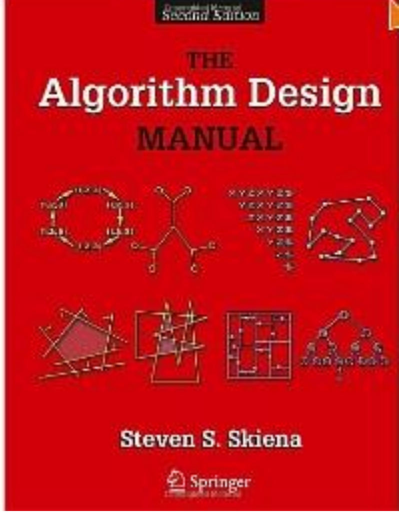
CURS 7:

Tehnici de proiectare a algoritmilor

- Tehnica reducerii-

Motivație



Interview Problems

7-14. *[4]* Write a function to find all permutations of the letters in a particular string.

7-15. *[4]* Implement an efficient algorithm for listing all k-element subsets of n items.

7-16. *[5]* An anagram is a rearrangement of the letters in a given string into a sequence of dictionary words, like *Steven Skiena* into *Vainest Knees*. Propose an algorithm to construct all the anagrams of a given string.

Structura

- Ce este o tehnică de proiectare a algoritmilor ?
- Tehnica forței brute
- Tehnica reducerii
- Algoritmi recursivi și analiza acestora
- Aplicații ale tehnicii reducerii

Ce este o tehnică de proiectare a algoritmilor?

… este o metodă generală de rezolvare algoritmică a unei clase de probleme

… o astfel de tehnică poate fi de regulă aplicată mai multor probleme provenind din diferite domenii de aplicabilitate

De ce sunt utile astfel de tehnici?

… furnizează idei de start și scheme generale de proiectare a algoritmilor destinați rezolvării unor probleme noi

… reprezintă o colecție de instrumente utile pentru aplicații

Care sunt cele mai utilizate tehnici?

- Tehnica forței brute (brute force)
- Tehnica reducerii (decrease and conquer)
- Tehnica divizării (divide and conquer)
- Tehnica căutării local optimale (greedy search)
- Tehnica programării dinamice (dynamic programming)
- Tehnica căutarii cu revenire (backtracking)

Tehnica forței brute

… este o abordare directă care rezolvă problema pornind de la enunțul acesteia și eventual prin analiza exhaustivă a spațiului soluțiilor (analiza tuturor configurațiilor posibile)

… este cea mai simplă (și cea mai intuitivă) cale de a rezolva problema

… algoritmii proiectati pe baza tehnicii forței brute nu sunt întotdeauna eficienți

Tehnica forței brute

Exemplu:

- Calculul lui x^n, x este un număr real iar n este un număr natural

Idee: se pornește de la definiția puterii

$$x^n = x*x*\ldots*x \text{ (de n ori)}$$

```
Power(x,n)
   p←1
   FOR i ← 1,n DO
       p ← p*x
   ENDFOR
   RETURN p
```

Analiza eficienței

Dim. pb: n

Op. dominantă: *

T(n)=n

Ordin de complexitate

$\Theta(n)$

Există algoritm mai eficient ?

Tehnica forței brute

Exemplu:

- Calcul n!, pentru n un număr natural (n>=1)

Idee: se pornește de la definiția factorialului n!=1*2*…*n

```
Factorial(n)
   f ← 1
   FOR i ← 1,n DO
       f ← f*i
   ENDFOR
   RETURN f
```

Analiza eficienței

Dim. pb: n

Op. dominantă: *

T(n)=n

Ordin de complexitate

$\Theta(n)$

Există algoritm mai eficient ?

Tehnica reducerii

Idee:

- se folosește legătura dintre soluția unei probleme și soluția unei instanțe de dimensiune mai mică a aceleiași probleme.

- prin reducerea succesivă a dimensiunii problemei se ajunge la o instanță suficient de mică pentru a fi rezolvată direct

Motivație:

- Pentru unele probleme o astfel de abordare conduce la algoritmi mai eficienți decât cei obținuți aplicând tehnica forței brute

- Uneori este mai simplu să se specifice relația dintre soluția problemei de rezolvat și soluția unei probleme de dimensiune mai mică decât să se specifice explicit modul de calcul al soluției

Tehnica reducerii

Exemplu. Considerăm problema calculului puterii x^n pentru $n=2^m$, $m>=1$

Intrucât

$$x^{2^m} = \begin{cases} x*x & \text{pentru } m=1 \\ x^{2^{(m-1)}} * x^{2^{(m-1)}} & \text{pentru } m>1 \end{cases}$$

rezultă că $x^{2\hat{}m}$ poate fi calculat după schema de mai jos:

$p:=x*x=x^2$

$p:=p*p=x^2 * x^2=x^4$

$p:=p*p=x^4 * x^4=x^8$

….

Tehnica reducerii

Pas 1: $p:=x*x=x^2 = x^{2^1}$

Pas 2: $p:=p*p=x^2*x^2=x^4 = x^{2^2}$

Pas 3: $p:=p*p=x^4*x^4=x^8 = x^{2^3}$

...

Pas (m-1): $p:=p*p=x^{2^{m-1}}*x^{2^{m-1}}=x^{2^m}$

```
Power2(x,m)
  p ← x*x
  FOR i ← 1,m-1 DO
      p ← p*p
  ENDFOR
  RETURN p
```

Obs: abordarea din Power2 este ascendentă (bottom-up) în sensul că se pornește de la problema de dimensiune mică către problema de dimensiune mare

Tehnica reducerii

```
Power2(x,m)
  p ← x*x
  FOR i ← 1,m-1 DO
      p ← p*p
  ENDFOR
  RETURN p
```

Analiza :

a) Correctitudine

Invariant ciclu: $p=x^{2^i}$

b) Eficiența

(i) dimensiune problemă: m

(ii) operație dominantă: *

$T(m) = m$

Observație:

$m=\log(n)$

Tehnica reducerii

$$x^{2^m} = \begin{cases} x*x & \text{pentru } m=1 \\ x^{2^{m-1}} * x^{2^{m-1}} & \text{pentru } m>1 \end{cases}$$

$$x^n = \begin{cases} x*x & \text{pentru } n=2 \\ x^{n/2} * x^{n/2} & \text{pentru } n>2 \end{cases}$$

```
power3(x,m)
    IF  m==1 THEN RETURN x*x
    ELSE
        p ← power3(x,m-1)
        RETURN p*p
    ENDIF
```

dimensiunea descrește cu 1

```
power4(x,n)
    IF  n==2 THEN RETURN x*x
    ELSE
        p ← power4(x,n DIV 2)
        RETURN p*p
    ENDIF
```

Dimensiunea descrește prin împărțire la 2

Tehnica reducerii

```
power3(x,m)
    IF  m==1 THEN RETURN x*x
    ELSE
        p ← power3(x,m-1)
        RETURN p*p
    ENDIF
```

```
power4(x,n)
    IF  n==2 THEN RETURN x*x
    ELSE
        p ← power4(x,n DIV 2)
        RETURN p*p
    ENDIF
```

Observatii:

1. In algoritmii de mai sus se folosește o abordare descendentă (top-down): se pornește de la problema de dimensiune mare și se reduce succesiv dimensiunea până se ajunge la o problemă suficient de simplă
2. Ambii algoritmi sunt recursivi

Tehnica reducerii

Ideea poate fi extinsă in cazul unui exponent n cu valoare naturală arbitrară

$$x^n = \begin{cases} x & \text{pentru } n=1 \\ x^{n/2} * x^{n/2} & \text{pentru } n>=2,\ n \text{ par} \\ x^{(n-1)/2} * x^{(n-1)/2} * x & \text{pentru } n>2,\ n \text{ impar} \end{cases}$$

```
power5(x,n)
   IF  n=1 THEN RETURN x
   ELSE
         p ← power5(x,n DIV 2)
         IF n MOD 2=0 THEN  RETURN p*p
                            ELSE   RETURN p*p*x
         ENDIF
   ENDIF
```

Structura

- Ce este o tehnică de proiectare a algoritmilor ?
- Tehnica forței brute
- Tehnica reducerii
- Algoritmi recursivi și analiza acestora
- Aplicații ale tehnicii reducerii

Algoritmi recursivi

Noțiuni

- Algoritm recursiv = un algoritm care conține cel puțin un apel recursiv
- Apel recursiv = apelul aceluiași algoritm fie direct (algoritmul A se autoapelează) fie indirect (algoritmul A apelează algoritmul B care apelează la rândul lui algoritmul A)

Observații:

- Cascada apelurilor recursive este echivalentă cu un proces iterativ

- Un algoritm recursiv trebuie să conțină un caz particular pentru care se poate returna direct rezultatul fără să fie necesar apelul recursiv

- Algoritmii recursivi sunt ușor de implementat dar execuția apelurilor recursive induce costuri suplimentare (la fiecare apel recursiv se plasează o serie de informații într-o zonă de memorie organizată ca o stivă - numită chiar stiva programului)

Exemplu

Calcul factorial

$$n! = \begin{cases} 1 & n<=1 \\ (n-1)!*n & n>1 \end{cases}$$

```
fact(n)
   If n<=1 then rez ← 1
           else rez ← n*fact(n-1)
   endif
return rez
```

Algoritmi recursivi – mecanism de apel

fact(4): Stiva = [4]

fact(3): Stiva = [3,4]

fact(2): Stiva = [2,3,4]

fact(1): Stiva = [1,2,3,4]

fact(4)	24

Stiva = []

4*fact(3) ↓ ↑ 4*6

fact(3)	6

Stiva = [4]

3*fact(2) ↓ ↑ 3*2

fact(2)	2

Stiva = [3,4]

2*fact(1) ↓ ↑ 2*1

Stiva = [2,3,4]

fact(1) →	1

Apel recursiv

Revenire din apel

```
fact(n)
   If n<=1 then rez ← 1
            else rez ← n*fact(n-1)
   endif
return rez
```

Algoritmi recursivi - corectitudine

Intrucât algoritmii recursivi conțin prelucrări iterative (chiar dacă implicite) pentru verificarea corectitudinii este suficient să se identifice o proprietate referitoare la starea algoritmului (similară unui invariant) care are proprietățile:

- Este adevarată pentru cazul particular
- Rămâne adevărată după apelul recursiv
- Pentru valorile parametrilor specificate la apelul inițial proprietatea invariantă implică postcondiția

Exemplu: (calcul factorial). Proprietatea satisfacută la orice apel rez=n! (unde n este valoarea curentă a parametrului)

Caz particular: n=1 => rez=1=n!

Dupa execuția apelului recursiv rez=(n-1)!*n=n!

Algoritmi recursivi - corectitudine

Exemplu. P: a,b nr naturale, a,b≠0; Q: returnează cmmdc(a,b)

Relația de recurență specifică cmmdc:

$$\text{cmmdc}(a,b)= \begin{cases} a & \text{dacă } b=0 \\ \text{cmmdc}(b, a \text{ MOD } b) & \text{dacă } b \neq 0 \end{cases}$$

```
cmmdc(a,b)
   IF b=0 THEN rez ← a
     ELSE  rez ← cmmdc(b, a MOD b)
   ENDIF
   RETURN rez
```

Invariant: rez=cmmdc(a,b)

Caz particular: b=0 => rez=a=cmmdc(a,b)

Dupa apelul recursiv: pentru b ≠ 0

cmmdc(a,b)=cmmdc(b,a MOD b)

rezultă că rez=cmmdc(a,b)

Pentru valorile de apel ale parametrilor:

rez=cmmdc(a,b) => Q

Algoritmi recursivi – eficiența

Etapele analizei eficienței:

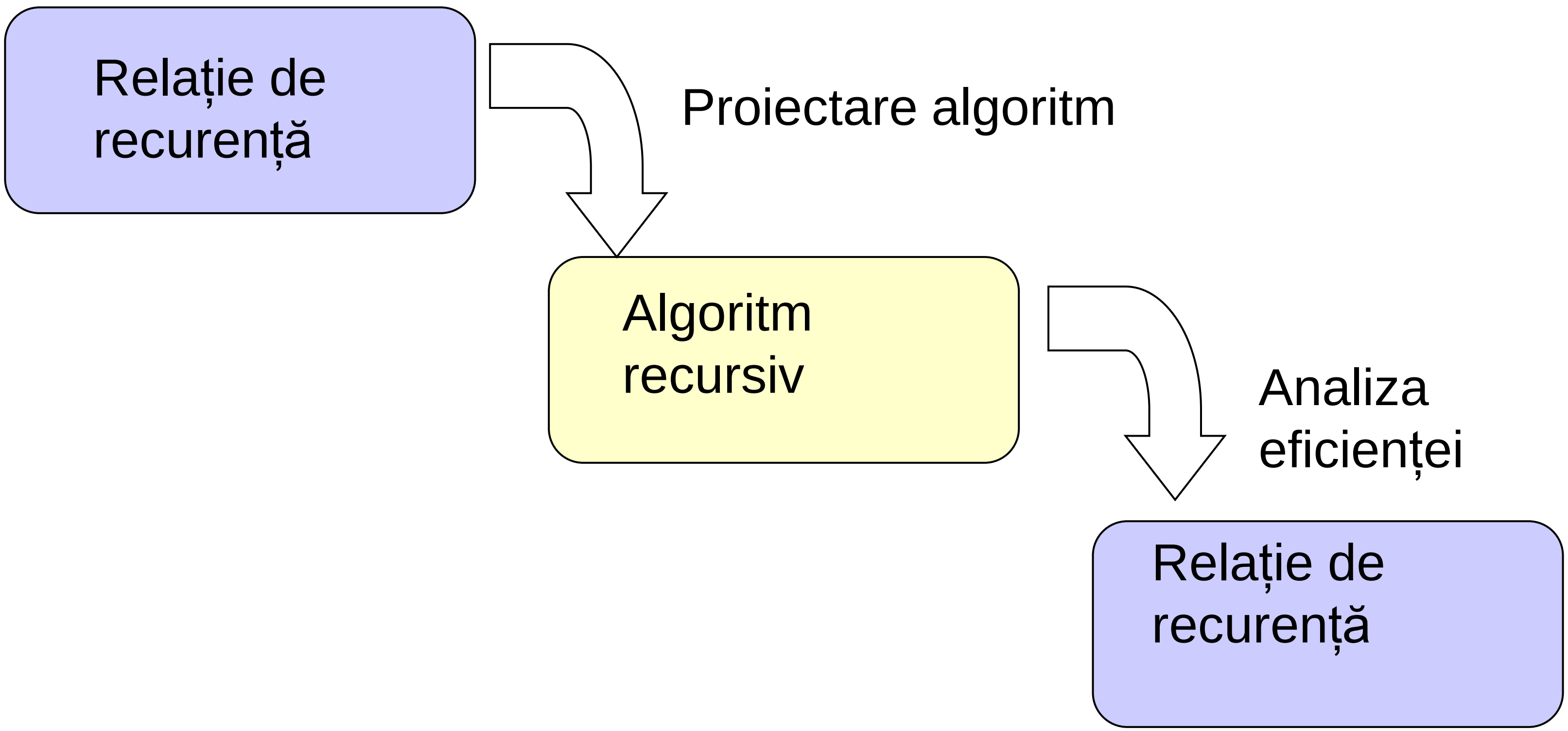
- Stabilirea dimensiunii problemei
- Alegerea operației dominante
- Se verifică dacă timpul de execuție depinde și de proprietățile datelor de intrare (în această situație se analizează cazul cel mai favorabil și cazul cel mai defavorabil)
- Estimarea timpului de execuție

In cazul algoritmilor recursivi pentru estimarea timpului de executie se stabilește relația de recurență care exprimă legătura dintre timpul de execuție corespunzător problemei inițiale și timpul de execuție corespunzător problemei reduse (de dimensiune mai mică)

Estimarea timpului de execuție se obține prin rezolvarea relației de recurență

Algoritmi recursivi – eficiența

Observație:



Algoritmi recursivi – eficiența

rec_alg (n)
IF n=n0 THEN <P>
ELSE rec_alg(h(n))
ENDIF

Ipoteze:

- <P> este prelucrarea corespunzătoare cazului particular și este de cost c0
- h este o funcție descrescătoare și există k astfel încât

  $h^{(k)}(n)=h(h(\ldots(h(n))\ldots))=n0$
- Costul calculului lui h(n) este c

Cu aceste ipoteze relația de recurență pentru timpul de execuție poate fi scrisă:

$$T(n)=\begin{cases} c0 & \text{dacă } n=n0 \\ T(h(n))+c & \text{dacă } n>n0 \end{cases}$$

Algoritmi recursivi – eficiența

Calcul n!, n>=1

Relația de recurență:

$$n! = \begin{cases} 1 & n=1 \\ (n-1)!*n & n>1 \end{cases}$$

Algoritm:

```
fact(n)
  IF n<=1 THEN RETURN 1
         ELSE  RETURN fact(n-1)*n
  ENDIF
```

Dimensiune problemă: n

Operație dominantă: înmulțirea

Relația de recurență pentru timpul de execuție:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n=1 \\ T(n-1)+1 & n>1 \end{cases}$$

Algoritmi recursivi – eficiența

Metode de rezolvare a relațiilor de recurență:

- Substituție directă
  - Se porneste de la cazul particular și se construiesc termeni succesivi folosind relația de recurență
  - Se identifică forma termenului general
  - Se verifică prin calcul direct sau prin inducție matematică expresia timpului de execuție
- Substituție inversă
  - Se pornește de la cazul T(n) și se înlocuiește T(h(n)) cu membrul drept al relației corespunzătoare, apoi se înlocuiește T(h(h(n))) și așa mai departe, până se ajunge la cazul particular; sau se înmulțesc egalitățile cu factori care să permită eliminarea tuturor termenilor de forma T(h(n)) cu excepția lui T(n)
  - Se efectuează calculele și se obțineT(n)

Algoritmi recursivi – eficiența

Exemplu: n!

$$T(n)=\begin{cases} 0 & n=1 \\ T(n-1)+1 & n>1 \end{cases}$$

Substituție directă

T(1)=0

T(2)=1

T(3)=2

….

T(n)=n-1

Substituție inversă

T(n) =T(n-1)+1

T(n-1)=T(n-2)+1

….

T(2) =T(1)+1

T(1) =0

------------------- (prin adunare)

T(n)=n-1

Obs: aceeasi eficiență ca și algoritmul bazat pe metoda forței brute!

Algoritmi recursivi – eficiența

Exemplu: x^n, $n=2^m$,

```
power4(x,n)
    IF  n=2 THEN RETURN x*x
    ELSE
        p ← power4(x,n/2)
        RETURN p*p
    ENDIF
```

$$T(n)=\begin{cases} 1 & n=2 \\ T(n/2)+1 & n>2 \end{cases}$$

$T(2^m) \quad =T(2^{m-1})+1$

$T(2^{m-1}) =T(2^{m-2})+1$

….

$T(2) \quad\quad =1$

-------------------- (prin adunare)

$T(n)=m=\log(n)$

Algoritmi recursivi – eficiența

Obs: în acest caz algoritmul bazat pe tehnica reducerii este mai eficient decât cel bazat pe metoda forței brute

Explicație: $x^{n/2}$ este calculat o singură dată. Dacă valoarea $x^{n/2}$ ar fi calculată de două ori atunci s-ar pierde din eficiență

```
pow(x,n)
 IF  n=2 THEN RETURN x*x
 ELSE
  RETURN pow(x,n/2)*pow(x,n/2)
 ENDIF
```

$$T(n)=\begin{cases} 1 & n=2 \\ 2T(n/2)+1 & n>2 \end{cases}$$

$T(2^m) \quad =2T(2^{m-1})+1$

$T(2^{m-1}) =2T(2^{m-2})+1 \quad |*2$

$T(2^{m-2}) =2T(2^{m-3})+1 \quad |*2^2$

….

$T(2) \quad =1 \qquad\qquad |*2^{m-1}$

-------------------- (prin adunare)

$T(n)=1+2+2^2+\ldots+2^{m-1}=2^m-1= n-1$

Structura

- Ce este o tehnica de proiectare a algoritmilor ?
- Tehnica fortei brute
- Tehnica reducerii
- Algoritmi recursivi si analiza acestora
- Aplicații ale tehnicii reducerii

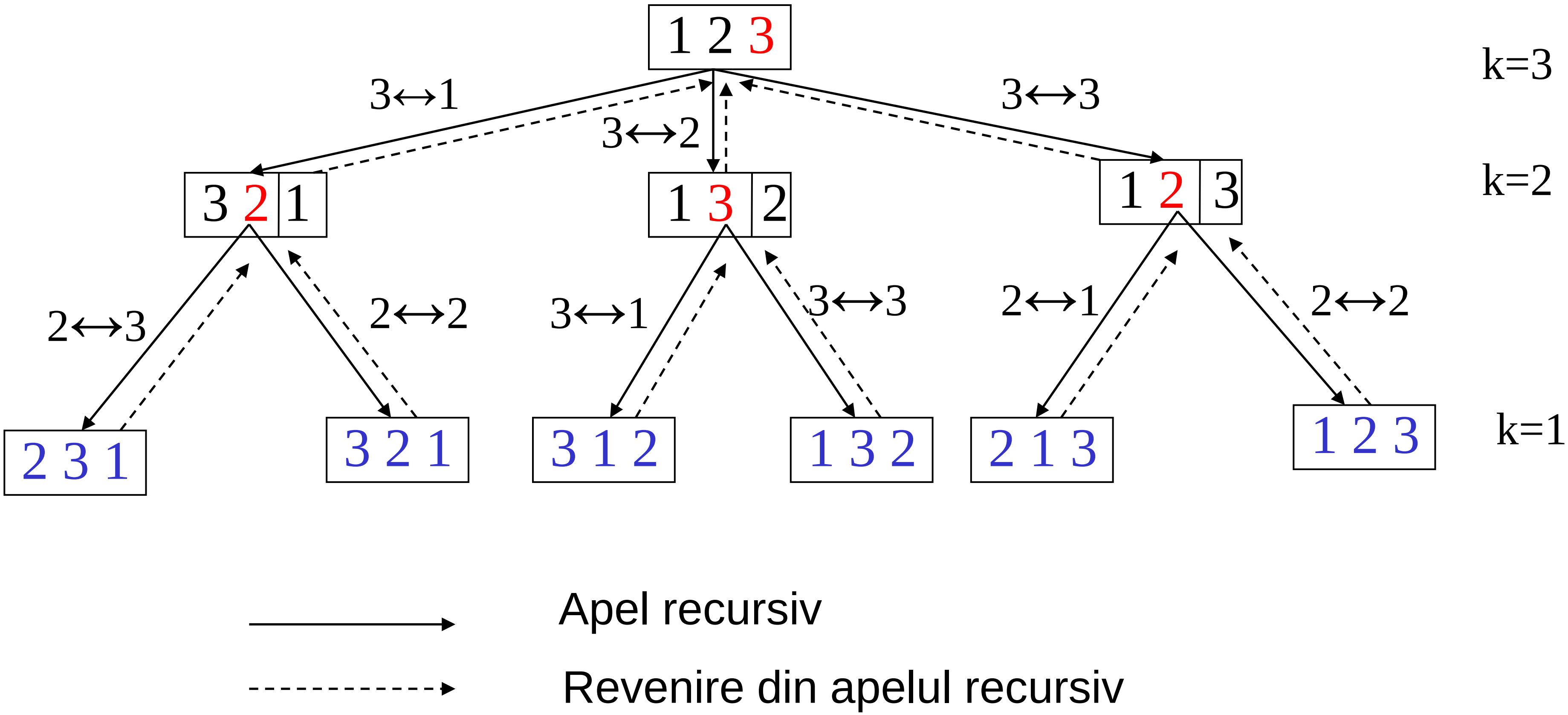
Aplicații ale tehnicii reducerii

Exemplu 1: generarea celor n! permutări ale mulțimii {1,2,…,n}

Idee: cele k! permutări ale lui {1,2,…,k} pot fi obținute din cele (k-1)! permutări ale lui {1,2,…,k-1} prin plasarea celui de al k-lea element succesiv pe prima, a doua … a k-a poziție. Plasarea lui k pe poziția i este realizată prin interschimbarea elementului de pe poziția k cu cel de pe poziția i.

Generarea permutarilor

Ilustrare pentru n=3 (abordare top-down)



Generarea permutărilor

Fie x[1..n] o variabilă globală (accesibilă din funcție) conținând inițial valorile [1,2,…,n]

Algoritmul are parametrul formal k si este apelat pentru k=n.

Cazul particular este k=1, când tabloul x conține deja o permutare completă ce poate fi prelucrată (de exemplu, afișată)

```
perm(k)
 IF k=1 THEN WRITE x[1..n]
 ELSE
     FOR i ← 1,k DO
         x[i] ↔x[k]
         perm(k-1)
         x[i] ↔x[k]
     ENDFOR
 ENDIF
```

Analiza eficienței:

Dim pb.: k

Operație dominantă: interschimbare

Relație de recurență:

$$T(k)=\begin{cases} 0 & k=1 \\ k(T(k-1)+2) & k>1 \end{cases}$$

Apel alg: perm(n)

Generarea permutărilor

$$T(k)=\begin{cases} 0 & k=1 \\ k(T(k-1)+2) & k>1 \end{cases}$$

$T(k) \quad =k(T(k-1)+2)$

$T(k-1)=(k-1)(T(k-2)+2) \quad |*k$

$T(k-2)=(k-2)(T(k-3)+2) \quad |*k*(k-1)$

…

$T(2) \quad =2(T(1)+2) \qquad |*k*(k-1)*\ldots*3$

$T(1) \quad =0 \qquad |*k*(k-1)*\ldots*3*2$

$T(k)=2(k+k(k-1)+ k(k-1)(k-2)+\ldots+k!) =2k!(1/(k-1)!+1/(k-2)!+\ldots+ ½+1)$

-> $2e\,k!$ (pentru valori mari ale lui k). Pt k=n => $T(n) \in \Theta(n!)$

Problema turnurilor din Hanoi

Istoric: problemă propusă de matematicianul Eduard Lucas în 1883

Ipoteze:

- Considerăm 3 vergele etichetate cu S (sursă), D (destinație) și I (intermediar).
- Inițial pe vergeaua S sunt plasate n discuri de dimensiuni diferite în ordine descrescătoare a dimensiunilor (cel mai mare disc este la baza vergelei iar cel mai mic în varf)

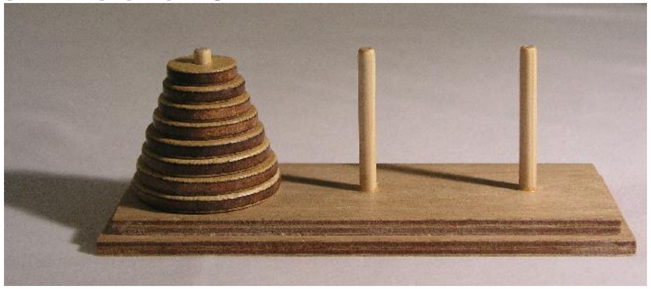
Scop:

- Să se mute toate discurile de pe S pe D (la final sunt tot în ordine descrescătoare) utilizând vergeaua I ca intermediară

Restricție:

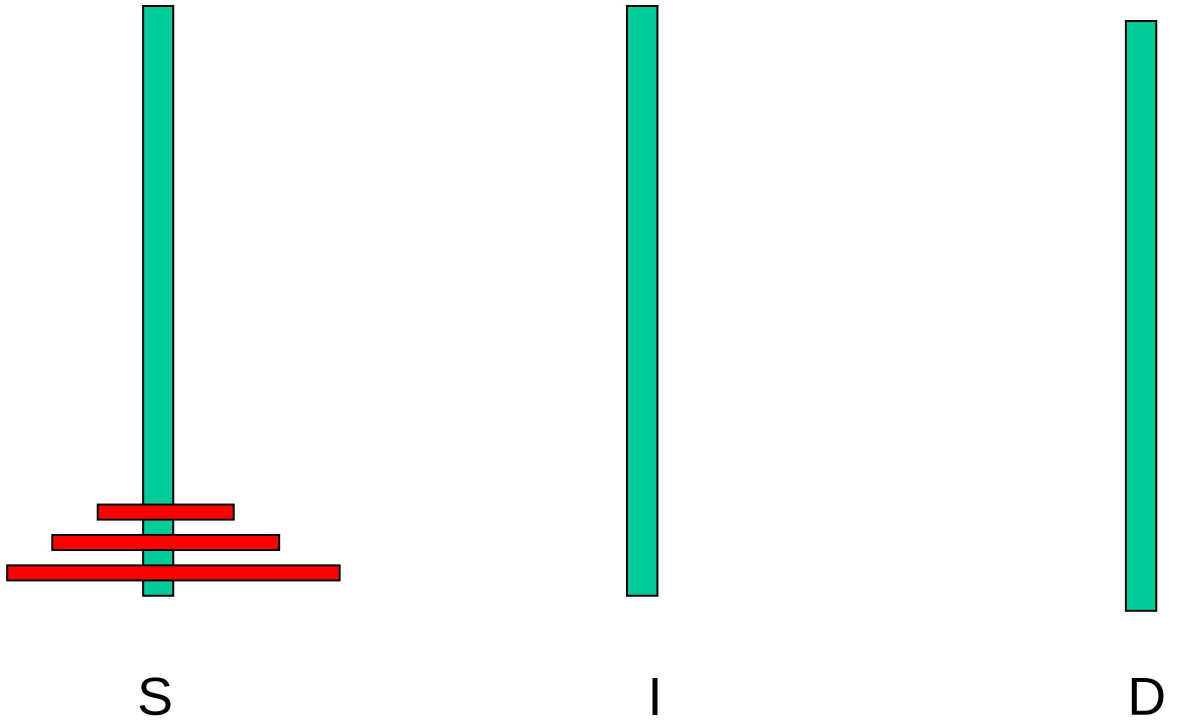
- La o etapă se poate muta un singur disc

și este interzisă plasarea unui disc mai mare peste un disc mai mic.



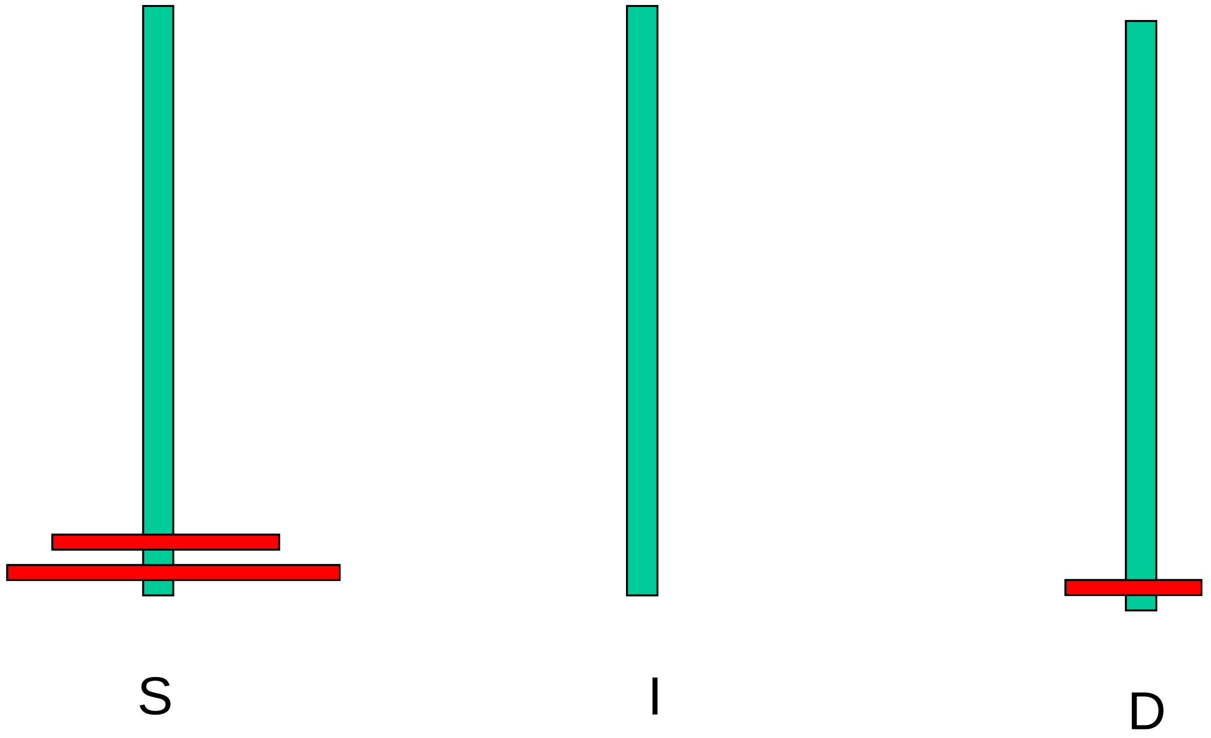
Problema turnurilor din Hanoi

Prima mutare: S->D



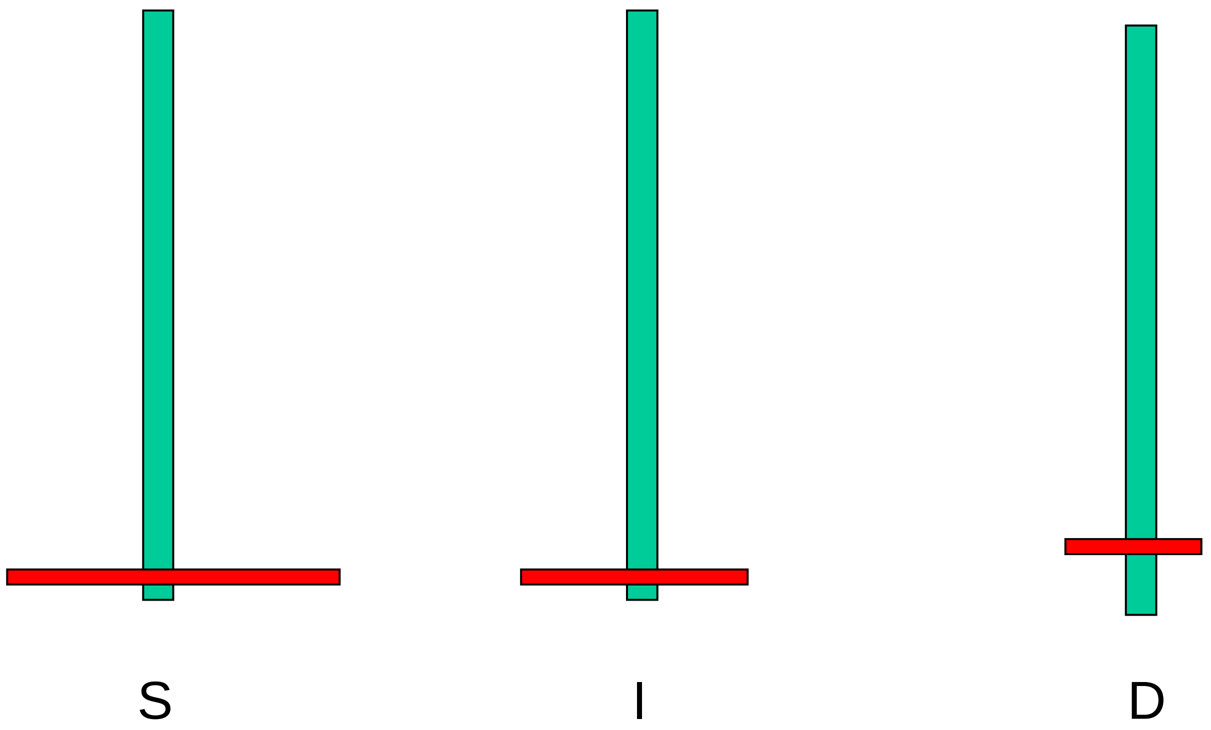
Problema turnurilor din Hanoi

A doua mutare: S->I



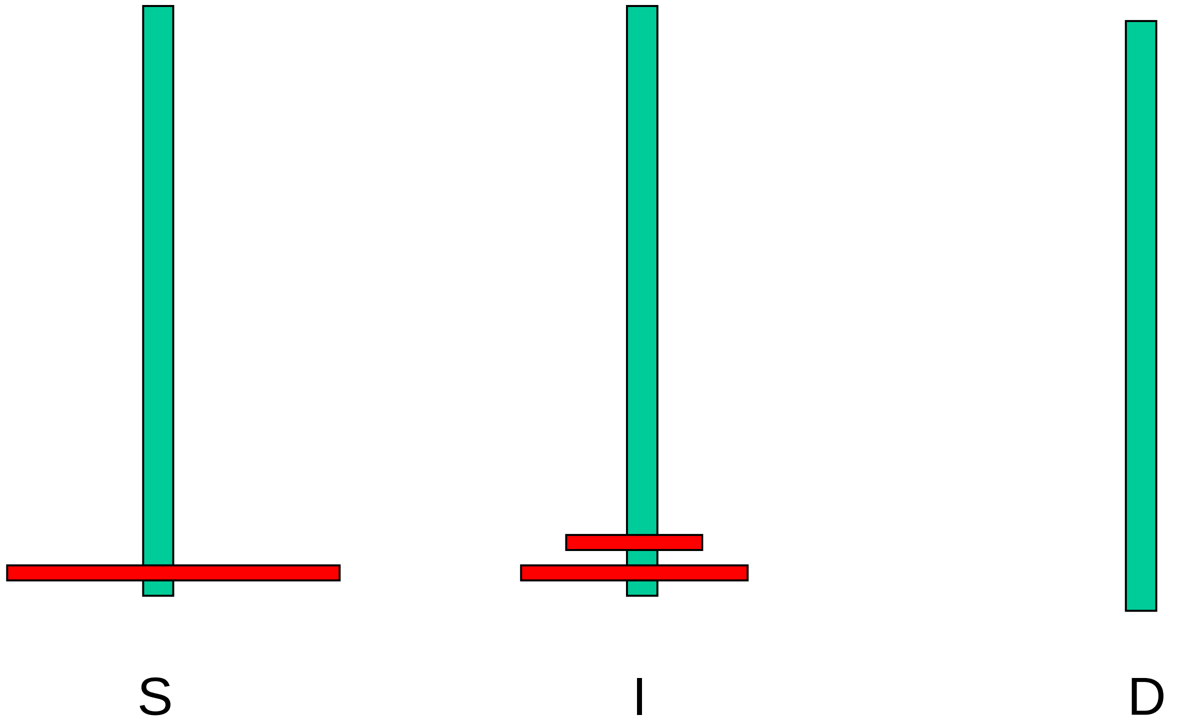
Problema turnurilor din Hanoi

A treia mutare: D->i



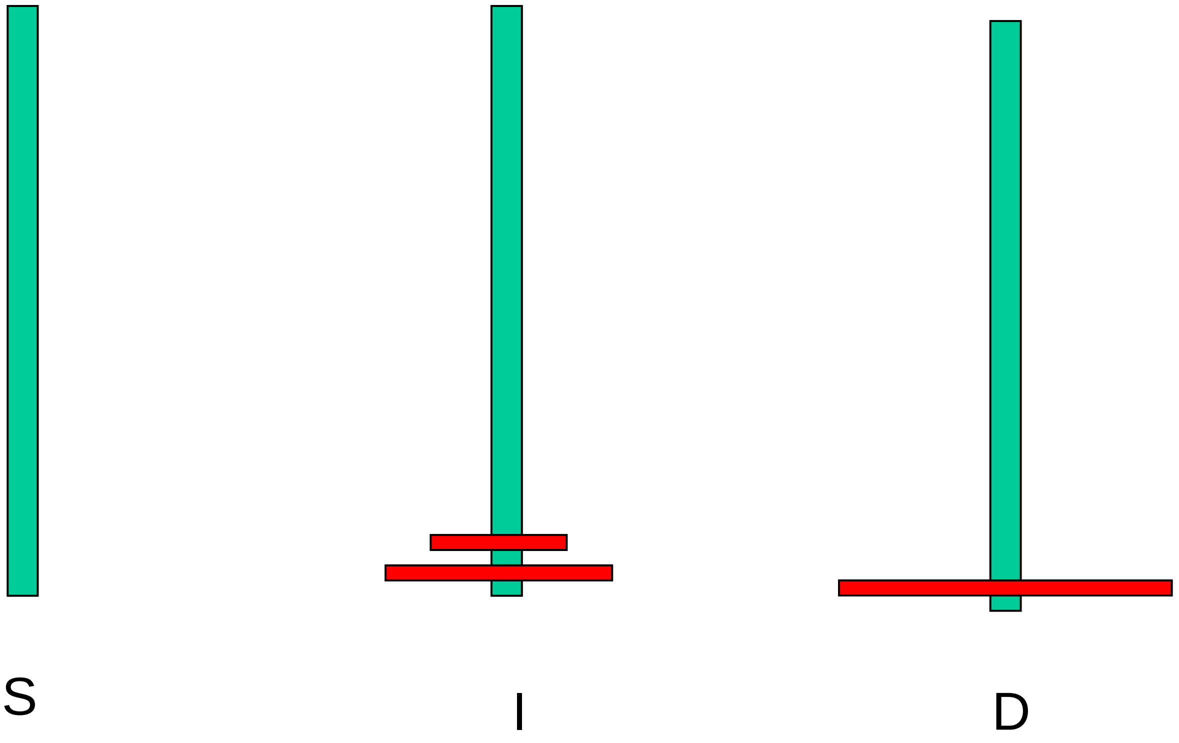
Problema turnurilor din Hanoi

A patra mutare: S->D



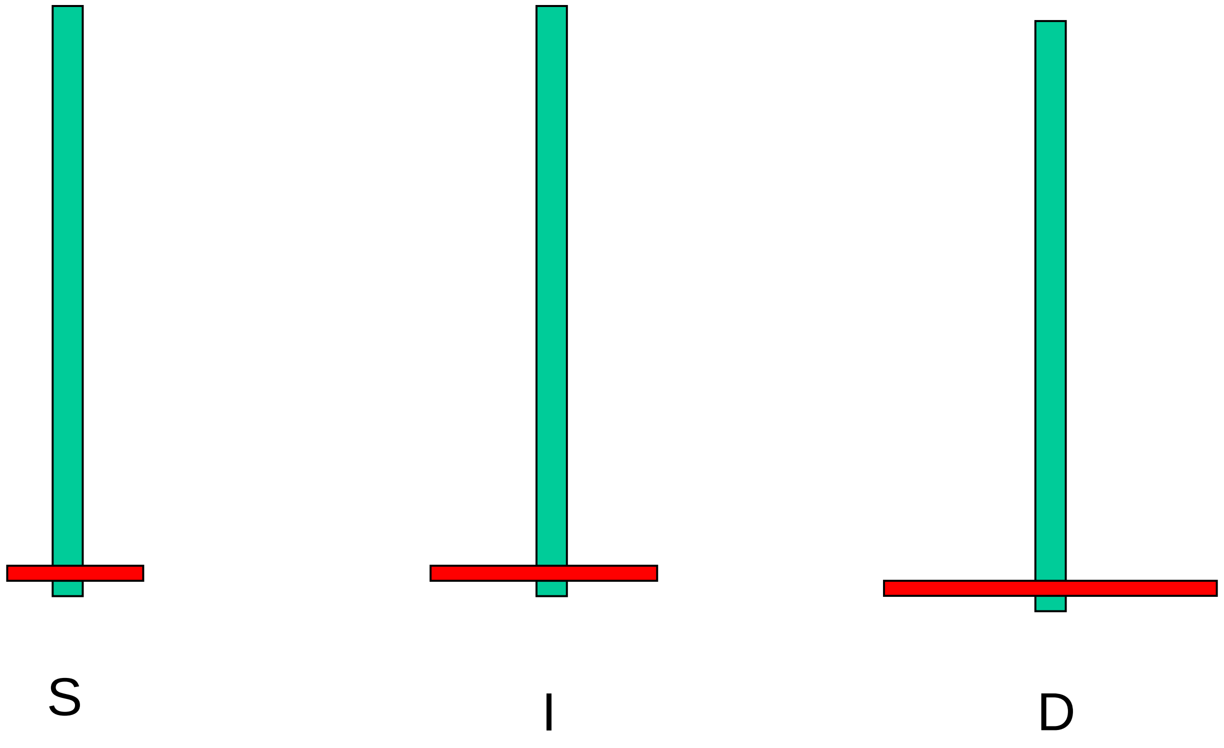
Problema turnurilor din Hanoi

A cincea mutare: I->S



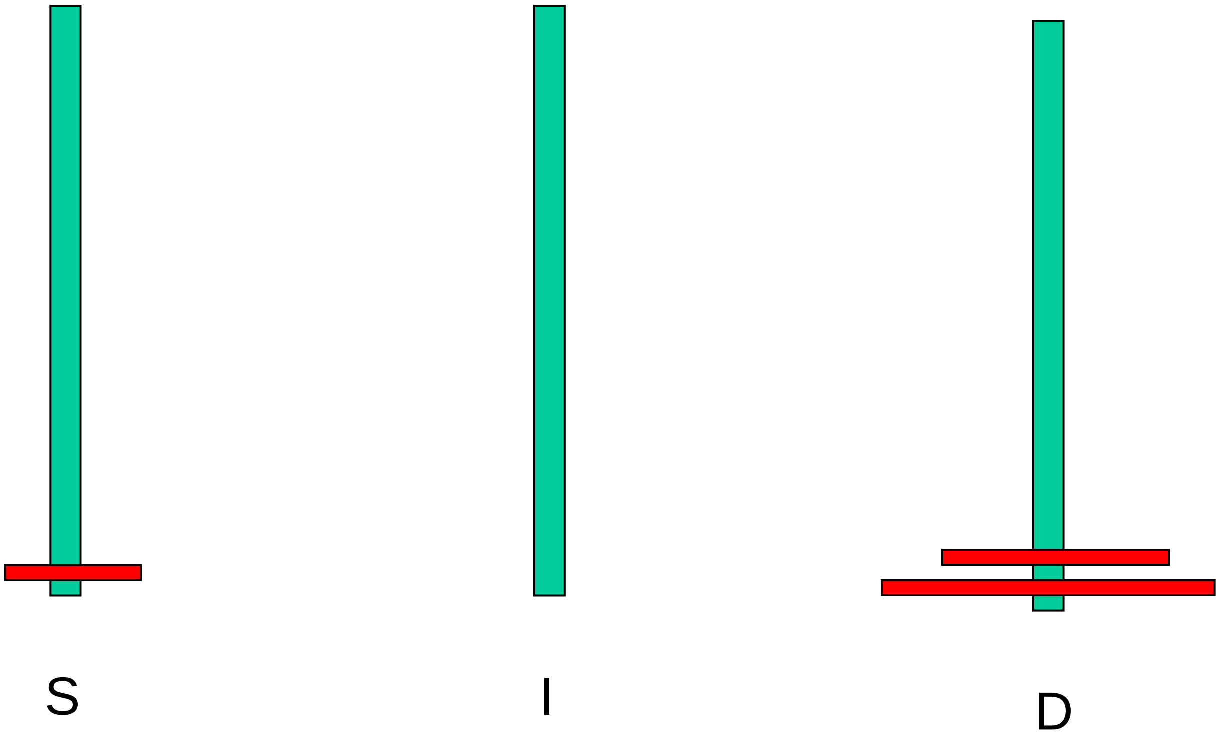
Problema turnurilor din Hanoi

A sasea mutare: I->D



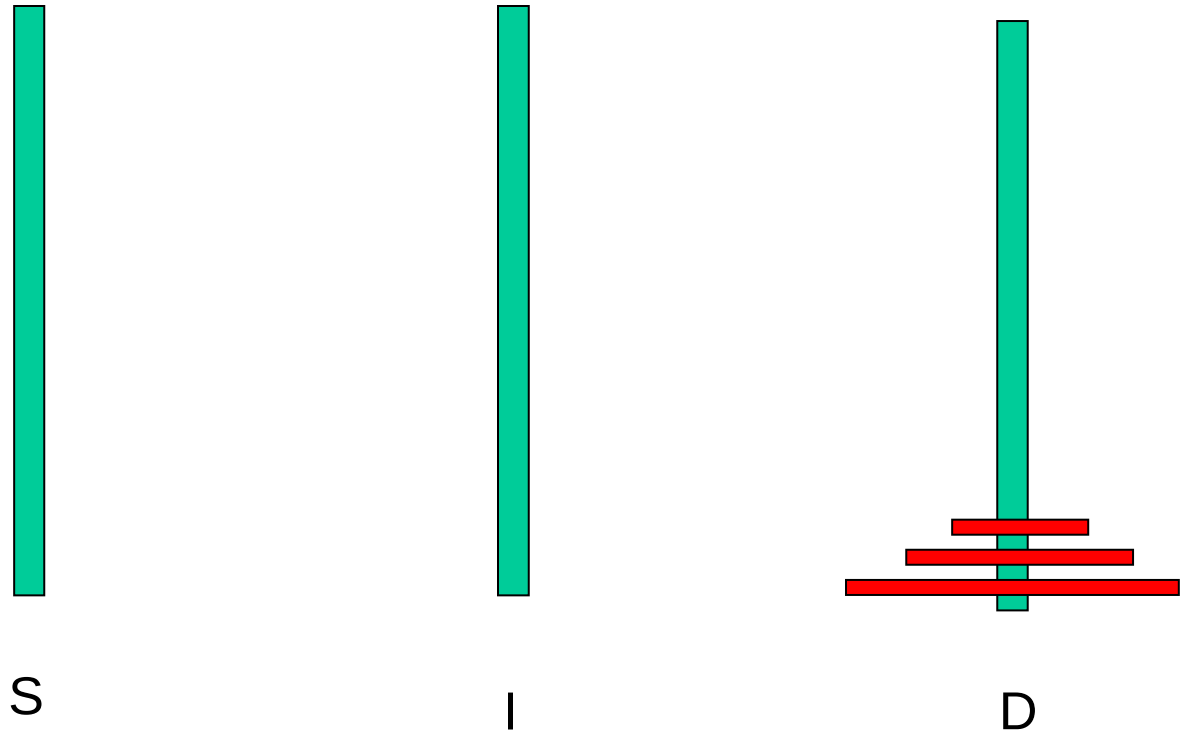
Problema turnurilor din Hanoi

A saptea mutare: S->D



Problema turnurilor din Hanoi

Rezultat



Problema turnurilor din Hanoi

Idee:

- Se muta (n-1) discuri de pe S pe I (utilizând D ca vergea auxiliară)
- Se muta discul rămas pe S direct pe D
- Se muta (n-1) discuri de pe I pe D (utilizând S ca vergea auxiliară)

Algoritm:

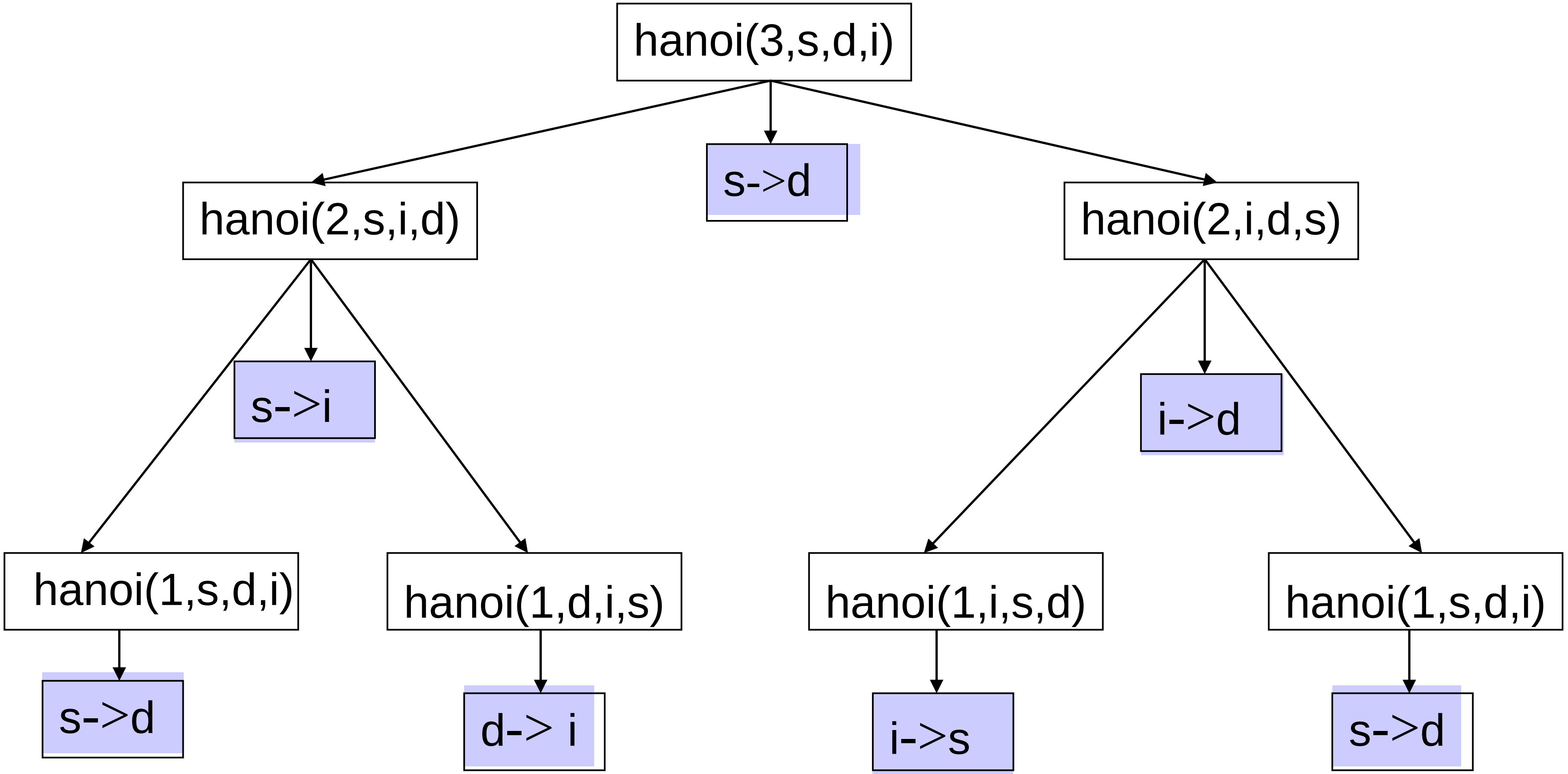
```
hanoi(n,S,D,I)
   IF n=1 THEN  "move from
   S to D"
   ELSE  hanoi(n-1,S,I,D)
         "move from S to D"
         hanoi(n-1,I,D,S)
   ENDIF
```

Semnificația parametrilor funcției hanoi:

- Primul parametru: numărul discurilor
- Al doilea parametru: vergea sursă
- Al treilea parametru: vergea destinație
- Al patrulea parametru: vergea intermediară

Problema turnurilor din Hanoi

Ilustrare apeluri recursive pentru n=3.



Problema turnurilor din Hanoi

```
hanoi(n,S,D,I)
   IF n=1 THEN   "move from S to D"
   ELSE  hanoi(n-1,S,I,D)
         "move from S to D"
         hanoi(n-1,I,D,S)
   ENDIF
```

Dim pb: n
Operație dominanta: move
Relație de recurență:

$$T(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ 2T(n-1)+1 & n>1 \end{cases}$$

$T(n) \quad =2T(n-1)+1$
$T(n-1)=2T(n-2)+1 \quad |*2$
$T(n-2)=2T(n-3)+1 \quad |*2^2$
…
$T(2) \quad =2T(1)+1 \quad |*2^{n-2}$
$T(1) \quad =1 \quad |*2^{n-1}$

$T(n)=1+2+\ldots+2^{n-1} = 2^n -1$

$T(n) \in \Theta(2^n)$

Sumar: variante ale tehnicii reducerii

- Reducere prin scăderea unei constante
  - Exemplu: n! (n!=1 if n=1
    n!=(n-1)!*n if n>1)
- Reducere prin împărțirea la o constantă
  - Exemplu: x^n ($x^n=x*x$ if n=2
    $x^n=x^{n/2}*x^{n/2}$ if n>2, $n=2^m$)
- Reducere prin scăderea unei valori variabile
  - Exemplu: cmmdc(a,b) (cmmdc(a,b)=a pt a=b
    cmmdc(a,b)=cmmdc(b,a-b) pt a>b
    cmmdc(a,b)=cmmdc(a,b-a) pt b>a)
- Reducere prin împărțire la o valoare variabilă
  - Exemplu: cmmdc(a,b)

    (cmmdc(a,b)=a pt b=0
    cmmdc(a,b)=cmmdc(b,a MOD b) pt b<>0)

Următorul curs este despre …

… tehnica divizării

… analiza

…. aplicații