3 Inducţie matematică. Principii de numărare. Combinatorică

3.1 Inducţie matematică

P 1. Un şir de pietre de domino este aşezat cu pietrele stând pe muchia cea mai îngustă, una lângă alta, astfel încât dacă o piatră se răstoarnă, ea o va doborî şi pe piatra următoare. Arătaţi că dacă doborâm prima piatră, atunci tot şirul se va răsturna.

P 2. În plan sunt duse n drepte, care împart planul în regiuni. Arătaţi că aceste regiuni se pot colora cu două culori, astfel încât oricare două regiuni învecinate(de-a lungul unei drepte, semidrepte sau segment) să aibă culori diferite.

P 3. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor .$$

P 4. Fie $p \in \mathbb{P}$ un număr prim. Arătaţi că $p|(n^p - n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

P 5. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} .$$

P 6. Să se determine şirul $(a_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

P 7. Arătaţi că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ sunt numere reale astfel încât ecuaţia $r^2 - ar - b = 0$ are două rădăcini distincte r_1 şi r_2, iar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ un şir care verifică relaţia de recurenţă

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \quad , (\forall) n \in \mathbb{N},$$

atunci există constante c_1, c_2 astfel încât

$$x_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n \quad , (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

P 8. Arătaţi că $4^n - 2^n \geq 60n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

P 9. Determinaţi o formulă de calcul pentru suma

$$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3.$$

P 10. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, cu $n \geq 4$ şi $n \neq 5$, un pătrat se poate împărţi în n pătrate.

P 11. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^*$. Arătaţi că

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \end{vmatrix} = -a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) .$$

P 12. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar $a_1, a_2, \ldots, a_n \in [0, \infty)$. Arătaţi că

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} .$$

P 13. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, există un poligon cu n laturi, nu toate egale, cu proprietatea că suma distanţelor oricărui punct interior la laturi este aceeaşi.

P 14. Fie $M \subseteq (0,1) \cap \mathbb{Q}$ o mulţime cu proprietatea că
i) $\frac{1}{2} \in M$;
ii) Dacă $x \in M$, atunci $\frac{x}{x+1}, \frac{1}{x+1} \in M$. Arătaţi că $M = (0,1) \cap \mathbb{Q}$.

3.2 Principii de numărare

P 15. Determinaţi numărul numerelor prime mai mici decât a) 100; b) 400.

P 16. O funcţie $m : T \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definită pe o mulţime nevidă T se numeşte funcţie măsură. Orice funcţie măsură se poate extinde la $\mathcal{P}(T)$ prin

$$m : \mathcal{P}(T) \longrightarrow \mathbb{R}_+ , \quad m(A) = \sum_{x\in A} m(x), \ (\forall) A \subseteq T.$$

Arătaţi că
a) dacă $A, B \in \mathcal{P}(T)$ sunt mulţimi disjuncte, atunci

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

b) $m(\overline{A}) = m(T) - m(A)$.
c) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$.
d)

$$m\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|-1} m\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

e)

$$m\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|-1} m\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right).$$

f)(formula lui Sylvester) dacă $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ este o familie de mulţimi, cu $|I| = q$, măsura mulţimii elementelor care nu aparţin niciuneia dintre mulţimile A_i este

$$M_q^0 = m(T) + \sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|} m\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

g)(formula ciurului) dacă $0 \leq p \leq q$, măsura mulţimii elementelor care aparţin la exact p dintre mulţimile A_i este

$$M_q^p = \sum_{k=p}^{q} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} \sum_{J\subseteq I, |J|=k} m\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

P 17. a) Determinaţi numărul d_n al permutărilor fără puncte fixe din S_n.
b) Calculaţi $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{d_n}{n!}$.
c) Arătaţi că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n \cdot \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-t}}{1-t}$.
d) Arătaţi că $d_{n+1} = (n+1)d_n + (-1)^{n+1}$.
e) Arătaţi că $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

P 18. Fie A şi B mulţimi finite, cu $|A| = m$ şi $|B| = n$. Determinaţi:
a) numărul tuturor funcţiilor $f : A \longrightarrow B$;
b) numărul tuturor funcţiilor injective $f : A \longrightarrow B$;
c) numărul tuturor funcţiilor bijective $f : A \longrightarrow B$;
d) numărul tuturor funcţiilor surjective $f : A \longrightarrow B$.

P 19. Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt numere prime distincte, atunci

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

P 20. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulţime cu n elemente. Arătaţi că numărul secvenţelor ordonate de lungime $2n$ care conţin exact de două ori fiecare element al mulţimii A şi cu proprietatea că nu există două elemente egale pe poziţii consecutive este

$$\frac{1}{2^n}\left((2n)! - \binom{n}{1} \cdot 2 \cdot (2n-1)! + \binom{n}{2} \cdot 2^2 \cdot (2n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 2^n \cdot n!\right).$$

3.3 Combinatorică

P 21. Arătaţi că $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $(\forall)n, k \in \mathbb{N}$.

P 22. Arătaţi că $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $(\forall)n, k \in \mathbb{N}$.

P 23. Fie şirul $(F_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale definit prin $F_n = \sum\limits_{k\geq 0} \binom{n-1-k}{k}$. Arătaţi că $F_1 = F_2 = 1$ şi $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

P 24. Arătaţi că $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$, $(\forall)m, n \in \mathbb{N}$.

P 25. Arătaţi că $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$, $(\forall)x, y \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

P 26. Arătaţi că

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N} \\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}\,.$$

P 27. Cu notaţiile $[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdot \cdots \cdot (x-n+1)$, respectiv $[x]^n = x(x+1)(x+2)\cdot \cdots \cdot (x+n-1)$, arătaţi că pentru orice $x, y \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}$ au loc identităţile

$$[x+y]_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]_{n-k} [y]_k\,,$$

$$[x+y]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [x]^{n-k} [y]^k\,.$$

P 28. Dacă putem să ne deplasăm într-o reţea de puncte laticiale doar cu mutări de forma $(x, y) \to (x+1, y)$ sau $(x, y) \to (x, y+1)$, câte rute distincte există pentru a ajunge din punctul $(0, 0)$ în punctul (m, n)?

P 29. Arătaţi că pentru orice $p, q, m \in \mathbb{N}$ are loc egalitatea

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k} \binom{q}{m-k} = \binom{p+q}{m}.$$

P 30. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi numărul soluţiilor $x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ale ecuaţiei

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m\,,$$

unde
a) $x_i \in \mathbb{N}$, $(\forall)i = \overline{1, n}$.
b) $x_i \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)i = \overline{1, n}$.

P 31. Dintr-un grup de n persoane trebuie alese k, care apoi sunt plasate în jurul unei mese rotunde. În câte moduri se poate realiza acest lucru, dacă oricare două aranjări care se pot obţine una din alta printr-o rotire în jurul mesei sunt considerate identice?