8 Transformări geometrice

8.1 Translaţia

P 1. Fie $ABCD$ un patrulater convex, iar K, L, M şi N mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Arătaţi că

$$KM \leq \frac{1}{2}(AD + BC)\,,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $AD \parallel BC$.

P 2. Fie $ABCD$ un paralelogram cu unghiurile $\hat{A}$ şi $\hat{C}$ ascuţite, iar $K \in (AB)$ şi $H \in (BC)$ proiecţiile vârfului D pe dreptele AB, respectiv BC. Dacă sunt date lungimile segmentelor $KH = a$ şi $BD = b$, determinaţi distanţa de la vârful D la ortocentrul triunghiului DKH.

P 3. Fie M un punct interior triunghiului ABC. Se construieşte un şir de puncte A_1, B_1, B_2, C_2, C_3, A_3, A_4, B_4, … în felul următor:

$$A_1 \in (CA) : MA_1 \parallel BC\,, \quad B_1 \in (BC) : A_1B_1 \parallel AB\,, \quad B_2 \in (AB) : B_1B_2 \parallel CA\,,$$
$$C_2 \in (CA) : B_2C_2 \parallel BC\,, \quad C_3 \in (BC) : C_2C_3 \parallel AB\,, \quad A_3 \in (AB) : C_3A_3 \parallel CA\,,$$
$$A_4 \in (CA) : A_3A_4 \parallel BC\,, \quad B_4 \in (BC) : A_4B_4 \parallel AB\,, \quad \ldots$$

Arătaţi că traiectoria astfel obţinută este închisă, i.e. şirul este periodic.

P 4. Fie date două cercuri $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ şi o dreaptă d. Construiţi o dreaptă d', paralelă cu d, care să intersecteze cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, formând în cele două cercuri coarde de aceeaşi lungime.

P 5. Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $AB \parallel CD$, M punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\hat{A}$ şi $\hat{D}$, iar N punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$. Arătaţi că

$$MN = \frac{1}{2} \cdot |AB + CD - AD - BC|\,.$$

P 6. Într-un cerc $\mathcal{C}$, fie $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde care nu se intersectează. Construiţi un punct X pe cerc, astfel încât coardele $[AX]$ şi $[BX]$ să intersecteze $[CD]$ în două puncte E şi F, astfel încât segmentul $[EF]$ să aibă o lungime dată $EF = a$.

8.2 Rotaţia

P 7. Fie a, b şi c trei drepte paralele. Să se construiască un triunghi echilateral ABC, având vârfurile pe cele trei drepte: $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$.

P 8. Fie ABC un triunghi echilateral, iar M un punct interior acestuia. Arătaţi că MA, MB, MC sunt lungimile laturilor unui triunghi.

P 9. Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile mai mici de $120°$.
a) Aflaţi un punct T interior triunghiului pentru care suma distanţelor la vârfurile triunghiului este minimă.
b) Arătaţi că dacă lungimile laturilor triunghiului ABC sunt a, b , c, iar aria triunghiului este S, atunci

$$(TA + TB + TC)^2 = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3} \cdot S.$$

P 10. Pe laturile $[BC]$ şi $[CD]$ ale unui pătrat $ABCD$ considerăm punctele $M \in (BC)$ şi $K \in (CD)$, astfel încât $\widehat{BAM} \equiv \widehat{MAK}$. Arătaţi că $BM + KD = AK$.

P 11. Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct de pe arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului. Arătaţi că $MA = MB + MC$.

P 12. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, iar H ortocentrul său. Pe semidreptele $(HA$, $(HB$, respectiv $(HC$ se consideră punctele A_1, B_1, C_1, astfel încât $HA_1 = BC$, $HB_1 = CA$ şi $HC_1 = AB$. Arătaţi că medianele triunghiului ABC sunt perpendiculare pe laturile triunghiului $A_1B_1C_1$, iar H este centrul de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$.

P 13. Fie P un punct în interiorul unui pătrat $ABCD$. Arătaţi că perpendicularele duse din A, B, C, respectiv D pe BP, CP, DP, respectiv AP sunt concurente.

8.3 Simetria

P 14. Fie d o dreaptă, iar A şi B două puncte în plan. Determinaţi punctul $M \in d$ cu proprietatea că suma $MA + MB$ este minimă.

P 15. Fie $\widehat{xOy}$ un unghi ascuţit, iar P un punct în interiorul său. Determinaţi punctele $Q \in Ox$ şi $R \in Oy$ încât perimetrul triunghiului PQR să fie minim.

P 16. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Să se determine punctele $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$ şi $R \in (AB)$, astfel încât perimetrul triunghiului PQR să fie minim.

P 17. Arătaţi că perpendicularele duse din mijloacele laturilor unui patrulater inscriptibil pe laturile opuse sunt concurente.

P 18. Fie M un punct aflat pe bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{BAC}$ al triunghiului ABC. Arătaţi că $MB + MC > AB + AC$.

P 19. Dacă l_1, l_2 şi l_3 sunt drepte, astfel încât $l_3 = S_{l_1}(l_2)$, arătaţi că

$$S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1} = S_{l_3}\,.$$

8.4 Omotetii

P 20. Fie ABC un triunghi, M mijlocul laturii $[BC]$, $(AD$, cu $D \in (BC)$, bisectoarea unghiului $\hat{A}$, $P \in (AB)$ şi $Q \in (AC)$ proiecţiile punctului D pe laturile (AB) şi (AC), iar $N \in (PQ)$ punctul cu proprietatea că $DN \perp BC$. Arătaţi că N se află pe mediana (AM).

P 21. Fie ABC un triunghi cu ortocentrul H, centrul cercului circumscris O, centrul de greutate G, mijloacele laturilor A_1, B_1, C_1, picioarele înălţimilor A', B', C', şi mijloacele segmentelor (AH), (BH), (CH), A_2, B_2, respectiv C_2. Arătaţi că cele 9 puncte A_1, B_1, C_1, A', B', C', A_2, B_2, C_2 sunt conciclice, iar centrul cercului pe care se află cele 9 puncte este mijlocul segmentului $[OH]$.

P 22. Fie $[AB]$ o coardă într-un cerc $\mathcal{C}$, iar k un cerc care este tangent interior cercului $\mathcal{C}$ într-un punct P şi coardei $[AB]$ într-un punct Q. Arătaţi că dreapta PQ trece prin mijlocul arcului $\widehat{AB}$ opus arcului $\widehat{APB}$.

P 23. Fie ABC un triunghi înscris în cercul ω, iar k un cerc tangent interior cercului ω şi tangent coardelor $[AB]$ şi $[AC]$ în punctele K şi L. Arătaţi că centrul I al cercului înscris triunghiului ABC este mijlocul segmentului $[KL]$.

P 24. Fie $ABCD$ un pătrat aflat în interiorul uni cerc ω. În exteriorul pătratului se consideră cercurile ω_A, ω_B, ω_C, ω_D să fie tangente interior cercului ω în punctele A', B', C', D', iar ω_A este tangent dreptelor AB şi AD, ω_B dreptelor BA şi BC, ω_C dreptelor CB şi CD, iar ω_D dreptelor CD şi DA. Arătaţi că dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt concurente.

P 25. Fie k_c şi k_i cercurile circumscris, respectiv înscris în triunghiul ABC. Cercurile ω_A, ω_B şi ω_C sunt tangente interior cercului k_c în punctele A, B, C, şi tangente exterior cercului k_i în punctele A', B' şi C'. Arătaţi că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

P 26. Fie k_1 şi k_2 două cercuri tangente exterior în punctul W şi amândouă tangente interior unui cerc k. Coarda $[BC]$ în cercul k este o tangentă comună exterioară a cercurilor k_1 şi k_2, iar A este punctul de intersecţie al tangentei comune în W la k_1 şi k_2 cu cercul k, aflat în acelaşi semiplan faţă de BC ca punctul W. Arătaţi că W este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

P 27. Trei cercuri congruente au un punct comun P şi se află în interiorul unui triunghi astfel încât fiecare este tangent la câte două laturi ale triunghiului. Arătaţi că punctul P este coliniar cu centrele cercurilor înscris şi circumscris triunghiului.

8.5 Omotetia rotaţională

P 28. O poză a unei hărţi este pusă peste hartă, astfel încât nicio parte a pozei să nu depăşească marginea hărţii. Arătaţi că există un unic punct al hărţii care se află exact sub imaginea sa din poză.

P 29. Fie A, B, C trei puncte necoliniare. Arătaţi că centrul omotetiei rotaţionale care duce segmentul $[AB]$ în segmentul $[BC]$ este al doilea punct de intersecţie al cercului care trece prin A şi B şi este tangent dreptei BC cu cercul care trec prin C şi B şi este tangent dreptei AB.

P 30. Fie A, B, A_1 şi B_1 patru puncte în plan. Arătaţi că centrul omotetiei rotaţionale care transformă segmentul $[AB]$ în segmentul $[A_1B_1]$ coincide cu centru omotetiei rotaţionale care transformă segmentul $[AA_1]$ în segmentul $[BB_1]$.

P 31. *(***punctul lui Miquel***)* Patru drepte secante, neconcurente câte trei, formează un patrulater complet. Arătaţi că cercurile circumscrise celor patru triunghiuri, formate cu câte de câte trei dintre drepte, au un punct comun.

8.6 Inversiunea

P 32. Arătaţi că în orice patrulater convex $ABCD$ are loc inegalitatea lui Ptolemeu

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC\,,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $ABCD$ este un patrulater inscriptibil.

P 33. Fie D piciorul înălţimii din vârful A în triunghiul ABC, iar E şi F punctele în care cercul de diametru $[AD]$ intersectează a doua dată laturile AC, respectiv AB ale triunghiului. Arătaţi că perpendiculara din A pe dreapta EF trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

P 34. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic scalen(i.e., neisoscel), A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$ ale triunghiului, iar O centrul cercului său circumscris. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor OAA_1, OBB_1 şi OCC_1 au un al doilea punct comun

P 35. Arătaţi că într-un triunghi ABC cu cercul circumscris $\mathcal{C}(O,R)$ şi cercul înscris $\mathcal{C}(I,r)$ are loc egalitatea

$$OI^2 = R^2 - 2Rr\,.$$

P 36. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil, iar M, N, P punctele în care cercurile de diametre $[AB]$, $[AC]$ şi $[AD]$ se intersectează a doua oară. Arătaţi că punctele M, N, P sunt coliniare.

P 37. Care este numărul maxim de cercuri în plan, tangente două câte două în puncte distincte?

P 38. Fie k_1 şi k_2 două cercuri secante în punctele A şi B. Tangentele la cele două cercuri în punctul A intersectează a doua oară cercurile în punctele M şi N. Dacă P este simetricul punctului A faţă de punctul B, arătaţi că patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil.

P 39. Fie A, B, C trei puncte coliniare, cu $B \in (AC)$, k şi l semicercurile de diametre $[AB]$, respectiv $[BC]$, iar n semidreapta perpendiculară în C pe dreapta AB, aflate toate într-un acelaşi semiplan faţă de dreapta AB. Fie m cercul tangent la k în punctul K, la l în punctul L şi la n în punctul N. Arătaţi că
a) tangenta comună la l şi m în punctul L trece prin A.
b) punctele A, K şi N sunt coliniare.

P 40. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu diagonalele AC şi BD perpendiculare, iar Q punctul de intersecţie al diagonalelor. Arătaţi că simetricele punctului Q faţă de laturile patrulaterului sunt patru puncte conciclice.

P 41. Fie k cercul circumscris unui triunghi ABC, iar T punctul de intersecţie al tangentelor în B şi C la k. Arătaţi că punctul T se află pe simediana din A în triunghiul ABC.

P 42. Fie H ortocentrul triunghiului ABC, iar M un punct în plan, diferite de H. Fie D, E, F proiecţiile punctului H pe dreptele AM, BM, respectiv CM, iar $U \in HD \cap BC$, $V \in HE \cap CA$ şi $W \in HF \cap AB$. Arătaţi că punctele U, V şi W sunt coliniare.