Curs 8:

Tehnica divizării (I)

In cursul anterior am văzut…

… cum se analizează eficiența algoritmilor recursivi

- Se scrie relația de recurență corespunzătoare timpului de execuție
- Se rezolvă relația de recurență folosind tehnica substituției directe sau a celei inverse

… cum se pot rezolva probleme folosind tehnica reducerii

- Descreștere prin reducerea dimensiunii problemei cu o constantă / variabilă
- Descreștere prin împărțirea dimensiunii problemei cu un factor constant/variabil

… uneori tehnica reducerii conduce la algoritmi mai eficienți decât cei obținuți aplicând tehnica forței brute

Structura

- Ideea de bază a tehnicii divizării
- Exemple
- Teorema Master pentru estimarea ordinului de complexitate al algoritmilor bazați pe tehnici reducere/divizare
- Sortare prin interclasare

Ideea de bază a tehnicii divizării

- Problema curentă este divizată în mai multe subprobleme de același tip dar de dimensiune mai mică
  - Subproblemele componente trebuie să fie **independente** (fiecare dintre aceste subprobleme va fi rezolvată cel mult o dată)
  - Subproblemele trebuie să aibă dimensiuni apropiate

- Subproblemele sunt rezolvate aplicând aceeași strategie (algoritmii proiectați folosind tehnica divizării pot fi descriși ușor în manieră recursivă)
  - Dacă dimensiunea problemei este mai mică decât o anumită valoare (dimensiune critică) atunci problema este rezolvată direct, altfel este rezolvată aplicând din nou tehnica divizării (de exemplu, recursiv)

- Dacă este necesar, soluțiile obținute prin rezolvarea subproblemelor sunt combinate

Ideea de bază a tehnicii divizării

Divide&conquer (n)

IF $n<=n_c$ THEN r ← <rezolvă P(n) direct pt a obține rezultatul r>

ELSE

    <descompune P(n) in P(n_1), …, P(n_k)>

    FOR i←1,k DO

        r_i ← Divide&conquer(n_i)   // rezolvă subproblema P(n_i)

    ENDFOR

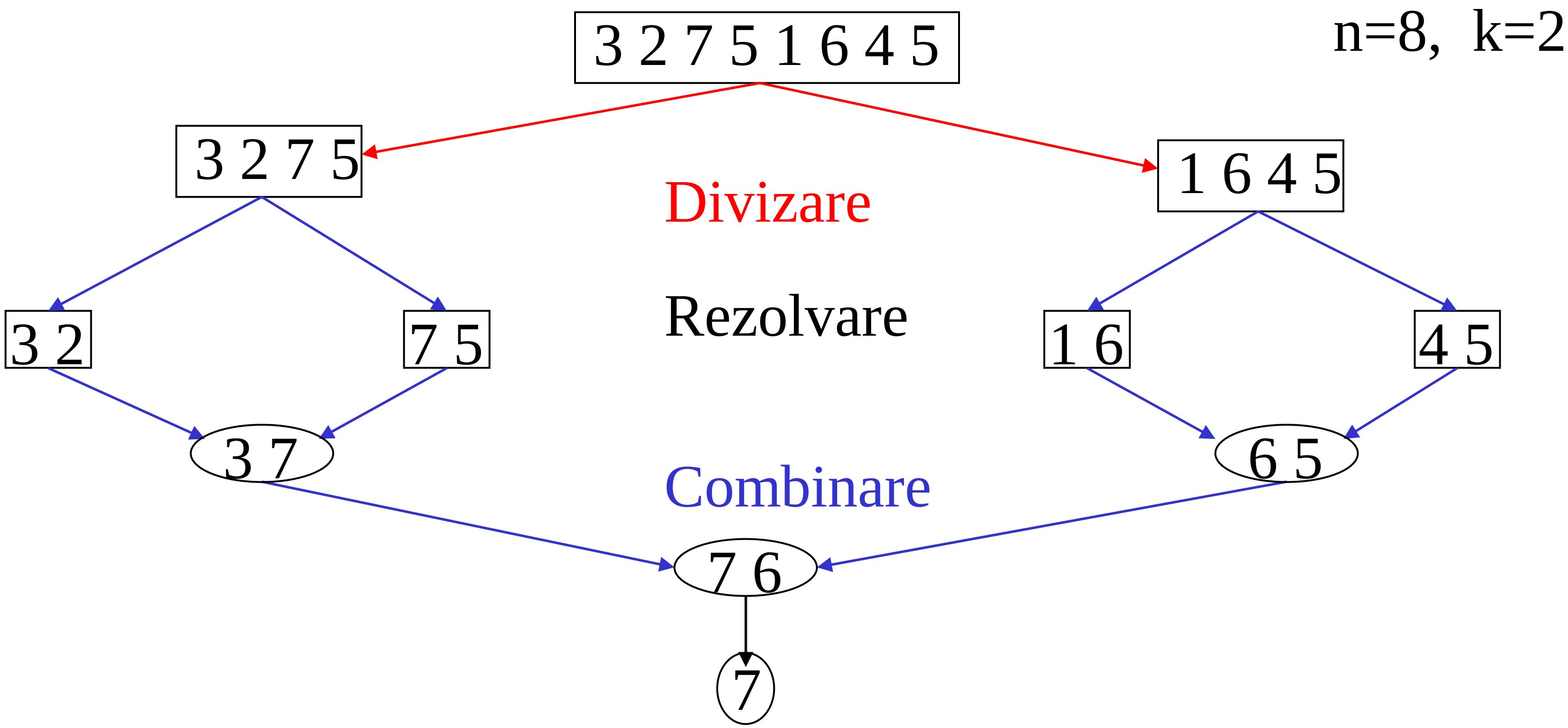
    r ← combinare(r_1, … r_k)

ENDIF

RETURN r

Exemplu 1

Calculul maximului unui tablou x[1..n]



Exemplu 1

Algoritm:

```
maxim(x[s..d])
IF s==d then RETURN x[s]
ELSE
    m ←(s+d) DIV 2   //divizare
    max1 ← maxim(x[s..m])  // rezolvare
    max2 ← maxim(x[m+1..d])
    if max1>max2       // combinare
       THEN RETURN max1
       ELSE RETURN max2
    ENDIF
ENDIF
```

Analiza eficienței

Dimensiunea pb: n

Operație dominantă: comparația

Relație recurentă:

$$T(n)=\begin{cases} 0, & n=1 \\ T([n/2])+T(n-[n/2])+1, & n>1 \end{cases}$$

Exemplu 1

$$T(n)=\begin{cases} 0, & n=1 \\ T([n/2])+T(n-[n/2])+1, & n>1 \end{cases}$$

Caz particular: $n=2^m$

$$T(n)=\begin{cases} 0, & n=1 \\ 2T(n/2)+1, & n>1 \end{cases}$$

Substituție inversă:

$T(2^m) = 2T(2^{m-1})+1$

$T(2^{m-1})=2T(2^{m-2})+1 \quad |* \ 2$

…

$T(2)=2T(1)+1 \quad |* \ 2^{m-1}$

$T(1)=0$

$T(n)=1+\ldots+2^{m-1}=2^m-1=n-1$

Exemplu 1

$$T(n)=\begin{cases} 0, & n=1 \\ T([n/2])+T(n-[n/2])+1, & n>1 \end{cases}$$

Caz particular:

$n=2^m$ => $T(n)=n-1$

Caz general.

(a) Demonstrație prin inducție matematică completă

Verificare. $n=1 \Rightarrow T(n)=0=n-1$

Pasul de inducție.

Presupunem că $T(k)=k-1$ pentru orice $k<n$.

Atunci

$T(n)=[n/2]-1+n-[n/2]-1+1=n-1$

Deci $T(n) = n-1$ =>

T(n) aparține lui $\Theta(n)$.

Exemplu 1

Caz general.

(b) Regula funcțiilor “netede”

Dacă T(n) aparține lui Θ(f(n)) pentru $n=b^m$ și sunt satisfăcute proprietățile:

- T(n) este crescătoare pentru valori mari ale lui n
- f(n) este “netedă” (f(cn) aparține lui Θ(f(n)) pentru orice constantă pozitivă c)

atunci T(n) aparține lui Θ(f(n)) pentru orice n

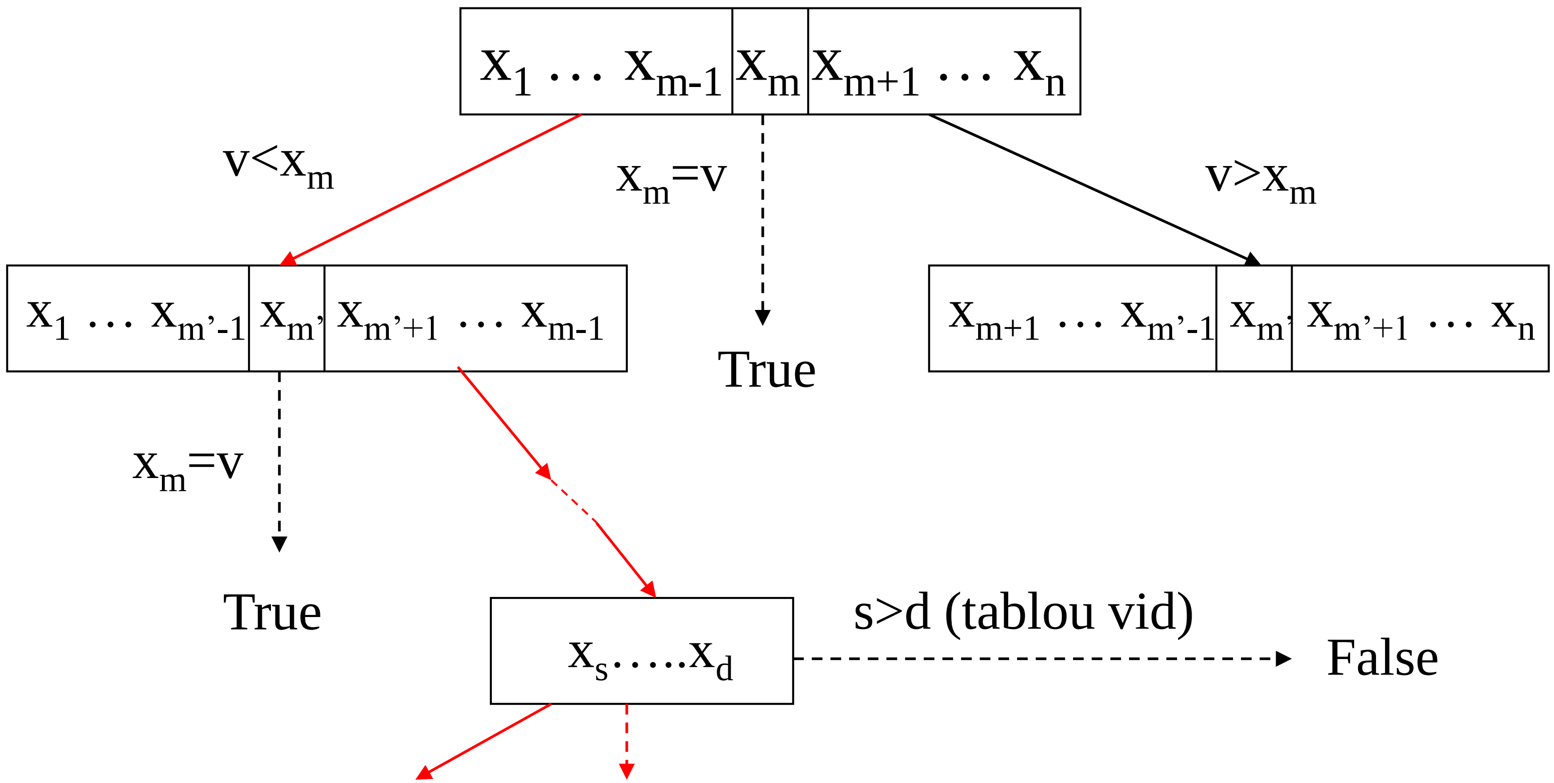
Observații.

- Toate funcțiile care nu cresc foarte rapid (ex: funcția logaritmică și cea polinomială) sunt funcții netede. In schimb funcția exponențială nu are această proprietate: a^{cn} nu este din $\Theta(a^n)$
- Pentru algoritmul “maxim” : T(n) este crescătoare, f(n)=n este netedă, deci T(n) este din Θ(n) pentru orice valoare a lui n

Exemplu 2 – căutare binară

Să se verifice dacă o valoare dată, v, aparține sau nu unui tablou ordonat crescător, x[1..n] (x[i]<=x[i+1], i=1..(n-1))

Idee: se compară v cu elementul din mijloc și se continuă căutarea fie în subtabloul stâng fie în cel drept



Exemplu 2 – căutare binară

Varianta recursivă:

```
cautbin(x[s..d],v)
IF s>d THEN RETURN False
                        // caz particular (tablou vid)
ELSE
   m ←(s+d) DIV 2    // etapa de divizare
   IF v==x[m] THEN RETURN True
   ELSE
      IF v<x[m]   // urmează apel recursiv
         THEN RETURN cautbin(x[s..m-1],v)
         ELSE RETURN cautbin(x[m+1..d],v)
      ENDIF
   ENDIF
ENDIF
```

Apel functie:

cautbin(x[1..n],v)

(la început s=1, d=n)

Observație:

n_c=0

k=2

Doar una dintre subprobleme este rezolvată

Căutarea binară se bazează de fapt pe tehnica reducerii (doar una dintre subprobleme este rezolvată)

Exemplu 2 – căutare binară

Varianta iterativă 1:

```
cautbin1(x[1..n],v)
  s ← 1
  d ← n
  WHILE s<=d DO
     m ←(s+d) DIV 2
     IF v==x[m] THEN RETURN True
     ELSE
          IF v<x[m]
              THEN d ← m-1
               ELSE s ← m+1
          ENDIF / ENDIF/ ENDWHILE
  RETURN False
```

Varianta iterativă 2:

```
cautbin2(x[1..n],v)
  s ← 1
  d ← n
  WHILE s<d DO
     m ←(s+d) DIV 2
     IF v<=x[m]
              THEN d ← m
               ELSE s ← m+1
       ENDIF / ENDWHILE
  IF x[s]==v THEN RETURN True
                 ELSE RETURN  False
  ENDIF
```

Exemplu 2 – căutare binară

Varianta iterativă 2:

```
cautbin2(x[1..n],v)
  s←1
  d ← n
  WHILE s<d DO
    m ←(s+d) DIV 2
    IF v<=x[m]
          THEN d ← m
          ELSE s ← m+1
     ENDIF
  ENDWHILE
  IF x[s]==v THEN RETURN True
              ELSE RETURN  False
  ENDIF
```

Corectitudine

Precondiție: n>=1

Postconditie:

"returnează True dacă v este în x[1..n] și False în caz contrar"

Invariant: "v este în x[1..n] dacă și numai dacă v este în x[s..d]"

(i) s=1, d=n => invariantul e adevărat

(ii) Rămâne adevărat prin execuția corpului ciclului

(iii) când s=d se obține postcondiția

Exemplu 2 – căutare binară

Varianta iterativă 2:

```
cautbin2(x[1..n],v)
  s ← 1
  d ← n
  WHILE s<d DO
    m ←(s+d) DIV 2
    IF v<=x[m]
             THEN d ← m
              ELSE s ← m+1
     ENDIF
  ENDWHILE
  IF x[s]==v THEN RETURN True
                  ELSE RETURN  False
  ENDIF
```

Eficiența:

Caz defavorabil: x nu conține pe v

Caz particular: $n=2^m$

$$T(n)=\begin{cases} 1 & n=1 \\ T(n/2)+1 & n>1 \end{cases}$$

$T(n)=T(n/2)+1$

$T(n/2)=T(n/4)+1$

…

$T(2)=T(1)+1$

$T(1)=1$

$T(n)=\log(n)+1$ $\quad O(\log(n))$

Exemplu 2 – căutare binară

Observație:

- Aplicând regula funcțiilor “netede” rezultă că algoritmul cautbin2 (similar se poate arăta pentru celelalte variante) are ordinul de complexitate O(log n) pentru orice valoare a lui n

- Analiza eficienței algoritmilor proiectați utilizând tehnicile de reducere și divizare poate fi ușurată prin folosirea teoremei master

Teorema “master”

Considerăm următoarea relație de recurență:

$$T(n)=\begin{cases} T_0 & n<=n_c \\ kT(n/m)+T_{DC}(n) & n>n_c \end{cases}$$

Dacă $T_{DC}(n)$ (timpul necesar etapelor de divizare și combinare) aparține lui $\Theta(n^d)$ (d>=0) atunci

$$T(n) \quad \text{aparține lui} \quad \begin{cases} \Theta(n^d) & \text{dacă } k<m^d \\ \Theta(n^d \log(n)) & \text{dacă } k=m^d \\ \Theta(n^{\log(k)/\log(m)}) & \text{dacă } k>m^d \end{cases}$$

Obs:

1. m reprezintă nr de subprobleme în care se descompune problema inițială iar k e nr de subprobleme care se rezolvă efectiv
2. un rezultat similar există pentru clasele O și Ω

Teorema “master”

Utilitate:

- Poate fi aplicată în analiza algoritmilor bazați pe tehnica reducerii sau a divizării

- Evită rezolvarea explicită a relației de recurență corespunzătoare timpului de execuție

- In multe aplicații practice etapele de divizare (reducere) și de combinare sunt de complexitate polinomială (deci teorema Master poate fi aplicată)
- Spre deosebire de variantele de rezolvare explicită a relației de recurență, teorema Master furnizează doar ordinul de complexitate nu și constantele ce intervin în estimarea timpului de execuție

Teorema “master”

Exemplu1 : calcul maxim:

k=2 (pb inițială se divide în două subprobleme, iar ambele subprobleme trebuie rezolvate)

m=2 (dimensiunea fiecărei subprobleme este aproximativ n/2)

d=0 (etapele de divizare și de combinare a rezultatelor au cost constant)

Intrucât $k>m^d$ prin aplicarea celui de al treilea caz al teoremei “master” rezultă că T(n) aparține lui $\Theta(n^{\log(k)/\log(m)}) = \Theta(n)$

Teorema “master”

Exemplu 2: căutare binară

$k=1$ (doar una dintre subprobleme trebuie rezolvată)

$m=2$ (dimensiunea subproblemei este n/2)

$d=0$ (etapele de divizare și combinare au cost constant)

Intrucât $k=m^d$ prin aplicarea celui de al doilea caz al teoremei “master” se obține că T(n) aparține lui $O(n^d \log(n))= O(\log(n))$

Sortare eficientă

- Metodele elementare de sortare aparțin lui $O(n^2)$
- Idee de eficientizare a procesului de sortare:
  - Se împarte secvența inițială în două subsecvențe
  - Se sortează fiecare subsecvență
  - Se combină subsecvențele sortate

Sortare prin interclasare (Merge sort)

Sortare rapidă (Quicksort)

Divizare	In fctie de poziție	In fcție de valoare
Combinare	Interclasare	Concatenare

Sortare prin interclasare

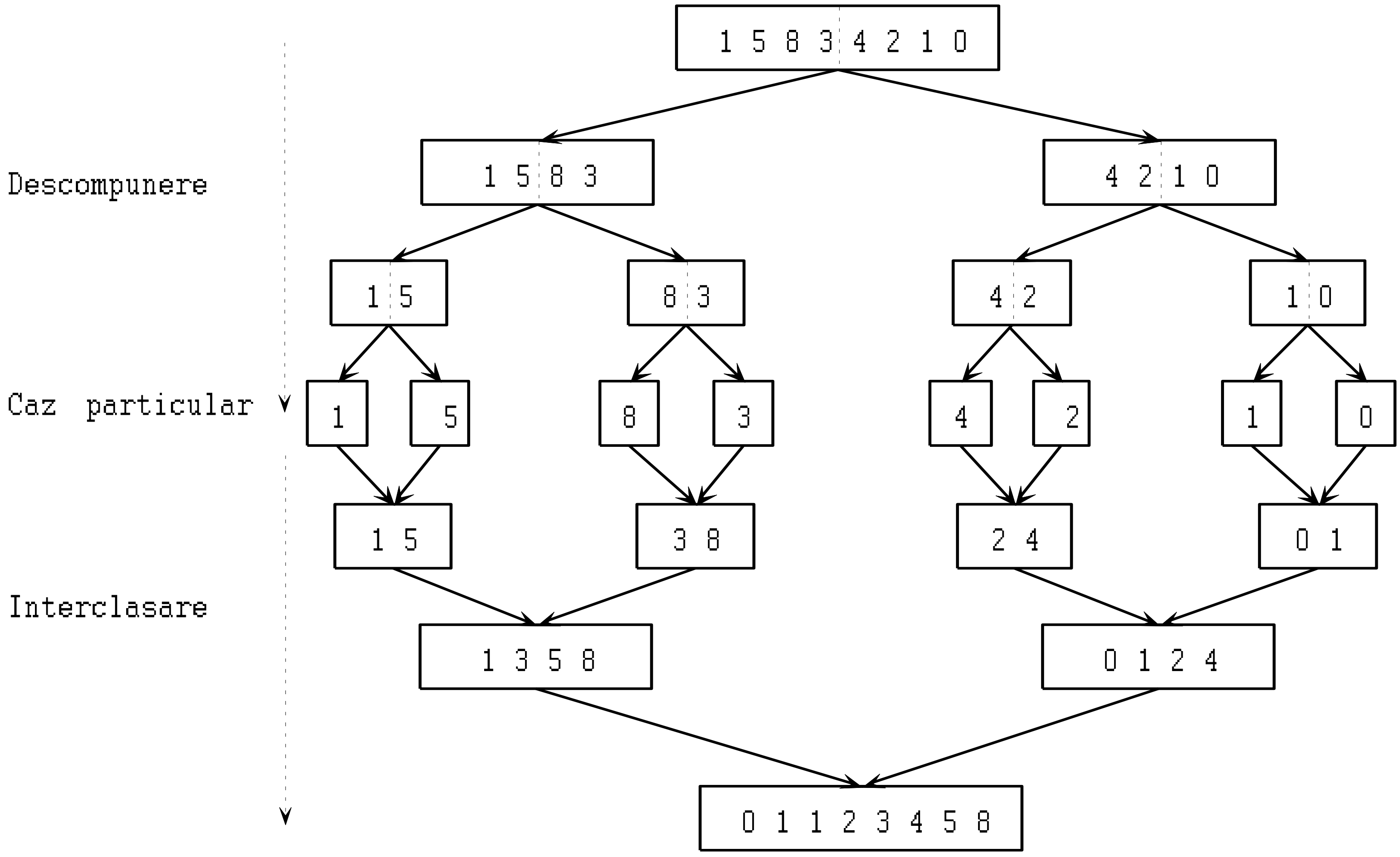
Idee de bază:

- Imparte x[1..n] în două subtablouri x[1..[n/2]] and x[[n/2]+1..n]
- Sortează fiecare subtablou
- Interclasează elementele subtablourilor x[1..[n/2]] si x[[n/2]+1..n] și construiește tabloul sortat t[1..n]. Transferă conținutul tabloului temporar t în x[1..n].

Observații:

- Valoarea critică: 1 (un tablou conținând un singur element este implicit sortat)
- Valoarea critică poate fi mai mare decât 1 (de exemplu, 10) iar sortarea subtablourilor cu un număr de elemente mai mic decât valoarea critică se poate realiza cu unul dintre alg. elementari (ex: sortare prin inserție)

Sortare prin interclasare



Sortare prin interclasare

Algoritm:

```
sortare(x[s..d])
IF s<d THEN
   m ←(s+d) DIV 2                              //divizare
   x[s..m] ← sortare(x[s..m])                  //rezolvare
   x[m+1..d] ← sortare(x[m+1..d])
   x[s..d] ← interclasare(x[s..m],x[m+1..d])   //combinare
ENDIF
RETURN x[s..d]
```

Obs:

algoritmul se apelează prin sortare(x[1..n])

Sortare prin interclasare

```
interclasare (x[s..m],x[m+1..d])
  i ← s; j ← m+1;
  k ← 0; // indice în t
// se parcurg subtablourile în paralel
   și la fiecare pas se transferă cel
   mai mic element
  WHILE i<=m AND j<=d DO
    k ← k+1
    IF x[i]<=x[j]
       THEN
              t[k]  ← x[i]
              i ← i+1
       ELSE
              t[k] ← x[j]
              j ← j+1
    ENDIF
  ENDWHILE
```

```
// se transferă  eventualele elemente
   rămase în primul subtablou
WHILE i<=m DO
    k ← k+1
    t[k] ← x[i]
    i ← i+1
ENDWHILE

// se transferă  eventualele elemente
   rămase în al doilea subtablou
WHILE j<=d DO
    k ← k+1
    t[k] ← x[j]
    j ← j+1
ENDWHILE
RETURN t[1..k]
```

Sortare prin interclasare

- Interclasarea este o prelucrare ce poate fi utilizată pentru construirea unui tablou sortat pornind de la oricare alte două tablouri sortate (a[1..p], b[1..q])
- Varianta de interclasare bazată pe valori santinelă:

  Se adaugă două valori mai mari decât elementele tablourilor a[p+1]= ∞, b[q+1]= ∞

```
interclasare(a[1..p],b[1..q])
a[p+1] ← ∞;  b[q+1] ← ∞
  i ← 1;  j ← 1;
  FOR k ← 1,p+q DO
    IF a[i]<=b[j]
        THEN  c[k] ← a[i]
                  i ← i+1
         ELSE c[k] ← b[j]
                  j ← j+1
    ENDIF
  ENDFOR
  RETURN c[1..p+q]
```

Analiza eficienței interclasării

Operație dominantă: comparația

T(p,q)=p+q

In algoritmul de sortare (p=[n/2], q=n-[n/2]):

T(n)<=[n/2]+n-[n/2]=n

Deci T(n) aparține lui O(n)

(etapa de interclasare este de complexitate liniară)

Sortare prin interclasare

Analiza sortării prin interclasare:

$$T(n)=\begin{cases} 0 & n=1 \\ T([n/2])+T(n-[n/2])+T_M(n) & n>1 \end{cases}$$

Intrucât k=2, m=2, d=1 (T_M(n) aparține lui O(n)) rezultă (folosind al doilea caz din teorema "master") că T(n) aparține lui O(n log(n)). De fapt T(n) aparține lui Θ(nlgn)

Observații.

1. Principalul dezavantaj al sortării prin interclasare este faptul că utilizează un tablou adițional de dimensiunea tabloului de sortat
2. Dacă în pasul de interclasare se folosește inegalitate de tip <= atunci sortarea prin interclasare este stabilă

Cursul următor va fi despre…

… sortare rapidă

… și alte aplicații ale tehnicii divizării

Intrebare de final

Se consideră algoritmul:

```
alg(x[s..d])
if s>d then return 1
else if s==d then return x[s]
      else
        m ← (s+d)/2
        rez1 ← alg(x[s..m])
        rez2 ← alg(x[m+1..d])
        return rez1*rez2
      endif
endif
```

Care dintre răspunsuri este adevărat în cazul în care algoritmul se apelează pentru un tablou x[1..n] (n>1) iar la analiza complexității se consideră că operația dominantă este adunarea:

a) Algoritmul returnează x[1]*x[n] și are ordinul de complexitate $\Theta(1)$

b) Algoritmul returnează produsul tuturor elementelor din x și are ordinul de complexitate $\Theta(\log n)$

c) Algoritmul returnează produsul tuturor elementelor din x și are ordinul de complexitate $\Theta(n)$

d) Algoritmul returnează 1 și are ordinul de complexitate $\Theta(1)$