conjugare.

**P 95.** Arătaţi că pentru acţiunea prin conjugare a unui grup $G$ pe el însuşi,

$$Stab_G(x) = C_G(x) \quad, (\forall)x \in G\,.$$

**P 96.** Fie $(G,\cdot)$ un grup finit, iar $\mathcal{K}$ un sistem de reprezentanţi ai claselor sale de conjugare. Arătaţi că
1) $Z(G) \subseteq \mathcal{K}$,
2) $|G| = |Z(G)| + \sum\limits_{x\in\mathcal{K}\setminus Z(G)} [G : C_G(x)]$.

**P 97.** Fie $H \leq G$ şi $\alpha : G \times (G/H)_s \longrightarrow (G/H)_s : (g,xH) \longmapsto gxH$. Arătaţi că $\alpha$ este o acţiune şi determinaţi $Stab_G(xH)$.

**P 98.** Fie $X$ o mulţime nevidă şi $G \leq S_X$. Arătaţi că $\alpha : G \times X \longrightarrow X : (x,f) \longmapsto f(x)$ este o acţiune a grupului $G$ pe mulţimea $X$.

**P 99.** Arătaţi că $\alpha : \mathcal{P}^*(G)\times G \longrightarrow \mathcal{P}^*(G) : (A,g) \longmapsto A^g(:= g^{-1}Ag)$ este o acţiune la dreapta a grupului $G$ pe mulţimea $\mathcal{P}^*(G)$ a submulţimilor sale nevide.

**P 100.** Fie $\alpha : M \times G \longrightarrow M$ o acţiune la dreapta a unui grup $G$ pe o mulţime $M$, $x \in M$, $g \in G$ şi $y = x \cdot g$. Arătaţi că

$$Stab_G(y) = Stab_G(x)^g$$

**P 101.** Fie $p \in \mathbb{N}^*$ un număr prim, iar $G$ un grup finit. Grupul $G$ se numeşte $p-$grup dacă există $n \in \mathbb{N}$, astfel încât $|G| = p^n$. Arătaţi că dacă $G$ este un $p-$grup netrivial, atunci $Z(G) \neq 1$.

**P 102.** Arătaţi că orice grup de ordin $p^2$, unde $p$ este un număr prim, este abelian.

**P 103.** Fie $(G, \cdot)$ un grup neabelian de ordin $p^3$, unde $p$ este un număr prim, iar $k(G)$ numărul claselor sale de conjugare. Arătaţi că

$$k(G) = p^2 + p - 1\,.$$

**P 104.** Determinaţi clasele de conjugare ale grupului cuaternionilor $Q_8$.

**P 105.** Determinaţi clasele de conjugare ale grupului diedral $D_n$.

**P 106.** *(teorema lui Cauchy)* Fie $(G, \cdot)$ un grup finit, iar $p \in \pi(G)$. Arătaţi că există $x \in G$ cu $|x| = p$.

**P 107.** Fie $(G, \cdot)$ un grup finit şi $H \leq G$. Arătaţi că
1) $|\bigcup\limits_{g \in G} H^g| \leq |G| - [G : H] + 1$.
2) $\bigcup\limits_{g \in G} H^g = G \Longleftrightarrow H = G$.

**P 108.** Fie $\sigma \in S_n$ o permutare a cărei descompunere în cicluri disjuncte este formată din $k_1$ cicluri de lungime 1, $k_2$ cicluri de lungime 2, ..., $k_n$ cicluri de lungime $n$. Arătaţi că

$$|\sigma^{S_n}| = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n! \cdot 1^{k_1}2^{k_2}\dots n^{k_n}}\,.$$

**P 109.** Determinaţi ecuaţia claselor pentru fiecare dintre grupurile $S_4$, $A_5$, $S_5$, $A_6$ şi $S_6$. Arătaţi că $A_5$ este un grup simplu(i.e. singurele sale subgrupuri normale sunt 1 şi $A_5$).

## 11.5 Inele şi corpuri

**P 110.** Care dintre următoarele algebre universale sunt inele, inele comutative, inele unitare, inele fără divizori ai lui zero, corpuri?
a) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$;
b) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$;
c) $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$;
d) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} |\, a, b \in \mathbb{Q}\}, +, \cdot)$;
e) $(\mathbb{Z}[i] = \{a + b\,i |\, a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$;
f) $(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}), +, \cdot)$;
g) $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cap)$;
h) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \odot)$, unde $(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$, $(a, b) \odot (c, d) := (ac + bd, ad + bc)$.

**P 111.** Fie $(G, +)$ un grup abelian şi $End(G) = \{f : G \longrightarrow G |\, f -$ endomorfism al grupului $G\}$. Definim o operaţie de adunare pe $End(G)$ prin $a^{f+g} := a^f + a^g$, $(\forall) a \in G, f, g \in End(G)$. Arătaţi că $(End(G), +, \circ)$ este un inel unitar.

**P 112.** Fie

$$\mathcal{C} = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) |\, A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Arătaţi că $(\mathcal{C}, +, \cdot)$ este un corp izomorf cu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

**P 113.** Fie

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) |\, A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}, z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Arătaţi că $(\mathcal{H}_1, +, \cdot)$ este un inel cu diviziune necomutativ(i.e., un corp strâmb).

**P 114.** Fie

$$\mathcal{H}_2 = \left\{ A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) |\, A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Pentru $A \in \mathcal{H}_2$, calculaţi $det(A)$.
b) Arătaţi că $\mathcal{H}_2 \leq \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi că $(\mathcal{H}_2, +, \cdot)$ este un corp strâmb.
c) Arătaţi că $\mathcal{H}_2 \cong \mathcal{H}_1$.

**P 115.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi $a \in R$ un element cu proprietatea că există $b \in R \setminus \{0\}$, astfel încât $aba = 0$. Arătaţi că $a \in D(R)$.

**P 116.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel fără element unitate şi $S \leq R$, astfel încât $S$ are element unitate. Arătaţi că $D(R) \neq \{0\}$.

**P 117.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel în care există un unic element unitate la stânga $1_s$. Arătaţi că inelul $R$ este unitar.

**P 118.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel finit în care există elemente $a \in R \setminus D_s(R)$ şi $b \in R \setminus D_d(R)$. Arătaţi că inelul $R$ este unitar.

**P 119.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel finit în care există un element $a \in R \setminus D(R)$. Arătaţi că
a) $R$ este unitar;
b) $R = U(R) \cup D(R)$.

**P 120.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel nenul finit fără divizori ai lui zero. Arătaţi că $R$ este inel cu diviziune.

**P 121.** $U(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{k} \in \mathbb{Z}_n |\, (k, n) = 1\}$.

**P 122.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel unitar şi $a \in R$ cu proprietatea că există un invers la stânga $b \in R$ al elementului $a$ care nu este şi invers la dreapta.
a) Arătaţi că $a$ nu este inversabil la dreapta.
b) Dacă $L_a \subseteq A$ este mulţimea inverselor la stânga ale elementului $a$, arătaţi că funcţia

$$\varphi : L_a \longrightarrow L_a : t \longmapsto at + b - 1$$

este injectivă, dar nesurjectivă.
c) Deduceţi că mulţimea $L_a$ este infinită.

**P 123.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel unitar finit. Arătaţi că un element al său este inversabil la stânga dacă şi numai dacă este inversabil la dreapta.

**P 124.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel unitar, iar $a, b \in R$, astfel încât $1 - ab \in U(R)$. Arătaţi că $1 - ba \in U(R)$.

**P 125.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel unitar, iar $e \in I(R)$ un element idempotent. Arătaţi că $1 - e \in I(R)$.

**P 126.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel, iar $e, f \in I(R)$ două elemente idempotente ortogonale(i.e., cu $ef = fe = 0$). Arătaţi că $e + f \in I(R)$.

**P 127.** Fie $n \in \mathbb{Z}$, cu $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$. Arătaţi că $|I(\mathbb{Z}_n)| = 2^r$.

**P 128.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^2 = x$, $(\forall) x \in R$. Arătaţi că $R$ este comutativ.

**P 129.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^6 = x$, $(\forall) x \in R$. Arătaţi că $R$ este comutativ.

**P 130.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^2 - x \in Z(R)$, $(\forall) x \in R$. Arătaţi că $R$ este comutativ.

**P 131.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea că $(x + y)^2 = x^2 + y^2$, $(\forall) x, y \in R$. Arătaţi că $R$ este comutativ.

**P 132.** Fie $n \in \mathbb{Z}$, cu $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$. Determinaţi $N(\mathbb{Z}_n)$.

**P 133.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel comutativ. Arătaţi că $N(R) \trianglelefteq R$.

**P 134.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel unitar şi $x \in N(R)$. Arătaţi că $1 - x, 1 + x \in U(R)$.

**P 135.** Fie $(R, +, \cdot)$ un inel unitar comutativ, $u \in U(R)$ şi $x \in N(R)$. Arătaţi că $u + x \in U(R)$.

**P 136.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel comutativ fără elemente nilpotente(i.e., $N(R)=0$). Dacă $x,y\in R$ sunt elemente cu proprietatea că $x^2=y^2$ şi $x^3=y^3$, arătaţi că $x=y$.

**P 137.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel. Arătaţi că

$$N(R)=0 \Longleftrightarrow [(\forall)x\in R : x^2=0 \Longleftrightarrow x=0]\,.$$

**P 138.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel cu $(N(R)=0$. Arătaţi că
a) $(\forall)a,b\in R : ab=0 \Longleftrightarrow ba=0$.
b) $I(R)\subseteq Z(R)$.

**P 139.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^4=x$, $(\forall)x\in R$. Arătaţi că $R$ este comutativ.

**P 140.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel cu proprietatea că $x^3=x$, $(\forall)x\in R$. Arătaţi că $R$ este comutativ.

## 11.6 Serii formale şi polinoame

**P 141.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel unitar comutativ. Dacă $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nX^n$, arătaţi că

$$f\in U(R[[X]]) \Longleftrightarrow a_0\in U(R)\,.$$

**P 142.** Calculaţi inversa seriei $1-X\in\mathbb{R}[[X]]$.

**P 143.** Determinaţi dezvoltările în serie de puteri ale lui $x$ ale funcţiilor $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{(1-x)^2}$, $ln(1+x)$, $ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $\frac{1}{1+x^2}$, $arctg(x)$.

**P 144.** Arătaţi că
a) $ln(2)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\ldots$
b) $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots$

**P 145.** Demonstraţi identităţile:
a) $(1+X)(1+X^2)(1+X^4)\ldots(1+X^{2^n})\cdots=1+X+X^2+X^3+\cdots+X^n+\ldots$
b) $(1+X+X^2+\cdots+X^9)(1+X^{10}+X^{20}+\cdots+X^{90})\ldots(1+X^{10^n}+X^{2\cdot10^n}+\cdots+X^{9\cdot10^n})\cdots=1+X+X^2+X^3+\cdots+X^n+\ldots$

**P 146.** a) Demonstraţi identitatea

$$(1+X)(1+X^2)(1+X^3)\ldots(1+X^n)\cdots=\frac{1}{1-X}\cdot\frac{1}{1-X^3}\cdot\frac{1}{1-X^5}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1-X^{2n-1}}\cdot\cdots\,.$$

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ un număr natural nenul oarecare. Arătaţi că numărul de moduri în care se poate scrie $n$ ca sumă de numere naturale nenule distincte este egal cu numărul de moduri în care se poate scrie $n$ ca sumă de numere naturale impare(nu neapărat distincte).

**P 147.** Determinaţi funcţia generatoare pentru şirul numerelor lui Fibonacci, definit de relaţiile

$$F_0=0\,,\quad F_1=1\,,\quad F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ (\forall)n\in\mathbb{N}, n\geq 2\,.$$

**P 148.** Determinaţi funcţia generatoare pentru şirul numerelor lui Catalan, definit de relaţiile

$$T_0=0\,,\quad T_1=1\,,\quad T_n=T_1\cdot T_{n-1}+T_2\cdot T_{n-2}+\cdots+T_{n-1}\cdot T_1,\ (\forall)n\in\mathbb{N}, n\geq 2\,.$$

**P 149.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel unitar comutativ şi $f=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n\in R[X]$. Arătaţi că

$$f\in N(R[X]) \Longleftrightarrow a_0,a_1,\ldots,a_n\in N(R)\,.$$

**P 150.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel unitar comutativ şi $f=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n\in R[X]$. Arătaţi că

$$f\in U(R[X]) \Longleftrightarrow a_0\in U(R), a_1,\ldots,a_n\in N(R)\,.$$

**P 151.** Dacă $(R,+,\cdot)$ un inel integru, arătaţi că $U(R[X])=U(R)$.

**P 152.** Dacă $(\mathbb{K},+,\cdot)$ este un corp, arătaţi că $U(\mathbb{K}[X])=\mathbb{K}\setminus\{0\}$.

**P 153.** Fie $(R,+,\cdot)$ un inel unitar comutativ fără elemente nilpotente şi $f=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n\in R[X]$. Arătaţi că

$$f\in D(R[X]) \Longleftrightarrow (\exists)b\in R\setminus\{0\} : a_i\cdot b=0,\ (\forall)i=\overline{0,n}\,.$$

**P 154.** Determinaţi polinoamele ireductibile de grad cel mult 5 din $\mathbb{Z}_2[X]$.

**P 155.** Determinaţi polinoamele monice ireductibile de grad cel mult 3 din $\mathbb{Z}_3[X]$.