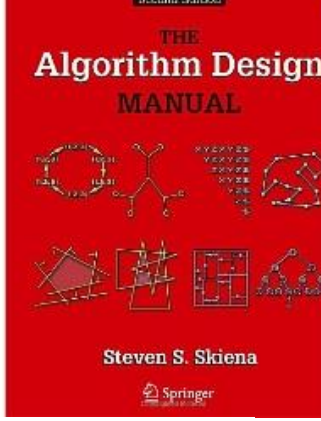
Curs 13:

Tehnica căutării cu revenire (Backtracking)

Motivație



S. Skiena – The Algorithm Design Manual

Interview Problems

7-14. *[4]* Write a function to find all permutations of the letters in a particular string.

7-15. *[4]* Implement an efficient algorithm for listing all k-element subsets of n items.

7-16. *[5]* An anagram is a rearrangement of the letters in a given string into a sequence of dictionary words, like *Steven Skiena* into *Vainest Knees*. Propose an algorithm to construct all the anagrams of a given string.

G. Laakman – Cracking the Coding Interview

http://ebook-dl.com/item/cracking-the-coding-interview-gayle-5th-edition-laakmann-mcdowell/

8.8 Write an algorithm to print all ways of arranging eight queens on a chess board so that none of them share the same row, column or diagonal.

pg 64

SOLUTION

We will use a backtracking algorithm. For each row, the column where we want to put the queen is based on checking that it does not violate the required condition.

Structura

- Ce este tehnica căutării cu revenire ?
- Structura generală a algoritmilor proiectați folosind această tehnică
- Aplicații:
  - Generarea permutărilor
  - Problema plasării reginelor pe tabla de șah
  - Colorarea hărților
  - Găsirea traseelor care unesc două locații
  - Problema labirintului

Ce este tehnica căutării cu revenire?

- Este o strategie de căutare sistematică în spațiul soluțiilor unei probleme
- Se utilizează în special pentru rezolvarea problemelor a căror cerință este de a determina configurații care satisfac anumite restricții (probleme de satisfacere a restricțiilor).
- Majoritatea problemelor ce pot fi rezolvate folosind tehnica căutării cu revenire se încadrează în următorul categorie de probleme:

" Să se găsească o submulțime S a produsului cartezian A_1 x A_2 x … x A_n (A_k – mulțimi finite) având proprietatea că fiecare element s=(s_1,s_2,…,s_n) satisface anumite restricții"

Exemplu: generarea tuturor permutărilor mulțimii {1,2,…,n}

A_k = {1,2,…,n} pentru fiecare k=1..n

s_i != s_j pentru orice i != j (restricția: componente distincte)

Ce este tehnica căutării cu revenire?

Ideea de bază:

- Soluțiile sunt construite în manieră incrementală prin găsirea succesivă a valorilor potrivite pentru componente (la fiecare etapă se completează o componentă; o soluție în care doar o parte dintre componente sunt completate este denumită soluție parțială)

- Fiecare soluție parțială este evaluată cu scopul de a stabili dacă este validă (promițătoare, viabilă). O soluție parțială validă poate conduce la o soluție finală pe când una invalidă încalcă restricțiile parțiale, însemnând că nu va conduce niciodată la o soluție care să satisfacă toate restricțiile problemei

- Dacă nici una dintre valorile corespunzătoare unei componente nu conduce la o soluție parțială validă atunci se revine la componenta anterioară și se încearcă altă valoare pentru aceasta.

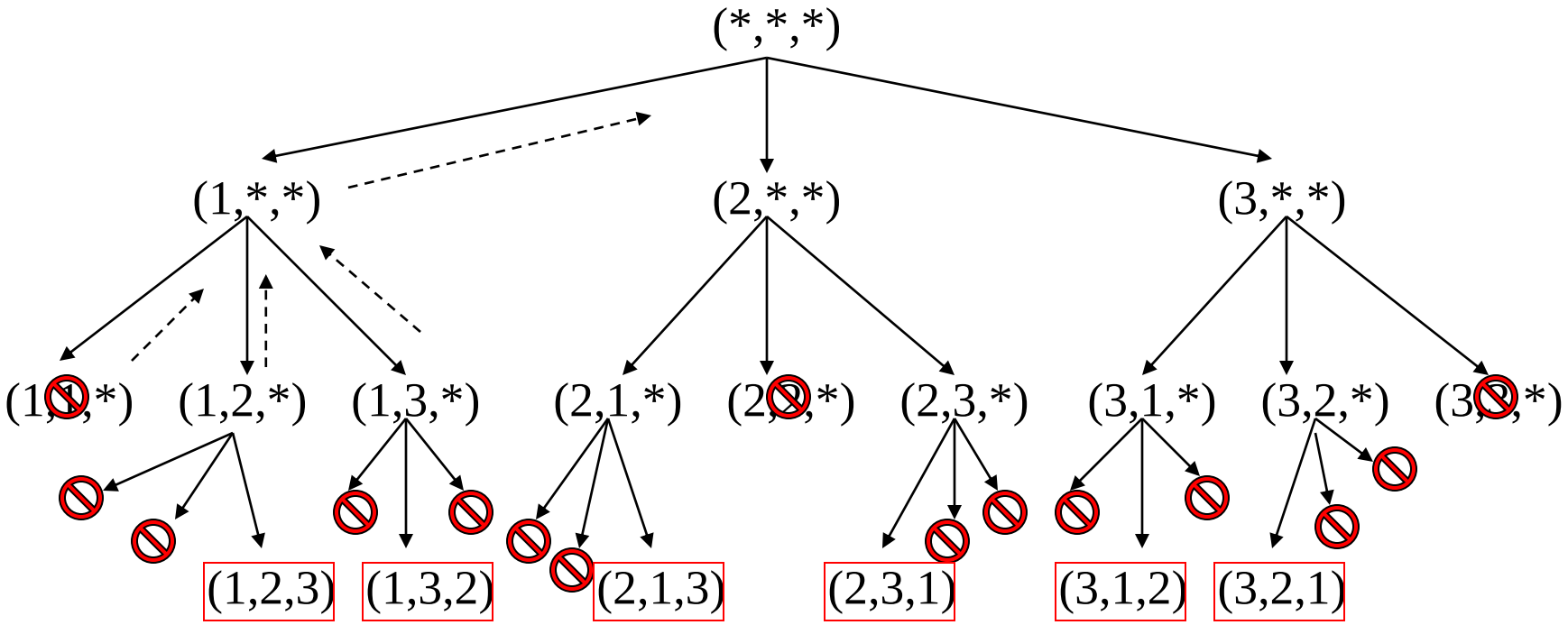
Ce este tehnica căutării cu revenire?

Ideea de bază:

- Principiul tehnicii poate fi vizualizat folosind un arbore de parcurgere care ilustrează modul în care se "vizitează" spațiul soluțiilor:
  - Rădăcina arborelui corespunde stării inițiale (înainte de a începe completarea componentelor)
  - Un nod intern corespunde unei soluții parțiale valide
  - Un nod extern (frunză) corespunde:
    - fie unei soluții parțiale invalide
    - fie unei soluții finale

Ce este tehnica căutării cu revenire?

Exemplu: arborele de parcurgere a spațiului soluțiilor în cazul problemei de generare a permutărilor (n=3)



Obs: modul de vizitare a nodurilor este similar parcurgerii în adâncime a arborelui

Structura generală a algoritmului

Etape în proiectarea algoritmului:

1. Se alege modul de reprezentare a soluțiilor

2. Se identifică spațiul de căutare și se stabilesc mulțimile $A_1,\ldots,A_n$ și ordinea în care acestea sunt parcurse

3. Din restricțiile problemei se deduc condițiile pe care trebuie să le satisfacă soluțiile parțiale pentru a fi valide. Aceste condiții sunt denumite condiții de continuare

4. Se stabilește criteriul în baza căruia se decide dacă o soluție parțială este soluție finală

Structura generală a algoritmului

Exemplu: generarea permutărilor

1. Reprezentarea soluției: fiecare permutare este un vector $s=(s_1,s_2,\ldots s_n)$ care satisface s_i != s_j pentru orice i != j

2. Mulțimile $A_1,\ldots,A_n$: {1,2,…,n}. Fiecare mulțime este parcursă în ordinea naturală a elementelor (de la 1 la n)

3. Condiții de continuare: o soluție parțială $(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ trebuie să satisfacă s_k != s_i pentru orice i<k

4. Criteriu pentru a decide când o soluție parțială este soluție finală: k=n (au fost completate toate cele n componente)

Structura generală a algoritmului

Notații:

$(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ soluție parțială

k – indice în s

$A_k = \{a^k_1,\ldots,a^k_{mk}\}$

$m_k=card(A_k)$

i_k - indice in A_k

Structura generală a algoritmului

Varianta recursivă:

- Presupunem ca $A_1,\ldots,A_n$ și s sunt variabile globale
- Fie k componenta care urmează a fi completată

Algoritmul se apelează prin BT_rec(1) (completarea se începe cu prima componentă)

```
BT_rec(k)
IF "(s1,…,sk-1) este soluție"
    THEN  "se prelucrează soluția"
    ELSE
     FOR j ← 1,mk  DO
         sk ← a^k_j
         IF "(s1,…sk) este validă"
         THEN BT_rec(k+1) ENDIF
     ENDFOR
ENDIF
```

Se încearcă fiecare valoare posibilă pentru comp. k

Se completează următoarea componentă

Aplicație 1: generarea permutărilor

Funcție care verifică dacă o soluție parțială este validă

```
valid(s[1..k])
FOR i ← 1,k-1 DO
   IF s[k]==s[i]
      THEN RETURN FALSE
   ENDIF
ENDFOR
RETURN TRUE
```

Varianta recursiva:

```
perm_rec(k)
IF k==n+1 THEN WRITE s[1..n]
ELSE
   FOR i ← 1,n DO
      s[k] ← i
      IF valid(s[1..k])==True
         THEN perm_rec(k+1)
      ENDIF
   ENDFOR
ENDIF
```

Structura generală a algoritmului

Varianta iterativă

Se caută o valoare pt componenta k care conduce la o soluție parțială validă

Dacă o astfel de valoare există atunci se verifică dacă nu s-a ajuns la o soluție finală

Dacă s-a găsit o soluție atunci aceasta se procesează și se trece la următoarea valoare a aceleiași componente

Dacă nu e soluție finală se trece la următoarea compo-nentă

Dacă nu mai există nici o valoare validă pt componenta curentă se revine la componenta anterioară

```
Backtracking(A1, A2, …, An)
  k ← 1;   ik ← 0  // indice parcurgere Ak
  WHILE k>0 DO
    ik ← ik+1
    v ← False
    WHILE v==False AND ik<=mk DO
      sk ← a^k_ik
      IF "(s1,..sk) e valida" THEN v ← True
      ELSE ik ← ik+1  ENDIF  ENDWHILE
    IF v==True THEN
      IF "(s1,…,sk) este solutie finală"
        THEN "prelucrează soluția"
        ELSE k ← k+1; ik ← 0 ENDIF
    ELSE k ← k-1  ENDIF
  ENDWHILE
```

Aplicație 1: generarea permutărilor

```
Backtracking(A1, A2, …, An)
  k ← 1;   ik ← 0
  WHILE k>0 DO
    ik ← ik+1
    v ← False
    WHILE v=False AND ik<=mk DO
      sk ← a^k_ik
      IF "(s1,..sk) e valida" THEN  v ← True
      ELSE ik ← ik+1  ENDIF  ENDWHILE
   IF v=True THEN
    IF "(s1,…,sk) e solutie finala"
       THEN "prelucreaza solutia"
        ELSE k ← k+1; ik ← 0 ENDIF
   ELSE k ← k-1  ENDIF
   ENDWHILE
```

```
permutari(n)
   k ← 1;   s[k] ← 0
   WHILE k>0 DO
    s[k] ← s[k]+1
    v ← False
    WHILE v==False AND s[k]<=n DO
     IF valid(s[1..k])
          THEN v ← True
          ELSE s[k] ← s[k]+1
     ENDWHILE
    IF v==True THEN
     IF k==n
        THEN WRITE s[1..n]
         ELSE k ← k+1; s[k] ← 0
    ELSE k ← k-1
   ENDIF ENDIF ENDWHILE
```

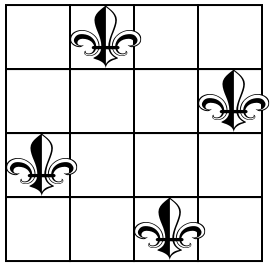
Aplicație 2: problema reginelor

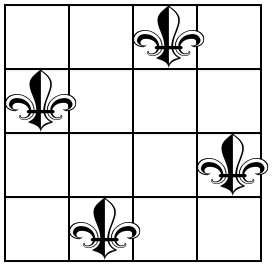
Să se determine toate posibilitățile de a plasa n regine pe o tablă de șah de dimensiune nxn astfel încât acestea să nu se atace reciproc:

- fiecare linie conține exact o regină
- fiecare coloană conține exact o regină
- fiecare diagonală conține cel mult o regină

Obs. Este o problemă clasică propusă de către Max Bezzel (cca 1850) și studiată de către mai mulți matematicieni ai vremii (Gauss, Cantor)

Exemplu: dacă n<=3 nu are soluție; dacă n=4 sunt 2 soluții





Pe măsură ce n crește, numărul soluțiilor crește (pt n=8 sunt 92 soluții)

Aplicație 2: problema reginelor

1. Reprezentarea soluției: vom considera că regina k este întotdeauna plasată pe linia k (reginele sunt identice). Astfel pentru fiecare regină este suficient să se identifice coloana pe care va fi plasată. Soluția va fi astfel reprezentată printr-un tablou $(s_1,\ldots,s_n)$ unde
   s_k = indicele coloanei pe care se plasează regina k

2. Mulțimile $A_1,\ldots,A_n$: {1,2,…,n}. Fiecare mulțime va fi prelucrată în ordinea naturală a elementelor (de la 1 la n)

3. Condiții de continuare: o soluție parțială $(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ trebuie să satisfacă restricțiile problemei (nu mai mult de o regină pe fiecare linie, coloană sau diagonală)

4. Criteriu pentru a decide dacă o soluție parțială este finală:
   k = n (toate reginele au fost plasate)

Aplicație 2: problema reginelor

Condiții de continuare: Fie $(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ o soluție parțială. Aceasta este validă dacă satisface:

- Reginele se află pe linii diferite – condiția este implicit satisfacută datorită modului de reprezentare utilizat (regina i este întotdeauna plasată pe linia i)
- Reginele se afla pe coloane diferite:

  s_i != s_j pentru orice i != j (aceeaşi condiţie ca la generarea permutărilor)

  (este suficient să se verifice că s_k != s_i pentru orice 1<=i<=k-1)

- Reginele se află pe diagonale diferite:

  |i-j| != |s_i – s_j| pentru orice i != j

  (este suficient să se verifice |k-i| != | s_k - s_i| pentru orice 1<=i<=k-1)

Aplicație 2: problema reginelor

Obs:

Două regine i și j se află pe aceeași diagonală dacă

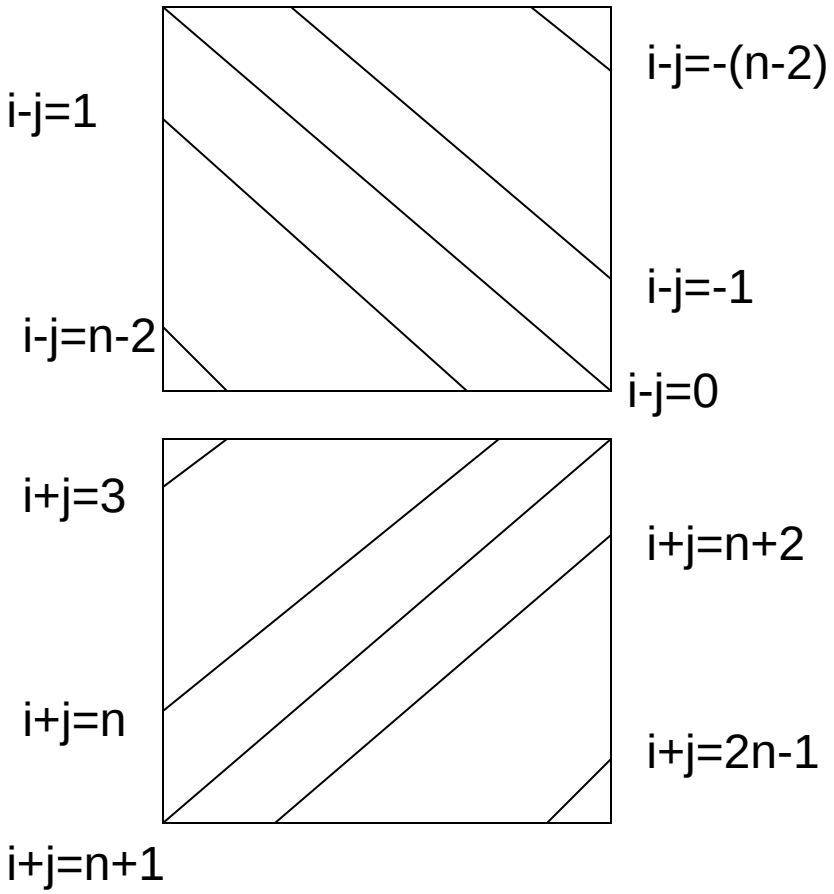
$i-s_i=j-s_j \Leftrightarrow i-j = s_i-s_j$

sau

$i+s_i=j+s_j \Leftrightarrow i-j= s_j-s_i$

Aceasta înseamnă că

$|i-j|=|s_i-s_j|$



Aplicație 2: problema reginelor

```
Validare(s[1..k])
FOR i ← 1,k-1 DO
  IF s[k]==s[i] OR
      |i-k|==|s[i]-s[k]|
   THEN RETURN False
  ENDIF
ENDFOR
RETURN True
```

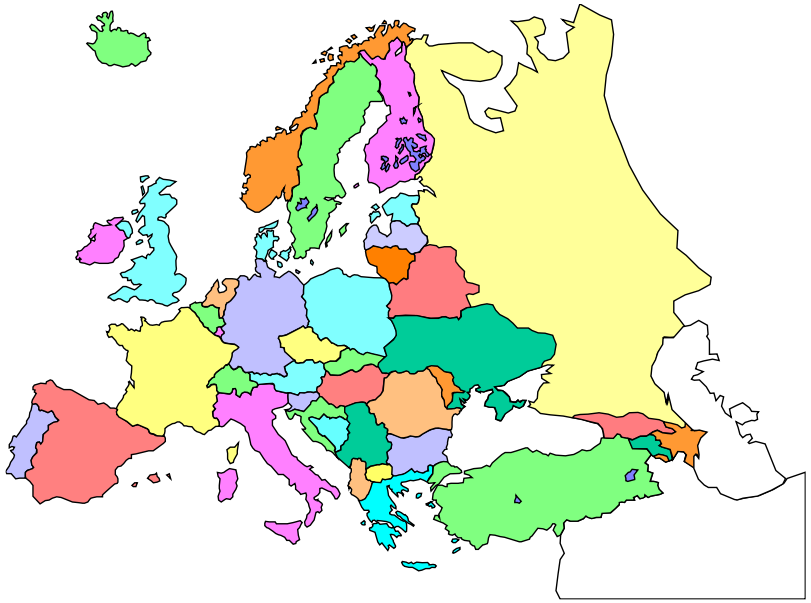
Apel: regine(1)

Algoritm:

```
regine(k)
IF k==n+1 THEN WRITE s[1..n]
ELSE
   FOR i ← 1,n DO
      s[k] ← i
      IF Validare(s[1..k])==True
         THEN regine(k+1)
      ENDIF
   ENDFOR
ENDIF
```

Aplicație 3: colorarea hărților

Problema: Considerăm o hartă geografică care conține n țări. Având la dispoziție 4<=m<n culori să se asigneze o culoare fiecărei țări astfel încât oricare două țări vecine să fie colorate diferit.



Problema matematică: orice hartă poate fi colorată utilizând cel mult 4 culori (rezultat demonstrat in 1976 de către Appel and Haken – unul dintre primele rezultate obținute folosind tehnica demonstrării asistate de calculator)

Aplicație 3: colorarea hărților

Problema: Considerăm o hartă geografică care conține n țări. Având la dispoziție 4<=m<n culori să se asigneze o culoare fiecărei țări astfel încât oricare două țări vecine să fie colorate diferit.

Formalizarea problemei: Considerăm că relația de vecinătate între țări este specificată printr-o matrice N având elementele:

$$N(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{dacă i și j nu sunt țări vecine} \\ 1 & \text{dacă i și j sunt țări vecine} \end{cases}$$

Scopul problemei este să se determine un tablou $S=(s_1,\ldots,s_n)$ cu s_k în $\{1,\ldots,m\}$ specificând culoarea asociată țării k și astfel încât pentru toate perechile (i,j) cu N(i,j)=1 elementele s_i și s_j sunt diferite (s_i != s_j)

Aplicație 3: colorarea hărților

1. Reprezentarea soluției

   $S=(s_1,\ldots,s_n)$ unde s_k culoarea asociată țării k

2. Mulțimile $A_1,\ldots,A_n$: {1,2,…,m}. Fiecare mulțime va fi prelucrată în ordinea naturală a elementelor (de la 1 la m)

3. Condiții de continuare: o soluție parțială $(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ trebuie să satisfacă
   s_i != s_j pentru toate perechile (i,j) pentru care N(i,j)=1

   Pentru fiecare k este suficient să se verifice ca s_k != s_j pentru toate valorile i in {1,2,…,k-1} satisfăcând N(i,k)=1

4. Criteriu pentru a decide dacă o soluție parțială este soluție finală: k = n (toate țările au fost colorate)

Aplicație 3: colorarea hărților

Algoritm recursiv

```
Colorare(k)
IF k==n+1 THEN WRITE s[1..n]
ELSE
   FOR i ← 1,m DO
      s[k] ← i
      IF valid(s[1..k])==True
         THEN Colorare(k+1)
      ENDIF
   ENDFOR
ENDIF
```

Algoritm de validare

```
valid(s[1..k])
FOR i ← 1,k-1 DO
   IF N[i,k]==1 AND s[i]==s[k]
   THEN RETURN False
    ENDIF
ENDFOR
RETURN True
```

Apel: Colorare(1)

Aplicație 4: găsirea traseelor

Considerăm un set de n orașe și o rețea de drumuri care le conectează. Să se determine toate traseele care conectează două orașe date (un traseu nu poate trece de două ori prin acelasi oraș).

Orașe:

1.Arad

2.Brașov

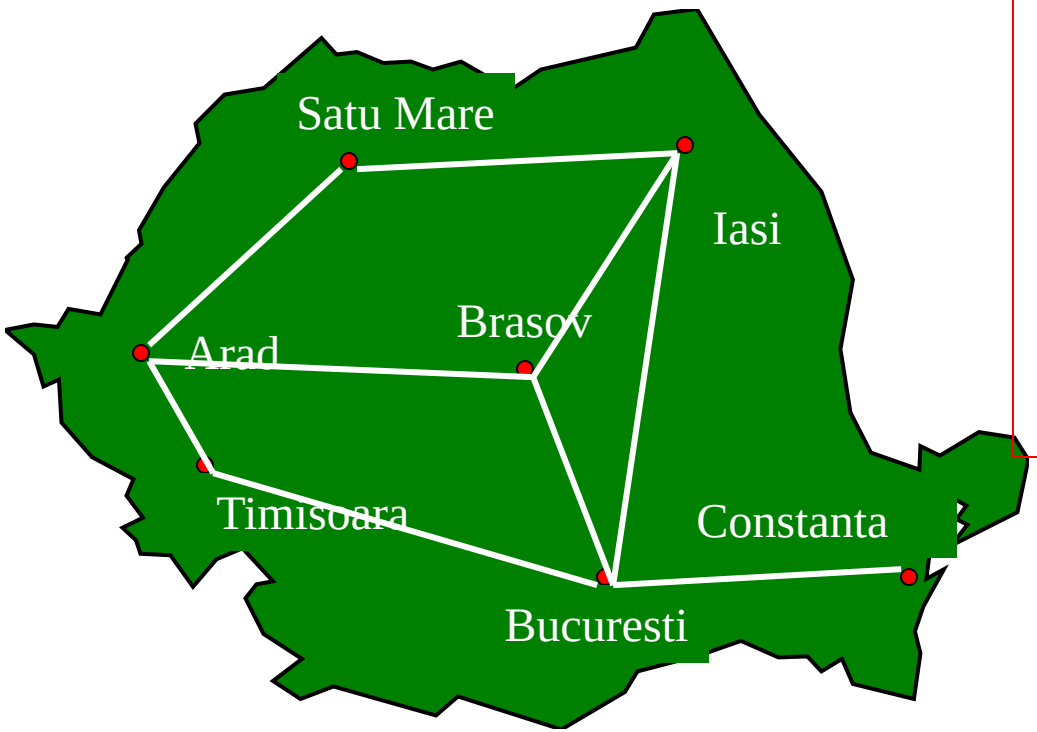
3.București

4.Constanța

5.Iași

6.Satu-Mare

7.Timișoara



Trasee de la Arad la Constanța

1->7->3->4

1->2->3->4

1->6->5->3->4

1->6->5->2->3->4

Aplicație 4: găsirea traseelor

Formalizarea problemei: Rețeaua de șosele este specificată prin matricea C:

$$C(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{nu există drum direct de la orașul i la orașul j} \\ 1 & \text{există drum direct de la orașul i la orașul j} \end{cases}$$

Să se găsească toate traseele $S=(s_1,\ldots,s_m)$ - unde s_k în $\{1,\ldots,n\}$ specifică orașul vizitat la etapa k - astfel încât

s_1 este orașul sursă

s_m este orașul destinație

$s_i != s_j$ pentru orice i != j (printr-un oraș se trece o singură dată)

$C(s_k,s_{k+1})=1$ pentru $1<=k<=m-1$ (există drum direct între orașele vizitate la momente consecutive de timp)

Aplicație 4: găsirea traseelor

1. Reprezentarea soluției

   $S=(s_1,\ldots,s_m)$ cu s_k reprezentând orașul vizitat la etapa k

(m = numărul de etape; m nu este cunoscut de la început)

2. Mulțimile $A_1,\ldots,A_n$: {1,2,…,n}. Fiecare mulțime va fi prelucrată în ordinea naturală a elementelor (de la 1 la n)

3. Condiții de continuare: o soluție parțială $(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ trebuie să satisfacă:

   s_k!=s_j pentru orice j în {1,2,…,k-1} (orașele sunt distincte)

   $C(s_{k-1},s_k)=1$ (se poate trece direct de la s_{k-1} la s_k)

4. Criteriul pentru a decide dacă o soluție parțială este soluție finală:

   s_k = oraș destinație

Aplicație 4: găsirea traseelor

Algoritm recursiv

```
trasee(k)
IF s[k-1]==“oras destinatie”
        THEN WRITE s[1..k-1]
ELSE
   FOR j ← 1,n DO
      s[k] ← j
      IF valid(s[1..k])==True
      THEN trasee(k+1)
      ENDIF
  ENDFOR
ENDIF
```

Algoritm de validare

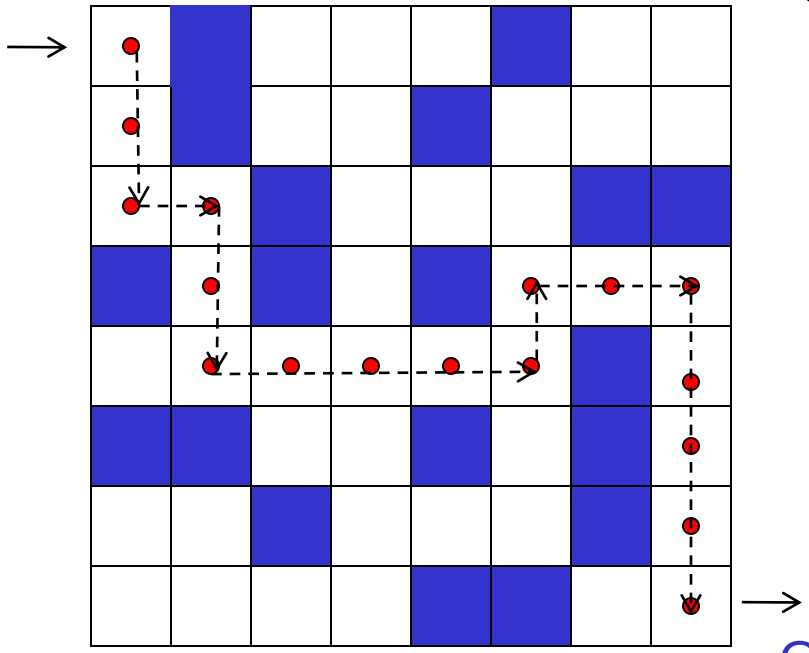
```
valid(s[1..k])
IF C[s[k-1],s[k]]==0 THEN
        RETURN False
ENDIF
FOR i ← 1,k-1 DO
   IF s[i]==s[k]
      THEN RETURN False
   ENDIF
ENDFOR
RETURN True
```

Apel:

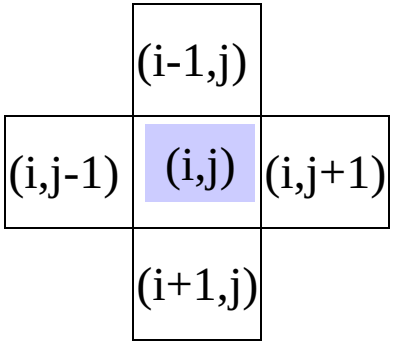
```
s[1] ← oraș sursă
trasee(2)
```

Aplicație 5: problema labirintului

Problema. Se consideră un labirint definit pe o grilă nxn. Să se găsească toate traseele care pornesc din (1,1) și se termină în (nxn)



Obs. Doar celulele libere pot fi vizitate. Dintr-o celulă (i,j) se poate trece în una dintre celulele vecine:



Obs: celulele de pe frontieră au mai puțini vecini

Aplicație 5: problema labirintului

Formalizarea problemei. Labirintul este stocat într-o matrice nxn

$$M(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{celulă liberă} \\ 1 & \text{celulă ocupată} \end{cases}$$

Să se găsească $S=(s_1,\ldots,s_m)$ cu s_k în $\{1,\ldots,n\}x\{1,\ldots,n\}$ indicii corespunzători celulei vizitate la etapa k

- s_1 este celula de start: (1,1)
- s_m este celula destinație: (n,n)
- $s_k != s_q$ pentru orice k !=q (o celulă este vizitată cel mult o dată)
- $M(s_k)=0$ (doar celulele libere pot fi vizitate)
- s_{k-1} și s_k sunt celule vecine

Aplicație 5: problema labirintului

1. Reprezentarea soluției

   $S=(s_1,\ldots,s_n)$ cu s_k reprezentând indicii celulei vizitate la etapa k

2. Mulțimile $A_1,\ldots,A_n$ sunt submulțimi ale mulțimii {1,2,…,n}x{1,2,…,n}. Pentru fiecare celulă (i,j) există un set de 4 vecini: (i,j-1), (i,j+1), (i-1,j), (i+1,j)

3. Condiții de continuare: o soluție parțială $(s_1,s_2,\ldots,s_k)$ trebuie să satisfacă:

   s_k != s_q pentru orice q in {1,2,…,k-1}

   $M(s_k)=0$

   s_{k-1} și s_k sunt celule vecine

4. Condiția ca o soluție parțială $(s_1,\ldots,s_k)$ să fie soluție finală:

   $s_k = (n,n)$

Aplicație 5: problema labirintului

```
labirint(k)
IF s[k-1].i==n and s[k-1].j==n THEN WRITE s[1..k]
ELSE // se încearcă toți vecinii
   s[k].i ← s[k-1].i-1; s[k].j ← s[k-1].j
   IF valid(s[1..k])=True THEN labirint (k+1) ENDIF
   s[k].i ← s[k-1].i+1; s[k].j ← s[k-1].j
   IF valid(s[1..k])=True THEN labirint (k+1) ENDIF
   s[k].i ← s[k-1].i; s[k].j ← s[k-1].j-1
   IF valid(s[1..k])=True THEN labirint (k+1) ENDIF
   s[k].i ← s[k-1].i; s[k].j ← s[k-1].j+1
   IF valid(s[1..k])=True THEN labirint (k+1) ENDIF
ENDIF
```

Obs:

s[k] este o structură cu două câmpuri:

s[k].i reprezintă prima componentă a perechii de indici

s[k].j reprezintă a doua componentă a perechii de indici

Aplicație 5: problema labirintului

```
valid(s[1..k])
IF s[k].i<1 OR s[k].i>n OR s[k].j<1 OR s[k].j>n   // în afara grilei
    THEN RETURN False
ENDIF
IF M[s[k].i,s[k].j]==1 THEN RETURN False ENDIF  // celulă ocupată
FOR q ← 1,k-1 DO    // celulă deja vizitată
     IF s[k].i==s[q].i AND s[k].j==s[q].j THEN RETURN False ENDIF
ENDFOR
RETURN True
```

Apel algoritm labirint:

s[1].i ← 1; s[1].j ← 1

labirint(2)

Sumar

- Tehnica căutării cu revenire se aplică problemelor de satisfacere a restricțiilor (când se dorește generarea tuturor configurațiilor care satisfac anumite proprietăți)
- Parcurgerea sistematică a spațiului soluțiilor garantează corectitudinea
- Bazându-se pe căutare exhaustivă, complexitatea metodei depinde de dimensiunea spațiului soluțiilor (de regulă n!, 2^n in cazul problemelor combinatoriale care necesită construirea unor soluții cu n componente). Poate fi aplicată practic pentru probleme în care n are cel mult ordinul zecilor.
- Poate fi utilizată și pentru rezolvarea problemelor de optimizare cu restricții (de exemplu pentru găsirea unor configurații care minimizează un cost), caz în care soluțiile parțiale sunt considerate viabile dacă nu depășesc costul celei mai bune configurații deja construite (varianta cunoscută sub denumirea branch-and-bound)

Întrebare de final

Care dintre tematicile următoare (una singura) ați prefera să NU fie inclusă în subiectele de examen?

(a) Analiza complexității algoritmilor recursivi

(b) Algoritmi elementari de sortare

(c) Tehnica reducerii

(d) Tehnica divizării (+ sortare prin interclasare, sortare rapida)

(e) Tehnica alegerii local optimale (greedy)

(f) Tehnica programării dinamice

(g) Tehnica căutării cu revenire (backtracking)