Calcul Diferenţial şi Integral - Curs 1

Şiruri şi serii de numere reale.

Eva Kaslik, Raluca Mureşan

Şiruri de numere reale - definiţie

Un şir de numere reale este o funcţie $n \mapsto a_n$ cu domeniul de definiţie $\mathbb{N}$ şi codomeniul (imaginea) $\mathbb{R}$.

Notaţii uzuale:

- $a(n)$, pentru $n = 1, 2, 3, ...$
- a_n, pentru $n = 1, 2, 3, ...$
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sau $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$

Exemple

- Şiruri definite prin diverse tipuri de notaţii:

(a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\quad a_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\quad \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{9}, -\frac{4}{27}, \frac{5}{81}, \ldots, \frac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right\}$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\quad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos\frac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad a_n = \cos\frac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\quad \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\frac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

Exerciţiul 1: Găsiţi formula termenului general a_n al şirului:

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \ldots\right\}$$

Exemple

- Şiruri definite prin diverse tipuri de notaţii:

(a) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, \ldots\right\}$

(b) $\left\{\dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}\right\}$ $\quad a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}$ $\quad \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{9}, -\dfrac{4}{27}, \dfrac{5}{81}, \ldots, \dfrac{(-1)^n(n+1)}{3^n}, \ldots\right.$

(c) $\left\{\sqrt{n-3}\right\}_{n=3}^{\infty}$ $\quad a_n = \sqrt{n-3},\ n \geqslant 3$ $\quad \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-3}, \ldots\right\}$

(d) $\left\{\cos\dfrac{n\pi}{6}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $\quad a_n = \cos\dfrac{n\pi}{6},\ n \geqslant 0$ $\quad \left\{1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, \ldots, \cos\dfrac{n\pi}{6}, \ldots\right\}$

Exerciţiul 1: Găsiţi formula termenului general a_n al şirului:

$$\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \ldots\right\} \quad \longrightarrow \quad a_n = (-1)^{n+1}\frac{n+2}{5^n}$$

Exemple

- Şiruri definite recursiv:

Şirul Fibonacci: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall\, n \geq 2, \quad F_0 = F_1 = 1.$

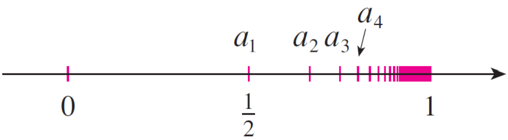
Acest şir a fost utilizat de matematicianul italian Leonardo Fibonacci (1170-1240) pentru a rezolva o problemă legată de dinamica populaţiei de iepuri.

- Şiruri care nu se pot defini prin relaţii simple:

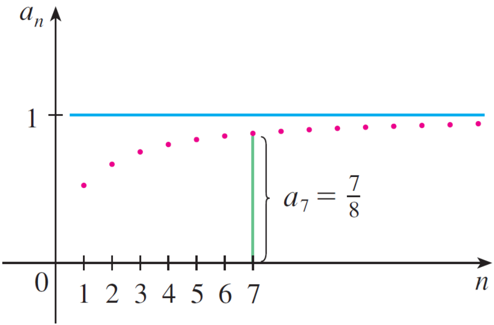
$\{p_n\}$ - populaţia României, în data de 1 ianuarie a anului n

Vizualizarea şirurilor - exemple: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

- reprezentarea termenilor de-a lungul unei axe:



- reprezentarea graficului termenilor şirului:



Şiruri monotone. Şiruri mărginite

Un şir (a_n) este crescător dacă $a_n \leq a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Un şir (a_n) este descrescător dacă $a_n \geq a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Un şir crescător sau descrescător se numeşte monoton.

Un şir (a_n) este mărginit dacă există un număr $M > 0$ astfel încât

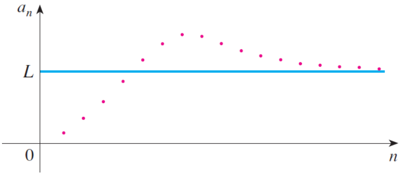
$$|a_n| \leq M, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

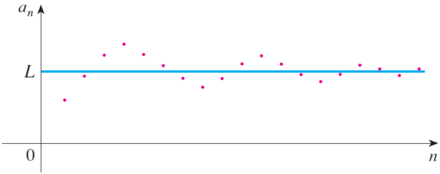
Convergenţă

Spunem că un şir (a_n) converge la limita L, adică

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

dacă a_n ajunge oricât de aproape de valoarea reală L pentru n sufficient de mare.



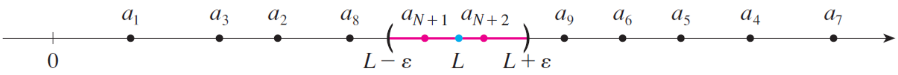


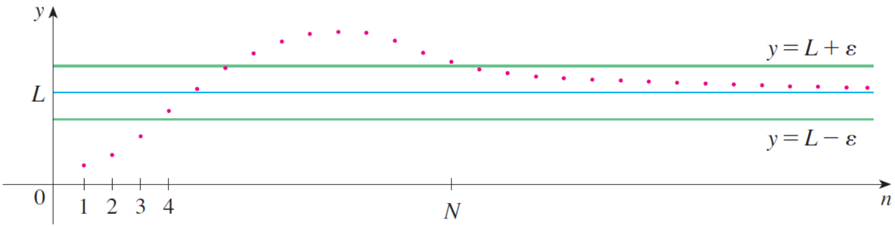
Convergenţa

Definiţie

Un şir (a_n) *converge la numărul real* L *(sau are limita* L*) dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \forall\, n \geq N.$$





Proprietăţi

- Dacă şirul (a_n) converge la L, atunci orice subşir (a_{n_k}) al şirului (a_n) converge la L.
- Nu orice şir are limită (ex. $a_n = (-1)^n$).
- Dacă limita unui şir (a_n) există, atunci ea este unică.
- Dacă şirul (a_n) converge la L, atunci el este mărginit.
- Convergenţa şirurilor monotone şi mărginite:
  Orice şir monoton şi mărginit este convergent (la un număr real).
- Teorema Bolzano-Weierstrass:
  Orice şir mărginit (a_n) conţine cel puţin un subşir convergent.

Limite infinite

Limita şirului (a_n) este egală cu $+\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există N_M astfel încât

$$a_n > M, \quad \forall\, n > N_M.$$

Limita şirului (a_n) este egală cu $-\infty$ dacă pentru orice $M > 0$ există N_M astfel încât

$$a_n < -M, \quad \forall\, n > N_M.$$

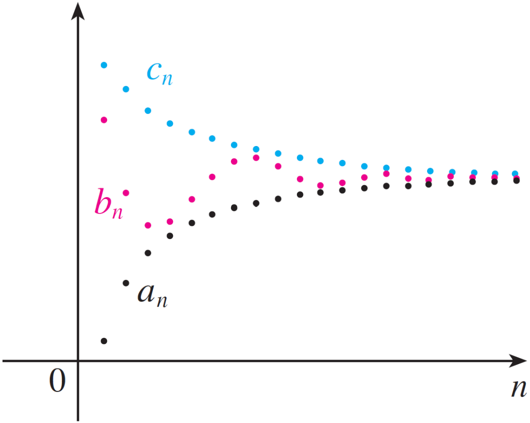
Reguli de calcul pentru limite de şiruri:

Dacă limitele $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ există $(A, B \in \mathbb{R})$ atunci:

- (regula înmulţirii cu scalar) $\lim_{n\to\infty} ca_n = cA$ pentru orice $c \in \mathbb{R}$.
- (regula sumei) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$
- (regula produsului) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$
- (regula raportului) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ (presupunând că $b_n \neq 0$ şi $B \neq 0$)

Regula cleştelui

Dacă $a_n \leq b_n \leq c_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.



Regula lui L′Hospital pentru şiruri

Fie $a_n = f(n)$ şi $b_n = g(n) \neq 0$ unde f şi g sunt funcţii derivabile satisfăcând una din următoarele proprietăţi:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ sau
b. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$.

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(atunci când limita din partea dreaptă există).

Leme importante

Lemă (Lema Stolz-Cesaro)

Dacă (a_n) *şi* (b_n) *sunt două şiruri,* (b_n) *este pozitiv, strict crescător şi nemărginit, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

(în cazul în care limita din partea dreaptă există).

Lemă (Lema Cauchy-d′Alembert)

Dacă (a_n) *este un şir de numere reale pozitive atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

(în cazul în care limita din partea dreaptă există).

Mulţimea punctelor limită

Mulţimea punctelor limită $\mathcal{L}(a_n)$ a unui şir (a_n) este muţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care există un subşir (a_{n_k}) al şirului (a_n) a.î.

$$\lim_{n_k \to \infty} a_{n_k} = x.$$

• Şirul (a_n) este convergent şi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L$ dacă şi numai dacă $\mathcal{L}(a_n) = \{L\}$.

Limita superioară a şirului (a_n) este $\sup \mathcal{L}(a_n)$. Notăm $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ sau $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n$.

Limita inferioară a şirului (a_n) este $\inf \mathcal{L}(a_n)$. Notăm $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$ sau $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n$.

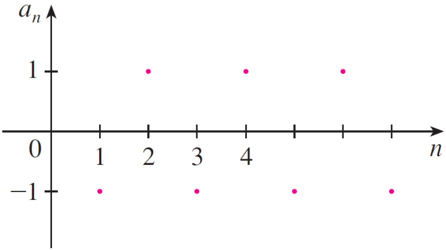
Mulţimea punctelor limită

Exemplu. Fie $a_n = (-1)^n$. În acest caz,

$$a_{2k} = 1 \quad \text{şi} \quad a_{2k+1} = -1$$

and

$$\mathcal{L}(a_n) = \{-1, 1\}.$$



Serii de numere reale: Introducere

Care este însemnătatea reprezentării zecimale a unui număr real?

Exemplu:

$$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\dots$$

Convenţie: orice număr real se poate scrie ca şi o serie infinită:

De exemplu:

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \frac{3}{10^9} + \frac{5}{10^{10}} + \dots$$

Definiţie: serii infinite

O serie infinită este o expresie de forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

unde (a_n) este un şir de numere reale.

Numărul real a_n se numeşte termenul de rang n al seriei.

Are sens să vorbim despre suma unei serii infinite de numere reale?

Exemple

1. Seria următoare nu are o sumă finită

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

2. Pentru seria următoare, obţinem o sumă finită:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

n	Sum of first n terms
1	0.50000000
2	0.75000000
3	0.87500000
4	0.93750000
5	0.96875000
6	0.98437500
7	0.99218750
10	0.99902344
15	0.99996948
20	0.99999905
25	0.99999997

Definiţii: sume parţiale, convergenţă, divergenţă

Suma parţială de ordinul *n* s_n a seriei $\sum a_n$ este suma primilor n termeni:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Dacă (s_n) este un şir convergent, atunci seria $\sum a_n$ se numeşte convergentă.

Dacă (s_n) este un şir divergent atunci seria $\sum a_n$ se numeşte divergentă.

Suma unei serii este limita şirului sumelor parţiale:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Serii geometrice

Seria geometrică cu raţia r este

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots \quad (a \neq 0)$$

Dacă $r = 1$ atunci $s_n = a + a + \ldots + a = na \to \pm\infty$, deci seria este divergentă.

Dacă $r \neq 1$ atunci

$$s_n = a + ar + \ldots ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \frac{a}{1-r} & \text{, dacă } |r| < 1 \\ \text{divergentă} & \text{dacă } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ este convergentă d.n.d. $|r| < 1$.

În acest caz, suma ei este $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

Dacă $|r| \geq 1$, atunci seria geometrică este divergentă.

Serii telescopice

Exemplu: Arătaţi că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă.

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \end{aligned}$$

În concluzie, seria este convergentă, şi suma ei este 1.

Limita termenului general

Teoremă (Limita termenului general)

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă, atunci* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Dem.: Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, atunci şi şirul sumelor parţiale* (s_n) *converge.*

$$\textit{Deci: } a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Reciproca NU este adevărată (ex. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e divergentă)

Corolar (Test pentru divergenţă)

Dacă $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *sau limita nu există, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Operaţii cu serii numerice

Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ (cu $c \in \mathbb{R}$) sunt convergente şi

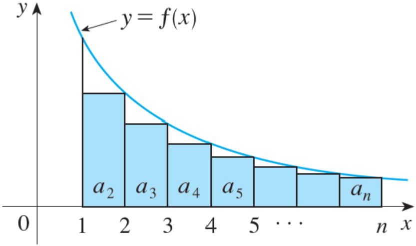
1. $$\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

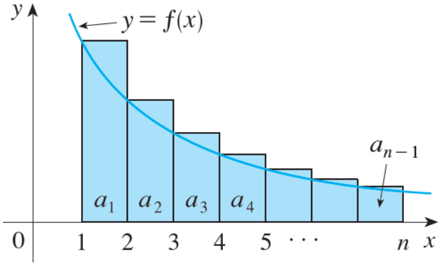
Criteriul integralei

Fie $f : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ o funcţie continuă şi descrescătoare şi $a_n = f(n)$.

Considerăm şirul (j_n) definit prin $j_n = \displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$.

Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă d.n.d. şirul (j_n) este convergent.





Serii armonice

Seria p-armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă d.n.d. $p > 1$.

- Dacă $p \leq 0$, termenul $a_n = n^{-p}$ nu tinde la 0, deci seria este divergentă.
- Dacă $p > 0$ aplicăm criteriul integralei:

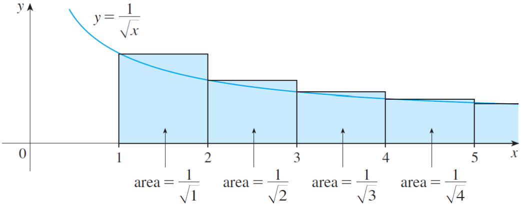
pentru $p \neq 1$: $j_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \int_1^n x^{-p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{x=1}^{x=n} = \frac{n^{1-p} - 1}{1-p}$

pentru $p = 1$: $j_n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln x|_{x=1}^{x=n} = \ln n.$

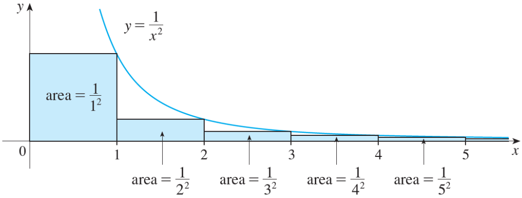
Deci: $\lim_{n\to\infty} j_n = \begin{cases} \infty & \text{, dacă } p \leq 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e divergentă} \\ \frac{1}{p-1} & \text{, dacă } p > 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e convergentă} \end{cases}$

Serii armonice - Exemple

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă pentru că $p = \frac{1}{2} < 1$



$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă pentru că $p = 2 > 1$



Criteriile comparaţiei

Criteriul comparaţiei I. Dacă $0 \leq a_n \leq b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci:

1. Dacă $\sum b_n$ este convergentă atunci $\sum a_n$ este convergentă.
2. Dacă $\sum a_n$ este divergentă atunci $\sum b_n$ este divergentă.

Criteriul comparaţiei II.

Fie $\sum a_n$ şi $\sum b_n$ două serii cu termenii pozitivi astfel încât

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty).$$

Atunci, $\sum a_n$ este convergentă d.n.d. $\sum b_n$ este convergentă.

Convergenţă absolută

Ce se întâmplă dacă unii termeni ai seriei sunt negativi?

O serie $\sum a_n$ este absolut convergentă dacă $\sum |a_n|$ este convergentă.

convergenţa absolută $\Rightarrow$ convergenţa

Reciproca nu este adevărată!

Exemplu: Seria $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Seria $\sum a_n$ se numeşte condiţional convergentă dacă este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

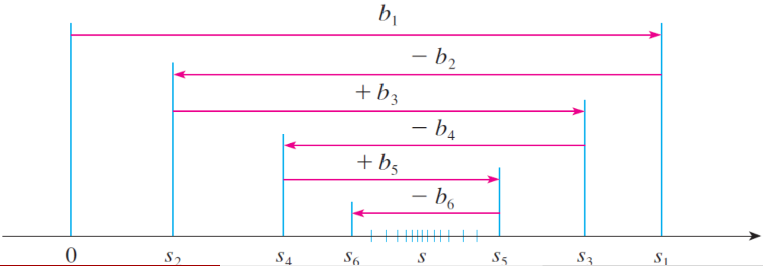
Serii alternante

Criteriul lui Leibniz (al seriilor alternante).

Dacă şirul (b_n) este descrescător şi $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ atunci seria alternantă

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \dots$$

este convergentă.



Criteriul raportului şi criteriul rădăcinii

Criteriul raportului:

Dacă limita $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ există sau este infinită, atunci

1. Seria $\sum a_n$ este absolut convergentă dacă $L < 1$.
2. Seria $\sum a_n$ este divergentă dacă $L > 1$.
3. Dacă $L = 1$, atunci criteriul este neconcludent.

Criteriul rădăcinii:

Dacă limita $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ există sau este infinită, atunci

1. Seria $\sum a_n$ este absolut convergentă dacă $L < 1$.
2. Seria $\sum a_n$ este divergentă dacă $L > 1$.
3. Dacă $L = 1$, atunci criteriul este neconcludent.